I152, C1Z11: ANALIZA ALGORITAMA

4. FEBRUAR 2011.

1. Za prirodne brojeve a, b, d i cifru c, $0 \leq c \leq 9$, neka $f(a,b,c,d)$ označava *broj pojavljivanja* cifre c u prvih d cifara iza zareza u decimalnom zapisu razlomka $\frac{a}{b+1}$. (Pri tome je $f(a,b,x,d) = 0$ za sve $x \geqslant 10$.)

   Na primer, $f(7,5,6,3) = 2$, jer je $\frac{7}{5+1} = \frac{7}{6} = 1,166...$, pa se medju prve tri decimale iz zareza cifra 6 javlja dva puta.

   Dokazati da je $f(a,b,c,d)$ prosto rekurzivna funkcija.

2. Broj 2011 ima zaista izuzetnu osobinu: najpre, on je prost, ali se istovremeno može prikazati i kao zbir 11 uzastopnih prostih brojeva:

$$2011 = 157 + 163 + 167 + 173 + 179 + 181 + 191 + 193 + 197 + 199 + 211.$$

   Neka je A skup svih brojeva koji imaju ovu osobinu: da su prosti, a da se pri tome mogu prikazati i kao zbir 11 *uzastopnih* prostih brojeva. Dokazati da je skup A prosto rekurzivan.

3. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja računa funkciju

$$f(x,y,z) = \left\lfloor \frac{x! + y!}{z+2} + \frac{z!}{xy+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y! + z!}{x+2} + \frac{x!}{yz+1} \right\rfloor .$$

4. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja vraća 1 ako uneti broj n ima tačno 2011 prostih delitelja, dok u suprotnom vraća 0.

5. Konstruistati graf $\mathcal{G}_\varphi$ koji u redukciji problema SAT na problem klika u grafu odgovara formuli

$$\varphi(x,y,z,t) = \neg t \wedge (x \vee \neg z) \wedge (\neg y \vee z \vee \neg t) \wedge (\neg x \vee \neg t).$$

   Ukoliko dobijeni graf ima 4-klike, označiti bar jednu takvu i odrediti (zadovoljavajuću) valuaciju koja odgovara toj kliki.

RAD TRAJE **180** MINUTA.

SVAKI ZADATAK VREDI **8** POENA.

REZULTATI I UPISIVANJE OCENA: **UTORAK, 8.2.** U **11:00**.