

PREDAVANJA IZ ANALIZE 2

Jelena Aleksić

January 8, 2015

Copyright ©2012 by author

All rights reserved.

ISBN ...

... Publications

Predgovor

Analiza 2 (M231) je kurs na drugoj godini studija primenjene matematike na Departmanu za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu. Obuhvata gradivo diferencijalnog i integralnog računa realnih (skalarnih) i vektorskih funkcija više realnih promenljivih.

Činjenica je da postoji niz knjiga i adekvatne literature koje obuhvataju ovo gradivo i dostupne su na srpskom jeziku. Predavajući ovaj kurs u poslednjih nekoliko godina (od 2010. godine) uvidela sam da svaka knjiga zadovoljava dovoljno velik broj studentskih i nastavničkih prohteva. Ova je nastala u cilju da zadovolji što više. Prvenstveni cilj ove knjige je da natera studente da čitaju i uče iz knjiga umesto sve popularnijeg "učenja iz beleški", neretko tuđih, a samim tim i nepouzdatih i nepotpunih.

Za praćenje ovog kursa i dobro razumevanje ove knjige poželjno je poznavati sledeće matematičke pojmove i njihove osobine: vektorske i skalarne osnovne operacije, te diferencijalni i integralni račun realnih funkcija jedne promenljive (gradivo kursa Analiza 1).

Gradivo obuhvaćeno ovom knjigom se može podeliti na tri dela. U prvom delu opisane su vektorske funkcije jedne realne promenljive, te pomoću njih parametrizacija ravnanskih i prostornih krivih. Poznavanje vektorskih funkcija jedne realne promenljive doprinosi i lakšem razumevanju pojma vektorskih nizova, tj. nizova u \mathbb{R}^n , $n \geq 2$. Drugo poglavlje obuhvata diferencijalni račun za funkcije više promenljivih. Dati su osnovni pojmovi i osobine, od konvergencije, neprekidnosti do diferencijabilnosti i primene diferencijabilnosti na dobijanje ekstrema skalarnih funkcija više promenljivih. Takođe su obuhvaćeni pojmovi parcijalnih izvoda, gradijenta, diferencijala, izvoda po pravcu, te lokalnih i uslovnih ekstrema. Poslednja tri poglavlja bave se integralnim računom funkcija više promenljivih. U trećem poglavlju dati su dvostruki, trostruki i uopšte, višestruki integral, a zatim u četvrtom krivolinijski, te u petom površinski integral skalarne i vektorske funkcije više promenljivih.

Kolege Srboljub Simić, Milan Pantić i Petar Mali, te studenti Hunor Tot-Bagi, Jelena Jovanović i Dora Varga su mi puno pomogli u ispravljanju propusta u ovoj knjizi, te im i ovim

putem iskazujem veliku zahvalnost.

Sadržaj

1	Vektorske funkcije jedne realne promenljive	7
1.1	3D koordinatni sistem - model "8 soba"	7
1.2	Primeri vektorskih funkcija jedne realne promenljive	10
1.2.1	Limes i neprekidnost vektorske funkcije	13
1.2.2	Izvod vektorske funkcije	15
1.3	Parametarski oblik krive	17
1.3.1	Tangente	19
1.3.2	Krive u prostoru - dužina luka krive	22
1.3.3	Glatka kriva	23
1.4	Jednačine nekih površi u prostoru	25
2	Funkcije više promenljivih - diferencijalni račun	27
2.1	Konvergenција	28
2.1.1	Okoline u \mathbb{R}^d	28
2.1.2	Nizovi u \mathbb{R}^d	29
2.1.3	Granična vrednost funkcije dve promenljive	30
2.2	Neprekidnost	32
2.3	Parcijalni izvodi	34
2.3.1	Parcijalni izvodi višeg reda	36
2.4	Diferencijabilnost	38
2.4.1	Tangentna ravan i linearna aproksimacija	38
2.4.2	Definicija diferencijabilnosti	40
2.5	Diferencijal	42
2.5.1	Diferencijal drugog i višeg reda	44
2.5.2	Diferencijal složene funkcije	45
2.5.3	Diferencijal implicitno definisane funkcije	47

