

**ISPITNI ZADACI IZ  
OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA**

od DECEMBRA 1998.

**Profesor: Mirko Budinčević**

**Asistent: Aleksandar Pavlović**

## DECEMBAR 1998.

- (15) Naći ortogonalne trajektorije familije hiperbola  $xy = C$ .
- (30) Data je diferencijalna jednačina  $y' = x + y^2$ 
  - (5) Dokazati da postoji jedinstveno rešenje i naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija uz početne uslove  $x_0 = 1, y_0 = 1$  i oceni grešku.
  - (10) Da li postoji rešenje koje se za neko  $x_0, y_0$  može produžiti do  $-\infty$ .
  - (15) Pokazati da za  $x_0 > 0$  i neko  $y_0$  postoji rešenje sa vertikalnom asimptomom.
- (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $yy' + xy y'' - xy'^2 = x^3$ .
- (20) Rešiti sistem  $y' = y^2 \quad z' = \frac{z}{x} - yz^2$ .
- (AB) (15) Za sistem  $x' = (2x - y)(x - 2) \quad y' = xy - 2$  nađi kritične tačke i odredi tip.
- (C) (15) Reši diferencnu jednačinu  $y(n + 2) + y(n + 1) - 2y(n) = n(-2)^n + 3^n$ .

## JANUAR 1999.

- Dat je početni problem  $y' = x^3y - xy^3 - xy \quad y(x_0) = y_0$ .
  - Za  $x_0 = 2$  i  $y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceni grešku.
  - Da li postoje  $(x_0, y_0)$  takvi da data diferencijalna jednačina ima rešenje na  $[x_0, \infty)$ ?
  - Naći  $(x_0, y_0)$  takvo da data diferencijalna jednačina ima vertikalnu asimptomu.
- Naći krivu čija tangenta u tački dodira zaklapa ugao  $\beta$  sa pravom koja prolazi kroz koordinatni početak i tačku dodira, gde je  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .
- Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $yy'y''' + 2y'^2y'' = 3yy''^2$ .
- Rešiti sistem  $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$ .
- Naći  $k$  tako da svako rešenje diferencijalne jednačine  $y''t^4 + y'(2t^3 - 2t^2 \sin t) + ky = 0$  bude oscilatorno na  $(0, 1]$ .
- (C) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x + 2) - 4y(x + 1) + 4y(x) = 3^x$ .
- (AB) Naći kritične tačke i ispitati stabilnost u tački sa najvećim rastojanjem od koordinatnog početka za sistem
$$\begin{aligned}x' &= x^2 + y^2 - 6x - 8y \\y' &= x(3y - 4x + 7).\end{aligned}$$

## FEBRUAR 1999.

- Data je diferencijalna jednačina:  $xyy' = y^4 - x^2, \quad y(x_0) = y_0$ 
  - (5) Uz početni uslov  $y(1) = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceni grešku.
  - (5) Pokazati da postoje  $x_0$  i  $y_0$  takvi da postoji rešenje na intervalu  $[x_0, \infty)$ .
  - (15) Pokazati da postoje  $x_0$  i  $y_0$  takvi da postoji rešenje sa vertikalnom asimptomom.
- (20) Za diferencijalnu jednačinu:  $(x - 2)^2(x - 1)y'' + xy' + (x - 1)y = 0$  odrediti sve regularno-singularne tačke i rešiti jednačinu u jednoj od njih.
- (20) Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:
$$\begin{aligned}x''' &= 2x - y + t - \sin t \\y''' &= 3x - 2y - e^{3t}\end{aligned}$$
- (20) Oceni broj nula diferencijalne jednačine  $y'' + 2e^{2x}y' + 7e^{3x}y = 0$  na intervalu  $[-5, 5]$ .
- (C) (15) Reši diferencnu jednačinu  $y(x + 1) = 4 - \frac{4}{y(x)}$ .
- (AB) (15) Odrediti kritične tačke sistema
$$\begin{aligned}x' &= 2x^2 - 6x + xy - 3y \\y' &= yx + 4x - y^2 - 4y\end{aligned}$$
i ispitati tip za jednu od njih.

**JUL 1999.**

1. (25) Dat je početni problem  $y' = x^2 - y^4$ ,  $y(x_0) = y_0$ 
  - a) (15) Da li postoje  $(x_0, y_0)$  takvi da data diferencijalna jednačina ima rešenje na  $[x_0, \infty)$ ?
  - b) (5) Naći  $(x_0, y_0)$  takvo da data diferencijalna jednačina ima vertikalnu asimptotu.
  - c) (5) Za  $x_0 = 2$  i  $y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceni grešku.
2. (20) Naći krivu čija tangenta u tački dodira zaklapa ugao  $\beta$  sa pravom koja prolazi kroz koordinatni početak i tačku dodira, gde je  $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .
3. (20) Rešiti sistem:  $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$ .
4. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $y'y''' = 2y''^2$ .
- 5.(C) (15) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x+3) - 3y(x+2) + 4y(x+1) - 2y(x) = (x-1)e^x$ .
- 6.(AB) (15) Naći kritične tačke i ispitati stabilnost u tački sa najvećim rastojanjem od koordinatnog početka za sistem:  
 $x' = x^2 - y$       $y' = (x-y)(x-y+2)$ .

**SEPTEMBAR 1999.**

1. (25) Data je diferencijalna jednačina:  $y' = y^\alpha g(x)$ . Dokazati da za  $\alpha > 1$  postoji rešenje sa vertikalnom asimptotom, ako znamo da je funkcija  $g$  pozitivna i neprekidna na otvorenom intervalu  $(a, b)$ .
2. a) (15) Diferencijalnom jednačinom opisati krive sa osobinom da je zbir odsečaka koje tangenta krive pravi na osama konstantan i iznosi  $k$ .  
b) (15) Rešiti dobijenu Klerovu jednačinu.
3. (25) Ispitati oscilatornost rešenja diferencijalne jednačine:  $y'' + 2xy' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0$  u tački 0, ako je  $q$  pozitivna i neprekidna funkcija na intervalu  $(0, 1]$  sa osobinom da je  $\lim_{x \rightarrow 0^+} q(x) = 0$ .
- 4.(A,B) (20) Naći kritične tačke sistema  $\begin{cases} x' = 2x + y^2 - 1 \\ y' = 6x - y^2 + 1 \end{cases}$  i ispitati stabilnost u jednoj od njih.
- 4.(C) (20) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x+2) - 6y(x+1) + 9y(x) = 2^{x+1}$ .

**OKTOBAR 1999.**

1. (25) Data je diferencijalna jednačina  $y' = x^2y - xy^3$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći približno rešenje koje od pravog odstupa za manje od  $10^{-1}$ , uz početni uslov  $y(1) = 1$ .
  - b) Pokazati da postoji zasićeno rešenje na intervalu  $[1, \infty)$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takve da rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(y^2 + 2xy - x^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy = 0$ , znajući da ima integracioni množitelj koji je funkcija od  $x^2 + y^2$ .
3. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = x + \sin^2 x$ .
4. (20) Naći sve regularno-singularne tačke diferencijalne jednačine  $x^2(x+1)y'' + 2y' + 2y = 0$  i rešiti je u okoline najveće.
5. (AB) (15) Naći sve kritične tačke i ispitati stabilnost u jednoj od njih diferencijalne jednačine  $y' = \frac{x-y-1}{\ln(y^2-x)}$ .
5. (C) (15) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+2) - 4y(x+1) + 3y(x) = 3^x + 2x + 1$ .

**OKTOBAR II 1999.**

1. (25) Data je diferencijalna jednačina  $y' = x^3 - y^2x^2 - xy + y^3$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za početni uslov  $y(2) = 1$ .
  - b) Pokazati da postoji zasićeno rešenje na intervalu  $[1, \infty)$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takve da rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:  $y' = \frac{x}{z}$   $z' = -\frac{x}{y}$
3. (40) Data je diferencijalna jednačina:  $xy'' + y' - xy = 0$ .
  - a) Naći sve regularno singularne tačke i rešiti jednačinu u okolini jedne od njih.
  - b) Ispitati oscilatornost rešenja u tački  $\infty$ .
  - c) Oceniti broj nula na intervalu  $[1, 10]$ .
4. (AB) (15) Naći sve kritične tačke i ispitati stabilnost u jednoj od njih diferencijalne jednačine  $y' = \frac{x^2 - y^2 + 4y - 4}{x^2 + y^2 + 2y}$ .
4. (C) (15) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+2) + y(x+1) + \frac{1}{4}y(x) = 2^{x+1} + 3e^x + 1$ .

**NOVEMBAR 1999.**

1. (25) Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - x^4 + 2x^2 - 1$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za početni uslov  $y(2) = 1$ .
  - b) Pokazati da postoji zasićeno rešenje na intervalu  $[2, \infty)$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takve da rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $\frac{y - (x+1)y'}{y'^2 + 1} = 1$
3. (20) Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:  $-\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}$
4. (20) Rešiti rubni problem:  $x^2y'' + xy' + 4y = 0$   $y(1) = y'(e^\pi) = 1$
5. (AB) (15) Naći sve kritične tačke, ispitati stabilnost u jednoj od njih i njen tip za diferencijalnu jednačinu  $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$ .
5. (C) (15) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+2) - 2y(x+1) + y(x) = 2e^{x+1} + 4x + 1$ .

**DECEMBAR 1999.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3x - yx^2 - y^2 + x$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku uz početni uslov  $y(1) = 2$ .
  - b) Pokazati da za  $x_0 = 1$  postoji rešenje koje se može produžiti do beskonačnosti, kao i da postoji rešenje koje ima vertikalnu asimptotu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $(y \ln y)dx + (x - \ln y)dy = 0$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $y^{IV} + y'' = 7x - 3 \cos x + \ln x$
4. Data je diferencijalna jednačina:  $y'' + xy' + \frac{y}{x^2} = 0$ 
  - a) Oceniti broj nula rešenja na intervalu  $[\frac{1}{2}, 5]$ .
  - b) Ispitati oscilatornost u tački 0.
5. (AB) Naći sve kritične tačke, ispitati stabilnost u jednoj od njih i odrediti njen tip za sistem:
 
$$x' = \ln(1 - y + y^2) \quad y' = 3 - \sqrt{x^2 + 8y}$$
5. (C) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x+2) - 2y(x+1) + 2y(x) = 2^{x+1} + 5x - 3$

## JANUAR 2000.

1. Dat je početni problem  $y' = (y^2 - x^2 - 1)(y^2 - 1)$   $y(x_0) = y_0$ .

a) Za  $x_0 = 1$  i  $y_0 = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceni grešku.

b) Da li postoje  $(x_0, y_0)$  takvi da data diferencijalna jednačina ima rešenje na  $[x_0, \infty)$ ?

c) Naći  $(x_0, y_0)$  takvo da data diferencijalna jednačina ima rešenje sa vertikalnom asimptomom.

2. Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $xyy'' - xy'^2 = yy'$ .

3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} x'' + x' - 3x + 3y'' - y &= 2t + \cos t \\ x'' - x' + 3x + y'' + y &= \ln t \end{aligned}$$

4. Data je diferencijalna jednačina:  $(x-1)y'' + q(x)y = 0$ . Kakva treba da je funkcija  $q(x)$  da bi rešenje bilo oscilatorno u okolini tačke 1?

5. Data je diferencijalna jednačina;  $(1-x^2)y'' - xy' + \lambda^2 y = 0$ . Smenom nezavisne promenljive transformisati je na jednačinu sa konstantnim koeficijentima i rešiti rubni problem sa uslovima da je:  $y(a) = y(b) = 0$  i  $|a|, |b| < 1$ ,  $a \neq b$ .

Šta ako je  $1 < a < b$ ?

## FEBRUAR 2000.

1. (25) Data je diferencijalna jednačina  $xy' = x - y^3$   $y(x_0) = y_0$ .

a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija, uz početni uslov  $y(1) = 1$ , i oceniti grešku.

b) Pokazati da postoji zasićeno rešenje na intervalu  $[2, \infty)$ .

c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takve da rešenje jednačine ima vertikalnu asimptomu.

2. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $y'^2 + x^3 y^2 y' - xy y' - y^2 y' + xy^3 - x^3 y^4 = 0$ .

3. (20) Ispitati sve singularne tačke diferencijalne jednačine:  $(1-x)xy'' + xy' - y = 0$  i rešiti je u okolini jedne od regularno-singularnih tačaka.

4. (20) Naći sopstvene vrednosti i sopstvena rešenja Šturm-Ljuvilovog rubnog problema:

$$(xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0 \quad y'(1) = y'(2\pi) = 0$$

5. (AB) (15) Naći sve kritične tačke i ispitati stabilnost u jednoj od njih diferencijalne jednačine  $y' = \frac{\ln(2-y^2)}{e^x - e^y}$ .

5. (C) (15) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(n+2) - 6y(n+1) + 9y(n) = 2^{n+2} + n - 3^n$

## MART 2000.

1. Dat je sistem diferencijalnih jednačina:  $x' = \frac{x}{t} - yx^2$   $y' = y^2x$   $x(1) = y(1) = 1$

a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.

b) Rešiti sistem.

2. Data je diferencijalna jednačina:  $y' = y^3 - y + y^2x^2 - x^2 - y^2 + 1$   $y(x_0) = y_0$ .

a) Dokazati da rešenje  $y(x)$  ove diferencijalne jednačine sa početnim uslovom  $y(3) = 0$  ima osobinu da je  $|y(x)| < 1$  za  $x > 3$ .

b) Naći  $x_0$  i  $y_0$  da rešenje jednačine ima vertikalnu asimptomu ka  $-\infty$ .

3. Naći familiju krivih kod kojih dužina tangente od tačke dodira do preseka sa  $y$ -osom je jednaka odsečku  $y$ -ose između koordinatnog početka i tačke preseka sa tangentom.

4. Dokazati da rešenje diferencijalne jednačine:  $y''x + 2y' + x^2y = 0$  ima bar 15 nula na intervalu  $[1, 25]$ .

5. (AB) Dokazati da ako je tip kritične tačke  $(0, 0)$  diferencijalne jednačine

$(ax + by)dx + (mx + ny)dy = 0$  centar tada je to jednačina totalnog diferencijala.

Pokazati da obrnuto ne važi.

5. (C) Izračunati:  $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+3)}$

**APRIL 2000.**

1. Data je diferencijalna jednačina:  $y' = xy^3 + x^3y - xy$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a)(5) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - b)(10) Ispitati da li svako rešenje jednačine parna funkcija. Da li postoji rešenje koje je neparna funkcija?
  - c)(15) Dokazati da za  $x_0 > 1$  i  $y_0 > 0$  svako rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
2. Data je diferencijalna jednačina:  $y'' + 2y' + (x^2 + k + 1)y = 0$ .
  - a)(20) Naći  $k$  da rešenje ima bar jednu nulu na intervalu  $[-1, 1]$ .
  - b)(20) Proveriti da li je tačka  $\infty$  regularno singularna tačka. Ako jeste rešiti datu jednačinu u okolini nje, a ako nije rešiti je u okolini tačke 2. U oba slučaja uzeti da je  $k = -1$ .
- 3.(15) Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $x^4y' = y^2 - xy^2 + 2x^3y + x^2y + x^7 - x^5$  ako se zna da je jedno partikularno rešenje polinom.
4. (AB)(15) Odrediti sve kritične tačke i za jednu od njih ispitati stabilnost i odrediti tip za diferencijalnu jednačinu
 
$$y' = \frac{4x^2 + 9y^2 - 36}{y - 2x^2 + 2}$$
4. (C)(15) Koristeći inverzni diferencni operator izračunati:  $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^2}{2^x}$ .

