Vežbe iz diferencijalnih jednačina

1 Vežbe 1.

Familije krivih

1.1 Familija krivih je zadata funkcijom $f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$. Naći diferencijalnu jednačinu koja opisuje tu familiju.

Rešenje: Diferenciranjem početne funkcije n puta dobijamo ukupno $n + 1$ jednačinu

$$\begin{aligned}
&f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0\\
&f_1(x, y, y', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0\\
&f_2(x, y, y', y'', c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0\\
&.\\
&.\\
&.\\
&f_n(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0
\end{aligned}$$

iz kojih eliminišemo konstante $c_1, c_2, \ldots, c_n$. □

1.2 Data je familija centralnih kružnica $x^2 + y^2 = c^2$. Naći diferencijalnu jednačinu koja je opisuje.

Rešenje: Odgovarajući sistem je

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 = c^2\\
&2x + 2yy' = 0
\end{aligned}$$

Dakle, odgovarajuća diferencijalna jednačina je $y' = -\dfrac{x}{y}$. □

1.3 Za date familije krivih sastaviti diferencijalne jednačine koje ih opisuju:

a) $y = e^{cx}$;	*d)* $y^2 + cx = x^3$;	*g)* $(x - a)^2 + by^2 = 1$;
b) $y = (x - c)^3$;	*e)* $y = ax^2 + be^x$;	*h)* $y = ax^3 + bx^2 + cx$;
c) $x^2 + cy^2 = 2y$;	*f)* $y = y = cx^3$;	*i)* $x = ay^2 + by + c$.

Polje pravaca, linijski element i izokline

Data je diferencijalna jednačina $y' = f(x, y)$, gde je f definisana na nekoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka je $\langle x_0, y_0\rangle \in D$. Tada je $f(x_0, y_0)$ tangens ugla koji tangenta zaklapa sa x-osom. Uređenu trojku $\langle x_0, y_0, f(x_0, y_0)\rangle$ nazivamo *linijski element* koji se predstavlja na crtežu kao mali deo tangente. Skup svih linijskih elemenata zovemo *polje pravaca.* Krivu na kojoj svi linijski elementi imaju jednaki nagib zovemo *izoklina.* Najbitnija je izoklina kod koje je nagib sa koeficijentom pravca 0. U tim tačkama rešenje stagnira.

1.4 Ispitati polja pravaca i nacrtati nekoliko integralnih krivih za sledeće diferencijalne jednačine:

$$a)\; y' = 2x; \quad b)\; y' = x^2 + y^2 - 1; \quad c)\; \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

1.5 Data je diferencijalna jednačina $y' + p(x)y = q(x)$, gde su $p, q \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}$.

a) Pokazati da polje pravaca za tačke na pravi $x = x_0$ obrazuje pramen pravih i odrediti njegov nosač.

b) Za $p(x) = \frac{1}{x}$ i $q(x) = \sin x$ odrediti geometrijsko mesto nosača pramena.

c) Kada će se geometrijsko mesto nosača pramena nalaziti na y-osi?

1.6 Data je diferencijalna jednačina $y' = f(x, y)$. Formirati diferencijalnu jednačinu $\tilde{y}' = g(x, \tilde{y})$ tako da se polja pravaca ove dve diferencijalne jednačine seku pod uglom $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Rešenje: Neka linijski element prve jednačine u proizvoljnoj tački sa x-osom zaklapa ugao α. Tada linijski element druge jednačine zaklapa sa x-osom ugao $\alpha \pm \beta$ (u zavisnosti sa koje se strane nalazi). Kako je za $\beta \neq \frac{\pi}{2}$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

dobijamo

$$\tilde{y}' = \frac{f(x,\tilde{y}) \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp f(x,\tilde{y}) \operatorname{tg}\beta}, \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}$$

Puštnjem da β teži $\frac{\pi}{2}$ dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$\tilde{y}' = -\frac{1}{f(x,\tilde{y})}, \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

□

1.7 Sastaviti diferencijalne jednačine čije rešenje seče datu familiju krivih pod zadatim uglom ϕ:

a) $y = cx^4 \quad \phi = 90°$;	*e)* $x^2 + y^2 = a^2 \quad \phi = 45°$;
b) $x^2 = y + cx \quad \phi = 90°$;	*f)* $3x^2 + y^2 = c \quad \phi = 30°$;
c) $y^2 = x + c \quad \phi = 90°$;	*g)* $y^2 = 2px \quad \phi = 60°$;
d) $x^2 + y^2 = a^2 \quad \phi = 90°$;	*h)* $y = x\ln x + cx \quad \phi = \operatorname{arctg} 2$.

Početni problem

Početni problem n-tog reda se sastoji od diferencijalne jednačine

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

i početnih uslova

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad y''(x_0) = y_2, \quad \ldots \quad , y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Početni problem prvog reda je

$$y' = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0.$$

Funkcija $y = y(x)$ je rešenje početnog problema n-tog reda ako je
1° n puta diferencijabilna,
2° zadovoljava početne uslove,
3° zadovoljava diferencijalnu jednačinu.

1.8 Neka je $f \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Ako su y_1 i y_2 dva rešenja početnog problema

$$y' = f(x,y) \quad y(x_0) = y_0 \quad \langle x_0, y_0 \rangle \in D$$

na nekom intervalu I, pokazati da su

$$y_3(x) = \max\{y_1(x), y_2(x)\} \quad \text{i} \quad y_4(x) = \min\{y_1(x), y_2(x)\}$$

takođe rešenja datog početnog problema na istom intervalu I.

2 Vežbe 2.

Elementarne metode rešavanja diferencijalnih jednačina prvog reda

1° *Jednačine koje razdvajaju promenljive*

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0 \Rightarrow \int P(x)dx = -\int Q(y)dy;$$

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

Ako postoji i početni uslov $y(x_0) = y_0$, onda je

$$\int_{y_0}^{y} g(s)ds = \int_{x_0}^{x} f(t)dt.$$

2.1 Rešiti diferencijalnu jednačinu $\sin x\,dx + \cos y\,dy = 0$

Rešenje:

$$\sin x\,dx + \cos y\,dy = 0$$
$$\int \sin x\,dx = -\int \cos y\,dy$$
$$-\cos x = -\sin y + c$$

□

2° *Jednačine oblika* $y' = f(ax + by + c)$.
Rešavaju se smenom zavisne promenljive $u = ax + by + c$, gde je $u = u(x)$. Tada je $u' = a + by'$.

2.2 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' = 2\sqrt{y-x} + 1$, $y - x \geq 0$.

Rešenje: Smena je $u = y - x$. Tada je $y = u + x$, pa je $y' = u' + 1$. Dobija se diferencijalna jednačina

$$u' + 1 = 2\sqrt{u} + 1$$
$$\frac{du}{2\sqrt{u}} = dx$$
$$\sqrt{u} = x + c$$
$$y - x = (x + c)^2$$
$$y = (x + c)^2 + x$$

□

3° *Homogene diferencijalne jednačine prvog reda.* Oblika su $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.
Rešavaju se smenom $u = \frac{y}{x}$. Tada je $y = ux$, pa je $y' = u'x + u$. Konačno, diferencijalna jednačina je

$$u'x + u = f(u)$$
$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

2.3 Rešiti jednačinu $y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.

2.4 Rešiti jednačinu $y' = \frac{2x - 5y}{3y + x}$.

Rešenje: Data jednačina se može zapisati u obliku

$$y' = \frac{2 - 5\frac{y}{x}}{3\frac{y}{x} + 1}$$

što je homogena jednačina. □

4° *Jednačine oblika* $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + p}\right)$

Treba da pokušamo da svedemo na jednačine u kojima se ne pojavljuju slobodni članovi c i p. Uvodimo smenu $u = y + \alpha$, $t = x + \beta$ Tada je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(u - \alpha)}{dx} = \frac{d(u - \alpha)}{dt}\frac{dt}{dx} = u',$$

pa diferencijalna jednačina je oblika

$$y' = f\left(\frac{at + bu + c - a\alpha - b\beta}{mt + nu + p - m\alpha - n\beta}\right).$$

α i β ćemo odrediti iz sistema

$$a\alpha + b\beta = c$$
$$m\alpha + n\beta = p$$

Ovaj sistem ima rešenje ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} \neq 0$, pa se početna diferencijalna jednačina svodi na homogenu oblika

$$y' = f\left(\frac{at + bu}{mt + nu}\right).$$

Ako je $\begin{vmatrix} a & b \\ m & n \end{vmatrix} = 0$, tada je $a = km$, $b = kn$, pa se početna diferencijalna jednačina može zapisati kao

$$y' = f\left(\frac{kmx + kny + c}{mx + ny + p}\right) = f\left(\frac{k(mx + ny) + c}{mx + ny + p}\right) = G(mx + ny),$$

što je diferencijalna jednačina tipa obrađenog pod 2°.

2.5 Rešiti DJ $y' = \frac{3x-y+1}{2x+y+4}$

Rešenje: Dobija se da je $\alpha = 1$, a $\beta = 2$. □

5° *Jednačine oblika* $y' = \dfrac{y}{x} + p(x)f(\dfrac{y}{x})$.

Smena je $u = \dfrac{y}{x}$, pa je (kao kod homogene) $y' = u'x + u$. Dobijamo

$$u'x + u = u + p(x)f(u)$$

$$\frac{du}{f(u)} = \frac{dxp(x)}{x}$$

što je jednačina koja razdvaja promenljive.

6° *Linearna diferencijalna jednačina prvog reda*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Uvodimo smenu $y(x) = u(x) \cdot v(x)$. Funkciju v ćemo izabrati, dok će onda funkcija u biti nametnuta. Tada je $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$$
$$u'v + u\underbrace{(v' + p(x))}_{=0} = q(x)$$

Tražimo bilo koju funkciju v da je $v' + p(x)v = 0$. Tada je $\dfrac{dv}{v} = -p(x)\,dx$, pa je $\ln v = -\displaystyle\int p(x)\,dx$, to jest $v = -e^{\int p(x)dx}$. Dobijamo diferencijalnu jednačinu oblika $-u'e^{\int p(x)dx} = q(x)$, što je jednačina koja razdvaja promenljive.

2.6 Rešiti jednačinu $y' + xy - x^3 = 0$.

2.7 Rešiti jednačinu $y' = \frac{1}{2xy+y^3}$.

Rešenje: Kako je

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{dx}{dy} = x'$$

imamo da je $x' = 2xy + y^3$, što je linearna jednačina u kojoj je y nezavisna, a x zavisna promenljiva. □

7° *Bernulijeva jednačina*

$$y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, 1.$$

Zapisaćemo je drugačije

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x).$$

Smena je $z = y^{1-\alpha}$, pa je $z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha}$. Dobijamo

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x),$$

što je linearna jednačina.

2.8 Rešiti jednačinu: $y' + 2y = 2\sqrt{y}$.

8° *Rikatijeva jednačina*

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

Da bi je rešili treba da znamo partikularno rešenje $y_p(x)$. Tada je smena $y = z + y_p$, pa je $y' = z' + y_p'$. Dobijamo

$$z' + y_p' + p(x)z + p(x)y_p + q(x)z^2 + 2q(x)zy_p + q(x)y_p^2 = r(x)$$

Kako je y_p rešenje, važi

$$y_p' + p(x)y_p + q(x)y_p^2 = r(x),$$

pa se dobija

$$z' + p(x)z + q(x)z^2 + 2q(x)zy_p = 0$$

$$z' + z(p(x) + 2q(x)y_p) + q(x)z^2 = 0$$

što je Bernulijeva za $\alpha = 2$.

2.9 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y' + y + y^2 = 2$ ako je partikularno rešenje $y_p(x) = 1$.

2.10 Rešiti Rikatijevu diferencijalnu jednačinu

$$y' = y^2e^x + 2y(e^{4x} - 1) + e^{7x} - 5e^{3x}$$

znajući da je partikularno rešenje oblika $y_p = ae^{bx}$.

3 Vežbe 3.

9° *Jednačina totalnog diferencijala.* Oblika su

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

pod uslovom da je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

To znači da postoji $F(x,y)$ da je $\frac{\partial F}{\partial x} = M$ i $\frac{\partial F}{\partial y} = N$. Uslov sledi iz jednakosti

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}.$$

Rešenje jednačine je $F(x,y) = c$. Funkciju F dobijamo

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \phi(y) = m(x,y) + \phi(y)$$

Tada je

$$N(x,y) = \frac{\partial m(x,y)}{\partial y} + \phi'(y)$$

Odakle izrazimo $\phi(x)$.

Analogno, F možemo dobiti integraljenjem funkcije N, tj.