2.6	Izvod po pravcu	52
2.6.1	Vektor gradijenta	55
2.7	Ekstremi	57
2.7.1	Lokalni ekstremi	58
2.7.2	Ekstremi na rubu - uslovni ekstremi	64
3	Višestruki integrali	71
3.1	Dvostruki integral realne funkcije dve promenljive	72
3.1.1	Dvostruki integral na pravougaoniku	73
3.1.2	Iterirani integrali i Fubinijeva teorema	75
3.1.3	Dvostruki integral na proizvoljnoj oblasti u ravni	78
3.1.4	Smena promenljivih u dvostrukom integralu	81
3.1.5	Dvostruki integral na neograničenom skupu	84
3.2	Trostruki integral	85
3.2.1	Svodjenje trostrukog integrala na dvostruki	86
3.2.2	Cilindrične koordinate	88
3.2.3	Sferne koordinate	89
3.3	Višestruki integral	91
3.3.1	Smena promenljivih u višestrukome integralu	93
4	Krivolinijski integral	97
4.1	Vektorsko polje	97
4.2	Krivolinijski integral skalarne funkcije	99
4.2.1	Parametrizacija krive	99
4.2.2	Integral po glatkoj krivoj	100
4.3	Krivolinijski integral vektorskog polja	104
4.4	Osnovna teorema za krivolinijski integral	106
4.5	Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije	108
4.5.1	Krivolinijski integral konzervativnog polja	110
4.6	Grinova teorema	112
4.6.1	Vektorski oblik Grinove teoreme	116
5	Površinski integral	119
5.1	Parametrizacija i površina površi	119
5.2	Površinski integral skalarne funkcije	122

5.2.1	Orijentacija dvostrane površi	123
5.3	Površinski integral vektorske funkcije	124
5.3.1	Stoksova teorema	126
5.3.2	Teorema divergencije	128
	Literatura	129

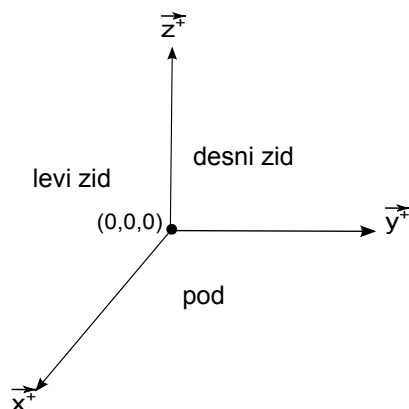
Glava 1

Vektorske funkcije jedne realne promenljive

U okviru kursa Analiza 2 izučavaćemo funkcije čiji domen i kodomen mogu biti delovi ili celi prostori \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Dakle, radićemo na realnoj pravnoj ($d = 1$), ravni ($d = 2$), prostoru ($d = 3$) i višedimenzionalnim prostorima ($d \geq 4$). Zbog toga ćemo se podsetiti nekih osnovnih pojmova u prostoru \mathbb{R}^3 .

1.1 3D koordinatni sistem - model "8 soba"

Kada želimo nešto da predstavimo u prostoru najčešće koristimo trodimenzionalni (3D) koordinatni pravougli sistem, u kome ose obeležavamo promenljivim x , y i z . Ove tri ose, međusobno ortogonalne, određuju odgovarajuće ravni i dele prostor na osam oktanata. Ako nacrtamo samo pozitivne delove ovih osa (što obeležavamo sa \vec{x}^+ , \vec{y}^+ , \vec{z}^+) dobijamo **prvi oktant**, koji vizuelno možemo zamisliti kao jednu sobu.

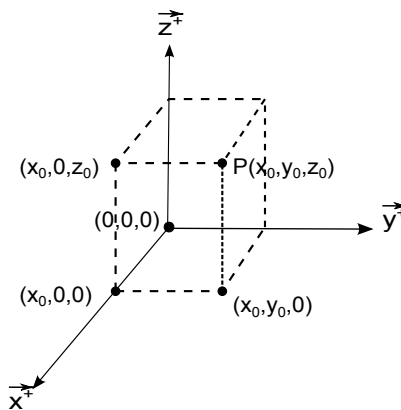


Prvi oktant određen poluosama \vec{x}^+ , \vec{y}^+ , \vec{z}^+ zamišljamo kao jednu sobu

Zamislimo da gledamo u koordinatni početak kao u jedan ugao na podu sobe. Tada je ravan određena y i z osom ((y, z) -ravan) desni zid, ravan određena z i x osom ((z, x) -ravan) levi zid, a ravan određena x i y osom ((x, y) -ravan) predstavlja pod. Sobu "pored" možemo dobiti ako umesto pozitivnog dela y ose posmatramo negativni deo (\vec{y}^-), a druge dve sobe istog sprata čine \vec{x}^-, \vec{y}^+ i \vec{z}^+ , odnosno \vec{x}^-, \vec{y}^- i \vec{z}^+ . Ako sada posmatramo i negativni deo z ose, dobijamo još četiri sobe "ispod".

