STUDIJSKA GRUPA C

ANALIZA ALGORITAMA

2. FEBRUAR 2004.

1. Kao što je poznato iz kombinatorike, Katalanovi brojevi C_n su zadati formulom

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

za sve $n \geq 0$. Poznato je da su svi ovi brojevi celi.

(a) Dokazati da je funkcija $f(x) = C_x$ prosto rekurzivna. [**10** poena]

(b) Konstruisati Tjuringovu mašinu koja izračunava ovu funkciju. [**15** poena]

2. Neka je $f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ prosto rekurzivna funkcija sa osobinom da postoji $C \in \mathbb{N}$ tako da za sve $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ važi nejednakost

$$C \cdot f(x_1, \ldots, x_k) \geq \max(x_1, \ldots, x_k).$$

Za skupove $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{N}$ definišemo skup

$$f(A_1, \ldots, A_k) = \{f(a_1, \ldots, a_k) : \ a_1 \in A_1, \ldots, a_k \in A_k\}.$$

Dokazati: ako su svi skupovi $A_1, \ldots, A_k$ (prosto) rekurzivni, onda je to i skup $f(A_1, \ldots, A_k)$.

3. Broj $n \geq 2$ je *savršen*, ako je jednak zbiru svih svojih pravih delitelja (d je *pravi* deljitelj od n ako $d \mid n$ i $1 \leq d < n$).

(a) Dokazati da je skup svih savršenih brojeva prosto rekurzivan skup. [**15** poena]

(b) Konstruisati Tjuringovu mašinu koja za uneti broj vraća vrednost 0 ako je taj broj savršen, a 1 ako nije. [**10** poena]

4. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja za uneti broj n izračunava n-ti Fibonačijev broj ($f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ za sve $n \geq 0$).

RAD TRAJE **180** MINUTA.
SVAKI ZADATAK VREDI **25** POENA.
REZULTATI: **6. FEBRUAR 2004.** (PETAK) U **12.00**
USMENI: **13. FEBRUAR 2004.** (PETAK) U **10.00**