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + \phi(y) = n(x,y) + \psi(x).$$

3.1 Rešiti diferencijalnu jednačinu $(y-x)dx + xdy = 0$.

Rešenje: Kako je

$$1 = \frac{\partial(y-x)}{\partial y} = \frac{\partial(x)}{\partial x} = 1$$

to je jednačina totalnog diferencijala. Stoga je

$$F(x,y) = \int xdy + \phi(x) = xy + \phi(x).$$

Dakle

$$y - x = \frac{\partial}{\partial x}(xy + \phi(x)) = y + \phi'(x),$$

pa je

$$\phi'(x) = -x \Rightarrow \phi(x) = -\frac{x^2}{2} + c$$

Rešenje je $xy - \frac{x^2}{2} + c = 0$. □

10° *Jednačine koje dopuštaju integracioni množitelj.* One su isto oblika

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

ali kod njih immao da je

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Pretpostavimo da postoji neka funkcija f da je

$$\frac{\partial Mf}{\partial y} = \frac{\partial Nf}{\partial x},$$

to jest da je diferencijalna jednačina totalnog diferencijala originalno izgledala

$$M(x,y)fdx + N(x,y)fdy = 0.$$

Problem je naći funkciju f. U zadacima se daje oblik funkcije, tj. posmatra se f kao funkcija jedne promenljive koja može biti npr. x, y, $x-y$, x^2+y^2 i sl.

3.2 Rešiti diferencijalnu jednačinu $(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2+y^2)dy = 0$ znajući da dopušta integracioni množitelj funkciju $f(x)$.

Rešenje: Neka je

$$M(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3} \quad N(x,y) = x^2 + y^2.$$

Kako je

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2 \neq 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ovo nije jednačina totalnog diferencijala. Neka je

$$M_1(x,y) = (2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})f(x) \quad N_1(x,y) = (x^2+y^2)f(x).$$

Rešavamo

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = \frac{\partial N_1}{\partial x}.$$

$$(2x + x^2 + y^2)f(x) = 2xf(x) + (x^2+y^2)f'(x)$$

$$f(x) = f'(x)$$

$$f(x) = e^x$$

Jednačina totalnog diferencijala je

$$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})e^x dx + (x^2 + y^2)e^x dy = 0.$$

Sada je

$$F(x,y) = \int (x^2 + y^2)e^x dy = x^2e^xy + e^x\frac{y^3}{3} + \phi(x)$$

pa je

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2e^xy + e^x\frac{y^3}{3} + \phi(x)) = 2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x$$

$$2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x + \phi'(x) = 2xye^x + x^2ye^x + \frac{y^3}{3}e^x$$

$$\phi'(x) = 0$$

$$\phi(x) = 0$$

Rešenje je:

$$x^2e^xy + e^x\frac{y^3}{3} = c.$$

□

Peanova teorema

Teorema (Peano) Neka je $y' = f(x,y)$ $y(x_0) = y_0$ početni problem i neka je funkcija f neprekidna na skupu D, gde je

$$D = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}.$$

Tada postoji rešenje početnog problema na intervalu $|x - x_0| \leq h$, gde je

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \text{ a } M = \max_{\langle x,y\rangle\in D} |f(x,y)|.$$

3.3 Naći najveći interval $[x_0, x_0+h]$ na kojem postoji rešenje početnog problema $y' = x^2+y^2$, $y(x_0) = y_0$, gde je

a) $x_0 = y_0 = 0$;
b) $x_0 = y_0 = 1$.

Teorema Pikar-Lindelöf

Teorema (Pikar-Lindelöf) Neka je $y' = f(x,y)$ $y(x_0) = y_0$ početni problem i neka je funkcija f neprekidna na skupu D, gde je

$$D = \{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

i važi

$$(\exists L > 0)\,(\forall \langle x, y_1\rangle, \langle x, y_2\rangle \in D)\,|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema na intervalu $|x - x_0| \leq h$, gde je

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}, \text{ a } M = \max_{\langle x,y\rangle\in D} |f(x,y)|,$$

do kog se dolazi preko niza sukcesivnih aproksimacija

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Takođe važi ocena greške

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{M}{L}\frac{(Lh)^{n+1}}{(n+1)!}e^{Lh}.$$

Teorema Ako je funkcija f neprekidno diferencijabilna po y, tada je i Lipšicove klase po drugoj promenljivi y i

$$L = \max_{\langle x,y\rangle\in D}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|.$$

3.4 Formirati prva tri člana niza sukcesivnih aproksimacija rešenja početnog problema $y' = y^2 - x^2 + 1$ $y(0) = 0$ i oceniti grešku.

3.5 Koristeći niz sukcesivnih aproksimacija naći rešenje početnog problema $y' = x + y - 1$, $y(x_0) = y_0$.

3.6 Dat je početni problem $y' = \sin(x^2 + y)$ $y(0) = 0$. Koji se član niza sukcesivnih aproksimacija od rešenja razlikuje manje od unapred datog broja d ako je $D = \{\langle x, y\rangle : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

3.7 Primerom pokazati da neprekidnost funkcije $f(x, y)$ nije dovoljan uslov za jedinstvenost rešenja početnog problema.

Rešenje:

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad y(0) = 0.$$

Tada su rešenja

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < c, c > 0 \\ (x-c)^3, & x \geq c \end{cases}$$

□

3.8 Pokazati primerom da uslovi teoreme Pikar-Lindelöf dovoljni, ali ne i potrebni za postojanje jedinstvenosti rešenja.

Rešenje: Posmatrajmo diferencijlnu jednačinu

$$y' = f(x, y) = \begin{cases} y \ln y, & 0 < y < 1 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

i neka je $y(x_0) = y_0 < 1$. Kako je $\lim_{y\to 0} y \ln y = 0$, funkcija f je neprekidna. Pokažimo da nije Lipšicova. Pretpostavimo da postoji $L > 0$ takvo da za sve uređene parove $\langle x, y_1\rangle$ i $\langle x, y_2\rangle$ važi

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Posmatrajmo $\langle 1, 0\rangle$ i $\langle 1, y_2\rangle$. Tada je

$$|f(1, 0) - f(1, y_2)| = |-y_2 \ln y_2| \leq L|y_2|.$$

Dakle $|\ln y_2|$ je ograničeno sa L. Kontradikcija.

Međutim, postoji jedinstveno rešenje:

$$y(x) = \begin{cases} e^{e^{x-x_0} \ln y_0}, & 0 < y_0 < 1 \\ y_0, & y_0 \leq 0 \end{cases}$$

Asimptotsko ponašanje rešenja

3.9 Pokazati

a) da postoji jedinstveno rešenje početnog problema $y' = y^2$, $y(x_0) = y_0$,

b) da za $y_0 \neq 0$ svako rešenje ima vertikalnu asimptotu,

c) analizom polja pravaca da za $y_0 < 0$ rešenje kad x teži beskonačnosti ima horizonatalnu asimptotu.

Teorema Neka su data dva početna problema

$$y' = f(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$
$$y' = g(x, y) \quad y(x_0) = y_0$$

i neka su f i g neprekidne na nekom skupu D koji u svojoj unutrašnjosti sadrži tačku $\langle x_0, y_0\rangle$. Neka su y_1 i y_2 rešenja početnih problema, respektivno. Ako je $f(x, y) \geq g(x, y)$ za sve $\langle x, y\rangle \in D$ onda je $y_1(x) \geq y_2(x)$ za $x > x_0$, a $y_1(x) \leq y_2(x)$ za $x < x_0$.

3.10 Pokazati da rešenje početnog problema $y' = x^2 + y^2$ $y(0) = 1$ ima vertikalnu asimptotu.

3.11 Data je diferencijalna jednačina $y' = x^2 - y^2$ $y(x_0) = y_0$

a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.

b) Naći $\langle x_0, y_0\rangle$ takvo da se rešenje može produžiti neograničeno udesno.

c) Naći $\langle x_0, y_0\rangle$ takvo da rešenje ima verikalnu asimptotu.

4 Vežbe 4.

Asimptotsko ponašanje rešenja II

4.1 Data je diferencijalna jednačina $y' = y^3 - y^2x - 2y^2 + yx + y \;\; y(x_0) = y_0$.
a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija, uz početni uslov $y(1) = 1$, i oceniti grešku.
b) Pokazati da ako $y_0 \in (0, 1)$, da tada i rešenje $y(x) \in (0, 1)$.
c) Naći x_0 i y_0 takve da rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.

4.2 Data je diferencijlana jednačina $xyy' = y - x \quad y(x_0) = y_0$.
a) Dokazati da se za $x_0 = 2$ i $y_0 = 1$ rešenje ne može produžiti na desno do $+\infty$, niti da desno od x_0 ima vertikalnu asimptotu.
b) Dokazati da za $y_0 < x_0 < 0$ rešenje ima vertikalnu asimptotu.

Diferencijalne jednačine prvog reda - razni zadaci

4.3 Rešiti jednačinu $xydy = (y^2 + x)dx$.

Rešenje: Ovo je Bernulijeva jednačina. □

4.4 Rešiti jednačinu $(2 - 9xy^2)x = (6x^3 - 4y^2)yy'$.

Rešenje: Ovo je jednačina totalnog diferencijala. □

4.5 Rešiti jednačinu $(2x^2y \ln y - x)y' = y$.

Rešenje: Ovo je Bernulijeva jednačina kada se x posmatra kao funkcija od y ($x = x(y)$) □

4.6 Smenom $y = z^2$ svesti jednačinu $9yy' - 18xy + 4x^3 = 0$ na homogenu i rešiti je.

4.7 Smenom $x = t^\alpha$, $y = z^\beta$diferencijalnu jednačinu $(xy + y^3)dx - 2x^2dy = 0$ svesti na homogenu i rešiti je

Rešenje:

$$x = t^\alpha \Rightarrow dx = \alpha t^{\alpha-1}dt$$
$$y = z^\beta \Rightarrow dy = \beta z^{\beta-1}dz,$$

pa se jednačina svodi na

$$\alpha(t^\alpha z^\beta + z^{3\beta})t^{\alpha-1}dt - 2t^{2\alpha}\beta t^{\beta-1}dz$$
$$z' = \frac{\alpha t^{2\alpha-1}z^\beta + \alpha t^{\alpha-1}z^{3\beta}}{2\beta t^{2\alpha}z^{\beta-1}}$$
$$z' = \frac{\alpha}{2\beta}\frac{z}{t} + \frac{\alpha}{2\beta}\frac{z^{2\beta+1}}{t^{\alpha+1}}$$

Za $2\beta + 1 = \alpha + 1$ dobijamo homogenu jednačinu. Neka je $\alpha = 2$, a $\beta = 1$. □

4.8 Rešiti jednačinu $(x^2y - 1)dy - (xy^2 - 1)dx = 0$ znajući da ima integracioni množitelj oblika $f(x - y)$.

4.9 Data je diferencijalna jednačina $(x^3 - 1)y' = 2xy^2 - x^2y - 1$. Odrediti partikularno rešenje jednačine u obliku polinoma, a zatim naći rešenje koje zadovoljava uslov $y(0) = -\frac{1}{4}$.

4.10 Dat je početni problem $xy' = y + 3x^2(x^2 + y^2)$, $y(x_0) = y_0$.
a) Da li postoji jedinstveno rešenje?
b) Za $x_0 = y_0 = 1$ naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija
c) Naći integracioni množitelj oblika $f(x^2 + y^2)$ i rešiti jednačinu.

4.11 Naći potreban i dovoljan uslov da jednačina $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ ima integracioni množitelj oblika $f(y^2 - x)$.

4.12 Naći rešenje jednačine $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$ koje ostaje ograničeno kada x teži $\frac{\pi}{2}$.

5 Vežbe 5.

Diferencijalne jednačine prvog reda - geometrijska primena

5.1 Naći familiju krivih kod kojih je tačka preseka bilo koje tangente sa apscisom jednako udaljena od tačke dodira i koordinatnog početka.

5.2 Naći familiju krivih za koje je površina trougla ograničenog tangentom, x-osom i duži koja spaja koordinatni početak sa tačkom dodira konstanta i iznosi a^2.

5.3 Odrediti krive sa osobinom da je deo tangente u proizvoljnoj tački krive između x-ose i prave $y = ax + b$ i dodirnom tačkom krive podeljen na dva jednaka dela.

Jednačine koje dopuštaju snižavanje reda

1° *Jednačine koje "nemaju y"*

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad k \geq 1$$

Smena je $y^{(k)} = z$. Tada je $y^{(k+1)} = \dfrac{dy^{(k)}}{dx} = \dfrac{dz}{dx} = z'$ i tako dalje, pa je $y^{(n)} = z^{(n-k)}$.