**MAJ 2000.**

1. Data je diferencijalna jednačina:  $xy' = y^2 - x^6$   $y(x_0) = y_0$ 
  - a) Za početne uslove  $y(1) = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) Dokazati da je rešenje za početni uslov  $y(2) = 1$  uvek pozitivno za  $x > 2$ .
  - c) Dokazati da postoji rešenje savertikalnom asimptotom ka  $-\infty$ .
2. Naći familiju krivih sa osobinom da normala u svakoj tački prolazi kroz koordinatni početak.
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $y'y''' + 3y'y'' = 0$ .
4. Rešiti rubni problem  $y'' - y = 1$ , uz uslove da je  $y(0) = 0$  i da je  $y(x)$  ograničeno kad  $x \rightarrow +\infty$ .
- 5.(A,B) (20) Naći kritične tačke sistema
 
$$\begin{aligned} x' &= x^2 - y \\ y' &= \ln(1 - x - x^2) - \ln 3 \end{aligned}$$
 i ispitati tip i stabilnost u jednoj od njih.
- 5.(C) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x+2) + 4y(x) = (5x+1)2^x$

**JUN 2000.**

1. Neka su  $y(x), k(x), c(x)$  neprekidne u razmaku  $[x_0, b]$  i neka je  $k(x) \geq 0$ . Ako je

$$y(x) \geq c(x) + \int_{x_0}^x k(t)y(t)dt, \quad x \in [x_0, b]$$

dokazati da važi da je

$$y(x) \geq c(x) + \int_{x_0}^x c(t)k(t) \exp\left(\int_t^x k(s)ds\right) dt, \quad x \in [x_0, b].$$

2. Data je diferencijalna jednačina:  $x^2y' = x^2 - y^2$ ,  $y(x_0) = y_0$ 
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku za  $y_0 = x_0 = 1$ .
  - b) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje date diferencijalne jednačine ima vertikalnu asimptotu.
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(y^2 + y)dx + (y^2 - 2xy - x)dy = 0$  ako se zna da ima integracioni množitelj kao funkciju od  $x + y^2$ .
4. Dokazati da rešenje diferencijalne jednačine  $y'' + 2y' + (x^2 + 1)y = 0$  na intervalu  $[-10, 10]$  ima bar 11 nula.
5. (AB) Naći kritične tačke sistema

$$\begin{aligned} x' &= \ln(1 - x + y^2) \\ y' &= x^2 - 2y^2 + 1 \end{aligned},$$

ispitati stabilnost u jednoj od njih i odrediti njen tip.

5. (C) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x+1) - 2y(x) = \frac{2^x}{x(x+1)}$ ,  $y(1) = 1$

**JUL 2000.**

1. Neka je dat sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}x' &= 2x - 2y + 2z + 2t + \cos^2 t \\y' &= x + y - \ln t \\z' &= x + z\end{aligned}$$

Rešiti ga, naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.

2. Oceniti broj nula rešenja diferencijalne jednačine  $4(x+1)^2 y'' + 8(x+1)y' + 13y = 0$  na intervalu  $[-10, 10]$ . Da li je rešenje oscilatorno?

3. Dokazati da postoje  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje diferencijalne jednačine  $y' = y^\alpha f(x) + g(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$  ima vertikalnu asimptotu, ako je  $\alpha > 1$ , a funkcije  $f(x)$  i  $g(x)$  pozitivne i neprekidne na intervalu  $(a, b)$ .

4. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine:  $5y + y'^2 = x(x + y')$ .

5. (AB) U zavisnosti od parametra  $a$  ispitati stabilnost sistema

$$x' = ax - 2y + x^2 \quad y' = x + y + xy$$

u tački  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .

5. (C) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x+1) - (x+1)y(x) = 2^x(1-x)$   $y(1) = 3$ .

**AVGUST 2000.**

1. Dat je početni problem  $y' = x^2 - y^4$   $y(x_0) = y_0$ .

a) Za  $x_0 = 2$  i  $y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceni grešku.

b) Da li postoje  $(x_0, y_0)$  takvi da data diferencijalna jednačina ima rešenje na  $[x_0, \infty)$ ?

c) Naći  $(x_0, y_0)$  takvo da data diferencijalna jednačina ima rešenja sa vertikalnom asimptotom.

2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(x+y)dx + (xy+1)dy = 0$ .

3. Rešiti sistem  $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}$

4. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' - xy' - y = 0$ . Odrediti sve regularno-singularne tačke i rešiti u jednoj od njih.

5. Naći sopstvene vrednosti i sopstvena rešenja za  $y'' + 2y' + y - \lambda y = 0$  uz uslove  $y(0) = y(a) = 0$ , gde je  $a$  realan broj različit od nule.

**SEPTEMBAR 2000.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $x^2 y^2 y' = x^2 - y^2$   $y(x_0) = y_0$ . Dokazati da ako  $(x_0, y_0) \in \{(x, y) | y < x < 0\}$ , da tada rešenje diferencijalne jednačine ima vertikalnu asimptotu.

2. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$

3. Rešiti sistem  $x'' + 4x' - 2x - 2y' - y = \sin^2 t$   $x'' - 4x' - y'' + y' + 2y = 2t - e^{2t}$

4. Data je diferencijalna jednačina  $x^3 y'' - y' + \frac{7y}{4x} = 0$ . Oceniti broj nula na intervalu  $[2, 5]$  i ispitati oscilatornost na  $(0, 1]$ .

5. (AB) Naći kritične tačke i ispitati stabilnost u jednoj od njih za sistem

$$\begin{aligned}x' &= \sqrt{(x-y)^2 + 3} - 2 \\y' &= e^{y^2-x} - e.\end{aligned}$$

5. (C) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(n+2) + 6y(n+1) + 9y(n) = 2^n + 3^{n+1} - n!$

OKTOBAR 2000.

1. Dat je početni problem  $y' = \left(y + \frac{a}{x}\right)^2$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Ispitati za koje vrednosti realnih parametara  $a, b, p$  funkcija  $y_1 = bx^p$  predstavlja partikularno rešenje.
  - b) Za  $a = 1$  naći opšte rešenje.
  - c) Za koje  $x_0$  i  $y_0$  početni problem ima rešenje?
  - d) Da li postoje rešenja definisana nad čitavim  $\mathbb{R}$ ?
  - e) Da li postoje rešenja koja imaju vertikalnu asimptotu?
2. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , gde su  $p, q$  neprekidne funkcije. Dokazati da ako dva rešenja imaju lokalni maksimum u istoj tački  $x_0$  da su ta rešenja linearno zavisna.
3. Naći funkcije koje u svakoj svojoj tački  $(x, y)$  dele površinu pravougaonika sa temenima  $(0, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(x, y)$ ,  $(0, y)$  na dva dela u odnosu 3:1.
4. (AB) Data je diferencijalna jednačina:  $y' = \frac{\cos(x+y)}{e^x - e^y}$ . Odreći sve kritične tačke i ispitati tip i stabilnost u jednoj od njih.
4. (C) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(n+2) - 5y(n+1) + 4y(n) = n4^n + n^2$ .

OKTOBAR II 2000.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - yx^2 - 2yx - y$   $y(x_0) = y_0$ 
  - a) (5) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.
  - b) (5) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje se rešenje može produžiti do  $+\infty$ .
  - c) (5) Da li postoji rešenje definisano nad čitavim  $\mathbb{R}$ ?
  - d) (8) Ako je  $x_0 < 0$ , dokazati da je onda i rešenje  $y(x) < 0$  na čitavoj oblasti na kojoj je definisano.
  - e) (10) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu ka  $-\infty$ .
  - f) (12) Naći rešenje diferencijalne jednačine za  $x_0 = y_0 = 1$ .
2. Data je *Laguerre*-ova diferencijalna jednačina  $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$ 
  - a) (8) Odrediti sve singularne tačke i ispitati njihov karakter.
  - b) (12) Rešiti jednačinu u okolini tačke  $x = 0$ .
  - c) (20) Za  $\lambda \in \mathbb{N}_0$  partikularna rešenja  $L_n(x)$  su *Laguerreovi* polinomi. Naći prva tri i dati opšti obrazac.
  - d) (C) (15) Neka je

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}.$$

Dokazati da ovi polinomi zadovoljavaju *Laguerrovu* diferencijalnu jednačinu kao i diferencnu jednačinu

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1-x)P_n(x) - nP_{n-1}(x).$$

3. (AB) (15) Naći sve kritične tačke i ispitati stabilnost i karakter jedne od njih za difrencijalnu jednačinu

$$y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}.$$



**NOVEMBAR 2000.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - xy$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivni aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) Naći  $x_0$  i  $y_0$  sa osobinom da je rešenje diferencijalne jednačine definisano na intervalu  $[x_0, \infty)$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  sa osobinom da rešenje diferencijalne jednačine ima vertikalnu asimptotu.
2. Naći krive kod kojih je površina trougla obrazovanog tangentom, normalom u tački dodira i  $x$  osom konstantna i iznosi  $a^2$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2y'' + xy' + 4y = 10x$
4. Rešiti sistem:  $\frac{dx}{y-u} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{u-y} = \frac{du}{x-z}$ .
- 5.(AB) Naći sve kritične tačke, ispitati stabilnost i tip jedne od njih za jednačinu  $y' = \frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$ .
- 5.(C) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+1) = 6 - \frac{9}{y(x)}$ .

**DECEMBAR 2000.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - y^2x - 2y^2 + yx + y$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija, uz početni uslov  $y(1) = 1$ , i oceniti grešku.
  - b) Pokazati da ako  $y_0 \in (0, 1)$ , da tada i rešenje  $y(x) \in (0, 1)$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takve da rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
2. Naći rešenje diferencijalne jednačine  $y' \sin 2x = 2(y + \cos x)$  koje ostaje ograničeno kad  $x$  teži  $\frac{\pi}{2}$ .
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:
 
$$x'' + 5x' + 2y' + y = \cos^2 t \quad 3x'' + 5x + y' + 3y = e^t.$$
4. Data je diferencijalna jednačina  $(x+1)xy'' + (x+2)y' - y = x + \frac{1}{x}$ . Naći opšte rešenje ako se zna da je jedno rešenje homogenog dela jednačine polinom.
5. (AB) Data je diferencijalna jednačina  $y' = \frac{\arctg(x^2 + xy)}{\sqrt{x^2 - y + 2} - 2}$ . Naći sve kritične tačke i za jednu od njih odrediti tip i ispitati stabilnost u njoj.
5. (C) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(n+3) - 3y(n+2) + 3y(n+1) - y(n) = 2e^{n+1} + 2^n + 1$ .

**JANUAR 2001.**

1. Data je diferencijalna jednačina:  $(p(x)y')' - q(x)y = 0$ . Ukoliko su  $p$  i  $q$  neprekidne i pozitivne funkcija i  $p$  neprekidno diferencijabilna, tada za svako rešenje postoji tačka  $x_0$  da je rešenje monotono levo i desno od nje.  
Uputstvo: analizirati funkciju  $M(x) = p(x)yy'$ .
2. Data je matrica  $A = \begin{bmatrix} -1 & p & 0 \\ p & -1 & q \\ 0 & q & -1 \end{bmatrix}$ , i vektor  $b = \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ (t+1)e^{2t} \\ t^3 \end{bmatrix}$ 
  - a) Rešiti sistem  $X' = AX + b$  za  $p = 3/5$  i  $q = 4/5$ .
  - b) (AB) Za koje vrednosti parametra  $p$  i  $q$  je sistem  $X' = AX$  asimptoski (striktno) stabilan.
3. Dat je početni problem:  $y' = x + \cos y$ ,  $y(0) = 0$ . Pokazati da svi članovi niza sukcesivnih aproksimacija ostaju u oblasti  $D = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 2\}$ .  
Koji se član niza razlikuje od rešenja za manje od  $10^{-3}$ ?
4. Rešiti granični problem:  $y'' + \lambda y = 0$ ,  $y(0) - y(1) = 0$ ,  $y'(0) - y'(1) = 0$ .
5. (C) Data je diferencna jednačina:  $p_0(x)y(x+2) + p_1(x)y(x+1) + p_2(x)y(x) = 0$ . Naći potreban i dovoljan uslov da se leva strana date jednačine može predstaviti u obliku  $\Delta\{f(x)y(x+1) + g(x)y(x)\}$ .

**FEBRUAR 2001.**

1. Data je diferencijalna jednačina:  $xy' = y + 3x^2(x^2 + y^2)$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Da li postoji jedinstveno rešenje?
  - b) Za  $x_0 = y_0 = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija
  - c) Dokazati da za  $x_0 > \frac{\sqrt{3}}{3}$  i  $y_0 > 0$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - d) Naći integracioni množitelj koji je funkcija od  $x^2 + y^2$  i rešiti jednačinu.
2. Data je diferencijalna jednačina  $x^2y'' + (xy' - y)^3 = 0$ . Smenom nezavisne promenljive  $x = f(t)$  svesti jednačinu na jednačinu u kojoj ne figuriše  $t$  eksplicitno, a zatim je rešiti.
3. Neka funkcija  $F(x, y)$  zadovoljava Lipšicov uslov po  $y$  za  $x \geq a$ , a  $f(x)$  uslov  $f'(x) \leq F(x, f(x))$ . Neka je  $g(x)$  rešenje diferencijalne jednačine  $y' = F(x, y)$  takvo da je  $g(a) = f(a)$ . Tada je  $g(x) \geq f(x)$  za  $x > a$ . Dokazati.
4. Rešiti Sturm-Liouvilleov granični problem:  $y^{iv} - \lambda^4 y = 0$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $y(0) = y''(0) = 0$  i  $y''(1) = y'''(1) - y(1) = 0$ .

**MART 2001.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = x^2 - y^2$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Da li rešenje kada je  $x_0 = y_0 = 0$  neparna funkcija?
  - b) Dokazati da je za  $y_0 = -x_0$  zasićeno rešenje definisano nad čitavim  $\mathbb{R}$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine:  $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y^2(y'y''' - y''^2) = yy'^2y'' - y'^4 + y^4$ .
4. Dat je sistem diferencijalnih jednačina  $x' = x + 2xy$   $y' = y + 2xy$ ,  $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ .
  - a) Naći opšte rešenje sistema.
  - b) Za  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 1$  i  $y_0 = 2$  naći tri člana niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - c) (AB) Odrediti tip svih kritičnih tačaka sistema i ispitati stabilnost u njima.
5. (C) Rešiti sistem diferencnih jednačina:  $y(n+1) = y(n) - 9x(n) + 3^n$   $x(n+1) = -y(n) + x(n)$ .

