D21: ANALIZA ALGORITAMA

I KOLOKVIJUM, 20. DECEMBAR 2004.

1. Date su prosto rekurzivne funkcije $f(x), g(x)$ i $h(x)$ i aritmetička funkcija $k(x)$. Poznato je da za sve $x \in \mathbb{N}$ važi

$$f(g(h(x))) \leq k(x) \leq h(g(f(x))).$$

Da li tada $k(x)$ mora biti rekurzivna funkcija? Obrazložiti odgovor.

2. Dokazati sledeće osobine Akermanove funkcije $A(x, y)$:

(a) $A(x+1, y) > A(x, y)$,

(b) $A(x, y+1) > A(x, y)$,

(c) $A(x+1, y) \geq A(x, y+1)$,

gde su $x, y \in \mathbb{N}$ proizvoljni. *Napomena:* u dokazima nejednakosti se bez objašnjenja sme koristiti nejednakost $A(x, y) > y$ dokazana na vežbama.

3. Neka je $n \geq 1$ prirodan broj, i neka je σ permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$ (bijekcija tog skupa u samog sebe). Date su prosto rekurzivne funkcije $f(x_1, \ldots, x_n), g_1(x), \ldots, g_n(x)$ sa osobinom da za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, kao i za sve k, $1 \leq k \leq n$, važi

$$g_k(f(x_1, \ldots, x_n)) \geq x_{\sigma(k)}.$$

Dokazati da je skup slika (kodomen) funkcije f,

$$A = \{f(x_1, \ldots, x_n) : \ x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}\}$$

prosto rekurzivan.

RAD TRAJE **90** MINUTA.

ZADACI 1,3 VREDE PO **35** POENA, DOK ZADATAK 2 VREDI **30** POENA (SVAKA TAČKA PO **10**).