5.4 Rešiti diferencijalnu jednačinu $x^2 y'' = (y')^2$.

2° *Jednačine koje "nemaju x"*

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Smena $y' = p(y)$, a y postaje nezavisna promenljiva. Tada je

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d(pp')}{dx} = \frac{d(pp')}{dy}\frac{dy}{dx} = (pp'' + p'^2)p.$$

5.5 Rešiti diferencijalnu jednačinu $2yy'' = (y')^2 + 1$.

3° *Jednačine koje su izvod neke jednačine nižeg reda*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

i postoji funkcija $G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ da je

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = (G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}))'.$$

Tada je

$$G(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = c_1.$$

5.6 Rešiti diferencijalnu jednačinu $yy'' = (y')^2$ znajući da je izvod diferencijalne jednačine nižeg reda.

4° *Homogene po y.*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Ako umesto $y^{(k)}$ stavimo $l \cdot y^{(k)}$ za $k = 0, 1, 2, \dots n$ i dobijemo opet polaznu jednačinu, onda je to homogena po y.

Smena: $y' = yz$, gde je $z = z(x)$. Tada je $y'' = (yz)' = y'z + yz' = yz^2 + yz' = y(z^2 + z')$.

5.7 Rešiti diferencijalnu jednačinu $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$.

5° *Jednačine koje se svode na jednačine koje "nemaju x" (uopštene homogene)*

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Ako zamenimo x sa $l \cdot x$, y sa $l^m \cdot y$, y' sa $l^{m-1} \cdot y'$, ..., $y(n)$ sa $l^{m-n} \cdot y(n)$ i jednačina za neko m ostane nepromenjena, onda uvrštavamo smenu

$$x = e^t, \quad y = e^{mt}z, \ (z = z(t))$$

Tada je

$$dx = e^t dt$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(e^{mt}z)}{dt}\frac{dt}{dx} = (me^{mt}z + e^{mt}z')e^{-t}$$

i tako dalje redom odredimo sve izvode y koji se pojavljuju u polaznoj jednačini

5.8 Sniziti red date diferencijalne jednačine: $2x^4y'' - 3y^2 = x^4$.

5.9 Rešiti diferencijalnu jednačinu: $yy'y''' + 2y'^2y'' = 3yy''^2$.

5.10 Rešiti diferencijalnu jednačinu $\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$.

5.11 Rešiti diferencijalnu jednačinu $5y'''^2 - 3y''y^{iv} = 0$ znajući da je potpun izvod diferencijalne jednačine nižeg reda.

5.12 Rešiti diferencijalnu jednačinu $xy'' - y' = x^2yy'$ znajući da je izvod diferencijalne jednačine nižeg reda.

5.13 Data je diferencijalna jednačina $yy''' + 3y'y'' = 0$. Sniziti red za jedan ako se zna da se može predstaviti kao izvod neke diferencijalne jednačine, a zatim je rešiti.

6 Vežbe 6.

Implicitne jednačine - opšti oblik

Oblika su $F(x, y, y') = 0$. Ako možemo da nekako izrazimo y', onda su to ekspilicitne. Inače, znamo da ih, u opštem slučaju, rešimo ako je moguće izraziti x ili y, tj.

$$x = \phi(y, y') \text{ ili } y = \psi(x, y').$$

Tada uvodimo parametar

$$p = \frac{dy}{dx} = y'$$

Rešavamo:

$$x = \phi(y, p) \text{ ili } y = \psi(x, p)$$

$$dx = \phi_y dy + \phi_p dp \text{ ili } dy = \psi_x dx + \psi_p dp$$

$$\frac{1}{p}dy = \phi_y dy + \phi_p dp \text{ ili } p\,dx = \psi_x dx + \psi_p dp$$

$$(\frac{1}{p} - \phi_y)dy = \phi_p dp \text{ ili } (p - \psi_x)dx + \psi_p dp$$

Sada posmatramo y kao funkciju od p, odnosno x kao funkciju od p i rešimo (ako možemo) dobijenu eksplicitnu jednačinu.

Dobijeno rešenje je u parametarskom obliku.

Na kraju moramo proveriti da li su funkcije koje su rešenja diferencijalne jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

rešenja i početne jednačine. Takva rešenja nazivamo singularna.

6.1 Naći sva rešenje diferencijalne jednačine $y = x + y' - \ln y'$.

Rešenje: U ovoj jednačini y je već izraženo. Uvodimo parametar $p = y' = \frac{dy}{dx}$

$$y = x + p - \ln p$$

$$dy = dx + (1 - \frac{1}{p})dp$$

$$pdx = dx + (1 - \frac{1}{p})dp$$

$$(p-1)dx = \frac{p-1}{p}dp \quad / \div (p-1)\, p \neq 1$$

$$dx = \frac{dp}{p}$$

$$x = \ln p + c$$

Tada je

$$y = \ln p + c + p - \ln p = p + c.$$

Dakle rešenje je

$$x = \ln p + c \quad y = p + c$$

Oslobađanjem od parametra p dobijamo da je $y = e^{x-c} + c$.

Tokom rešavanja delili smo sa $p - 1$. Preveravamo da li je to možda rešenje, tj. da li je rešenje diferencijalne jednačine $y' = 1$ rešenje početne. Rešenje diferencijalne jednačine je $y = x + c$. Uvrštavanjem u polaznu dobijamo da je $x + c = x + 1 - 0$, tj. da je još jedno rešenje $y = x + 1$.

Ostaje da se proveri da li je rešenje diferencialne jednačine

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

rešenje polazne. Tako imamo

$$-1 + \frac{1}{y'} = 0, \text{ tj. } y' = 1,$$

što smo već videli da je rešenje $y = x + 1$.

Dakle sva rešenja jednačine su

$$y = e^{x-c} + c \quad \text{ i } \quad y = x + 1.$$

$\square$

6.2 Naći sva rešenja diferencijalne jednačine $y'^3 + y^2 = xyy'$.

6.3 Naći sva rešenja diferencijalne jednačine $y' \sin y' - x = 0$.

Specijalni oblici implicitnih jednačina

Kleroova diferencijalna jednačina

Opšti oblik Kleroove jednačine je

$$y = xy' + f(y').$$

Diferenciranjem dobijamo

$$y' = y' + xy'' + f'(y')y''$$

$$0 = y''(x + f'(y'))$$

Dakle rešenja su

1° $y'' = 0$, pa je $y' = c$. Odatle je rešenje $y = xc + f(c)$.

2° $x + f'(y') = 0$. Odatle izrazimo $y' = g(x)$, pa je rešenje $y = xg(x) + f(g(x))$.

Prave $y = xc + f(c)$ su tangente na $y = xg(x) + f(g(x))$.

6.4 Rešiti diferencijalnu jednačinu $y = xy' - y'^2$.

Rešenje: Diferenciranjem dobijamo

$$y' = y' + xy'' - 2y'y''$$
$$0 = y''(x - 2y')$$

1° $y'' = 0$, pa je $y' = c$. Rešenje je $y = cx - c^2$.

2° $x - 2y' = 0$, pa je $y' = \frac{x}{2}$. Dakle, rešenje je $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}$, tj. $y = \frac{x^2}{4}$. □

Proizvod eksplicitnih diferencijalnih jednačina

$$F(x, y, y') = \prod_{i=1}^{n}(y' - f_i(x, y)) = 0 \quad y(x_0) = y_0$$

Tada rešavamo diferencijalne jednačine $y' = f_i(x, y)$ i neka su njihova rešenja $g_i(x, y, c_i) = 0$, gde konstate c_i određujemo iz početnih uslova.

Opšte rešenje je oblika

$$\prod_{i=1}^{n} g_i(x, y, c_i) = 0$$

6.5 Ispitati kada postoji jedinstveno rešenje problema $(y')^3 - 4x^2y' = 0$, $y(x_0) = y_0$.

Rešenje: Jednačina se može zapisati u obliku

$$y'(y' - 2x)(y' + 2x) = 0$$

Rešenja diferencijalnih jednačina su

1° $y' = 0$, pa je $y = c_1$. Iz početnog uslova dobijamo da je $y - y_0 = 0$.

2° $y' = 2x$, pa je $y = x^2 + c_2$. Iz početnog uslova dobijamo da je $y - x^2 - y_0 + x_0^2 = 0$.

3° $y' = -2x$, pa je $y = -x^2 + c_3$. Iz početnog uslova dobijamo da je $y + x^2 - y_0 - x_0^2 = 0$.

Opšte rešenje je $(y - y_0)(y - x^2 - y_0 + x_0^2)(y + x^2 - y_0 - x_0^2) = 0$

Ako je $x_0 = 0$, kroz tačku $\langle 0, y_0 \rangle$ prolaze sva tri rešenja i imaju isti koeficijent pravca, pa nemamo jedinstveno rešenje. Ako je $x_0 \neq 0$, kroz tačku $\langle x_0, y_0 \rangle$ prolaze sva tri rešenja, ali sa različitim koeficijentom pravca, pa je rešenje jedinstveno. □

Langrageo-ova diferencijalna jednačina

Ona je oblika

$$y = xf(y') + g(y').$$

Uvodimo parametar $y' = p$ i nakon diferenciranja dobijamo

$$y = xf(p) + g(p)$$

$$dy = f(p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp$$
$$pdx = f(p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp$$
$$(p - f(p))dx = (xf'(p) + g'(p))dp$$
$$\frac{dx}{dp} = \frac{xf'(p) + g'(p)}{p - f(p)}$$
$$\frac{dx}{dp} - x\frac{f'(p)}{p - f(p)} = \frac{g'(p)}{p - f(p)},$$

a to je linerana jednačina ako posmatramo x kao funkciju od p.

6.6 Naći sva rešenja diferencijalne jednačine $y = xy'^2 + \ln y'$.

7 Vežbe 7.

Sistemi diferencijalnih jednačina

Posmatrajmo sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1' & = & f_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) & \quad & x_1(t_0) & = & x_1^0 \\ x_2' & = & f_2(t, x_1, x_2, \dots x_n) & & x_2(t_0) & = & x_2^0 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ x_n' & = & f_n(t, x_1, x_2, \dots x_n) & & x_n(t_0) & = & x_n^0 \end{array}$$

Ovakav sistem nazivamo početnim problemom. Ako označimo

$$\mathbf{x} = \langle x_1, x_2, \dots x_n \rangle,$$

onda je

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = f_i(t, \mathbf{x}),$$

a analogno

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \langle f_1(t, \mathbf{x}), f_2(t, \mathbf{x}), \dots, f_n(t, \mathbf{x}) \rangle$$

Tada početni problem dobija oblik

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

Ovako zapisan, podseća na običan početni problem, pa tako za sistem važe teoreme Peano i Pikar-Lindeöf.

Teorema (Peano) Neka je $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ neprekidna na zatvorenom skupu G, gde je

$$G = \{\langle t, \mathbf{x} \rangle : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \leq b\}.$$

Tada početni problem za sistem ima rešenje definisano na intervalu $[t_0 - h, t_0 + h]$, gde je

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\} \quad M = \sup_G \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$$

Teorema (Pikar-Lindelöf) Neka je $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ neprekidna na zatvorenom skupu G, gde je

$$G = \{\langle t, \mathbf{x} \rangle : |t - t_0| \leq a, \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| \leq b\}$$

i neka zadovoljava Lipšicov uslov po $\mathbf{x}$, tj. postoji $L > 0$ takvo da je u G

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}^1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}^2)\| \leq L\|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\|.$$

Tada početni problem za sistem ima jedinstveno rešenje definisano na intervalu $[t_0 - h, t_0 + h]$, gde je

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\} \quad M = \sup_G \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|$$

do kog se dolazi nizom sukcesivnih aproksimacija

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_{k-1}(s)) ds,$$

gde je ocena rastojanja k-tog člana od rešenja (greška)

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)\| \leq \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!} e^{Lh}.$$

Napomena: Funkcija $\mathbf{f}$ je Lipšicova po $\mathbf{x}$ ako je $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ neprekidno, tj. ako su funkcije $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ neprekidne za sve $i, j = 1, 2, \dots, n$.

7.1 Ispitati egzistenciju i jedinstvenost rešenja sistema

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{x} - \ln y \\ x' &= ty - x \operatorname{ctg} t \end{aligned}$$

Rešenje: Obeležićemo

$$\begin{aligned} f_1(t,x,y) &= \sqrt{x} - \ln y \\ f_2(t,x,y) &= ty - x \operatorname{ctg} t \end{aligned}$$

Rešenje postoji na skupu gde su f_1 i f_2 neprekidne, tj. na

$$D_1 = \{\langle t,x,y\rangle \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y > 0, t \neq k\pi \; k \in \mathbb{Z}\}$$

Jedinstveno rešenje postoje tamo gde su i parcijalni izvodi funkcija f_1 i f_2 neprekidni po x i po y. Kako je

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{1}{y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} = -\operatorname{ctg} t & \frac{\partial f_2}{\partial y} = t \end{array}$$

jedinstvenost imamo na skupu

$$\begin{aligned} D_2 &= D_1 \cap \{\langle t,x,y\rangle \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y \neq 0, t \neq k\pi \; k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\langle t,x,y\rangle \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, t \neq k\pi \; k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

□

7.2 Ispitati egzistenciju i jedinstvenost rešenja sistema

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + \ln ty \\ y' &= \frac{1}{x}\sqrt[3]{y^2 - t^2} \end{aligned}$$

7.3 a) Naći interval u kojem postoji jedinstveno rešenje početnog problema

$$x' = y^2 + t \quad y' = x^2 + y^2 \qquad x(0) = 1 \quad y(0) = 2$$

b) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.