**MART II 2001.**

1. (30) Data je diferencijalna jednačina:  $y' = -y^5 + y^4x + y^2x - yx^2$   $y(x_0) = y_0$ .
    - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 2$  i oceniti grešku
    - b) Dokazati da je za proizvoljno  $x_0$  zasićeno rešenje definisano na  $[x_0, \infty)$ .
    - c) Da li postoji rešenje definisano na  $(-\infty, \infty)$ ?
    - d) Naći  $x_0$  i  $y_0$  da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  2. (15) Naći krive kod kojih je površina trapeza čije stranice leže na osama, tangenti i pravi paralelnoj sa  $x$ -osom koja prolazi kroz tačku dodira konstantna i iznosi  $3a^2$ .
- $$\begin{matrix} x' = & x & -y & +z & +te^t \\ 3. \text{ (20) Rešiti sistem diferencijalnih jednačina: } & y' = & x & +y & -z & -te^{3t} \\ & z' = & & -y & +2z & +\sin t \end{matrix}$$
4. (15) Data je diferencijalna jednačina:  $xy'' + 2xy' + (x+1)y = 0$ .
    - a) Da li je rešenje oscilatorno?
    - b) Oceniti broj nula na  $[25, 100]$
  5. (CD) (20) Date su diferencne jednačine:

$$y(x+2) + a(x)y(x+1) + b(x)y(x) = c(x) \quad (1)$$

$$\Delta^2 y(x) + A(x)\Delta y(x) + B(x)y(x) = C(x) \quad (2)$$

- a) Naći vezu između funkcija  $a, b, c$  i  $A, B, C$  da bi jednačine bile ekvivalentne.
- b) Dokazati da ako je  $y_p(x)$  partikularno rešenje diferencijalne jednačine (2), da se smenom  $y(x) = z(x)y_p(x)$  ona svodi na linearnu diferencnu jednačinu.
- c) Primeniti to na jednačinu  $y(x+2) - x(x+1)y(x) = 2(x+1)!$  ako se zna da je  $y_p(x) = (x-1)!$ .
5. (AB) (20) U zavisnosti od parametara  $a$  i  $b$  ispitati stabilnost i odrediti tip kritične tačke  $(0, 0)$  za sistem:  $x' = -x + by$   $y' = ax - y$

## APRIL 2001.

1. (30) Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2x^2 - yx^2 - y^3 + y^2$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Za  $x_0 = y_0 = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (6) Dokazati da ako  $y_0 \in (0, 1)$  onda je zasićeno rešenje  $y(x)$  definisano na  $(-\infty, \infty)$  i važi  $0 < y(x) < 1$ .
  - c) (7) Pokazati da se za proizvoljno  $x_0$  i  $y_0$  rešenje može produžiti na  $[x_0, \infty)$ .
  - d) (12) Pokazati da za  $y_0 < 0$  rešenje ima vertikalnu asimptotu ka  $-\infty$ .
2. (15) Data je diferencijalna jednačina  $(x^3 - xy^2 - y)dx + (y^2 - x^2 + x)dy = 0$ . Rešiti je ako se zna da ima integracioni množitelj  $\mu = \mu(x^2 - y^2)$ .
3. (20) Data je diferencijalna jednačina  $(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0$ . Ispitati karakter tačke  $x = \infty$  i rešiti diferencijalnu jednačinu u obliku uopštenog stepenog reda u okolini jedne od regularno singularnih tačaka.
4. (15) Rešiti sistem:  $y_1y_2' + y_1'y_2 = 2$   $y_1y_2' - y_1'y_2 = 1$ .
5. (AB) (20) U zavisnosti od parametra  $a$  ispitati stabilnost u tački  $(0, 0)$  sistema diferencijalnih jednačina:  $x' = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay}$   $y' = \ln(1 + 9x + ay)$ .
5. (CD) (20) Data je diferencijalna jednačina:  $y_{n+1} = 2y_n + \sqrt{3y_n^2 + 1}$ ,  $y_0 = 1$ .
  - a) Dokazati da niz  $\langle y_n \rangle$  strogo raste i neograničen.
  - b) Dokazati da rešenje zadovoljava linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima drugog reda.
  - c) Rešiti tako dobijenu diferencijalnu jednačinu.
  - d) Dokazati da je  $y_n$  prirodan broj za svako  $n$  iz skupa prirodnih brojeva.

## MAJ 2001.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - y^2e^x - y^2x + xe^xy$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - b) Ako je  $0 < y_0 < e^{x_0}$ , tada je zasićeno rešenje definisano na čitavim  $\mathbb{R}$ . Dokazati.
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Data je diferencijalna jednačina  $(1 - x)y'' + 2y' + \frac{1}{x}y = 0$ .
  - a) Odrediti sve regularno singularne tačke.
  - b) Rešiti diferencijalnu jednačinu u okolini jedne od njih.
  - c) Ispitati oscilatornost rešenja.
  - d) Oceniti broj nula na intervalu  $[2, 5]$ .
3. Odrediti  $a$  i  $b$  tako da diferencijalna jednačina:  $\frac{1}{x}(ax^2 - y^2)dx + (bx + 2ay)dy = 0$  ima integracioni množitelj  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$  i rešiti je.
4. (AB) U zavisnosti od parametra  $a$  diskutovati stabilnost u tački  $(0, 0)$  i tip te tačke za diferencijalnu jednačinu  $(ax + y)dx + (x + ay)dy = 0$ .
4. (CD) Izračunati  $\sum_{n=3}^{100} n \binom{n}{3}$ .

## JUN 2001.

1. (30) Data je diferencijalna jednačina  $xyy' = y - x$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Dokazati da se za  $x_0 = 2$  i  $y_0 = 1$  rešenje ne može produžiti na desno do  $+\infty$ , niti da desno od  $x_0$  ima vertikalnu asimptotu.
  - b) Dokazati da za  $y_0 < x_0 < 0$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' = y(e^{3x} - e^{-3x}) + y^2(e^{-3x} - \frac{1}{2}) + 2e^{3x} + 2$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y_p = ae^{bx}$ .
3. (35) Data je diferencijalna jednačina  $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^xy = 0$ .
  - a) Smenom  $y = uf(x)$ , za pogodno izabrano  $f$ , transformisati u oblik  $u'' + q(x)u = 0$  i ispitati da li su rešenja oscilatorna.
  - b) Oceniti broj nula na intervalu  $[1, 5]$ .
  - c) Rešiti je znajući da je jedno partikularno rešenje polinom po  $e^x$ .
4. (15) Odrediti krive sa osobinom da je deo tangente u proizvoljnoj tački krive izmedju  $x$ -ose i prave  $y = ax + b$  dodirnom tačkom podeljen na dva dela.

**JUL 2001.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = yx - y^4$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$
  - b) Dokazati da za  $y_0 > 0$  se svako rešenje može produžiti na desno do  $+\infty$ .
  - c) Ako  $y_0 < 0$  pokazati da je rešenje  $y(x) < 0$ .
  - d) Dokazati da za pogodan izbor  $x_0$  i  $y_0$  rešenje ima vertikalnu asimptotu ka  $-\infty$ .
2. Naći pod kojim uslovom diferencijalna jednačina  $Pdx + Qdy = 0$  dopušta integracioni množitelj koji je funkcija do  $u = y^2 - x$ . Primeniti to na slučaj kada je  $P = (2y^2 - 2x - 1)e^x + (2y^2 - 3x)e^y$ , a  $Q = 2ye^x + 2x(y^2 + y - x)e^y$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $\frac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \frac{2yy'}{x}$ .
4. Naći sve regularno-singularne tačke diferencijalne jednačine  $(x-1)y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$  i rešiti u okolini jedne od njih.
5. (AB) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$  znajući da je partikularno rešenje homogenog dela polinom. Primeniti to na slučaj:

$$\begin{vmatrix} y & x^2 + 1 & xe^x \\ y' & 2x & (x+1)e^x \\ y'' & 2 & (x+2)e^x \end{vmatrix} = x.$$

5. (CD) Data je diferencijalna jednačina  $y(x+2) + p(x)y(x+1) + q(x)y(x) = 0$ . Pokazati da smenom  $y(x) = z(x)y_1(x)$  može sniziti njen red ukoliko je  $y_1$  njeno partikularno rešenje. Koristeći to, rešiti jednačinu:

$$\begin{vmatrix} y(x) & 2^x & x \\ y(x+1) & 2^{x+1} & x+1 \\ y(x+2) & 2^{x+2} & x+2 \end{vmatrix} = 0.$$

**AVGUST 2001.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = x^2 + y^2$ ,  $y(0) = 0$  i oblast  $D = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq a\}$ .
  - a) Odrediti  $a$  tako da niz sukcesivnih aproksimacija bude definisan za  $|x| \leq a$ .
  - b) Naći treći član niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - c) Dati ocenu razmaka na kojem postoji zasićeno rešenje.
2. Rešiti sistem  $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}$ .
3. Data je diferencijalna jednačina  $3y^2y' + 16x = 2xy^3$ .
  - a) Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine.
  - b) Naći rešenje koje je ograničeno kad  $x \rightarrow +\infty$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $yy''' + 3y'y'' = 0$ . Sniziti red za jedan ako se zna da se može predstaviti kao izvod neke diferencijalne jednačine, a zatim je rešiti.
5. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} x' &= 2x - y - z + e^t \\ y' &= 2x - y - 2z + \sin^2 t \\ z' &= -x + y + 2z + 2t^2 - 1 \end{aligned}$$

**SEPTEMBAR 2001.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = \min\{x, y\}$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (12) Za koje  $x_0$  i  $y_0$  jednačina ima jedinstveno rešenje?
  - b) (8) Rešiti je za  $x_0 = y_0 = 0$ .
2. Data je diferencijalna jednačina  $x^a y'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y \sin^b x = 0$ 
  - a) (5) Za koje vrednosti parametra  $a$  i  $b$  se može naći rešenje jednačine u obliku stepenog reda u okolini tačke  $x = 0$ ?
  - b) (15) Za  $a = 1$  i  $b = 0$  naći takvo rešenje.
  - c) (5) Ako je  $b = 0$  pokazati za koje  $a$  data diferencijalna jednačina nema polinom kao partikularno rešenje.
  - d) (15) Za  $a = 1$  i  $b = 0$  Naći opšte rešenje jednačine ako se zna da ima partikularno rešenje u obliku  $e^{\alpha x}$ .
3. (20) Rešiti sistem  $\frac{dx}{x + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ .
4. (20) Dokazati da diferencijalna jednačina  $y'' + 4xy' + (5x^2 + 2)y = 0$  ima bar 20 nula na intervalu  $[1, 16]$ .

**OKTOBAR 2001.**

- 1.(25) Data je diferencijalna jednačina  $y' = y - x$   $y(0) = 0$ .
  - a)(5) Rešiti je.
  - b)(10) Naći rešenje pomoću niza sukcesivnih aproksimacija.
  - c)(10) Naći treći član niza podjednako neprekidnih funkcija definisanih u dokazu Peanove teoreme.
- 2.(20) Rešiti Besselovu jednačinu  $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$  u okolini tačke  $x = 0$ .
- 3.(20) Data je diferencijalna jednačina  $x^4 y'' + y = \cos \frac{1}{x}$ .
  - a)(5) Transformisati je uvođenjem smene  $x = \frac{1}{t}$ .
  - b)(7) Pogodnim izborom funkcije  $f$ , tako dobijenu jednačinu, smenom zavisne promenljive  $y = uf(t)$  svesti je na jednačinu sa konstantnim koeficijentima.
  - c)(8) Rešiti tako dobijenu jednačinu.
- 4.(20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{(y')^2}{y}$ .
- 5.(AB)(15) Naći kritične tačke i ispitati stabilnost u jednoj od njih za sistem
 
$$\begin{aligned} x' &= x^2 - y \\ y' &= \ln(1 - x + x^2) - \ln 3. \end{aligned}$$
- 5.(CD)(15) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x + 2) + 3y(x + 1) + 2y(x) = 2^x + x^2 + 1$ .

**OKTOBAR II 2001.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = x^2 - y^2 x - xy + y^3$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (8) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takvo da je rešenje definisano na čitavom  $\mathbb{R}$ .
  - c) (12) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takvo da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Rešiti jednačinu  $2xy' - y = y' \ln(yy')$ .
3. (20) Ispitati sve singularne tačke jednačine  $(x - x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$  i rešiti je u okolini jedne od njih.
4. (20) Da li postoji beskonačno nula rešenja jednačine  $x^5 y'' + y = 0$  na intervalu  $(0, 1]$ ?
5. (15) Rešiti sistem  $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2 + 1}}$ .

### NOVEMBAR 2001.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^a$   $y(x_0) = y_0$   $y_0 \geq 0$ .
  - a) Za koje  $a$  postoji rešenje?
  - b) Za koje  $a$  ne postoji jedinstveno rešenje? U kojim tačkama?
  - c) Za koje  $a$  rešenje diferencijalne jednačine ima vertikalnu asimptotu, ako je  $y_0 > 0$ ?
  - d) Za koje  $a$  se rešenje može produžiti na čitav skup  $\mathbb{R}$ ?
2. Znajući da je jedno partikularno rešenje polinom rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x^3 - 1)y' = 2xy^2 - x^2y - 1$  uz početni uslov  $y(0) = -\frac{1}{4}$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $5y'''^2 - 3y''y^{iv} = 0$  znajući da je potpun izvod diferencijalne jednačine nižeg reda.
4. Rešiti sistem  $2zy' = y^2 - z^2 + 1$ ,  $z' = z + y$ .
5. Dokazati da ako je  $q(x) < 0$  rešenja jednačine  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$  ne mogu imati pozitivan maksimum.

### DECEMBAR 2001.

- 1.(25) Neka je  $f(x, y)$  neprekidna funkcija nad nekom oblasti  $D$ . Ako su  $y_1(x)$  i  $y_2(x)$  dva rešenja početnog problema  $y' = f(x, y)$   $y(x_0) = y_0$ , gde  $(x_0, y_0) \in D$  na nekom razmaku  $I$ , pokazati da su i  $y_3(x) = \max\{y_1(x), y_2(x)\}$  i  $y_4(x) = \min\{y_1(x), y_2(x)\}$  rešenja istog početnog problema na istom razmaku  $I$ .
- 2.(20) Naći sva rešenja jednačine  $y'^3 + yy'^2 - y' \sin^2 x - y \sin^2 x = 0$ .
3. Data je diferencijalna jednačina  $(x - 1)y'' + y' - (x - 1)^2y = 0$ 
  - a)(15) Rešiti je u okolini tačke  $x = 0$ .
  - b)(15) Rešiti je u okolini tačke  $x = 1$ .
  - c)(5) Da li je moguće rešiti jednačinu u okolini tačke  $x = \infty$ ?
- 4.(20) Pokazati da diferencijalna jednačina  $(ae^{bx} + \frac{1}{b^2})y'' = y$  ima partikularno rešenje oblika  $y_1 = e^{\alpha x} + \beta$  za neko  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  
Primeniti to rešavajući diferencijalnu jednačinu  $(e^x + 1)y'' = y$ .

### JANUAR 2002.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y(y^2 - x)x^2$   $y(x_0) = y_0$ 
  - a) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.
  - b) Analizom polja pravaca dokazati da postoje  $x_0$  i  $y_0$  takvi da je rešenje definisano na čitavom  $\mathbb{R}$ .
  - c) Analizom polja pravaca pokazati da postoje  $x_0, y_0$  da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - d) Za  $x_0 = y_0 = 0$  rešiti diferencijalnu jednačinu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy'' - y' = x^2yy'$  znajući da je izvod diferencijalne jednačine nižeg reda.
3. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + 2y' + xy = 0$ . Rešiti je u okolini tačke  $x = 0$ . Rešenja dati u zatvorenom obliku (sumirati red).
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(2x^2 \ln y - x)y' = y$ .
5. (AB) Date su diferencijalne jednačine:

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

- a) Naći oblik zajedničkog netrivialnog rešenja.
  - b) Koji uslov zadovoljavaju koeficijenti da bi postojalo zajedničko netrivialno rešenje.
5. (CD) U uzgajalištu postoji par kunića. Svakog meseca on okoti po par kunića. Maldunci su reproduktivno sposobni posle (kad napune) mesec dana i oni takođe svaki put okote po par kunića. Formirati odgovarajući diferencnu jednačinu i odrediti broj kunića u uzgajalištu posle dve godine.

