B042: ANALIZA ALGORITAMA

5. MAJ 2007.

[**15**] **1.** Za prirodan broj n, neka $C(n)$ označava broj parova jednakih susednih cifara u decimalnom zapisu broja n. Na primer: $C(0) = C(6) = 0$, $C(55) = C(2007) = 1$, $C(322026673) = 2$, $C(14448996) = 3$. Dokazati da je C prosto rekurzivna funkcija.

[**20**] **2.** Neka je $d \geqslant 2$ (fiksiran) prirodan broj koji ***nije*** potpun kvadrat. Za par prirodnih brojeva (x, y) kažemo da je d*-Pelov* ako važi

$$x^2 - dy^2 = 1.$$

Definišemo $A_d = \{c(x, y) : (x, y) \text{ je } d\text{-Pelov par}\}$, gde je $c : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ Kantorova numeracija. Dokazati da je A_d prosto rekurzivan skup.

[**15**] **3.** Neka je $\alpha > 0$ racionalan broj. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja izračunava vrednosti funkcije

$$f(x) = \left\lfloor x^{1+\alpha} \right\rfloor .$$

[**20**] **4.** Kao što je poznato, po osnovnoj teoremi aritmetike svaki prirodan broj $n \geqslant 2$ se (do na permutaciju) na jedinstveni način rastavlja na proizvod prostih faktora:

$$n = p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m},$$

gde su $p_1, \dots, p_m$ neki različiti prosti brojevi. Definišemo funkciju $\mu(n)$ tako da je $\mu(0) = \mu(1) = 0$, dok je za $n \geqslant 2$,

$$\mu(n) = \max(k_1, \dots, k_m),$$

pri čemu su $k_1, \dots, k_m$ eksponenti iz gornjeg razlaganja n na proste faktore. Konstruisati Tjuringovu mašinu koja izračunava vrednosti funkcije μ.

[**30**] **5.** Dokazati redukciju SAT$\leqslant$3-SAT.

RAD TRAJE **180** MINUTA.

VREDNOST ZADATAKA JE NAZNAČENA PORED REDNIH BROJEVA.

REZULTATI ĆE BITI OBJAVLJENI U **PONEDELJAK, 7.5.** U **12:00**.

UPISIVANJE OCENA, RAZMATRANJE ŽALBI I EVENTUALNI USMENI DEO ISPITA (ZA STUDENTE PO PROGRAMIMA PRE 2002. GODINE) JE ISTOG DANA U **12:15**.