Rešenje: Označimo sa

$$f_1(t,x,y) = y^2 + t \quad f_2(t,x,y) = x^2 + y^2$$

Kako su obe funkcije neprekidne, imamo da postoji rešenje u svakoj tački. Pošto je

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2y$$

Posmatramo rešenje na skupu D

$$D = \{\langle t,x,y\rangle : |t-0| \leq a, \|\langle x,y\rangle - \langle 1,2\rangle\| \leq b\}$$

Kako je $h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, gde je $M = \sup_D \|\langle f_1(t,x,y), f_2\rangle(t,x,y)\|$. Potrebno je samo izračunati M. Za izračunavanje ćemo koristiti vektorsku normu ∞, što je u stvari maksimum.

$$M = \max_D \max\{y^2 + t, x^2 + y^2\} = \max\{(b+2)^2 + a, (b+1)^2 + (b+2)^2\}$$

Stoga je

$$h = \min\{a, \frac{b}{(b+2)^2 + \max\{a, (b+1)^2\}}\}.$$

Za početnu aproksimaciju uzimamo funkcije

$$x_0(t) = 1, \quad y_0(t) = 2$$

Sada je

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x_0(s), y_0(s))ds = 1 + \int_0^t (2^2 + s)ds = 1 + 4t + \frac{t^2}{2} \\
y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f_2(s, x_0(s), y_0(s))ds = 1 + \int_0^t (1^2 + 2^2)ds = 2 + 5t \\
x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f_1(s, x_1(s), y_1(s))ds = 1 + \int_0^t ((2+5s)^2 + s)ds = 1 + 4t + 5t^2 + \frac{25t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \\
y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f_2(s, x_1(s), y_1(s))ds = 1 + \int_0^t ((1 + 4s + \frac{s^2}{2})^2 + (2+5s)^2)ds
\end{aligned}$$

7.4 Diferencijalnu jednačinu n-tog reda

$$y^(n) = F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

napisati u obliku sistema n diferencijalnih jednačina prvog reda, zatim primeniti na

$$y^{iv} + 5y'(y'')^2 - 2t\sin y = 0$$

Rešenje: Uvešćemo nove zavisne promenljive x_i. Tada vršimo zamenu $y = x_1$ i dobijamo

$$\begin{array}{lcl}
y' = x_1' & \text{pa uvodimo} & x_1' = x_2 \\
y'' = x_2' & \text{pa uvodimo} & x_2' = x_3 \\
 & \vdots & \\
y^{(n-1)} = x_{n-1}' & \text{pa uvodimo} & x_{n-1}' = x_n \\
y^n = x_n' & \text{pa je stoga} & x_n' = F(t, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)
\end{array}$$

U našem slučaju taj sistem nakon smene $y = x_1$ izgleda

$$\begin{array}{l}
x_1' = x_2 \\
x_2' = x_3 \\
x_3' = x_4 \\
x_4' = -5x_2x_3^2 + 2t\sin x_1
\end{array}$$

□

7.5 Rešiti sistem

$$y' = \frac{z}{x} \quad z' = \frac{(y-z)^2 + xz}{x^2}$$

7.6 Rešiti sistem

$$y' = \frac{x}{z} \quad z' = -\frac{x}{y}$$

7.7 Rešiti sistem

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$$

7.8 Rešiti sistem

$$\frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}$$

7.9 Rešiti sistem

$$\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$$

7.10 Rešiti sistem

$$xy' + x'y = 2 \quad xy' - x'y = 1$$

7.11 Rešiti sistem

$$x' = y - z \quad y' = x^2 + y \quad z' = x^2 + z$$

7.12 Rešiti sistem

$$x' = x(y^2 - z^2) \quad y' = -y(x^2 + z^2) \quad z' = z(x^2 + y^2)$$

8 Vežbe 8.

Linearni sistemi diferencijalnih jednačina sa konstantnim koeficijentima

Homogeni sistem

8.1 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y + z \\ y' &= x + 2y - z \\ z' &= x - y + 2z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$$

Kako su svi koreni realni i različiti rešenje je oblika

$$\mathbf{x} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t},$$

gde su v_1, v_2, v_3 odgovarajući karakteristični vektori. U ovom slučaju rešenje je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t},$$

tj.

$$\begin{aligned} x &= c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ z &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} \end{aligned}$$

□

8.2 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y - z \\ y' &= x + y \\ z' &= 3x + z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \quad \lambda_3 = 1 - 2i$$

Imamo par konjugovano kompleksnih rešenja i sva rešenja su razlišita.

$$\mathbf{x} = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 Re(v_2 e^{\lambda_2 t}) + c_3 Im(v_2 e^{\lambda_2 t}),$$

gde su v_1 i v_2 odgovarajući karakteristični vektori. Za λ_3 ne tražimo karakterističan vektor.

Imamo da je

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix}$$

Tada je

$$v_2 e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix} e^t e^{2it} = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ -3i \end{bmatrix} e^t(\cos 2t + i \sin 2t) = \begin{bmatrix} 2e^t \cos 2t + i2e^t \sin 2t \\ e^t \sin 2t - ie^t \cos 2t \\ 3e^t \sin 2t - 3ie^t \cos 2t \end{bmatrix}$$

Konačno, rešenje je

$$\begin{aligned} x &= c_2 e^t \cos 2t + c_3 2e^t \sin 2t \\ y &= c_1 e^t + c_2 e^t \sin 2t - c_3 e^t \cos 2t \\ z &= -c_1 e^t + c_2 3e^t \sin 2t - c_3 3e^t \cos 2t \end{aligned}$$

□

8.3 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z \\ y' &= 2x - y - 2z \\ z' &= -x + y + 2z \end{aligned}$$

Rešenje: Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Karakteristični koreni matrice A su

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

Kako imamo višestruko koren, rešenje tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \\ R_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t},$$

gde su P_k, Q_k i R_k polinomi reda k, a $k = r + s - n$, gde je r rang matrice $\lambda E - A$, s višestrukost korena, a n red sistema.

Tako je

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

pa je rang matrice jednak 1. Red polinoma je $k = 1 + 3 - 3 = 1$. Rešenje tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} At + B \\ Ct + D \\ Et + F \end{bmatrix} e^t$$

Konstante A, B, C, D, E i F određujemo uvrštavanjem u sistem. Kako se radi o trostrukom korenu, tri konstante ćemo izraziti preko druge tri.

$$Ae^t + (At + B)e^t = 2(At + B)e^t - (Ct + D)e^t - (Et + F)e^t$$

$$Ce^t + (Ct + D)e^t = 2(At + B)e^t - (Ct + D)e^t - 2(Et + F)e^t$$

$$Ee^t + (Et + F)e^t = -(At + B)e^t + (Ct + D)e^t + 2(Et + F)e^t$$

Odatle dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} &A = C + E \\ &A = B - D - F \\ &C = 2B - 2D - 2F \\ &E = -B + D + F \end{aligned}$$

Rešavanjem dobijamo da je

$$A = -E \quad C = -2E \quad F = E + B - D$$

Proglasimo sada B,D i E za konstante c_1, c_2 i c_3 respektivno. Tada je

$$A = -c_3 \quad B = c_1 \quad C = -2c_3 \quad D = c_2 \quad E = c_3 \quad F = c_1 - c_2 + c_3,$$

pa je rešenje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_3t + c_1 \\ -2c_3t + c_2 \\ c_3t + c_1 - c_2 + c_3 \end{bmatrix} e^t = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^t + c_3 \begin{bmatrix} -t \\ -2t \\ t+1 \end{bmatrix} e^t$$

□

8.4 Rešiti sistem:

$$\begin{aligned} x'' &= 2x - 3y \\ y'' &= x - 2y \end{aligned}$$

Rešenje: Ovakvi sistemi se uvek mogu rešiti uvođenjem novih zavisnih promenljivih i svođenjem na siszem linearnih jednačina prvog read. U ovom slučaju sistem je oblika

$$\begin{aligned} x' &= u \\ y' &= v \\ u' &= 2x - 3y \\ v' &= x - 2y \end{aligned}$$

Međutim, upošteno, kod homogenih sistema oblika

$$\begin{aligned} a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x + b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + b_0 y = 0 \\ c_n x^{(n)} + c_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + c_0 x + d_n y^{(n)} + d_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + d_0 y = 0 \end{aligned}$$

do karaketrističnih korena dolazimo iz jednačine

$$\begin{vmatrix} a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 & b_n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + b_0 \\ c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + c_0 & d_n\lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_0 \end{vmatrix} = 0,$$

a zatim do odgovarajućih karakterističnih vektora rešavajući sistem

$$\begin{bmatrix} a_n\lambda_i^n + a_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + a_0 & b_n\lambda_i^n + b_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + b_0 \\ c_n\lambda_i^n + c_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + c_0 & d_n\lambda_i^n + d_{n-1}\lambda_i^{n-1} + \ldots + d_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tako se u našem slučaju sistem može zapisati

$$\begin{aligned} x'' - 2x - 3y = 0 \\ -x + y'' + 2y = 0 \end{aligned}$$

Odgovarajuća karakteristična jednačina je

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - 2 & -3 \\ -1 & \lambda^2 + 2 \end{vmatrix} = 0$$

čije je rešenje

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -i.$$

Odgovarajući karaktersistični vektori su

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dok v_4 ne tražimo. Kako je

$$v_3 e^{\lambda_3 t} = \begin{bmatrix} \cos t + i\sin t \\ \cos t + i\sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t \end{bmatrix},$$

rešenje je

$$\begin{aligned} x = 3c_1e^t + 3c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t \\ y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3\cos t + c_4\sin t \end{aligned}.$$

□

Nehomogeni sistem

8.5 Metodom varijacije konstanti rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y + \tfrac{1}{\cos t} \\ y' &= 2x - y \end{aligned}$$

Rešenje: Prvo rešimo homogen sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y \\ y' &= 2x - y \end{aligned}$$

Njegovo rešenje je

$$\begin{aligned} x_h &= c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ y_h &= c_1(\cos t + \sin t) + c_2(\sin t - \cos t) \end{aligned}$$

Tada je rešenje nehomogenog sistema oblika

$$\begin{aligned} x &= c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t \\ y &= c_1(t)(\cos t + \sin t) + c_2(t)(\sin t - \cos t) \end{aligned} .$$

Funkcije $c_1(t)$ i $c_2(t)$ dobijamo iz sledećeg sistema lineranih jednačina

$$\begin{aligned} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t &= \tfrac{1}{\cos t} \\ c_1'(t)(\cos t + \sin t) + c_2'(t)(\sin t - \cos t) &= 0 \end{aligned} ,$$

gde nehomogeni deo ovog sistema je nehomogeni deo sistema diferencijalnih jednačina.

Sistem rešavamo Kramerovim pravilom. Tako je

$$D_S = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ \cos t + \sin t & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = -1$$

$$D_{c_1'} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\cos t} & \sin t \\ 0 & \sin t - \cos t \end{vmatrix} = \frac{\sin t}{\cos t} - 1$$

$$D_{c_2'} = \begin{vmatrix} \cos t & \frac{1}{\cos t} \\ \cos t + \sin t & 0 \end{vmatrix} = -1 - \frac{\sin t}{\cos t}$$

Stoga je

$$c_1'(t) = 1 - \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$c_2'(t) = 1 + \frac{\sin t}{\cos t}$$

Dakle

$$c_1(t) = \int (1 - \frac{\sin t}{\cos t}) dt = t + \ln|\cos t| + c_1$$

$$c_2(t) = \int (1 + \frac{\sin t}{\cos t}) dt = t - \ln|\cos t| + c_2.$$

Rešenje je

$$\begin{aligned} x &= (t + \ln|\cos t| + c_1) \cos t + (t - \ln|\cos t| + c_2) \sin t \\ y &= (t + \ln|\cos t| + c_1)(\cos t + \sin t) + (t - \ln|\cos t| + c_2)(\sin t - \cos t) \end{aligned} .$$

□

8.6 Metodom pogađanja partikularnog rešenja rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + e^{2t} \\ y' &= 3x - 2y - 3z + \cos t \\ z' &= -x + y + 2z + e^t \end{aligned}$$

Rešenje: Rešavamo prvo homogen sistem i dobijamo da je

$$\begin{aligned} x_h &= c_1 + c_2 e^t + c_3 e^t \\ y_h &= 3c_1 + c_2 e^t \\ z_h &= -c_1 + c_3 e^t \end{aligned}$$

i karakteristični koreni su

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = 1.$$

Pogađačku metodu koristimo ako su svi nehomogeni delovi oblika

$$P_m(t) e^{\alpha t} \cos \beta t \text{ ili } P_m(t) e^{\alpha t} \sin \beta t,$$

gde je $P_m(t)$ polinom reda m.