### MART 2002.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - x^2 - 2x$ ,  $y(x_0) = y_0$ 
  - a)(3) Ispitati da li postoji jedinstveno rešenje.
  - b)(5) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - b)(7) Dokazati, bez rešavanja jednačine, da se za  $x_0 = y_0 = 2$  rešenje može neograničeno produžiti nadesno.
  - c)(10) Dokazati, bez rešavanja jednačine, da za  $x_0 = -1$  i  $y_0$  dovoljno veliko, rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - d)(20) Pokazati da postoji rešenje koje je polinom i naći opšte rešenje jednačine.
- 2.(20) Naći rešenje diferencijalne jednačine  $x^2(x-2)y'' + x(3x+1)y' - y = 0$  za  $|x| > 2$ .
- 3.(20) Naći familiju krivih kod kojih duž koja spaja tačku dodira sa presekom tangente i  $x$  ose konstantna i iznosi  $c^2$ .
- 4.(AB)(15) Odrediti kritične tačke diferencijalne jednačine  $y' = \frac{e^x - e^y}{\ln(4y - x^2 - 2x)}$ , ispitati stabilnost i tip jedne od njih.
- 4.(CD)(15) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x+2) + y(x+1) - 6y(x) = 2^{x+1}$ .

### APRIL 2002.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - y^2x + y^2 - xy$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Pokazati da je za  $x_0 > 0$  i  $x_0 = y_0$  rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
  - b) (5) Pokazati da ako je  $y_0 \in (-1, 0)$  da je onda rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$  i važi  $y(x) \in (0, 1)$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ .
  - c) (5) Pokazati da se za proizvoljno  $x_0$  i  $y_0$  rešenje može neograničeno produžiti nalevo.
  - d) (10) Pokazati da za  $x_0 = 0$  postoji  $y_0$  da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Data je diferencijalna jednačina  $(16x + 8x^2 + 3y^2)dx + (-8x^2 + 6y - 3y^2)dy = 0$ . Znajući da ima integracioni množitelj funkciju  $f(x-y)$  rešiti je.
3. (20) Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $x^2y'^2 = xyy' + 1$ .
4. (15) Rešiti rubni problem:  $x^2y'' - 6y = 0$ ,  $y(1) = 2$  i  $y(0)$  je ograničeno.
5. (20) (AB) Dat je sistem diferencijalnih jednačina:

$$x' = \ln(1 + y + \sin x) \quad y' = 2 + \sqrt[3]{3 \sin x - 8}$$

Odrediti sve kritične tačke i ispitati stabilnost u svakoj od njih.

5. (20) (CD) Izračunati  $\sum_{x=1}^n \frac{x+3}{x(x+1)(x+2)}$ .

### MAJ 2002.

1. (45) Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - xy - y + x$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Za  $x_0 = y_0 = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (8) Analizom polja pravaca pokazati da je za  $x_0 = y_0$  rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
  - c) (12) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - d) (20) Naći opšte rešenje date diferencijalne jednačina.
2. (20) Data je diferencijalna jednačina  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ . Pokazati da u slučaju  $q(x) < 0$ , rešenje ne može imati pozitivan maksimum.
3. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $yy'' - 2yy' \ln y = y'^2$ .
4. (15) Rešiti sistem:  $x' = y + \operatorname{tg}^2 t - 1$   $y' = -x + \operatorname{tg} t$ .

### JUN 2002.

1. Za koje  $n$  diferencijalna jednačina  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ , gde je  $f$  neprekidno diferencijabilna funkcija na  $\mathbf{R}^{n+1}$ , može da ima medju svojim rešenjima dve funkcije:  $y_1 = x$  i  $y_2 = \sin x$ ?
2. Naći familiju krivih sa osobinom da je površina trapeza obrazovanog osama, tangentom i pravom paralelnom sa  $x$ -osom koja prolazi kroz tačku dodira konstantna i iznosi  $2a^2$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3$ .
4. Oceniti broj nula rešenja diferencijalne jednačine  $y'' - 4y' + y(4 - x^2) = 0$  na intervalu  $[1, 10]$ . Da li je rešenje oscilatorno?
5. (AB) Za koje vrednosti parametra  $a$  je rešenje diferencijalne jednačine  $y^{IV} + ay''' + y'' + 2y' + y = 0$  stabilno u okolini nule.

**JUL 2002.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = (1 - \sin y)(x^2 + y^2)$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (3) Pokazati jedinstvenost rešenja.
  - b) (10) Dokazati da je svako rešenje ograničeno.
  - c) (12) Naći  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ , gde je  $y(x)$  rešenje date jednačine.
2. (20) Naći sva rešenja diferencijalne jednačine:  $y'^2 - yy' + e^x = 0$ .
3. Dat je sistem diferencijalnih jednačina:
$$\begin{matrix} tx' + a(t)x + b(t)y = 0 \\ ty' + c(t)y + d(t)x = 0 \end{matrix}$$
  - a) (14) Dokazati da je tačka  $t = 0$  regularna ili regularno singularna tačka ako su  $a, b, c, d$  analitičke funkcije.
  - b) (6) Kakve treba da su funkcije  $a, b, c, d$  da bi tačka  $t = 0$  bila regularna?
  - c) (20) Rešiti sistem za  $a(t) = 1$ ,  $b(t) = t^2$ ,  $c(t) = 2$  i  $d(t) = t^3$ .
4. (15) Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + 2y' + y = 0$ . Ispitati oscilatornost u desnoj okolini tačke  $x = 0$ .
5. (CD) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+1) - y(x)(x+1) = 2^x(1-x)$ ,  $y(1) = 12$ .

**AVGUST 2002.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 + x^3$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) Da li se rešenje za  $x_0 = y_0 = 1$  može produžiti na desno do  $+\infty$ ?
  - c) Pokazati da za  $x_0 = 0$  i  $y_0 = -2$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Naći familiju krivih ortogonalnih na familiju krivih  $y^2 = Ce^x + x + 1$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' + 4xy' + (4x^2 + 2)y = 0$  znajući da je jedno rešenje oblika  $y_1 = e^{ax^2}$ .
4. Rešiti sistem

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy\sqrt{z^2 + 1}}$$

5. Rešiti sistem

$$\begin{matrix} x' & = & y - 2z - x & - & e^{-t} \\ y' & = & 4x + y & + & e^t \\ z' & = & 2x + y - z & + & t^2 + 1 \end{matrix}$$

**SEPTEMBAR 2002.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = \sin^2 y(x^2 + y^2)$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (3) Pokazati jedinstvenost rešenja.
  - b) (10) Dokazati da je svako rešenje ograničeno.
  - c) (12) Naći  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ , gde je  $y(x)$  rešenje date jednačine.
2. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$ .
3. Data je diferencijalna jednačina  $9x^2y'' - (x^2 - 2)y = 0$ .
  - a) (5) Ispitati karakter svih tačaka.
  - b) (10) Rešiti je u okolini tačke 0.
  - c) (10) Rešiti je u okolini tačke 1.
4. (15) Rešiti sistem  $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$ .
5. (AB) (15) Naći sve kritične tačke sistema

$$x' = \ln\left(\frac{y^2 - y + 1}{3}\right) \quad y' = x^2 - y^2,$$

ispitati stabilnost u jednoj od njih i odrediti njen tip.

5. (CD) (15) Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x+2) - 2y(x+1) + y(x) = e^x + x - 1$



### OKTOBAR 2002.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^4 - y^3 - y^2x^4 + yx^4$   $y(x_0) = y_0$ 
  - a) (3) Za  $x_0 = y_0 = 1$  rešiti jednačinu.
  - b) (5) Za  $x_0 = y_0 = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - c) (8) Pokazati da je za  $x_0 = 2$  i  $y_0 = 4$  rešenje definisano na čitavom  $\mathbb{R}$ .
  - d) (9) Pokazati da za  $x_0 = 0$  i dovoljno veliko  $y_0$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - e) (5) Ako  $y_0 \in (0, 1)$  onda  $y(x) \in (0, 1)$ . Pokazati.
2. (20) Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $y = 2xy' + y^2y'^3$ .
3. (15) Za koje vrednosti  $a$  i  $b$  rešenje diferencijalne jednačine  $y'' + ay' + by = 0$  teži nuli kad  $x$  teži beskonačnosti?
4. (15) Rešiti rubni problem  $y'' + y = 1$   $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = 0$ .
5. (20) Data je diferencijalna jednačina  $x^2y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$ . Pokazati da na svakom intervalu  $[4n, 4(n+1)]$  rešenje jednačine ima barem jednu nulu. Da li je rešenje oscilatorno?

### OKTOBAR II 2002.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - yx^2$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku za  $x_0 = y_0 = 1$ .
  - b) Pokazati da se za  $x_0 = y_0 > 0$  rešenje može produžiti na čitav  $\mathbb{R}$ .
  - c) Pokazati da postoji rešenje koje ima vertikalnu asimptotu ka  $-\infty$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(2x - 5y + 3)dx - (2x + 4y - 6)dy = 0$ .
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}x' - x + y' + 2y &= 1 + e^t \\y' + 2y + z' + z &= 2 + e^t \\x' - x + z' + z &= 3 + e^t\end{aligned}$$

4. Smenom nezavisne promenljive promenljive diferencijalnu jednačinu  $y'' + (4x - \frac{1}{x})y' + 4x^2y = 3xe^{-x^2}$  svesti na jednačinu sa konstantnim koeficijentima, a zatim je rešiti.
5. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + 2y' + (1 + \frac{4}{x^2})y = 0$ . Oceniti broj nula na intervalu  $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$ . Da li je rešenje oscilatorno u okolini tačke 0. A da li je tačka  $+\infty$  tačka nagomilavanja nula rešenja diferencijalne jednačine?

### NOVEMBAR 2002.

1. Data je diferencijalna jednačina  $xyy' = x - y^3$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (8) Pokazati da je za proizvoljno  $x_0, y_0 > 0$  zasićeno rešenje definisano na intervalu  $[x_0, +\infty)$ .
  - c) (12) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takvo da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. (15) Rešiti početni problem  $(2x^2y \ln y - x)y' = y$ ,  $y(1) = 1$ .
3. Data je diferencijalna jednačina  $(1 - x^2)y'' - xy' + \lambda^2y = 0$ .
  - a) (20) Rešiti je u okolini tačke  $x = 0$ .
  - b) (20) Smenom nezavisne promenljive naći sopstvene vrednosti i sopstvena rešenja uz rubni uslov  $y(0) = y(\frac{1}{2}) = 0$ .
4. (20) Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:  $y' = \frac{z}{x}$   $z' = \frac{(y-z)^2 + xz}{x^2}$ .

DECEMBAR 2002.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - y^2x^2 - y^2x + yx^3$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Za  $a = b = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) Pokazati da se za  $y_0 = x_0^2$  i  $y_0 \geq 0$  rešenje može produžiti na čitav skup  $\mathbb{R}$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Rešiti početni problem  $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$   $y(\sqrt{\pi}) = \frac{\pi}{3}$ .
3. Ispitati sve singularne tačke diferencijalne jednačine  $xy'' + 5xy' - 3y = 0$  i rešiti je u okolini jedne od njih.
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy'' + 2y' - xy = 0$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y_1(x) = \frac{e^{\alpha x}}{x}$ .
5. (AB) Data je diferencijalna jednačina  $y' = \frac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$ . Naći sve kritične tačke i za jednu ispitati stabilnost i odrediti tip.
5. (CD) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(n+2) - y(n+1) - y(n) = n + 2^n$ .

JANUAR 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y - \frac{y^2}{x}$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (8) Pokazati da je za  $x_0, y_0 > 0$  rešenje definisano na intervalu  $[x_0, \infty]$ .
  - c) (10) Naći  $\langle x_0, y_0 \rangle$  da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Data je diferencijalna jednačina  $ayy'^2 + (2x - b)y' - y^2 = 0$ , ( $a \neq 0$ ). Smenom  $y = u^p$  svesti je na Klerovu diferencijalnu jednačinu i rešiti je.
3. Data je diferencijalna jednačina  $3xy'' - 2y' - (\frac{2}{x} + x)y = 0$ .
  - a) (20) Naći rešenje za  $0 < |x| < R$ .
  - b) (12) Da li je rešenje oscilatorno?
4. (AB) Data je diferencijalna jednačina  $y^v + 2y^{iv} + ay''' + 3y'' + 2y' + y = 0$ .
  - a) (15) Za koje  $a$  diferencijalna jednačina će imati stabilno rešenje?
  - b) (10) Za  $a = 3$  rešiti diferencijalnu jednačinu.
4. (CD) Data je diferencna jednačina  $x(n+1) = \frac{1+x(n)}{x(n-1)}$ .
  - a) (15) Ako je  $x(0), x(1) > 0$  pokazati da je rešenje pozitivno i periodično.
  - b) (5) Naći opšte rešenje.
  - c) (5) Za koje početne uslove neće biti rešenja?

MART 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - y^2x^3 - y^2x + x^4y$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) Pokazati da je za  $y_0 = x_0 > 0$  rešenje definisano na  $\mathbb{R}$ .
  - c) Naći  $\langle x_0, y_0 \rangle$  da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $y = xy'^2 + \ln y'$ .
3. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $(x-1)y'' + xy' + xy = 0$  i rešiti je u okolini jedne od regularno-singularnih.
4. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + 4y' + (4 + \frac{64}{x^3})y = 0$ .
  - a) Oceniti broj nula na intervalu  $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ .
  - b) Da li je rešenje oscilatorno u desnoj okolini nule?
  - c) Da li je rešenje oscilatorno u levoj okolini nule?
  - d) Da li je rešenje oscilatorno u beskonačnosti?
5. Rešiti rubni problem  $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$ ,  $y'(1) = 3$ ,  $y(x) = \mathcal{O}(x^{-2}), x \rightarrow \infty$ .

APRIL 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina:  $y' = y^3 - x^2y - y^2 + x^2$ .
  - a) Za  $x_0 = y_0 = 1$  rešiti datu diferencijalnu jednačinu.
  - b) Za  $x_0 = y_0 = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.
  - c) Pokazati da je za  $x_0 = y_0 > 0$  rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
  - d) Pokazati da postoje  $x_0, y_0$  da rešenje ima verikalnu asimptotu ka  $-\infty$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $ydx - xdy = 2xtg \frac{y}{x} dx$ .
3. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $(x + 1)y'' + xy' + xy = 0$  i rešiti je u okolini jedne od regularno-singularnih.
4. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + 4y' + (4 + \frac{16}{x^5})y = 0$ .
  - a) Oceniti broj nula na intervalu  $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ .
  - b) Da li je rešenje oscilatorno u desnoj okolini nule?
  - c) Da li je rešenje oscilatorno u levoj okolini nule?
  - d) Da li je rešenje oscilatorno u beskonačnosti?
5. Rešiti rubni problem:  $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$ ,  $y(x) = o(x)$ ,  $y(1) = 3$ .

MAJ 2003.

