B042: ANALIZA ALGORITAMA

27.JANUAR 2006.

[**15**] **1.** Neka je $x \geq 1$ prirodan broj. Za broj $k \in \mathbb{N}$ kažemo da je *najviši stepen kojim dvojka deli* x ako važi

$$x = 2^k q,$$

gde je q neparan broj. Za $m, n \in \mathbb{N}$, označimo sa $f(m, n)$ najviši stepen kojim dvojka deli broj

$$(2m + 3)^{n+1} - 1.$$

Dokazati da je $f(m, n)$ prosto rekurzivna funkcija.

[**20**] **2.** Dat je polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

čiji su koeficijenti prirodni brojevi. Za $k \in \mathbb{N}$, $k \neq 0$, kažemo da *deli* polinom p ako postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da $k \mid p(m)$. Neka $D_p \subseteq \mathbb{N}$ označava skup svih prirodnih brojeva koji dele polinom p. Dokazati da je D_p prosto rekurzivan skup.

[**15**] **3.** Konstruisati Tjuringovu mašinu koja izračunava vrednosti funkcije

$$f(x, y, z) = \left\lfloor \frac{2^x + (y!)^{z+2}}{1 + xy + z^3} \right\rfloor + \lfloor x\sqrt{2} \rfloor \cdot \lfloor \log_2(y + 1) \rfloor.$$

[**20**] **4.** Konstruisati Tjuringovu mašinu koja za dati broj x izračunava *drugi po veličini* prost delitelj od x, ukoliko x uopšte ima bar dva prosta faktora. U suprotnom, mašina treba da vrati rezultat 0.

[**30**] **5.** Formulisati [**5** poena] i dokazati [**10** poena] Teoremu majoracije, a zatim dokazati prostu rekurzivnost niza prostih brojeva [**15** poena].

RAD TRAJE **180** MINUTA.

VREDNOST ZADATAKA JE NAZNAČENA PORED REDNIH BROJEVA.

REZULTATI ĆE BITI OBJAVLJENI U **PONEDELJAK, 30.1.** U **12:00**.

DISKUSIJA ISPITNOG ROKA, REŠAVANJE ŽALBI I UPISIVANJE OCENA ĆE SE ODRŽATI U **ČETVRTAK, 2.2.** U **10:00**.