Tada je partikularno rešenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_k^1 \\ Q_k^2 \\ Q_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t + \begin{bmatrix} R_k^1 \\ R_k^2 \\ R_k^3 \end{bmatrix} e^{\alpha t} \sin \beta t$$

gde su Q_k^i i R_k^i polinomi reda $k = m + l$, a l je višestrukost $\alpha + i\beta$ kao korena karakteristične jednačine.

Posmatrajmo prvo e^{2t}. Imamo da je $m = 0$, a kako je $\alpha = 2$, a $\beta = 0$, onda je i $l = 0$. Partikularno rešenje je oblika:

$$\begin{bmatrix} x_{p_1} \\ y_{p_1} \\ z_{p_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} e^{2t}.$$

Do konstanti A, B, C dolazimo uvrštavajući partikularno rešenje u sistem gde je od nehomogenih delova jedini preostao onaj koji posmatramo, tj.

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + e^{2t} \\ y' &= 3x - 2y - 3z \\ z' &= -x + y + 2z \end{aligned}$$

Tako dobijamo da je $A = \frac{3}{2}$, $B = \frac{3}{2}$ i $C = -\frac{1}{2}$.

Sada posmatramo $\cos t$. Imamo da je $m = 0$, a kako je $\alpha = 0$, a $\beta = 1$, imamo da je $l = 0$. Partikularno rešenje je oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_2} \\ y_{p_2} \\ z_{p_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \cos t + \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} \sin t.$$

Što se tiče e^t, imamo da je $\alpha = 1$, a $\beta = 0$, pa je $l = 2$. Stoga je partikularno rešenje oblika

$$\begin{bmatrix} x_{p_3} \\ y_{p_3} \\ z_{p_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x t^2 + B_x t + C_x \\ A_y t^2 + B_y t + C_y \\ A_z t^2 + B_z t + C_z \end{bmatrix} e^t$$

U oba slučaja se do konstanti dolazi uvrštavanjem u sistem koji od nehomogenih delova ima samo onaj koji posmatramo.

□

8.7 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= x - y + z + t \\ y' &= x + y - z - (t^2 + 1) \sin t \\ z' &= 2z - y \end{aligned}$$

8.8 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + \operatorname{tg} t \\ y' &= 3x - y - 2z \\ z' &= 2z - x + y + \operatorname{ctg} t \end{aligned}$$

8.9 Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' &= 2x + 2z - y + t \cos t \\ y' &= x + 2z + e^t \sin t \\ z' &= y - 2x - z \end{aligned}$$

9 Vežbe 9.

Linearne jednačine višeg reda

9.1 Rešiti jednačine
a) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$
b) $y'' + k^2 y = 0, \quad k \neq 0$
c) $y'' + 4y' + 13y = 0$
d) $y'' + 4y' - 13y = 0$
e) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
f) $y^{iv} + 2y'' + y = 0$

Rešenje:
a) Rešavamo karakterističnu jednačinu

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0.$$

Rešenja su

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 1, \quad r_3 = 2.$$

Kako su rešenja realna i jednostruka, rešenje je oblika

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + c_3 e^{r_3 x} = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}.$$

b) Karakteristična jednačina je

$$r^2 + k^2 = 0,$$

pa su joj rešenja $r_1 = ki$, $r_2 = -ki$. Rešenje je kompleksno i jednostruko. Razmatraćemo samo jedno rešenje od para konjugovano kompleksnih. Imamo da je

$$e^{r_1 x} = e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx$$

Opšte rešenje je oblika

$$y = c_1 Re(e^{r_1 x}) + c_2 Im(e^{r_1 x}) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx.$$

c) Karakteristična jednačina je $r^2 + 4r + 13 = 0$, a njena rešenja $r_{1,2} = -2 \pm 3i$. Kako je

$$e^{r_1 x} = e^{(-2+3i)x)} = e^{-2x}(\cos 3x + i \sin 3x),$$

opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{-2x} \cos 3x + c_2 e^{-2x} \sin 3x.$$

d) Karakteristična jednačina je $r^2 + 4r - 13 = 0$, a njena rešenja $r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{17}$. Kako su rešenja realna i jednostruka, opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{(-2+\sqrt{17})x} + c_2 e^{(-2-\sqrt{17})x}.$$

e) Karakteristična jednačina je $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$, a njena rešenja $r_{1,2,3} = 1$. Rešenje je realno i višestruko. Tada je

$$y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^{r_1 x} = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x.$$

f) Karakteristična jednačina je $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$, a rešenja su $r_{1,2} = i$, $r_{3,4} = -i$. Posmatramo samo jedan od para konjugovano kompleksnih brojeva. Kako je

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

opšte rešenje je

$$y = (c_1 + c_2 x) \cos x + (c_3 + c_4 x) \sin x.$$

□

9.2 Pogađajući oblik partikularnog rešenja reši jednačinu

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x + \sin^2 x$$

Rešenje: Poagđačku metodu možemo koristiti ako je svaki nehomogeni deo oblika

$$e^{\alpha x}(P_k(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x),$$

gde su P_k i Q_l polinomi reda k, odnosno l. Partikularno rešenje je oblika

$$y_p(x) = e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x)x^s,$$

gde su R_m i S_m polinomi reda $m = \max\{k, l\}$, a s je višestrukost broja $\alpha + i\beta$ kao korena karakteristične jednačine.

Kako je $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, imamo tri nehomogena dela, xe^x, $\frac{1}{2}$ i $-\frac{\cos 2x}{2}$. Svi oni su oblika da možemo koristiti pogađačku metodu.

Rešimo prvo homogeni deo. Karakteristična jednačina je $r^2 - 4r + 3 = 0$, a njeni koreni su $r_1 = 1$ i $r_2 = 3$. Dakle, rešenje homogenog dela je

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

1° Posmatrajmo prvo nehomogeni deo xe^x. Kako je ispred e^x polinom prvog reda, imamo da je $m = 1$. Pošto je $a + ib = 1$, a to je koren karakteristična jednačine, imamo da je $s = 1$. To znači da je partikularno rešenje oblika

$$y_{p_1} = e^x(Ax + B)x.$$

Da bi dobili konstante A i B, ovo rešenje ćemo uvrstiti u jednačinu koja od nehomogenih delova ima samo onaj koji ispitujemo, tj.

$$y'' - 4y' + 3y = xe^x.$$

Tako dobijamo da je $A = -\frac{1}{4}$, a $B = -\frac{1}{4}$. Dakle,

$$y_{p_1} = e^x(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x).$$

2° Posmatrajmo sad $\frac{1}{2}$. U ovom slučaju imamo da je partikularno rešenje oblika

$$y_{p_2} = A.$$

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 4y' + 3y = \frac{1}{2}$$

dobijamo da je $A = \frac{1}{6}$, tj. da je

$$y_{p_2} = \frac{1}{6}.$$

3° Na kraju posmatrajmo $-\frac{\cos 2x}{2}$. Imamo da je partikularno rešenje oblika

$$y_{p_3} = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Uvrštavanjem u diferencijalnu jednačinu

$$y'' - 4y' + 3y = -\frac{\cos 2x}{2}$$

dobijamo da je $A = \frac{1}{130}$, a $B = \frac{4}{65}$, tj. da je

$$y_{p_3} = \frac{1}{130}\cos 2x + \frac{4}{65}\sin 2x.$$

Konačno

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + e^x(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{6} + \frac{1}{130}\cos 2x + \frac{4}{65}\sin 2x$$

□

9.3 Pogađajući oblik partikularnog rešenja reši jednačinu

$$y''' + 9y' = e^x \sin 3x + \cos 3x + 3x$$

9.4 Metodom varijacije konstanti rešiti jednačinu

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}}.$$

Rešenje: Prvo rešimo homogeni deo jednačine. Karakteristična jednačina je

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0,$$

a njena rešenja su

$$r_1 = 1 \quad r_2 = 2 \quad r_3 = 3.$$

Rešenje homogenog dela je

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}.$$

Rešenje diferencijalne jednačina tražimo u obliku

$$y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{2x} + c_3(x)e^{3x}.$$

Do funkcija $c_i(x)$ dolazimo rešavajući sistem

$$\begin{array}{ccccccc} c_1' e^x & + & c_2' e^{2x} & + & c_3' e^{3x} & = & 0 \\ c_1'(e^x)' & + & c_2'(e^{2x})' & + & c_3'(e^{3x})' & = & 0 \\ c_1'(e^x)'' & + & c_2'(e^{2x})'' & + & c_3'(e^{3x})'' & = & \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}}, \end{array}$$

tj.

$$\begin{array}{ccccccc} c_1' e^x & + & c_2' e^{2x} & + & c_3' e^{3x} & = & 0 \\ c_1' e^x & + & 2c_2' e^{2x} & + & 3c_3' e^{3x} & = & 0 \\ c_1' e^x & + & 4c_2' e^{2x} & + & 9c_3' e^{3x} & = & \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}}. \end{array}$$

Determinanta sistema je

$$D_S = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x},$$

a ostale determinante su

$$D_{c_1'} = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}} & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = \frac{e^{9x}}{1+e^{2x}} \qquad D_{c_2'} = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{3x} \\ e^x & 0 & 3e^{3x} \\ e^x & \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = -\frac{2e^{8x}}{1+e^{2x}}$$

$$D_{c_3'} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & \frac{e^{4x}}{1+e^{2x}} \end{vmatrix} = \frac{e^{7x}}{1+e^{2x}}$$

Dakle,

$$c_1' = \frac{e^{3x}}{2(1+e^{2x})} \quad c_2' = -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} \quad c_3' = \frac{e^x}{2(1+e^{2x})},$$

pa je

$$c_1(x) = \int \frac{e^{3x}}{2(1+e^{2x})}dx = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^x + c_1$$

$$c_2(x) = \int -\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + c_2$$

$$c_3(x) = \int \frac{e^x}{2(1+e^{2x})}dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{2x} + c_3$$

□

Euler-ova diferencijalna jednačina

Ojlerova diferencijlana jednačina je oblika

$$d_n(ax+b)^n y^{(n)} + d_{n-1}(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + d_1(ax+b)y' + d_0 y = f(x)$$

i smenom

$$ax+b = e^t$$

se svodi na diferencijlnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

9.5 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$x^2y'' - 3xy' + 5y = 3x^2.$$

Rešenje: Uvodimo smenu $x = e^t$. Tada je

$$dx = e^t dt, \text{ pa je } \frac{dt}{dx} = e^{-t}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \dot{y}e^{-t}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d(\dot{y}e^{-t})}{dt}\frac{dt}{dx} = (\ddot{y}e^{-t} - \dot{y}e^{-t})e^{-t} = \ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}e^{-2t}$$

Diferencijalna jednačina je sada

$$e^{2t}(\ddot{y}e^{-2t} - \dot{y}e^{-2t}) - 3e^t\dot{y}e^{-t} + 5y = 3e^{2t}$$

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 3e^{2t}$$

Karakteristična jednačina homogenog dela je $r^2 - 4r + 5 = 0$, a njeni koreni su $r_{1,2} = 2 \pm i$. Rešenje homogenog dela je

$$y_h = c_1e^{2t}\cos t + c_2e^{2t}\sin t$$

Do partikularnog rešenja dolazimo pogađačkom metodom, pa je $y_p = Ae^{2t}$, a uvrštavanjem se dobija $y_p = 3e^{2t}$. Rešenje je

$$y = c_1e^{2t}\cos t + c_2e^{2t}\sin t + 3e^2t = c_1x^2\cos\ln x + c_2x^2\sin\ln x + 3x^2.$$

□

9.6 Rešiti diferencijalnu jednačinu

$$(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$$

10 Vežbe 10.

Jednačine višeg reda. Razni zadaci

10.1 Naći vezu između $r(x)$ i $s(x)$ tako da jednačina $y'' + r(x)y' + s(x)y = 0$ ima partikularno rešenje oblika $y_1(x) = e^{mx}$. Primeniti to na

$$(x-2)y'' - (4x-7)y' + (4x-6)y = 0.$$

10.2 Rešiti jednačinu $xy'' + 2y' - xy = 0$ znajući da ima partikularno rešenje oblika $y_1(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x}$.

10.3 Pokazati da diferencijalna jednačina

$$(ae^{bx} + \frac{1}{b^2})y'' = y, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad a, b \neq 0,$$

ima partikularno rešenje $y_1(x) = e^{\alpha x} + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Primeniti to na $(e^x+1)y'' = y$.

10.4 Data je diferencijalna jednačina $(e^x+1)y''-2y'-e^x y=0$. Rešiti je znajući da je jedno partikularno rešenje polinom po e^x.

10.5 Data je diferencijalna jednačina $(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x+\dfrac{1}{x}$. Naći opšte rešenje ako se zna da je jedno rešenje homogenog dela jednačine polinom.