1. (25) Data je diferencijalna jednačina  $y' = xy^2 + y^3x^2 - x^3y - y^4$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za početni uslov  $y(2) = 1$  i oceniti grešku.
  - b) Pokazati da za proizvoljno  $x_0 \in \mathbb{R}$  i proizvoljno  $y_0 \geq 0$  postoji zasićeno rešenje na intervalu  $[x_0, \infty)$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takve da rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Data je diferencijalna jednačina  $xy' = y + xy^2 - x^3$ . Znajući da ima partikularno rešenje u obliku polinoma, rešiti je.
3. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2y'' - xy' + y = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{\ln x}$ .
4. (15) Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:  $\frac{dx}{z} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{y}$ .
5. (20) Za koje  $\lambda$  rubni problem  $y'' + \lambda y = 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ , rubni problem nema rešenje?

JUN 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y'(x) = y(x + a)$ ,  $a > 0$ . Pokazati da svako parno rešenje ove diferencijalne jednačine zadovoljava jednačinu  $y''(x) + y(x) = 0$ . Naći neko rešenje koje zadovoljava obe jednačine za neko  $a$ .
2. Dat je sistem diferencijalnih jednačina  $x' = 2x + y + 1$   $y' = 3x - 2y + 2t$ ,  $y(1) = x(1) = 1$ . Rešiti ga, naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = e^{2x} \sin 2x + 2x^2$
4. Data je diferencijalna jednačina  $x^2y'' + \frac{y'}{x+1} + (x+1)y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih
5. (AB) Data je diferencijalna jednačina  $y' = \frac{\sqrt{3x + y^2} - 2}{e^y - e^x}$ . Naći sve kritične tačke i za sve ispitati stabilnost i odrediti tip.
5. (CD) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+1) - 2(x+1)y(x) = 4^x(1-x)$ ,  $y(1) = 8$ .

### JUL 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^4 + y^3 - y^2x^6 - yx^6$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) Pokazati da se za  $y_0 = x_0^3$  i  $y_0 \geq 0$  rešenje može produžiti na čitav skup  $\mathbb{R}$ .
  - c) Pokazati da ako  $y_0 \in (-1, 0)$  onda i  $y(x) \in (-1, 0)$  za sve  $x \in \mathbb{R}$ .
  - d) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'^3 + yy'^2 - y' \sin^2 x - y \sin^2 x = 0$  i ispitati jedinstvenost rešenja u svakoj tački.
3. Ispitati sve tačke diferencijalne jednačine  $(x+1)y'' + x^2y' + \frac{1}{x+1}y = 0$  i rešiti je u okolini jedne od singularnih.
$$x' = 2x - y - z + 2t$$
4. Rešiti sistem:  $y' = 2x - y - 2z + 5e^t$ 
$$z' = -x + y + 2z - 3 \cos t$$
5. Data je diferencijalna jednačina  $y'' - 4y' + 104y - 4x^2y = 0$ .
  - a) Ispitati oscilatornost u beskonačnosti.
  - b) Pokazati da rešenje na intervalu  $[-5, 5]$  ima bar 13 nula.
  - c) Ispitati oscilatornost u okolini nule.

### SEPTEMBAR 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' + y^3 + y^2 + y^2x^3 + yx^3 = 0$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Za  $x_0 = y_0 = -1$  rešiti diferencijalnu jednačinu.
  - b) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - c) Pokazati da se za svako  $x_0$  i  $y_0$  rešenje može neograničeno produžiti nadesno.
  - d) Pokazati da ako  $y_0 \in (-1, 0)$  onda  $y(x) \in (-1, 0)$ .
  - e) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takve da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $xy' - y = \ln y'$  i ispitati jedinstvenost rešenja u svakoj tački.
3. Data je diferencijalna jednačina  $(x+1)y'' + \frac{y'}{x} + y = 0$ . Ispitati sve singularne tačke i rešiti u jednoj od regularno-singularnih.
4. Rešiti sistem  $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2-xz}$ .
5. (AB) Data je diferencijalna jednačina  $y'' + q(x)y = 0$ , gde je  $q$  neprekidno diferencijabilna i negativna funkcija na intervalu  $[a, b]$ . Pokazati da rešenje ima najviše jednu nulu na intervalu  $[a, b]$ .
5. (C) Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $y(x+1) - 2y(x) = \frac{2^x}{x(x+1)(x+2)}$ ,  $y(1) = 1$ .

### OKTOBAR 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = (x^2 + y^2) \sin y$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Pokazati da je rešenje za svako  $x_0$  i  $y_0$  definisano na čitavom skupu realnih brojeva i da je ograničeno.
2. Pokazati da je familija krivih  $\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C-\lambda} = 1$ , gde je  $C$  proizvoljna konstanta, sama na sebe ortogonalna.
3. Data je diferencijalna jednačina  $y'' = (x^2 - 1)y$ ,  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y_1$ .
  - a) Naći opšte rešenje znajući da je partikularno rešenje oblika  $e^{p(x)}$ , gde je  $p(x)$  polinom.
  - b) Za početne uslove  $y(0) = 1$  i  $y'(0) = 0$  pokazati da je rešenje parna funkcija i da je  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + (x-1)y' + y = 0$ . Rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 2$  uz početni uslov  $y(2) = 2$  i  $y'(2) = 0$ .
5. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xyy'^2 + x^2y' + xy'y' + y^2y' + x^2 + xy = 0$ .

### OKTOBAR 2003. (drugi put)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = (x^2 + y^2)\operatorname{tg} y$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Ispitati za koje  $y_0$  je rešenje definisano na čitavom skupu realnih brojeva, a za koje nije.
2. Naći familiju krivih sa osobinom da je dužina normale iz koordinatnog početka na tangentu jednaka apscisi dodirne tačke.
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(8y + 4x^2y^4)dx + (8x + 5x^3y^3)dy = 0$  znajući da ima integracioni množitelj oblika  $x^\alpha y^\beta$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $(x - x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini jedne od regularno-singularnih.

$$\begin{aligned}x' + y' + y &= 1 + e^t \\5. \text{ Rešiti sistem diferencijalnih jednačina } x' - z' + 2x + z &= \cos t \\y' + z' + y + 2z &= 1 + t^2\end{aligned}$$

### OKTOBAR II 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^4 - y^2x^4 - y^2 + x^4$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku
  - b) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje je rešenje definisano na čitavom skupu realnih brojeva.
  - c) Pokazati da za  $y_0 \in (-1, 1)$  važi da  $y(x) \in (-1, 1)$ .
  - d) Odrediti  $x_0, y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ . Naći uslove za  $p(x)$  i  $q(x)$  da  $y = x$  bude rešenje homogenog dela jednačine i primeniti to za rešavanje diferencijalne jednačine

$$x^2(x+1)y'' - x(2+4x+x^2)y' + (2+4x+x^2)y = -x^4 - 2x^3.$$

3. Naći familiju krivih kod kojih je deo normale u tački dodira između tačke dodira i preseka sa  $x$ -osom prepolovljen presekom sa  $y$ -osom.

4. Data je diferencijalna jednačina  $y'' - 2y' + (4 + \frac{64}{x^3})y = 0$

a) Odrediti broj nula na intervalu  $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ .

- b) Ispitati oscilatornost u desnoj okolini nule.
- c) Ispitati oscilatornost u levoj okolini nule.
- d) Ispitati oscilatornost u  $+\infty$ .

5. Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+2) + 6y(x+1) + 9y(x) = 4 \cdot 3^x + 3x^2 + 2x + 1$ .

### NOVEMBAR 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^4 + y^2x^4 - y^2 - x^4$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - b) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje je rešenje definisano na čitavom skupu realnih brojeva.
  - c) Pokazati da za  $y_0 \in (-1, 1)$  važi da  $y(x) \in (-1, 1)$ .
  - d) Pokazati da za svako  $y_0$  sa osobinom  $|y_0| > 2$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $16x^2 + 2y'^2y - y'^3x = 0$ .
3. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + y' + x^2y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih.

4. Data je diferencijalna jednačina  $y'' - 2y' + (1 + \frac{64}{x^3})y = 0$

a) Odrediti broj nula na intervalu  $[\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ .

- b) Ispitati oscilatornost u desnoj okolini nule.
- c) Ispitati oscilatornost u levoj okolini nule.
- d) Ispitati oscilatornost u  $+\infty$ .

5. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $x' = \frac{x^2 - t}{y}$   $y' = -x$ .

DECEMBAR 2003.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = x^2 + y^2 + x^2y^2$ ,  $y(x_0) = y_0 \neq 0$ .
  - a) (5) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (15) Pokazati da je svako zasićeno rešenje definisano na ograničenom skupu.
2. (20) Data je diferencijalna jednačina  $y'^2 + y^2 = 1 + pu(x)$ . Ako je  $u \in C^1(\mathbb{R})$  i strogo monotona, u zavisnosti od parametra  $p$  ispitati monotonost rešenja jednačine.
3. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ .
  - a) (20) Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u jednoj od singularnih.
  - b) (10) Oceniti broj nula na intervalu  $[1, 5]$ .
  - c) (15) Ispitati oscilatornost u levoj okolini nule.
4. (15) (AB) Odrediti kritične tačke diferencijalne jednačine  $y' = \frac{\sin(x+y)}{e^x - e^y}$  i odrediti tip za sve njih.
4. (15) (CD) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(n+2) - 4y(n+1) + 4y(n) = n + 2 + 2^n(1 + 3^n)$ .

JANUAR 2004.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - 2yx - y + x^2 + x$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku za  $x_0 = y_0 = 1$ .
  - b) Pokazati da je za  $x_0 = y_0$  rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(y' + 1) \ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' = (2xy - \frac{5}{x})y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$ .
4. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $3xy'' + 2y' + x^2y = 0$  i rešiti je u jednoj od regularno singularnih.
5. (AB) Data je diferencijalna jednačina  $y'(x) - y(x+a) = 0$ 
  - a) Pokazati da je linearna kombinacija rešenja takođe rešenje.
  - b) Naći bar jedno rešenje za  $a = \frac{\pi}{2}$ .
  - c) Ako je  $y(x) = e^{sx}$  rešenje, koristeći karakterističnu jednačinu, pokazati da je  $y(x) = e^{\bar{s}x}$  takođe rešenje, gde je  $\bar{s}$  konjugovana vrednost od  $s$ .
  - d) Pokazati da su sva rešenja oscilatorne funkcije.
5. (CD) Rešiti sistem  $x' = \frac{y}{y-x}$       $y' = \frac{x}{y-x}$ .

MART 2004.

1. 1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = ax^2 + y^2 + x^2y^2$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Za  $x_0 = y_0 = 1$  i  $a = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (12) Pokazati da je, za  $a = 1$  i  $y_0 > 0$ , svako zasićeno rešenje definisano na ograničenom skupu.
  - c) (8) Pokazati analizom polja pravaca da, za  $a = 0$ , svako zasićeno rešenje ima horizontalnu asimptotu.
2. (20) Naći uslov pod kojim diferencijalna jednačina  $Pdx + Qdy = 0$  dopušta integracioni množitelj oblika  $f = f(y^2 - x)$ . Primeniti to na slučaj

$$P = (2y^2 - 2x - 1)e^x + (2y^2 - 3x)e^y, \quad Q = 2ye^x + 2x(y^2 + y - x)e^y.$$

3. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$ ,  $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$ .
4. (20) Rešiti sistem  $\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x+y)}$ ,  $y(0) = 1, z(0) = -1$ .
5. (AB)(15) Dat je sistem diferencijalnih jednačina

$$x' = \ln(4y + e^{-3x}) \quad y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x}.$$

Ispitati stabilnost tačke  $(0, 0)$  i odrediti njen tip.

5. (CD)(15) Koristeći antidiferencni operator izračunati  $\sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 - 1} \right)$ .

APRIL 2004.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = 2y^2(y^2 + x^2) \sin x$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Za  $x_0 = y_0 = \pi$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (5) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje je rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
  - c) (15) Pokazati da za  $y_0 > 1$  i  $x_0 = 2k\pi$  svako rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x^3 - 1)y' = 2xy^2 - x^2y - 1$ ,  $y(0) = -\frac{1}{4}$  znajući da ima partikularno rešenje u obliku polinoma.
3. (20) Data je diferencijalna jednačina  $2x^3y'' + x^2y' + y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u jednoj od regularno singularnih.
4. (15) Rešiti sistem  $x' = y - z$ ;  $y' = x^2 + y$ ;  $z' = x^2 + z$ .
5. (20) Pokazati da rešenje diferencijalne jednačine  $y'' - y' + (x^4 + 1)y = 0$  ima barem 12 nula na intervalu  $[-7, 7]$ . Da li je rešenje oscilatorno u okolini tačke  $+\infty$ ?

APRIL 2 2004. (C1)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y'' = -|y|$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . Pokazati da rešenje jednačine ima tačno dve nule.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y_1(x) = \cos \alpha x$ .
3. Odrediti krive u ravni koje imaju osobinu da normala u svakoj njihovoj tački prolazi kroz jednu stalnu tačku te ravni.
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$ .
$$x' + y' = y - 3z - t + 10$$
5. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $y' + z' = 2y - 2z - 2t + 7$ 
$$z' + x' = 3y - z - 3t + 3$$

APRIL 3 2004. (C1)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y'' = -|y|$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . Pokazati da rešenje jednačine ima tačno dve nule.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x^m + y)dx - xdy = 0$  ( $m \neq 1$ ) znajući da ima integracioni množitelj kao funkciju jedne promenljive.
3. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' - (2x + 1)y' + (x + 1)y = 0$ .
  - a) Rešiti je znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y(x) = e^{\alpha x}$ .
  - b) Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u obliku stepenog reda u okolini jedne od regularno-singularnih tačaka.
4. Koristeći inverzni diferencni operator izračunati:  $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x^3}{2^x}$ .

MAJ 2004.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y'' = -|y|$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ . Pokazati da rešenje jednačine ima tačno dve nule.
2. Naći familiju krivih kod kojih se iz tačke  $A(a, 0)$  duž  $MN$  vidi pod uglom od  $90^\circ$ , gde je  $M$  proizvoljna tačka krive, a  $N$  presek tangente iz tačke  $M$  sa  $y$ -osom.
3. Data je diferencijalna jednačina  $x(x^2 + 6)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 6xy = 0$ .
  - a) Rešiti je znajući da ima partikularno rešenje u obliku polinoma.
  - b) Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u obliku stepenog reda u okolini tačke  $x_0 = 1$ .
4. Rešiti sistem  $y' = 1 - \frac{1}{z}$ ,  $z' = \frac{1}{y - x}$ .

### JUN 2004.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - x^4y$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - b) Pokazati da je svako rešenje definisano na intervalu  $(-\infty, x_0]$ . Da li postoji netrivialno rešenje koje je definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ ?
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  takve da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Naći familiju krivih kod kojih je u svakoj tački zbir dužina duži koje spajaju tačku dodira i tačku preseka  $x$ -ose sa normalom (normala) i tačku preseka  $x$ -ose sa normalom i apscisu dodirne tačke (subnormala) jednak jedinici, a zatim naći onu krivu koja prolazi kroz koordinatni početak.
3. Data je diferencijalna jednačina  $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = 2x^3 - 3x^2$ . Proveriti da li je  $y_1(x) = x^2$  partikularno rešenje homogenog dela i rešiti je.
4. Rešiti sistem  $x' = x(y^2 - z^2)$ ,  $y' = -y(x^2 + z^2)$ ,  $z' = z(x^2 + y^2)$ .
5. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + 2y' + (x^2 + 4)y = 0$ . Oceniti broj nula na intervalu  $[-2, 2]$  i ispitati oscilatornost u beskonačnosti.

