

GODIŠNJI KOLOKVIJUM IZ  
ANALIZE ALGORITAMA

23. MART 2002.

1. Odgovoriti na sledeća pitanja i obrazložiti odgovore.

- a) Neka za sve prirodne  $x \geq 0$  važi nejednakost  $f(x) \leq g(h(x))$ , gde su  $g$  i  $h$  prosto rekurzivne funkcije. Da li tada i  $f$  mora biti prosto rekurzivna funkcija?
- b) Neka za sve prirodne  $x \geq 0$  važi nejednakost  $f(x) \leq g(x)$ , gde se  $g(x)$  dobija od  $h(x, y)$  primenom šeme proste rekurzije na sledeći način:  $g(0) = 1$ ,  $g(x + 1) = h(x, g(x))$ . Ako su  $g$  i  $h$  prosto rekurzivne funkcije, da li tada i  $f$  mora biti prosto rekurzivna funkcija?
- c) Neka za sve prirodne  $x \geq 0$  važe nejednakosti  $f(x) \leq \mu_t(g(h(x), t) = 0) \leq \alpha(x)$ , gde su  $g$ ,  $h$  i  $\alpha$  prosto rekurzivne funkcije ( $g$  arnosti 2, ostale arnosti 1). Da li tada i  $f$  mora biti prosto rekurzivna funkcija?
- d) Neka je  $f(x) = \lfloor \frac{g(x)}{h(x)} \rfloor - g(x)h(x)$ . Ako su funkcije  $f$  i  $g$  prosto rekurzivne, da li tada i  $h(x)$  mora biti prosto rekurzivna?
- e) Da li je skup  $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ je stepen prostog broja i } x \equiv 2 \pmod{3}\}$  rekurzivan?

2. Dokazati da je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \text{suma delitelja broja } x, & 1 \leq x \leq 99, \\ \text{broj prostih deljitelja broja } x, & x \geq 100, x \equiv 1 \pmod{2}, \\ \text{najveći prost deljitelj broja } x, & x \geq 100, x \equiv 0 \pmod{2}, \end{cases}$$

prosto rekurzivna.

3. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja izračunava vrednosti funkcije

$$f(x) = \left\lfloor \frac{2^{x^2} \cdot x!}{3} \right\rfloor.$$

(Smatra se da su mašine radjene na vežbama poznate, kao i da tražena mašina treba da radi u sistemu  $*|(x)* \rightarrow *|(f(x))*$ .)

4. Data je funkcija  $g(x) = 2^x + x^3$ , kao i funkcija  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  data sa

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0), \\ f(x+1) &= 2^{g(f(x))} + 1, \end{aligned}$$

za sve  $x \geq 0$ . Naći Tjuringovu mašinu koja izračunava vrednosti funkcije  $f(x)$  (važe iste napomene kao i u prethodnom zadatku).

RAD TRAJE **120** MINUTA.

SVAKI ZADATAK VREDI **25** POENA.