10.6 Data je diferencijlna jednačina $x^4y''+y=0$.

a) Transformisati je uvođenjem nove nezavisne promenljive $x=\frac{1}{t}$.

b) Pokazati da se pogodnim izborom funkcije f dobijena jednačina smenom $y=z\cdot f(t)$ transformiše u jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

c) Rešiti jednačinu.

10.7 Pokazati da nijedno netrivijalno rešenje jednačine $y''=y+y^3$ nema više od jedne nule.

10.8 Data je diferencijalna jednačina $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, gde su p,q neprekidne funkcije. Dokazati da ako dva rešenja imaju lokalni maksimum u istoj tački x_0 da su ta rešenja linearno zavisna.

10.9 Dokazati da ako je $q(x)<0$ rešenja jednačine $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ ne mogu imati pozitivan maksimum.

10.10 Za koje n diferencijalna jednačina $y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$, gde je f neprekidno diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^{n+1}$, može da ima među svojim rešenjima dve funkcije: $y_1=x$ i $y_2=\sin x$?

11 Vežbe 11.

REŠAVANJE POMOĆU REDOVA

Regularna tačka

Posmatramo diferencijalnu jednačinu

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0.$$

Tačka x_0 je regularna tačka akko

1° $a_2(x_0)\neq 0$

2° $a_2(x)$, $a_1(x)$ i $a_0(x)$ su analitičke u x_0.

U suprotnom, tačka x_0 je singularana.

Tada rešenje tražimo u obliku stepenog reda

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n.$$

11.1 Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $(1-x^2)y''+2xy'+k(k+1)y=0$ u okolini tačke $x_0=0$.

11.2 Naći opšte rešenje Hermitove diferencijalne jednačine $y''-2xy'+2ky=0$ u okolini tačke $x_0=0$.

11.3 Diferencijalnu jednačinu $(x-2)y''+y'-(x-2)^2y=0$ rešiti u okolini tačke $x_0=1$.

Regularno-singularna tačka

Posmatramo diferencijalnu jednačinu

$$a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0.$$

Tačka x_0 je regularno-singularna tačka akko je singularana i funkcije

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}(x-x_0) \quad \text{i} \quad \frac{a_0(x)}{a_2(x)}(x-x_0)^2$$

su analitičke u x_0.

11.4 Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $2x^2y'' - xy' + (1 - x^2)y = 0$ u okolini $x_0 = 0$.

11.5 Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy'' + y' - x^2y = 0$ u okolini $x_0 = 0$.

11.6 Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy'' - 2y' - xy = 0$ u okolini $x_0 = 0$.

11.7 Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $xy'' - 2y' - x^2y = 0$ u okolini $x_0 = 0$.

11.8 Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $2x^2(x - 1)y'' + x(3x + 1)y' - 2y = 0$ u okolini $x_0 = \infty$ ($|x| > M$).

12 Vežbe 12.

Rubni (granični) problem

12.1 Naći sopstvene vrednosti i sopstvena rešenja problema
a) $y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = y(\pi) = 0.$
b) $\frac{d(xy')}{dx} + \frac{\lambda}{x}y = 0 \quad y'(0) = y'(e^{2\pi}) = 0,\ \lambda > 0$

12.2 Rešiti rubni problem $y'' - y' - 2y = 0, \quad y'(0) = 2,\ y(\infty) = 0.$

12.3 Naći sopstvene vrednosti i sopstvena rešenja rubnog problema $(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0$ sa uslovima $y(1) = y(\frac{1}{2}) = 0$.

Uputstvo: smenom nezavisne promenljive svesti jednačinu na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.

Šturmove teoreme i posledice

Teorema (Šturmova teorema o upoređivanju). Neka je $P \in C^1([a, b])$ i $P(x) > 0$ za sve $x \in [a, b]$. Neka su $Q_1, Q_2 \in C([a, b])$ i za sve $x \in [a, b]$ nek je $Q_1(x) \leq Q_2(x)$. Tada između svake dve nule rešenja diferencijalne jednačine

$$(P(x)y')' + Q_1(x)y = 0$$

nalazi se bar jedna nula rešenja jednačine

$$(P(x)z')' + Q_2(x)z = 0.$$

12.4 Sva netrivijalna rešenja jednačine $y'' + q(x)y = 0$, gde je $q \in C([a, b])$ i $q(x) < 0$ za sve $x \in (a, b)$, imaju najviše jednu nulu. Pokazati.

12.5 Neka su x_i i x_{i+1} dve uzastopne nule netrivijalnog rešenja jednačine $y'' + q(x)y = 0$, gde je $q \in C([a, b])$ i $q(x) > 0$ za sve $x \in [a, b]$. Pokazati da je

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq x_{i+1} - x_i \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}},$$

gde je

$$m = \min_{x \in [a,b]} q(x) \quad \text{i} \quad M = \max_{x \in [a,b]} q(x).$$

12.6 Broj nula netrivijalnog rešenja diferencijalne jednačine $y'' + q(x)y = 0$ na intervalu $[a, b]$, gde je gde je $q \in C([a, b])$ i $q(x) \geq 0$ za sve $x \in [a, b]$. Pokazati da je

$$\left[\frac{b - a}{\pi}\sqrt{m}\right] \leq N \leq \left[\frac{b - a}{\pi}\sqrt{M}\right] + 1.$$

12.7 Data je diferencijalna jednačina $y'' - 2e^x y' + e^{2x}y = 0$. Oceniti rastojanje između dve uzastopne nule, kao i broj nula netrivijalnog rešenja na intervalu $[2, 10]$

12.8 Dokazati da rešenje diferencijalne jednačine: $y''x + 2y' + x^2y = 0$ ima bar 15 nula na intervalu $[1, 25]$.

Oscilatornost

Rećićemo da je rešenje oscilatorno ako i samo ako ima beskonačno mnogo nula. Rešenje je oscilatorno u okolini tačke x_0 ako i samo ako u svakoj okolini tačke x_0 ima beskonačno mnogo nula.

Teorema Data je diferencijalna jednačina $y'' + q(x)y = 0$. Neka je

$$\underline{\omega} = \liminf_{x\to\infty} x^2 q(x) \qquad \overline{\omega} = \limsup_{x\to\infty} x^2 q(x).$$

Tada ako je $\underline{\omega} > \frac{1}{4}$ onda je svako rešenje oscilatorno u beskonačnosti, a ako je $\overline{\omega} < \frac{1}{4}$ onda ni jedno rešenje nije oscilatorno u beskonačnosti.

12.9 Ispitati oscilatornost netrivijalnog rešenja diferencijalne jednačine $y'' + \dfrac{1}{x^5}y = 0$ u okolini tačke $x_0 = 0$.

13 Vežbe 13. (AB smer)

Stabilnost

Posmatrajmo sistem diferencijalnih jednačina

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = g(x, y)$$

Kritična tačka sistema $\langle x_0, y_0\rangle$ ako i samo ako je

$$f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0.$$

Rećićemo da je sistem stabilan (metastabilan) u kritičnoj tački ako i samo ako

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \exists t_0\ \forall t \geq t_0\ \Big(d\big(\langle x_0, y_0\rangle, \langle x(t_0), y(t_0)\rangle\big) < \delta \Rightarrow d\big(\langle x_0, y_0\rangle, \langle x(t), y(t)\rangle\big) < \varepsilon\Big)$$

To znači da se rešenje ne udaljava sa vremenom od kritične tačke.
Sistem je nestabilan ako i samo ako nije stabilan.
Sistem je striktno stabilan ako i samo ako

$$\exists\delta > 0\ \exists t_0\ \forall t \geq t_0\ \Big(d\big(\langle x_0, y_0\rangle, \langle x(t_0), y(t_0)\rangle\big) < \delta \Rightarrow \big(\lim_{t\to\infty}\langle x(t), y(t)\rangle = \langle x_0, y_0\rangle\big)\Big).$$

To znači da se vremenom rešenje približava kritičnoj tački.
Rešenje nehomogenog sistema je stabilno ako i samo ako je rešenje homogenog sistema stabilno.
Stabilnost možemo ispitivati i za diferencijalne jednačine oblika

$$y' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Stabilnost rešenja jednačine ekvivalentna je stabilnosti rešenja sistema

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = g(x, y).$$

Ispitivaćemo stabilnost u $\langle 0, 0\rangle$. Da bi to postigli uvodimo smenu

$$\tilde{x} = x - x_0 \quad \tilde{y} = y - y_0.$$

Tada je posmatramo sistem

$$\tilde{x}' = f(\tilde{x} + x_0, \tilde{y} + y_0) = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$$
$$\tilde{y}' = g(\tilde{x} + x_0, \tilde{y} + y_0) = \tilde{g}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Sistem je stabilan ako i samo ako je linearizovan sistem stabilan. Stoga, sad posmatramo sistem

$$\tilde{x}' = \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}}\right|_{\langle 0,0\rangle} \tilde{x} + \left.\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{y}}\right|_{\langle 0,0\rangle} \tilde{y}$$

$$\tilde{y}' = \left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{x}}\right|_{\langle 0,0\rangle} \tilde{x} + \left.\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{y}}\right|_{\langle 0,0\rangle} \tilde{y}.$$

Rešimo sada ovaj sistem.

Neka su λ_1 i λ_2 karakteristični koreni. U zavisnosti od njih razlikujemo različite tipove kritičnih tačaka.

1° $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Tada tu tačku nazivamo *čvor*. Ako su oba korena negativna. onda je stabilan, a u suprotnom nestabilan.

13.1 Ispitati stabilnost u $\langle 0, 0\rangle$ za sistem $x' = -x \quad y' = -2y$.

Rešenje: Matrica sistema je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, pa su karakteristični koreni $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -2$. U pitanju je čvor i rešenje je stabilno. Rešenje je $x = c_1 e^{-t}$, $y = c_2 e^{-2t}$. □

2° $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$. Tada tu tačku nazivamo *sedlo*. Rešenje je uvek nestabilno.

13.2 Ispitati stabilnost u $\langle 0, 0\rangle$ za sistem $x' = x \quad y' = -y$.

Rešenje: Matrica sistema je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, pa su karakteristični koreni $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$. U pitanju je sedlo i rešenje je nestabilno. Rešenje je $x = c_1 e^{t}$, $y = c_2 e^{-t}$. □

3° $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. U pitanju je *ekvilibrijum*. Rešenje je metastabilno ako je $\lambda_2 > 0$, a u suprotnom je nestablino.

13.3 Ispitati stabilnost u $\langle 0, 0\rangle$ za sistem $x' = x + y \quad y' = x + y$.

Rešenje: Matrica sistema je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, pa su karakteristični koreni $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$. U pitanju je ekvilibrijum i rešenje je nestabilno. Rešenje je $x = c_1 e^{2t} + c_2$, $y = c_1 e^{2t} - c_2$. □

4° $Re(\lambda_i) = 0$, $Im(\lambda_i) \neq 0$. U pitanju je *centar (vortex)*. Rešenje je metastabilno.

13.4 Ispitati stabilnost u $\langle 0, 0\rangle$ za sistem $x' = -y \quad y' = x$.

5° $\lambda_i \notin \mathbb{R}$ $Re(\lambda_i) \neq 0$. U pitanju je *fokus*. Ako je $Re(\lambda_i) < 0$ rešenje je striktno stabilno, a u suprotom nestabilno.

13.5 Ispitati stabilnost u $\langle 0, 0\rangle$ za sistem $x' = x - y \quad y' = x + y$.

6° $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ i jedno od rešenja je polinom prvog reda. Tada je u pitanju *izražen čvor (inflected node)*. Ako je $\lambda_1 < 0$, onda je rešenje striktno stabilno, a inače je nestabilno.

13.6 Ispitati stabilnost u $\langle 0, 0\rangle$ za sistem $x' = x + y \quad y' = y$.

Rešenje: Matrica sistema je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pa su karakteristični koreni $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Kako je rešenje $x = (c_1 + c_2 t)e^{t}$, $y = c_2 e^{t}$, u pitanju je izražen čvor, a rešenje je nestabilno. □

7° $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ i ni jedno od rešenja nije polinom prvog reda. Tada je u pitanju *zvezda*. Ako je $\lambda_1 < 0$, onda je rešenje striktno stabilno, a inače je nestabilno.

13.7 Ispitati stabilnost u $\langle 0,0\rangle$ za sistem $x' = -x \quad y' = -y$.

Rešenje: Matrica sistema je $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, pa su karakteristični koreni $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Kako je rešenje $x = c_1 e^{-t}$, $y = c_2 e^{-t}$, u pitanju je zvezda, a rešenje je striktno stabilno. □

8° $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Rešenja su prave, pa su uvek nestabilna.

Teorema Linearni sistem sa konstantnim koeficijentima je

a) striktno stabilan ako je za sve i $Re(\lambda_i) < 0$.

b) nestabilan ako postoji i $Re(\lambda_i) > 0$.

c) metastabilan ako postoji samo jedno i za koje je $Re(\lambda_i) = 0$ i za sve ostale $j \neq i$ važi $Re(\lambda_j) < 0$.