### JUN 2004. (C1)

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xyy' = x^2y' + y^2$ ,  $y(1) = 1$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'^2}$
3. Rešiti sistem  $dx = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{x+y+z}$
4. Ispitati karaktere svih tačaka diferencijalne jednačine  $(x-1)y'' + 2xy' + (x^2 - 2x + 2)y = 0$  i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih tačaka.
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $(x+1)y(x+1) + xy(x) = 2x - 3$ ,  $y(1) = 1$ .

### JUL 2004.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = f(x, y)$ . Ako diferencijalna jednačina dopušta integracioni množitelj kao funkciju po  $x$ , pokazati da je onda jednačina linearna.
2. Data je diferencijalna jednačina  $y(2x - y + 2)dx + 2(x - y)dy = 0$ . Rešiti je znajući da ima integracioni množitelj kao funkciju jedne promenljive.
3. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ .
  - a) ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini jedne od regularno singularnih.
  - b) Smenom  $x = f(t)$ , za pogodno odabranu funkciju  $f$  svesti je na jednačinu sa konstantnim koeficijentima i rešiti je.
4. Za koje vrednosti parametra  $a$  je sistem  $x' = ax - y$ ,  $y' = ay - z$ ,  $z' = az - x$  u tački  $(0, 0, 0)$  stabilan.
- 4.(CD) Rešiti diferencnu jednačinu  $\delta^2y(x) - 6\delta y(x) + 9y(x) = 3^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $\delta y(0) = -1$

### JUL 2004. (C1)

1. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $y = 2xy' - y'^2$ .
2. Data je diferencijalna jednačina  $(x + 2y)dx + ydy = 0$ . Rešiti je ako se zna da ima integracioni množitelj oblika  $f = f(x + y)$ .
3. Rešiti diferencnu jednačinu  $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$ .
4. Rešiti sistem  $x' = \frac{x-y}{z-t}$ ,  $y' = \frac{x-y}{z-t}$ ,  $z' = x - y + 1$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+2) - 3y(x+1) + 2y(x) = 2^x$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ .



SEPTEMBAR 2004.

1. Data je diferencijalna jednačina  $e^x y'^3 \sin y + e^x y' \cos y + e^y \operatorname{tg} x = 0$ . Da li rešenje kroz tačku  $(0, 0)$  postoji i da li je jedinstveno?
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \operatorname{ctg} x$ ,  $y(\pi/2) = 1$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' + y^{-2} e^{y^2} y' - 2yy'^2 = 0$ ;  $y(-\frac{1}{2e}) = 1$ ,  $y'(-\frac{1}{2e}) = e$ .
4. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $x^2 y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0$  i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih.
5. Naći sopstvene vrednosti i sopstvena rešenja rubnog problema  $x^2 y'' = \lambda y$ ,  $y(1) = 0$ ,  $y(a) = 0$  ( $a > 1$ ).

SEPTEMBAR 2004. (C1)

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2(dy - dx) = (x + y)ydx$ .
2. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $y = 2xy' + y^2 y'^3$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' = xy' + y + 1$  znajući da je izvod neke jednačine nižeg reda.
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y''' - 3y' - 2y = 9e^{2x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = -3$ ,  $y''(0) = 3$ .
5. Reši diferencnu jednačinu  $y(x+1) = 4 - \frac{4}{y(x)}$ ,  $y(0) = 1$ .

OKTOBAR 2004.

1. Za koje  $n$  jednačina  $y^{(n)} = f(x, y)$  (funkcije  $f$  i  $f'_y$  su neprekidne) može među svojim rešenjima imati dve funkcije  $y_1(x) = x$  i  $y_2(x) = x + x^4$ .
2. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $y'^3 = 3xy' - 3y$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' = (2xy - \frac{5}{x})y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$ .
4. Neka je  $V$  skup rešenja diferencijalne jednačine  $y''' + y'' - 2y = 0$ .
  - a) Pokazati da je  $V$  vektorski prostor i odredi njegovu dimenziju.
  - b) Neka je  $V_0$  podskup rešenja sa osovinom da za svako  $g \in V_0$  važi  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ . Naći  $g_0 \in V_0$  za koje je  $g_0(0) = 0$  i  $g'_0(0) = 2$ .
5. (AB) Za koje vrednosti parametara  $a$  i  $b$  je rešenje diferencijalne jednačine  $y^{iv} + ay''' + 4y'' + by' + y = 0$  stabilno u okolini nule.
5. (CD) Rešiti diferencnu jednačinu  $\Delta^2 y(x) - 2\Delta y(x) + y(x) = 2^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = \frac{1}{4}$ .

OKTOBAR 2004. (C1)

1. Za koje  $\alpha$  i  $\beta$  se diferencijalna jednačina  $y' = ax^\alpha + by^\beta$  se smenom  $y = z^m$  svodi na homogenu. Primeniti to na rešavanje diferencijalne jednačine  $y' = x - 2\sqrt{y}$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy'' + y'^2 - \frac{2yy'}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0$  znajući da je izvod neke nižeg reda.
3. Rešiti sistem  $\frac{dx}{yx + y^2} = \frac{-dy}{x^2 + xy} = \frac{dz}{2x^2 + xz - 2y^2 - yz}$ .
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^3 y'' + x(1-x)y' + y = 0$  u okolini jedne od regularno-singularnih tačaka.
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $\Delta^2 y(x) - 2\Delta y(x) + y(x) = 2^x$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y(1) = \frac{1}{4}$ .

## OKTOBAR 2 2004

1. Data je diferencijalna jednačina  $x^2y' = x^2y^2 + (xy + 1)^2$ ,  $y(x_0) = y_0$ 
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.
  - b) (A B C D) Pokazati da za  $x_0 \neq 0$ , ne rešavajuće jednačinu, svako rešenje ima verikalnu asimptotu.
  - c) (C1) Znajući da je partikularno rešenje oblika  $y = \frac{a}{x}$  rešiti datu jednačinu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x \cos y - y \sin y)dx - (x \sin y + y \cos y)dy = 0$  znajući da ima integracioni množitelj funkciju jedne promenljive.
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy'' + y'^2 - \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $x^2(x+1)y'' + x(x+1)y' - y = 0$  Ispitati karaktere svih tačaka i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih.
5. (A B) Za koje vrednosti parametra  $a$  je sistem  $x' = ax - y$ ,  $y' = ay - z$ ,  $z' = az - x$  stabilan u tački  $(0, 0, 0)$ ?
5. (C1 C D) Koristeći antidiferencni operator izračunati  $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^2}{\binom{n}{4}}$ .

## NOVEMBAR 2004

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' + f'(x)y - f(x)f'(x) = 0$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x(2x-1)y' + y^2 - (4x+1)y + 4x = 0$  znajući da ima partikularno rešenje u obliku polinoma.
3. Data je diferencijalna jednačina  $5x^2y'' - 10x(x+1)y' + y(5x^2 + 15x + 11) = 0$ .
  - a) Ispitati oscilatornost u beskonačnosti.
  - b) Oceniti broj nula na intervalu  $[2, 10]$
  - c) Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih.
4. (AB) Data je diferencijalna jednačina  $y' = xy + e^{-y}$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Pokazati da se za  $x_0, y_0 > 0$  svako rešenje može produžiti na desno do  $+\infty$ .
4. (CDC1) Koristeći antidiferencni operator izračunati  $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n^2}{\binom{n}{5}}$ .

## DECEMBAR 2004.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = 2x^3y^3 - 2xy$   $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (C C1) Za  $x_0 = y_0 = 1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (C C1) Rešiti datu diferencijalnu jednačinu.
  - c) (A B D) Analizom polja pravaca naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - d) (A B D) Analizom polja pravaca pokazati da se za  $x_0 < 0$  svako rešenje može produžiti na  $[x_0, 0]$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' + y^2 - 3y \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x - 1 = 0$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y_p(x) = \alpha \operatorname{tg} x$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy''' + (x^2 + x + 3)y'' + (4x + 2)y' + 2y = 0$  znajući da je drugi izvod neke diferencijalne jednačine prvog reda.
4. Dat je sistem  $tx' - x - 3y = t$   $ty' - x + y = 0$ .  
Smenom nezavisne promenljive svesti ga na sistem sa konstantnim koeficijentima i rešiti ga.
5. Data je diferencijalna jednačina  $2x^3y'' + x^2y' + y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u jednoj od regularno singularnih.

**JANUAR 2005.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^4 + y^3 - xy^3 - 2xy^2 + yx^2 - yx + x^2$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Za  $x_0 = y_0 = -1$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija
  - b) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - c) Pokazati da je za  $x_0 = y_0$  svako rešenje definisano na  $[x_0, \infty)$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x^2 + y^2)(xdy - ydx) = (a + x)x^4dx$  znajući da ima integracioni množitelj kao funkciju jedna promenljive.
3. Data je diferencijalna jednačina  $(1 + x^2)y'' - 2xy' + (ax^2 + bx + c)y = 0$ .
  - a) Odrediti konstante  $a, b$  i  $c$  tako da  $y_1 = e^{mx}$  bude partikularno rešenje date diferencijalne jednačine.
  - b) Naći opšte rešenje date diferencijalne jednačine.
4. Ispitati karaktere svih tačaka diferencijalne jednačine  $x^3y'' + (x^2 + x)y' - y = 0$  i rešiti je u okolini jedne od regularno-singularnih tačaka.
5. Rešiti sistem  $\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - yz} = \frac{dz}{z(x + y)}$ ,  $y(0) = 1, z(0) = -1$ .

**JANUAR 2005. (C1)**

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y - xy' = a(1 + x^2y')$ ,  $y(1) = 1$
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(1 + xy)dx - xdy = 0$  znajući da ima integracioni množitelj kao funkciju jedne promenljive.
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2y'' - 2y = \sin(\ln x)$ .
4. Ispitati karaktere svih tačaka diferencijalne jednačine  $(x - 1)y'' + y' - y = 0$  i rešiti je u okolini jedne od regularno-singularnih tačaka.
5. Rešiti sistem  $dx = \frac{dy}{y + z} = \frac{dz}{x + y + z}$ ,  $y(0) = 1, z(0) = 1$ .

**MART 2005.**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y^{(n)} = x + y^2$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Za koje  $n$  se grafici dva rešenja mogu seći u tački  $\langle x_0, y_0 \rangle$  ?
  - b) Za koje  $n$  grafici dva rešenja u tački preseka  $\langle x_0, y_0 \rangle$  mogu imati zajedničku tangentu?
  - c) (C1) Za  $n = 1$  i početnu tačku  $\langle x_0, y_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - d) (ABCD) Za  $n = 1$  naći  $\langle x_0, y_0 \rangle$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$ .
3. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' - y' - 4x^3y = 0$ 
  - a) Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih
  - b) Smenom nezavisne promenljive osloboditi se člana sa prvim izvodom, a zatim je rešiti.
4. (AB) Za koje  $a$  i  $b$  je rešenje diferencijalne jednačine  $ay^{iv} + y''' + y'' + y' + by = 0$  stabilno
4. (CDC1) Data je diferencna jednačina  $y(x + 2) + 4y(x + 1) + 4y(x) = (-1)^x + 3^x$ . Ako je  $y(0) = 1$  i  $y(1) = 2$  naći  $y(120)$ .

APRIL 2005. (ABCD)

- Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - x$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - Pokazati da ako je  $x_0 > y_0^2$  onda se rešenje može neograničeno produžiti na desno.
  - Pokazati da ako je  $x_0 < -10$  i  $y_0 < 0$  rešenje ima vertikalnu asimptotu ka  $-\infty$ .
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$  znajući da ima partikularno rešenje u obliku polinoma.
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy'' = 2xy'^2$ ,  $y(2) = 2$ ,  $y'(2) = \frac{1}{2}$ .
- Dat je rubni problem  $y'' + ay = 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$ , gde je  $a > 0$ . Ispitati za koje  $a$  rubni problem ima jedinstveno rešenje, za koje  $a$  ima beskonačno rešenja, a za koje  $a$  nema rešenja.
- (AB) Odrediti kritične tačke diferencijalne jednačine  $y' = \frac{2 \sin x}{1 - x^2 - y^2}$  i odrediti tip za sve njih.
- (CD) Rešiti sistem diferencijalnih jednačina
$$\begin{aligned}y(x+1) &= z(x) - u(x) \\z(x+1) &= u(x) - 2y(x), \quad y(0) = z(0) = u(0) = 0 \\u(x+1) &= 2y(x) - z(x)\end{aligned}$$

APRIL 2005. (C1)

- Naći familiju krivih kod kojih je apscisa tačke preseka tangente dvostruko manja od apscise tačke dodira.
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x+1)(yy' - 1) = y^2$
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x$ 
$$x' - y' = z - x - t + 10$$
- Rešiti sistem diferencijalnih jednačina
$$\begin{aligned}y' - z' &= 2x - y - z - 2t + 7 \\z' + x' &= y + 2z - x - 3t + 3\end{aligned}$$
- Rešiti sistem diferencijalnih jednačina
$$\begin{aligned}y(x+1) - 2y(x) - 2z(x) &= 3^x \\z(x+1) - y(x) - 3z(x) &= 2^x, \quad y(0) = z(0) = 0\end{aligned}$$

MAJ 2005.

- Neka je  $A$  proizvoljna tačka krive,  $B$  presek normale sa  $x$ -osom, a  $C$  projekcija tačke  $A$  na  $x$ -osu. Odrediti familiju krivih kod kojih je zbir duži  $AB$  i  $BC$  konstantan i iznosi 1.
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$ .
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$ .
- (ABCD) Rešiti sistem  $x'' + y' + x = e^t$ ,  $x' + y'' = 1$ .
- (C1) Rešiti sistem  $x' = x - y + (\cos t)^{-1}$ ,  $y' = 2x - y$ ,  $y(0) = x(0) = 1$
- (AB) Ispitati stabilnost tačke  $(0, 0, 0)$  za sistem  $x' = 2y - 3z$ ,  $y' = 3x - 2z$ ,  $z' = 5x - 4y$
- (CDC1) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(x+1) - 2y(x) = \binom{x}{2}$ ,  $y(0) = 2$ .

JUN 2005. (ABCD)

- Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - \cos^2 x$ ,  $y(x_0) = y_0$ 
  - (8) Pokazati da ako je  $y_0 > 2$  onda rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - (12) Analizom polja pravaca pokazati da ako je  $x_0 = 0$  i  $y_0 \in [-1, 0]$ , onda za  $x > 0$  važi  $y(x) \in [-1, 0]$ .
- (20) Data je diferencijalna jednačina  $y' \operatorname{tg} y + 4x^2 \cos y = 2x$ ,  $y(0) = 0$ . Rešiti je smenom  $\cos y = z$ .
- Data je diferencijalna jednačina  $xy'' - 2xy' + (1+x)y = 0$ .
  - (8) Ispitati oscilatornost u  $+\infty$ .
  - (8) Odrediti  $a$  tako da na intervalu  $[a, 100]$  rešenje diferencijalne jednačine ima barem jednu nulu.
  - (4) Ispitati oscilatornost u levoj okolini nule.
- (20) Data je diferencijalna jednačina  $x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini  $x_0 = 0$ .
- (AB) (20) Za koje  $a$  je rešenje sistema diferencijalnih jednačina  $x' = ax + y + x^2$ ,  $y' = x + ay + y^2$  stabilno u tački  $(0, 0)$ .
- (CD) (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $y(x)y(x+1) + 2y(x) + 1 = 0$ ,  $y(1) = 2$ .

**JUN 2005. (C1)**

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(1 - 2xy)y' = y(y - 1)$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$ .
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $\frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$
4. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' - 2xy' + (1+x)y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini  $x_0 = 0$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu:  $y(x)y'(x+1) + 4y(x) + 4 = 0$ ,  $y(1) = 2$ .

**JUL 2005.**

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xyy' = x^2y' + y^2$ .
2. Data je diferencijalna jednačina  $2y'(y'')^2 - (1 + y'^2)y''' = 0$ .  
a) Naći opšte rešenje.  
b) (ABCD) Rešiti je uz početne uslove  $y(0) = \ln 2$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = \sqrt{2}$ .
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}$ .
4. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina

$$x' = 4x - y + e^{2t}, \quad y' = 3x + y - z + t, \quad z' = x + z + 1.$$

5. (AB) Za koje vrednosti parametra  $a$  je stabilno rešenje diferencijalne jednačine  $y^{iv} + ay''' + y'' + 2y' + y = 0$ .
5. (CDC1) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+1) - 3y(x) = x$ ,  $y(1) = -\frac{1}{3}$ .

vfill

**SEPTEMBAR 2005. (ABCD)**

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2x - yx^2 - y^4 + y^3x$ ,  $y(x_0) = y_0$   
a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.  
b) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima verikalnu asimptotu.  
c) Pokazati da za  $x_0 = y_0 = 1$  rešenje ima horizontalnu asimptotu i pokazati da je ona 0.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - x$ ,  $y(0) = 1$ . Ako je rešenje u obliku  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  naći koeficijente od  $a_0$  do  $a_5$ .
5. Rešiti sistem

$$\begin{aligned} x' + y' &= 2x - y + 2z + 1 \\ y' + z' &= x - y + 4z + t \\ x' + z' &= x + 2y \end{aligned}$$

**SEPTEMBAR 2005. (C1)**

1. Smenom  $y = z^m$ , za pogodno izabrano  $m$ , rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^3(y' - x) = y^2$
2. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $xy' - y = \ln y'$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $4x^2y^3y'' = x^2 - y^4$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $(x-1)y'' - \frac{y'}{x} + y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti u okolini jedne od regularno-singularnih.
5. Izračunati:  $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+2)}$

### OKTOBAR 2005. (ABCD)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' + y = f(x)$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Analizom rešenja dokazati da ako je funkcija  $f$  ograničena na  $\mathbb{R}$ , onda je i rešenje diferencijalne jednačine ograničeno na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $2xy' + 1 = y + \frac{x^2}{y-1}$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y''' + xy'' + 2y' + 2 = 0$  znajući da je drugi izvod neke jednačine prvog reda.
4. Odrediti karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $x^2y'' - x^2y' + (x-2)y = 0$  i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih.
5. (AB) Data je diferencijalna jednačina  $y' = \frac{\sin x}{x-y}$ . Naći sve kritične tačke i za sve njih odrediti tip i ispitati stabilnost u njima.
5. (CD) Koristeći antidiferencni operator izračunati  $\sum_{x=2}^{\infty} \frac{1}{x^2-1}$ .

### OKTOBAR 2005. (C1)

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(2x-y+2)dx + 2(x-y)dy = 0$  znajući da dopušta integracioni množitelj funkciju jedne promenljive.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2y'' \ln x - xy' + y = 0$  znajući da ima partikularno rešenje u obliku polinoma.
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $y'' = z + t$ ,  $z'' = y + t$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + (x-1)y' - y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini  $x = 1$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+1) = 8 - \frac{16}{y(x)}$ .

### OKTOBAR 2 2005. (ABCD)

1. Dokazati da za  $q(x) \leq 0$  sva rešenja diferencijalne jednačine  $y'' + q(x)y = 0$  sa pozitivnim početnim uslovima pozitivni, tj.  $y(x_0) > 0$  i  $y'(x_0) > 0$  ostaju pozitivna za  $x > x_0$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg} \frac{y-2x}{x+1}$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy'' = y'(y'+1)$  znajući da je izvod diferencijalne jednačine nižeg reda.
4. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + xy' + y = 1$ . Rešiti je u obliku stepenog reda u okolini tačke  $x_0 = 0$  i za početni uslov  $y(0) = y'(0) = 1$  naći prvih 6 članova reda rešenja.
5. Za koje  $\lambda$  rubni problem  $y'' + \lambda y = 1$ ,  $y(0) = y(1) = 0$  nema rešenje.

### OKTOBAR 2 2005. (C1)

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy' - y = (x+y) \ln \frac{x+y}{x}$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(xy'' + y') = xy'^2(1-x)$ .
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $\frac{dx}{x(z-y)} = \frac{dy}{y(y-x)} = \frac{dz}{y^2 - xz}$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $y'' + xy' + y = 0$ . Rešiti je u obliku stepenog reda u okolini tačke  $x_0 = 0$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+1) - 2xy(x) = x^2 \cdot (x-1)!$ ,  $y(1) = 1$ .

NOVEMBAR 2005.

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x^2y^2 + x)y' + y = 0$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$  znajući da je izvod neke jednačine nižeg reda.
3. Dat je sistem diferencijalnih jednačina  $x'' = 3x - 4y'$ ,  $y'' = 3y - 4x'$ .
  - a) Naći opšte rešenje.
  - b) (**ne radi C1**) Naći rešenje koje zadovoljava uslove  $x(0) = y(0) = 2$  i  $x'(0) = y'(0) = 0$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $xy' = 1 - x + 2y$ . Naći rešenje u obliku stepenog reda  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$  i koeficijente od  $a_0$  do  $a_5$ .
5. (**ABB<sub>1</sub>**) Odrediti kritične tačke diferencijalne jednačine  $y' = \frac{x(2y-x+5)}{x^2+y^2-6x-8y}$ , ispitati stabilnost i tip jedne od njih.
5. (**CC<sub>1</sub>DB<sub>2</sub>**) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+2) - 3y(x+1) + 2y(x) = 3x + 3 \cdot 2^x + 3$ .

DECEMBAR 2005.

1. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$ .
2. Data je diferencijalna jednačina  $y^2(y'y''' - 2y''^2) = yy'^2y'' + 2y'^4$ . Sniziti joj red, a zatim rešiti dobijenu jednačinu prvog reda.
3. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $xy'' - xy' - y = 0$  i rešiti je u okolini jedne od regularno-singularnih.
4. (**ABCD**) Naći sopstvene vrednosti i sopstvena rešenja rubnog problema  $y'' - \lambda y = 0$ ,  $y'(0) = y'(a) = 0$ , ( $a \neq 0$ ).
4. (**C1**) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $\cos^3 x(y'' + y) = 2$ .
5. (**AB1**) Ispitati stabilnost rešenja diferencijalne jednačine  $y^v + 2y^{iv} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0$  u okolini nule.
5. (**B2CDC1**) Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x+3) - 3y(x+1) + 2y(x) = 2^{x+1} - 5$ .

JANUAR 2006. (A1 A2 B1 B2 C D)

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x^2 - 1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0$  ako je partikularno rešenje polinom.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy'' - y'^2 - \frac{2yy'}{x} + \frac{y^2}{x^2} = 0$
3. Data je diferencijalna jednačina  $(x - x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$ . Rešiti je u okolini  $x_0 = 1$ .
4. Rešiti sistem  $x'' + y' + x = e^t$ ,  $x' + y'' = 1$ .
5. U zavisnosti od parametra  $a$  rešiti rubni problem  $y'' + ay = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ ,  $y'(0) = 6$ .

JANUAR 2006. (C1)

1. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $y = 2xy' - y'^2$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2y' + (xy - 2)^2 = 0$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y_1 = \frac{a}{x}$ .
3. Data je diferencijalna jednačina  $x^2(x+1)y'' - 2y = 0$ . Rešiti je ako se zna da je partikularno rešenje  $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$ .
4. Rešiti sistem  $x' = \frac{x-y}{z-t}$ ,  $y' = \frac{x-y}{z-t}$ ,  $z' = x - y + 1$ .
5. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $(x - x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$  i rešiti je u okolini  $x_0 = 0$ .

MART 2006.

1. Odrediti krive u ravni koje imaju osobinu da normala u svakoj njihovoj tački prolazi kroz jednu stalnu tačku  $\langle a, b \rangle$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$ .
3. Data je diferencijalna jednačina  $xyy'' + xy^2 = yy'$ .
  - a) Koristeći smenu  $z = yy'$  naći opšte rešenje diferencijalne jednačine.
  - b) (ne radi C1) naći ono rešenje koje prolazi kroz tačke  $\langle 2, 0 \rangle$  i  $\langle 0, 1 \rangle$ .
4. Smenom  $x = e^t$  rešiti sistem  $xy' - y - 3z = x$ ,  $xz' - y + z = 0$
5. (ABB1) Za koje  $a$  je rešenje diferencijalne jednačine  $y^{iv} + 3y''' + ay'' + 2y' + y = 0$  stabilno?
5. (B2CC1D) Data je diferencna jednačina  $y(x+2) + 4y(x+1) + 4y(x) = (-1)^x + 3^x$ . Ako je  $y(0) = 1$  i  $y(1) = 2$  naći  $y(111)$ .

APRIL 2006. (B C D)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - 2y^2 - yx^2 + 2yx$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - b) Pokazati da ako je  $x_0 = y_0$  onda se rešenje može neograničeno produžiti na levo.
  - c) Pokazati da ako je  $x_0 = 0$  i  $y_0 = 5$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2$
3. Data je diferencijalna jednačina  $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = 2x^3 - 3x^2$ . Proveriti da li je  $y_1 = x^2$  partikularno rešenje homogenog dela jednačine i rešiti je.
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x-x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$  u okolini tačke  $x_0 = 1$ .
5. Data je diferencijalna jednačina  $x^3y'' - y' + \frac{9y}{4x} = 0$ . Oceniti broj nula na intervalu  $[3, 6]$  i ispitati oscilatornost u desnoj okolini nule.

APRIL 2006. (A)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 + 2y^2 - yx^2 + 2yx$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - b) Pokazati da ako je  $x_0 = -y_0$  onda se rešenje može neograničeno produžiti na levo.
  - c) Pokazati da ako je  $x_0 = 0$  i  $y_0 = 5$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$ . (Pomoć:  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{a^2+x^2}|$ )
3. Data je diferencijalna jednačina  $y'' \sin^3 x = 4y \sin 3x$ . Proveriti da li je  $y_1 = \sin^4 x$  partikularno rešenje i rešiti je. (Pomoć:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha$ )
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x+x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$  u okolini tačke  $x_0 = -1$ .
5. Data je diferencijalna jednačina  $x^3y'' - y' + \frac{7y}{4x} = 0$ . Oceniti broj nula na intervalu  $[2, 6]$  i ispitati oscilatornost u desnoj okolini nule.

MAJ 2006.

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 - yx - 2y + x + 1$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) (SVI) Za  $x_0 = y_0 = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) (10) (A B D) Analizom polja pravaca naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - c) (10) (A B D) Analizom polja pravaca pokazati da se za  $y_0 = x_0 + 1$  svako rešenje može produžiti na čitav skup realnih brojeva.
2. Data je diferencijalna jednačina  $2y + (x^2y + 1)xy' = 0$ .
  - a) (20) (SVI) Rešiti je koristeći smenu  $y = z^m$  za pogodno izabrano  $m$ .
  - b) (15) (C C1) Rešiti je kao Bernulijevi diferencijalnu jednačinu.
3. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$  znajući da je izvod neke diferencijalne jednačine prvog reda.
4. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$  znajući da je rešenje homogenog dela polinom.
5. (20) Data je diferencijalna jednačina  $(1-x)y'' - 2y' + y = 0$ . Ispitati karaktere svik tačaka i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 0$ .



**JUN 2006. (AB)**

- Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 + 2y^2 - yx^2 + 2yx$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - Pokazati da ako je  $x_0 = -y_0$  onda se rešenje može neograničeno produžiti na levo.
  - Pokazati da ako je  $x_0 = 0$  i  $y_0 = 5$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$ . (Pomoć:  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{a^2 + x^2}|$ )
- Data je diferencijalna jednačina  $y'' \sin^3 x = 4y \sin 3x$ . Proveriti da li je  $y_1 = \sin^4 x$  partikularno rešenje i rešiti je. (Pomoć:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \alpha$ )
- Data je diferencijalna jednačina  $y' = x^2 + y - 1$ .
  - Naći opšte rešenje.
  - Naći rešenje u obliku stepenog reda  $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  za  $y(0) = 3$ . (NAPOMENA: Ne sme se ni na koji način koristiti rezultat pod a))
- Data je diferencijalna jednačina  $x^3 y'' - y' + \frac{7y}{4x} = 0$ .
  - Smenom  $y(x) = u(x)f(x)$  za pogodan izbor funkcije  $f$  svesti je na jednačinu u kojoj ne figurira  $y'$  eksplicitno
  - (ne radi A1 i C) Oceniti broj nula na intervalu  $[2, 6]$  i ispitati oscilatornost u desnoj okolini nule.

**JUN 2006. (C<sub>1</sub>)**

- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x + 2y + 1)y' - (x + 2y - 1) = 0$ .
- Data je diferencijalna jednačina  $x^2(x + 1)y'' - 2y = 0$ . Proveriti da li je  $y_1 = 1 + \frac{1}{x}$  partikularno rešenje jednačine i rešiti je.
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x + x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$  u okolini tačke  $x_0 = -1$ .
- Rešiti sistem  $x' = y - 2z - x + \sin 2t$ ,  $y' = 4x + y + te^{-t}$ ,  $z' = 3x + y - z - t^2 + 1$ .
- Rešiti diferencnu jednačinu  $\Delta y(x) - y(x) = x$ ,  $y(0) = 1$ .

**JUL 2006.**

- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' = \frac{2x(1 + \sqrt{x^2 - y})}{\sqrt{x^2 - y}}$
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2 y'' - 3xy' = 6y^2 x^{-2} - 4y$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 4$ .
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x - 2)^2 y'' - 3(x - 2)y' + 4y = x$ .
- Za diferencijalnu jednačinu  $x^2 y'' - x^2 y + (x - 2)y = 0$  ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 0$ .
- Data je diferencijalna jednačina  $xy'' - y' - 4x^3 y = 0$ . Smenom nezavisne promenljive svesti je na jednačinu u kojoj je figuriše  $y'$  eksplicitno, a zatim je rešiti.

**SEPTEMBAR 2006. (AB)**

- Data je diferencijalna jednačina  $yy' = x^2 + y^4$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
  - Pokazati da za  $x_0 = -2$  i  $y_0 = 1$  rešenje se ne može produžiti neograničeno na levo.
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y^2 + x^2 y'^5 = xy(y'^2 + y'^3)$ .
- Rešiti početni problem  $y''' = 3yy'$ ,  $y(0) = -2$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 4.5$ .
- Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x(x^2 + 6)y'' - 4(x^2 + 3)y' + 6xy = 0$  znajući da ima kao partikularno rešenje polinom.
- Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + x^2 y' + y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 1$ .

**SEPTEMBAR 2006. (C<sub>1</sub>)**

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x - y \cos \frac{y}{x})dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $e^{\alpha x}$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + x^2y' + y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 0$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $\Delta^2 y(x) - 4\Delta y(x) + 4y(x) = 3^x + x2^x$ .