13.8 Dat je sistem

$$x' = \ln(1 - y + y^2) \qquad y' = 3 - (x^2 + 8y)^{\frac{1}{2}}.$$

Naći sve kritične tačke, ispitati stabilnost u njima i odrediti njihov tip.

Rešenje: Kritične tačke ovog sistema su rešenja sistema jednačina

$$\ln(1 - y + y^2) = 0 \qquad 3 - (x^2 + 8y)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

tj. $\langle 3,0\rangle$, $\langle -3,0\rangle$, $\langle 1,1\rangle$, $\langle -1,1\rangle$.

Ispitivaćemo tačku $\langle x_0, y_0\rangle = \langle -1, 1\rangle$. Za ostale je analogno.

Prvo ćemo je pomeriti u koordinatni početak. Uvodimo smenu

$$\tilde{x} = x + 1 \quad \tilde{y} = y - 1,$$

pa je

$$x = \tilde{x} - 1 \quad y = \tilde{y} + 1.$$

Novi sistem je sada

$$\tilde{x}' = \ln(\tilde{y}^2 + \tilde{y} + 1) \qquad \tilde{y}' = 3 - (\tilde{x}^2 - 2\tilde{x} + 8\tilde{y} + 9)^{\frac{1}{2}}.$$

Linearizacijom novog sistema dobijamo

$$\tilde{x}' = \tilde{y} \qquad \tilde{y}' = \frac{1}{3}\tilde{x} - \frac{4}{3}\tilde{y}$$

Matrica sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix},$$

pa su karakteristični koreni $\lambda_{1,2} = -\frac{2}{3} \pm \frac{2}{3}\sqrt{7}$. Dakle, u pitanju je sedlo i ono je uvek nestabilno. □

Ispitivanje striktne stabilnosti rešenja linearne jednačine n-tog reda sa konstantnim koeficijentima.

Linearna diferencijalna jednačina n-tog reda sa konstantnim koeficijentima je

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad a_0 > 0.$$

Rešenje je stabilno ako i samo ako su svi koreni karakteristične jednačine

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

negativni.

Potreban uslov je da svi $a_i > 0$. U slučaju $n \leq 2$, to je i dovoljan uslov.

Potreban i dovoljan uslov:

Posmatrajmo matricu Hurvica:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

To je matrica reda n. Na glavnoj dijagonali su a_1, a_2, ..., a_n. Zatim se na ostala mesta ređaju koeficijenti, tako da je u svakoj vrsti indeks sledećeg za jedan manji. Ostatak popunimo nulama. Glavni minori su

$$\Delta_1 = a_1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \ldots$$

1° Uslov Raus-Hurvica: Svi glavni minori su pozitivni, tj. $\Delta_i > 0$ za $i = 1, 2, \ldots, n$.
2° Uslov Ljenar-Šipara: svi $a_i > 0$ i još treba da važi: $\Delta_{n-1} > 0$, $\Delta_{n-3} > 0$, $\Delta_{n-5} > 0$, ...

13.9 Pod kojim uslovima je rešenje diferencijalne jednačine

$$y^{iv} + 2y''' + ay'' + 3y' + by = 0$$

stabilno?

Rešenje: Karakterisitčna jednačine je

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + b = 0.$$

Matrica Hurvica je

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & a & 2 & 1 \\ 0 & b & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

Potrebno je da $a > 0$, $b > 0$, i

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix} = 6a - 4b - 9 > 0,\ \ \Delta_1 = 2 > 0$$

Dakle, $b > 0$ i $6a > 4b + 9$. □

14 Vežbe 13. (CD smer)

Diferencne jednačine

Diferencni operator

Neka je $I_0 \subset [0, 1)$ i neka je funkcija $f(x)$ definisana na skupu $I_0 + \mathbb{Z}$. Definisaćemo diferencni operator Δ (delta) sa

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

Osnovne osobine ovog operatora su

$$\begin{array}{ll}
1^\circ & \Delta(f(x) + g(x)) = \Delta f(x) + \Delta g(x) \\
2^\circ & \Delta(kf(x)) = k\Delta f(x), \quad k \in \mathbb{R} \\
3^\circ & \Delta(f(x) \cdot g(x)) = f(x+1)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x) = \\
 & = f(x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x) + \Delta f(x)\Delta g(x) \\
4^\circ & \Delta\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+1)} \\
5^\circ & \Delta(f(g(x))) = f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x)) \\
6^\circ & \Delta(f'(x)) = (\Delta f(x))'
\end{array}$$

14.1 Naći: a) Δx^3 b) $\Delta \ln x$ c) $\Delta \sin ax$ d) Δa^x.

Rešenje:

$$\text{a)}\ \ \Delta x^3 = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \qquad \text{b)}\ \ \Delta \ln x = \ln(1 + \frac{1}{x})$$

$$\text{c)}\ \ \Delta \sin ax = \sin a(x+1) - \sin ax = 2\cos(ax + \frac{a}{2}) \cdot \sin\frac{a}{2} \qquad \text{d)}\ \ \Delta a^x = (a-1)a^x$$

□

Diferencni operator možemo više puta primeniti. Tako je

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)))f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x))$$

Funkciju $\omega(x)$ sa osobinom $\Delta\omega(x) = 0$ nazivamo aditivna konstanta. To je perodična funkcija sa periodom 1.

Antidiferencni operator

Uvodimo inverzni operator - antidiferencni operator.

$$\Delta^{-1} f(x) = F(x) \Leftrightarrow \Delta F(x) = f(x).$$

$\Delta^{-1} f$ je određeno do na aditivnu konstantu ω. Osnovne osobine ovog operatora su

$$
\begin{array}{ll}
1^\circ & \Delta^{-1}(f(x) + g(x)) = \Delta^{-1} f(x) + \Delta^{-1} g(x) \\
2^\circ & \Delta^{-1}(kf(x)) = k\Delta^{-1} f(x), \quad k \in \mathbb{R} \\
3^\circ & \Delta^{-1}(f(x)\Delta g(x)) = f(x)g(x) - \Delta^{-1}(g(x+1)\Delta f(x)) \\
4^\circ & \Delta^{-1}(f(g(x) + \Delta g(x)) - f(g(x))) = f(g(x)) + \omega \\
5^\circ & \Delta(\Delta^{-1} f(x)) = f(x) \\
6^\circ & \Delta^{-1}(\Delta f(x)) = f(x) + \omega
\end{array}
$$

14.2 Odrediti: a) $\Delta^{-1} 1$ b) $\Delta^{-1} x$ c) $\Delta^{-1} a^x$ d) $\Delta^{-1}(xa^x)$.

Rešenje:
a) Kako je $\Delta x = x + 1 - x = 1$, onda je $\Delta^{-1} 1 = x$
b) Imamo da je $\Delta x^2 = 2x + 1$. Stoga je

$$x^2 = \Delta^{-1}\Delta x^2 = \Delta^{-1} 2x + 1 = 2\Delta^{-1} x + \Delta^{-1} 1 = 2\Delta^{-1} x + x.$$

Odavde je

$$\Delta^{-1} x = \frac{1}{2} x(x-1).$$

c) Već smo videli da je $\Delta a^x = (a-1)a^x$. Odavde je

$$a^x = \Delta\frac{a^x}{a-1},$$

pa je

$$\Delta^{-1} a^x = \Delta^{-1}\Delta\frac{a^x}{a-1} = \frac{a^x}{a-1}.$$

$$\text{d)}\ \ \Delta^{-1}(xa^x) = \frac{1}{a-1}\Delta^{-1}(xa^x(a-1)) = \frac{1}{a-1}\Delta^{-1}(x\Delta a^x) =$$

$$= \frac{1}{a-1}(xa^x - \Delta^{-1}(a^{x+1}\Delta x)) = \frac{xa^x}{a-1} - \frac{a}{(a-1)^2} a^x.$$

□

Faktorijalni stepen

Definišemo

$$x^{(0)} = 1$$
$$x^{(n)} = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$$
$$x^{(-n)} = \frac{1}{(x+n)^{(n)}}$$

Za faktorijalni stepen važi

$$x^{(m+n)} = x^{(m)}(x-m)^{(n)}$$

14.3 Zapisati x^3 preko faktorijalnih stepena.

Rešenje: Imamo da je $x^{(3)} = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$, $x^{(2)} = x(x-1) = x^2 - x$ i $x^{(1)} = x$. Stoga je

$$x^3 = x^{(3)} + 3x^2 - 2x = x^{(3)} + 3(x^{(2)} + x) - 2x = x^{(3)} + 3x^{(2)} + x^{(1)}$$

□

Generalno, važi

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_k^n x^{(k)},$$

gde je S_k^n Stirlingov broj druge vrste. Neke vrednosti su date u tabeli.

	k						
n	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
7	1	63	301	350	140	21	1

Analogno definišemo

$$f^{(0)}(x) = 1$$
$$f^{(n)}(x) = f(x)f(x-1)f(x-2)\dots f(x-n+1)$$
$$f^{(-n)}(x) = \frac{1}{f^{(n)}(x+n)}$$

Osnove osobine su

$$(f(x)g(x))^{(n)} = f(x)^{(n)}g(x)^{(n)}$$
$$(f^{(m)})^{(n)} = (f^{(n)})^{(m)}$$
$$f^{(m+n)}(x) = f^{(m)}(x)f^{(n)}(x-m)$$

Gama funkcija

Važi da je $x^{(x)} = x(x-1)^{(x-1)}$. Kako za Gama funkciju, koja je definisana sa

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt,$$

važi $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, imamo da je

$$\Gamma(x+1) = x^{(x)}, \quad x \notin -\mathbb{N}.$$

Dakle

$$x^{(n)} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1-n)}.$$

ψ funkcija

Imamo da je

$$\Delta^{-1}(x-1)^{(k)} = \frac{(x-1)^{(k+1)}}{k+1}.$$

Međutim, to važi za $k \neq -1$. Za slučaj $n = -1$ definišimo

$$\Delta^{-1}\frac{1}{x} = \psi(x).$$

Kako je $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, logaritmovanjem dobijamo $\ln\Gamma(x+1) - \ln\Gamma(x) = \ln x$. Primenimo izvod i dobijamo

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{x}$$

$$\Delta\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \frac{1}{x}$$

$$\Delta^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \psi(x).$$

Pored ovog važi još i

$$\Delta\psi^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}} \qquad \Delta^{-1}\frac{1}{x^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!}\psi^{(n)}(x)$$

Tabela

$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^{-1}f(x)$
1	0	x
a^x	$(a-1)a^x$	$\frac{a^x}{a-1} \quad a \neq 1$
$(-1)^x$	$2(-1)^{x+1}$	$\frac{1}{2}(-1)^{x+1}$
xa^x	$(a-1)xa^x + a^{x+1}$	$\frac{a^x}{a-1}\left(x - \frac{a}{a-1}\right) \quad a \neq 1$
$x(-1)^x$	$(-1)^{x+1}(1+2x)$	$\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x-\frac{1}{2})$
$(x+b)^{(n)}$	$n(x+b)^{(n-1)}$	$\frac{(x+b)^{(n+1)}}{n+1} \quad n \neq -1$
$\binom{x}{n} = \frac{x^{(n)}}{n!}$	$\binom{x}{n-1}$	$\binom{x}{n+1}$
$(ax+b)^{(n)}$	$na(x+b)^{(n-1)}$	$\frac{(x+b)^{(n+1)}}{a(n+1)} \quad n \neq -1$
$\cos(ax+b)$	$-2\sin\frac{a}{2}\sin(ax+b+\frac{a}{2})$	$\frac{\sin(ax+b-\frac{a}{2})}{2\sin\frac{a}{2}}$
$\sin(ax+b)$	$2\sin\frac{a}{2}\cos(ax+b+\frac{a}{2})$	$-\frac{\cos(ax+b-\frac{a}{2})}{2\sin\frac{a}{2}}$
$\log_b(x+a)$	$\log_b(1+\frac{1}{x+a})$	$\log_b\Gamma(x+a)$
$\frac{1}{x+a}$	$-(x+a-1)^{(-2)}$	$\psi(x+a)$
$\frac{1}{(x+a)^2}$		$-\psi'(x+a)$

Sumiranje redova

$$\sum_{x=a}^{b} f(x) = \Delta^{-1}f(x)\Big|_a^{b+1} = F(b+1) - F(a)$$

$$\sum_{x=a}^{\infty} f(x) = \Delta^{-1} f(x)\Big|_a^{\infty} = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$$

14.4 Izračunati
a) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 2003$
b) $\frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{1}{3\cdot5\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7\cdot9} + \ldots$

Rešenje:
a)