**OKTOBAR 2006. (AB)**

1. Data je diferencijalna jednačina  $yy' = x^2 + y^6$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
  - b) Pokazati da za  $x_0 = -2$  i  $y_0 = 1$  rešenje se ne može produžiti neograničeno na levo.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(2x+1)y'' + (2x-1)y' - 2y = x^2 + x$  znajući da je rešenje homogenog dela polinom.
3. Rešiti početni problem  $y'' \cos y + y'^2 \sin y = y'$ ,  $y(-1) = \frac{\pi}{6}$ ,  $y'(-1) = 2$ .
4. Za koje  $a$  i  $b$  sva rešenja diferencijalne jednačine  $y'' + ay' + by = 0$  teže ka nuli kad  $x$  teži  $+\infty$ ? A za koje  $a$  i  $b$  su sva rešenja ograničena za svako  $x \in \mathbb{R}$ ?
5. Data je diferencijalna jednačina  $x^2y'' + xy' + (x-1)y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 1$ .

**OKTOBAR 2006. (C<sub>1</sub>)**

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y_1(x) = \frac{a}{x}$ .
2. Rešiti jednačinu  $x^4y''' + 2x^3y'' = 1$   $y(1) = y'(1) = y''(1) = 0$ .
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}$
4. Data je diferencijalna jednačina  $x^2y'' + xy' + (x-1)y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 0$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $\Delta^2 y(x) - 2\Delta y(x) + y(x) = \Delta^{-1} \frac{x^2}{3^x}$ .

**OKTOBAR 2 2006. (AB)**

1. Data je diferencijalna jednačina  $yy' = x^2 + y^8$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje jednačine ima vertikalnu asimptotu.
  - b) Pokazati da za  $x_0 = -2$  i  $y_0 = 1$  rešenje se ne može produžiti neograničeno na levo.
2. Naći vezu između funkcija  $P$  i  $Q$  da bi diferencijalna jednačina  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$  imala integracioni množitelj funkciju oblika  $f = f(x+y)$ , a zatim primeniti to na rešavanje diferencijalne jednačine  $(2xy - y^2 - y)dx + (2xy - x^2 - x)dy = 0$ .
3. Odrediti ortogonalne trajektorije krivih  $(x^2 + y^2)^2 + 2(y^2 - x^2) = a$ , gde je  $a$  promenljivi parametar.
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' + \frac{1}{y^2} e^{y^2} y' - 2yy'^2 = 0$ ,  $y(-\frac{1}{2e}) = 1$ ,  $y'(-\frac{1}{2e}) = e$ .
5. (A1) Rešiti sistem  $x' = y - 2x - 2z + -2e^{2t}$ ,  $y' = x - 2y + 2z + e^{-t}$ ,  $z' = 3x - 3y + 5z + \cos t$
5. (A2B1) Za koje vrednosti parametra  $a$  će biti stabilna rešenja diferencijalne jednačine  $y^{iv} + 3y''' + ay'' + 2y' + y = 0$ .
5. (B2CD) Rešiti diferencnu jednačinu  $\Delta^2 y(x) - 2\Delta y(x) + y(x) = \Delta^{-1} \frac{x^2}{3^x}$ .

**OKTOBAR 2 2006. (C<sub>1</sub>)**

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x^2y^2 + x)y' + y = 0$  ako ima integracioni množitelj oblika  $f(xy)$ .
2. Smenom  $z = yy'$  rešiti diferencijalnu jednačinu  $xyy'' + xy'^2 = yy'$ .
3. Rešiti sistem  $x'' + x = y'$ ,  $4x' + 2x = y' + 2y$ ,  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $x'(0) = 2$ .
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y'' + (x-1)y' + y = 0$  u okolini tačke  $x_0 = 2$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $\Delta^2 y(x) - 2\Delta y(x) + y(x) = \Delta^{-1} \frac{x^2}{3^x}$ .

### NOVEMBAR 2006.

1. Tangenta u proizvoljnoj tački  $M$  krivih  $c$  seče  $y$  osu u tački  $N$ . Odrediti krive  $c$  tako da se odsecci  $MN$  vide iz tačke  $(a, 0)$  pod pravim uglom (koristiti Pitagorinu teoremu).
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $ydy - a\frac{y^2}{x^2}dx = b\frac{dx}{x^2}$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''' = 0$
4. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $2x'' + 2x' + x + 3y'' + y' + y = 0$ ,  $x'' + 4x' - x + 3y'' + 2y' - y = 0$ .
5. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $x^3y'' + (x(1-x)y' + y = 0$  i rešiti je u jednoj od regularno-singularnih.

### DECEMBAR 2006.

1. (20) Pomoću smene  $y^2 + 1 = z$  rešiti jednačinu  $xyy' - x^2\sqrt{y^2 + 1} = (x + 1)(y^2 + 1)$ .
2. Data je diferencijalna jednačina  $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha y = 0$ .
  - a) (5) Za koje  $\alpha$  postoji partikularno rešenje koje je polinom trećeg stepena?
  - b) (5) Naći to partikularno rešenje.
  - c) (10) Sniziti red diferencijalne jednačine.
  - d) (20) Za  $\alpha = 2$  ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 0$ .
3. (20) Rešiti sistem  $x' = 4y + z + 2t + 1$ ,  $y' = z + \cos 2t$ ,  $z' = 4y - 3 \sin 2t$ .
4. (20) Rešiti sistem  $\frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}$ .

### JANUAR 2007. (AB)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = \sin^2 x - y^2$ . Pokazati da ako je  $y_0 \in [0, 1]$ , da i rešenje na skupu  $[x_0, \infty)$  ostaje u intervalu  $[0, 1]$ . Takođe pokazati da za  $x_0 = 0$  i  $y_0 = 5$  rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy' = y + xy^2 + x^3$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(2 + x)^2y'' - 3(2 + x)y' + 4y = (x + 2)^3$ .
4. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $2(x + 1)y'' + (x + 2)y' + 3y = 0$  i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = -1$ .
5. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $2zy' = y^2 - z^2 + 1$ ,  $z' = z + y$ .

### JANUAR 2007. (C1)

1. Smenom  $y = z^m$ , za pogodan izbor  $m$ , svesti diferencijalnu jednačinu  $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$  na homogenu i rešiti je.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy' = y + xy^2 + x^3$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(1 + x)^2y'' - 3(1 + x)y' + 4y = (1 + x)^3$ .
4. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $2(x - 1)y'' + xy' + 3y = 0$  i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 1$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x + 1) + x^{-1}y(x) = -2 - x$ ,  $y(1) = -4$ .

### MART 2007.

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$  znajući da ima partikularno rešenje polinom.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy'' = 2yy' - y'$  znajući da je izvod diferencijalne jednačine nižeg reda.
3. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + 2y' + xy = 0$ .
  - a) Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini jedne od regularno singularnih.
  - b) Proveriti da li je  $\frac{\sin x}{x}$  partikularno rešenje diferencijalne jednačine i ako jeste, rešiti je.
  - c) Ispitati oscilatornost netrivialnog rešenja u  $+\infty$ , kao i u desnoj okolini nule.

APRIL 2007. (AB)

1. Data je diferencijalna jednačina:  $y' = y^4 - y^3x^2 - xy^2 + x^3y$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći  $x_0$  i  $y_0$  da rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - b) Dokazati da je za  $x_0 = y_0 = \frac{1}{2}$  rešenje definisano na čitavom skupu realnih brojeva.
2. Smenom  $y = z^m$ , za pogodan izbor  $m$ , diferencijalnu jednačinu  $x^3(y' - x) = y^2$  svesti na homogenu i rešiti je.
3. Naći sva rešenja diferencijane jednačine  $2xy' - y = y' \ln yy'$ .
4. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $x' = x + y + \cos^2 t$ ,  $y' = 2x - \frac{9}{4}z + 2te^t$ ,  $z' = y + z + t^2 + 1$ .
5. Diferencijalnu jednačinu  $xy'' + x^2y' + (1 - x)y = 0$  rešiti u okolini jedne od regularno-singularnih tačaka.

APRIL 2007. (C1)

1. Naći sva rešenja diferencijane jednačine  $2xy' - y = y' \ln yy'$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(y - xy') = \sqrt{x^4 + y^4}$ . (Pomoć:  $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{1+x^2}|$ )
3. Data je diferencijalna jednačina  $x(x-1)y'' - (2x-1)y' + 2y = 2x^3 - 3x^2$ . Proveriti da li je  $y_1 = x^2$  partikularno rešenje homogenog dela jednačine i rešiti je.
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x+x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$  u okolini tačke  $x_0 = -1$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $\Delta y(x) - y(x) = x$ ,  $y(0) = 1$ .

MAJ 2007.

1. Smenom  $y = z^m$ , za pogodan izbor  $m$ , svesti diferencijalnu jednačinu  $2x^4yy' + y^4 = 4x^6$  na homogenu i rešiti je.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy' = y + xy^2 + x^3$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$ .
4. Ispitati karakter svih tačaka diferencijalne jednačine  $2(x-1)y'' + xy' + 3y = 0$  i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 1$ .
5. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina:  $dx = \frac{dy}{y+z} = \frac{dz}{x+y+z}$ .

JUN 2007. (AB)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = x^3y - xy^2$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) (5) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.
  - b) (10) Ne rešavajući jednačinu, analizom polja pravaca, naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - c) (10) Pokazati da je za  $x_0 = 0$  i svako  $y_0 \geq 0$  rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
2. (15) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $yy' = 4x + 3y - 2$ .
3. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy'' = 2yy' - y'$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 2$ .
4. (20) Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy'' - (x+1)y' - 2(x-1)y = 0$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y_1 = e^{\alpha x}$ . Da li ova jednačina može da ima partikularno rešenje u obliku polinoma?
5. (20) Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + y' + xy = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 1$ .

JUN 2007. (C1)

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$  znajući da ima partikularno rešenje oblika  $y_1(x) = e^{\alpha x}$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $e^{-y} = (2y + xe^{-y})y'$ .
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$ .
4. Rešiti sistem  $x' = y + z + \sin t + e^{-t}$ ,  $y' = x + y + e^t$ ,  $z' = z - x + t$
5. Data je diferencijalna jednačina  $x(x-1)y'' - (x+2)y = 0$ . Ispitati karakter svih tačaka (uključujući i tačku  $\infty$ ) i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 1$ .

SEPTEMBAR 2007. (AB)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^2 + yx^3 - xy - x^4$ ,  $y(x_0) = y_0$ .
  - a) Naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija za  $x_0 = y_0 = 1$  i oceniti grešku.
  - b) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
  - c) Naći  $x_0$  i  $y_0$  za koje je rešenje rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(x^2y^2 + x)dy + ydx = 0$  ako se zna da dopušta integracioni množitelj funkciju  $f = f(xy)$ .
3. Pogodnom smenom zavisne promenljive svesti diferencijalnu jednačinu  $(x^2 - 1)y' \sin y + 2x \cos y = 2x - 2x^3$  na linearnu i rešiti je.
4. Rešiti sistem  $x' = y + z + t$ ,  $y' = x + z + \sin t$ ,  $z' = x + y + e^{-t}$ .
5. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2y'' - 4xy' + (6 - x^2)y = 0$  u okolini tačke  $x_0 = 0$ . Ispitati i karaktere svih tačkaka uključujući i tačku  $\infty$ .

SEPTEMBAR 2007. (C1)

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $y(2x - y + 2)dx + 2(x - y)dy = 0$  znajući da dopušta integracioni množitelj funkciju jedne promenljive.
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x^2y'' \ln x - xy' + y = 0$  znajući da ima partikularno rešenje u obliku polinoma.
3. Rešiti sistem diferencijalnih jednačina  $y'' = z + t$ ,  $z'' = y + t$ .
4. Data je diferencijalna jednačina  $xy'' + (x - 1)y' - y = 0$ . Ispitati karakter svih tačkaka i rešiti je u okolini  $x = 1$ .
5. Rešiti diferencnu jednačinu  $y(x + 1) = 8 - \frac{16}{y(x)}$ .

OKTOBAR 2007. (AB)

1. Data je diferencijalna jednačina  $y' = y^3 - y^2x^3 - y + x^3$ ,  $y(x_0) = 0$ .
  - a) Za  $y_0 = x_0 = 1$  i početnu aproksimaciju  $y_0(x) = x$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija i oceniti grešku.
  - b) Dokazati da je za  $x_0 = y_0 = 0$  rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$  i da važi  $y(x) \in (-1, 1)$ , za svako  $x \in \mathbb{R}$ .
  - c) Naći  $x_0$ ,  $y_0$  za koje rešenje ima vertikalnu asimptotu.
2. Data je diferencijalna jednačina  $xy' = y + xy^2 - x^3$ . Znaajući da ima partikularno rešenje u obliku polinoma, rešiti je.
3. Naći sva rešenja diferencijalne jednačine  $y = 2xy' + y^2y'^3$ .
4. Rešiti sistem:  $x' = -y + 2t$ ,  $y' = y - z + 5e^{-t}$ ,  $z' = -x + y - z - 3 \cos t$ .
5. Ispitati karakter svih tačkaka diferencijalne jednačine  $xy'' - y' - xy = 0$  i rešiti je u okolini jedne od regularno-singularnih.

OKTOBAR 2007. (C1)

1. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(xy - x^2)y' + y^2 - 3xy - 2x^2 = 0$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0$  znajući da dopušta integracioni množitelj funkciju jedne promenljive.
3. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $x(2x + 1)y'' + 2(x + 1)y' - 2y = 0$  znajući da ima polinom kao partikularno rešenje.
4. Rešiti sistem  $x' = y - 2z - x + 2 \sin t$ ,  $y' = 4x + y - 3$ ,  $z' = 2x + y - z - te^t$ .
5. Ispitati karakter svih tačkaka diferencijalne jednačine  $xy'' - 2y' + x^2y = 0$  i rešiti je u okolini tačke  $x_0 = 0$ .

OKTOBAR 2 2007.

1. Data je diferencijalna jednačina:  $y' = y^3 - x^2y - y^2 + x^2$ .
  - a) Za  $x_0 = y_0 = 1$  rešiti datu diferencijalnu jednačinu.
  - b) Za  $x_0 = y_0 = 2$  naći nekoliko članova niza sukcesivnih aproksimacija.
  - c) Pokazati da je za  $x_0 = y_0 > 0$  rešenje definisano na čitavom skupu  $\mathbb{R}$ .
  - d) Pokazati da postoje  $x_0, y_0$  da rešenje ima verikalnu asimptotu ka  $-\infty$ .
2. Rešiti diferencijalnu jednačinu:  $ydx - xdy = 2xtg \frac{y}{x} dx$ .
3. Rešiti početni problem  $y'x^3 \sin y = xy' - 2y$   $y(\sqrt{\pi}) = \frac{\pi}{3}$ .
4. Rešiti diferencijalnu jednačinu  $xy'' - y' = x^2yy'$  znajući da je izvod diferencijalne jednačine nižeg reda.
5. Ispitati sve singularne tačke jednačine  $(x - x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$  i rešiti je u okolini jedne od njih.
6. Rešiti sistem  $x' = y - 2z - x - e^{-t}$ ,  $y' = 4x + y + 5$ ,  $z' = 2x + y - z + t^2 + 1$ .
7. Rešiti diferencnu jednačinu  $y(n + 2) - y(n + 1) - y(n) = n + 2^n$ .

**Napomena:**

**Fizičari rade zadatke: 2, 3, 4, 5, 6. C1 smer radi zadatke: 2,4,5,6,7. Ostali rade zadatke: 1,3,4,5,6**