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 2003 = -\sum_{x=1}^{2003} (-1)^x x = -\Delta^{-1}((-1)^x x)\Big|_1^{2004} =$$
$$= -(\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x - \frac{1}{2}))\Big|_1^{2004} = -\frac{1}{2}(-1)^{2005}(2003 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{4} = 1002.$$

b)

$$\frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{1}{3\cdot5\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7\cdot9} + \ldots = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(2x-1)(2x+1)(2x+3)} = \frac{1}{8}\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})} =$$
$$= \frac{1}{8}\sum_{x=1}^{\infty}(x - \frac{3}{2})^{(-3)} = \frac{1}{8}\Delta^{-1}(x - \frac{3}{2})^{(-3)}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{8}\frac{(x-\frac{3}{2})^{(-2)}}{-2}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{16}\left(\lim_{x\to\infty}(x - \frac{3}{2})^{(-2)} - (-\frac{1}{2})^{(-2)}\right) =$$
$$= -\frac{1}{16}\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1}{(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})} - \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{12}.\Box$$

Linearna diferencna jednačina prvog reda

Oblika je

$$y(x+1) - p(x)y(x) = q(x) \quad y(\alpha) = c.$$

Prvo ćemo rešiti redukovanu jednačinu

$$y(x+1) - p(x)y(x) = 0 \quad y(\alpha) = c.$$

Imamo da je

$$y(x+1) = p(x)y(x) = p(x)p(x-1)y(x-1) = p(x)p(x-1)p(x-2)y(x-2) =$$
$$= p(x)p(x-1)\ldots p(\alpha+1)p(\alpha)y(\alpha) = P(x+1)y(\alpha).$$

Definišeno

$$P(x) = \prod_{t=\alpha}^{x-1} p(t).$$

Tada je rešenje

$$y(x) = P(x)y(\alpha).$$

Uočimo da je

$$\Delta\left(\frac{y(x)}{P(x)}\right) = \frac{y(x+1)}{P(x+1)} - \frac{y(x)}{P(x)} = \frac{y(x+1)}{P(x+1)} - \frac{p(x)y(x)}{P(x+1)}.$$

Sada možemo da se vratimo celoj jednačini

$$y(x+1) - p(x)y(x) = q(x).$$

Deljenjem sa $P(x+1)$ dobijamo

$$\Delta\left(\frac{y(x)}{P(x)}\right) = \frac{q(x)}{P(x+1)}$$
$$\frac{y(x)}{P(x)} = \Delta^{-1}\left(\frac{q(x)}{P(x+1)}\right) + \omega$$
$$y(x) = P(x)\Delta^{-1}\left(\frac{q(x)}{P(x+1)}\right) + \omega P(x)$$

14.5 Rešiti diferencnu jednačinu $y(x+1)+y(x)=-(x+1) \quad y(1)=y_0$.

Rešenje: Imamo da je $p(x)=-1$. Stoga je $P(x)=\prod_{t=1}^{x-1}(-1)=(-1)^{x-1}$. Dakle

$$y(x)=(-1)^{x-1}\Delta^{-1}\left(\frac{-(x+1)}{(-1)^x}\right)+\omega(-1)^{x-1}.$$

Kako je

$$\Delta^{-1}\left(\frac{-(x+1)}{(-1)^x}\right)=-\Delta^{-1}((-1)^x(x+1))=-\Delta^{-1}((-1)^x x)-\Delta^{-1}(-1)^x=-\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(-1)^x,$$

imamo da je

$$y(x)=(-1)^{x-1}(-\frac{1}{2}(-1)^{x+1}(x-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(-1)^x)+\omega(-1)^{x-1}=-\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2})+\omega(-1)^{x-1}$$

Kako je $y(1)=y_0$ imamo da je $y_0=-\frac{3}{4}+\omega$, tj. ω u celobrojnim tačkama ima vrednost $y_0+\frac{3}{4}$. □

14.6 Rešiti diferencnu jednačinu $y(x+1)-(x+1)y(x)=2^x(1-x)$.

Linearna diferencna jednačina drugog reda

Oblika je

$$a(x)y(x+2)+b(x)y(x+1)+c(x)y(x)=d(x)$$

Ako znamo partikularno rešenje y_p homogenog dela, tada se smenom $y(x)=z(x)y_p(x)$ svodi na jednačinu oblika

$$f(x)\Delta^2 z(x)+g(x)\Delta z(x)=h(x).$$

Smenom $\Delta z=u$ dobijamo linearnu diferencnu jednačinu prvog reda.

14.7 Rešiti diferencnu jednačinu $y(x+2)-x(x+1)y(x)=2(x+1)!$, $y(1)=1$, $y(2)=3$, ako je partikularno rešenje homogenog dela $y_p(x)=(x-1)!$.

Rešenje: Uvodimo smenu $y(x)=z(x)(x-1)!$. Dobija se

$$z(x+2)(x+1)!-z(x)(x+1)!=2(x+1)!$$

$$z(x+2)-z(x)=2$$

Kako je $\Delta^2 z(x)=z(x+2)-2z(x+1)+z(x)$, dobijamo

$$\Delta^2 z(x)+2z(x+1)-z(x)-z(x)=2$$

$$\Delta^2 z(x)+2\Delta z(x)=2$$

Smenom $\Delta z(x)=u(x)$ dobijamo

$$\Delta u(x)+2u(x)=2$$

$$u(x+1)+u(x)=2$$

Kako je $y(1)=z(1)0!=1$, imamo da je $z(1)=1$, a kako je $y(2)=z(2)1!=3$, imamo da je $z(2)=3$. Dakle, $u(1)=z(2)-z(1)=2$. Sada imamo da je

$$P(x)=\prod_{t=1}^{x-1}(-1)=(-1)^{x-1}$$

Imamo da je

$$u(x)=(-1)^{x-1}\cdot\Delta^{-1}\left(\frac{2}{(-1)^x}\right)+\omega\cdot(-1)^{x-1}=$$

$$=(-1)^{x-1}2\Delta^{-1}(-1)^x+\omega\cdot(-1)^{x-1}=(-1)^{x-1}(-1)^{x+1}+\omega\cdot(-1)^{x-1}=1+\omega\cdot(-1)^{x-1}$$

Pošto je $u(1)=2$, imamo da je $\omega=1$ (u celobrojnim tačkama). Dakle, $u(x)=1+(-1)^{x-1}$, pa je

$$z(x)=\Delta^{-1}(1+(-1)^{x-1})=\Delta^{-1}(1-(-1)^x)=x-(-1)^{x+1}+\omega_2.$$

Kako je $z(1)=1$, dobijamo da je $\omega_2=0$ Konačno $y(x)=(x+(-1)^x)(x-1)!$. □

Linearna diferencna jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima homogena jednačina

Oblika je

$$a_n y(x+n) + a_{n-1} y(x+n-1) + \ldots + a_0 y(x) = 0$$

Rešavamo karakterističnu jednačinu

$$a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

Pomoću tih n korena dobićemo n rešenja. Linearna kombinacija rešenja je opšte rešenje.

1° Koren λ je realan i jednostruk. Tada je njegovo rešenje

$$y = \lambda^x.$$

2° Koren λ je k-tostruk. Tada su odgovarajuća rešenja

$$y_1 = \lambda^x,\ y_2 = x\lambda^x,\ y_3 = x^2\lambda^x, \ldots, y_k = x^{k-1}\lambda^x.$$

3° Koren je kompleksan, tj. $\lambda = a \pm ib = \rho e^{\pm \alpha i} = \rho(\cos\alpha \pm i \sin\alpha)$. Tada su rešenja

$$y_1 = \rho^x \cos\alpha x \qquad y_2 = \rho^x \sin\alpha x$$

14.8 Rešiti diferencnu jednačinu $y(x+3) - 4y(x+2) + 5y(x+1) - 2y(x) = 0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina je $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$. Rešenja se $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 2$. Rešnje jednačine je

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 2^x$$

□

14.9 Rešiti diferencnu jednačinu $y(x+4) - y(x) = 0$.

Rešenje: Karakteristična jednačina je $\lambda^4 - 1 = 0$. Rešenja jednačine su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_{3,4} = \pm i = e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2} \pm \sin\frac{\pi}{2}$. Konačno rešenje je

$$y(x) = c_1 + c_2(-1)^x + c_3 \cos\frac{\pi}{2}x + c_4 \sin\frac{\pi}{2}x.$$

□

Linearna diferencna jednačina višeg reda sa konstantnim koeficijentima nehomogena jednačina

Oblika je

$$a_n y(x+n) + a_{n-1} y(x+n-1) + \ldots + a_0 y(x) = b(x)$$

Prvo rešimo homogeni deo i neka je rešenje homogenog dela

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x).$$

Do konačnog rešenja možemo doći na dva načina

1° Varijacija konstanti. Opšte rešenje je oblika

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \cdots + c_n(x) y_n(x).$$

Do funkcija c_i dolazimo rešavajući sistem

$$\begin{array}{ccccccccc}
\Delta c_1(x) y_1(x+1) & + & \Delta c_2(x) y_2(x+1) & + & \cdots & + & \Delta c_n(x) y_n(x+1) & = & 0 \\
\Delta c_1(x) y_1(x+2) & + & \Delta c_2(x) y_2(x+2) & + & \cdots & + & \Delta c_n(x) y_n(x+2) & = & 0 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\Delta c_1(x) y_1(x+n-1) & + & \Delta c_2(x) y_2(x+n-1) & + & \cdots & + & \Delta c_n(x) y_n(x+n-1) & = & 0 \\
\Delta c_1(x) y_1(x+n) & + & \Delta c_2(x) y_2(x+n) & + & \cdots & + & \Delta c_n(x) y_n(x+n) & = & b(x)
\end{array}$$

Iz sistema dobijamo $\Delta c_i(x)$. Primenimo antidiferencni operator i dobijamo $c_i(x)$.

2° Metoda pogađanja rešenja. Koristi se samo ako je $b(x) = P_n(x)\alpha^x$. Rešenje je oblika $y_p = Q_n(x)\alpha^x x^s$, gde je s višestrukost α kao korena karakteristične jednačine.

14.10 Rešiti diferencnu jendačinu $y(x+2) - 4y(x+1) + 4y(x) = 2^{x+2}$.

Rešenje: Karakteristična jednačina je $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, pa su rešenja $\lambda_{1,2} = 2$. Homogeno rešenje je

$$y_h = c_1 2^x + c_2 x 2^x.$$

Rešimo prvo pogađačkom metodom. Posmatramo nehomogeni deo $\cdot 2^{x+2} = 4 \cdot 2^x$. Partikularno rešenje je oblika $Ax^2 2^x$, jer je 2 dvostruki koren karakteristične jednačine. Uvrštavanjem u jednačinu $y(x+2) - 4y(x+1) + 4y(x) = 4 \cdot 2^x$ dobijamo da je $A = \frac{1}{2}$. Stoga je $y_p = \frac{x^2 2^x}{2} = x^2 2^{x-1}$.

Rešenje je $y = y_h + y_p = c_1 2^x + c_2 x 2^x + x^2 2^{x-1}$.

Rešimo sada varijacijom konstanti. Rešenje tražimo uobliku $y = c_1(x)2^x + c_2(x)x2^x$. Odgovarajući sistem je

$$\Delta c_1 2^{x+1} + \Delta c_1 (x+1) 2^{x+1} = 0$$
$$\Delta c_1 2^{x+2} + \Delta c_1 (x+2) 2^{x+2} = 4 \cdot 2^x$$

Dobija se da je $\Delta c_1(x) = -(x+1)$, a $\Delta c_2(x) = 1$. Dakle, $c_1(x) = -(\frac{1}{2}x(x-1)) - x + \omega_1$, a $c_2(x) = x + \omega_2$. Konačno

$$y = (-(\frac{1}{2}x(x-1)) - x + \omega_1)2^x + (x + \omega_2)x2^x$$
$$y = \frac{1}{2}x^2 2^x + (\omega_2 - \frac{1}{2})x2^x + \omega_1 2^x.$$

□

Rikatijeva diferencna jednačina

Oblika je

$$a(x)y(x)y(x+1) + b(x)y(x) + c(x) = 0$$

Smenom $y(x) = \frac{z(x+1)}{z(x)}$ se svodi na

$$a(x)z(x+2) + b(x)z(x+1) + c(x)z(x) = 0$$

14.11 Reši diferencnu jednačinu $y(x+1) = 6 - \dfrac{9}{y(x)}$.

Rešenje: Množenjem sa $y(x)$ dobijamo

$$y(x)y(x+1) - 6y(x) + 9 = 0$$

što je Rikatijeva jednačina. Nakon smene dobijamo

$$z(x+2) - 6z(x+1) + 9z(x) = 0.$$

Rešenje karakteristične jednačine je $\lambda_{1,2} = 3$, pa je koančno rešenje $z(x) = c_1 3^x + c_2 x 3^x$. Dakle

$$y(x) = \frac{z(x+1)}{z(x)} = \frac{c_1 3^{x+1} + c_2(x+1)3^{x+1}}{c_1 3^x + c_2 x 3^x}.$$

□