Tačka i rastojanje

Svaka tačka P u 3D koordinatnom sistemu određena je sa tri koordinate (tri realna broja) x_0, y_0 i z_0 , što pišemo $P(x_0, y_0, z_0)$. Obeležimo sa O koordinatni početak, tj. tačku $O(0, 0, 0)$. Vektor \overrightarrow{OP} zovemo **vektor položaja** tačke P . Kako svakoj tački odgovara jedinstveni vektor položaja i obratno, imamo bijekciju između tačaka i vektora položaja. Koordinatnom početku, tački $(0, 0, 0)$, ovom bijekcijom dodeljujemo nula vektor, jedini vektor dužine nula. Stoga tačku $P(x_0, y_0, z_0)$ trodimenzionalnog prostora \mathbb{R}^3 možemo poistovetiti sa njenim vektorom položaja \overrightarrow{OP} , i obratno. Tačku najbolje možemo predstaviti u prostoru tako što nacrtamo kvadar sa temenima u $(x_0, 0, 0)$, $(x_0, y_0, 0)$, $(0, y_0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(x_0, 0, z_0)$, (x_0, y_0, z_0) , $(0, y_0, z_0)$ i $(0, 0, z_0)$.



Intenzitet (dužina) vektora \overrightarrow{OP} (dužina velike dijagonale kvadra) predstavlja rastojanje tačke P od koordinatnog početka i računa se po formuli

$$d = d(O, P) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}.$$

Vektor pravca koordinatnog početka je **nula vektor** i to je jedini vektor čija je dužina jednaka nuli. Svaki nenula vektor ima pozitivnu dužinu (intenzitet), pa se može normirati (normalizovati). Normalizacija (normiranje) nenula vektora $\vec{a} \neq \vec{0}$ podrazumeva pronalaženje vektora \vec{a}_0 dužine jedan (jedinичne dužine), koji ima isti pravac kao vektor \vec{a} . Ovaj pojam je vezan za pojam norme koji ćete izučavati na naprednijim kursovima matematičke analize. Za sada ćemo reći da

je norma vektora $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, ustvari, dužina istog vektora i označavaćemo ravnopravno sa $\|\vec{a}\| = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Dakle, normiranjem nenula vektora \vec{a} dobijamo **jedinični vektor** (vektor dužine jedan),

$$\vec{a}_0 := \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \left(\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \right).$$

Ako imamo dve različite tačke u prostoru, $P(x_0, y_0, z_0)$ i $Q(x_1, y_1, z_1)$, njihovo **rastojanje** računamo po formuli

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Jedinična sfera i lopta

Sve tačke koje su na rastojanju jedan od koordinatnog početka obrazuju tzv. **jediničnu sferu**. Dakle, sve tačke jedinične sfere mogu se opisati jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Za jediničnu sferu u \mathbb{R}^3 koristimo oznaku S^2 i pišemo,

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Jedinična sfera je rub jedinične lopte. Tačke iz unutrašnjosti jedinične lopte su, dakle, na rastojanju manjem od jedan od koordinatnog početka, pa se mogu opisati jednačinom $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Skup tih tačaka zovemo **otvorena jedinična lopta**, u oznaci B^3 . Ako otvorenoj jediničnoj lopti dodamo i tačke sfere, dobijamo **zatvorenu jediničnu loptu**, u oznaci $\overline{B^3}$. Prema tome,

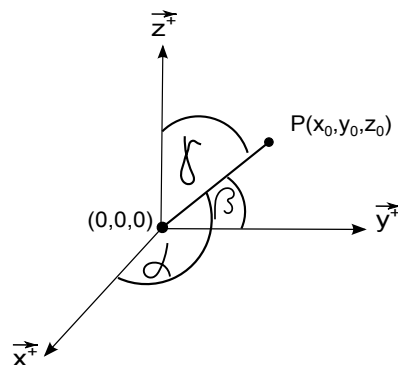
$$B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\} \quad \text{i} \quad \overline{B^3} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\},$$

su redom otvorena i zatvorena jedinična lopta u \mathbb{R}^3 .

Uglovi pravca i kosinusi pravca

Svakoj tački u \mathbb{R}^3 osim koordinatnog početka, a time i svakom nenula vektoru, pridružujemo tri karakteristična ugla koji se zovu **uglovi pravca**. To su uglovi koje vektor pravca date tačke zaklapa sa pozitivnim delovima koordinatnih osa. Dakle, ako je $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \neq \vec{0}$, proizvoljan nenula vektor, onda su njegovi uglovi pravca

$$\alpha = \angle(\vec{x}^+, \vec{a}), \quad \beta = \angle(\vec{y}^+, \vec{a}), \quad \gamma = \angle(\vec{z}^+, \vec{a}).$$



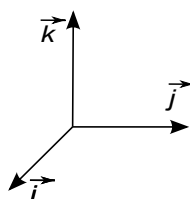
Kako za skalarni proizvod dva vektora važi da je

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \angle(\vec{u}, \vec{v}),$$

za ugao α dobijemo da je

$$\cos \alpha = \frac{\vec{i} \cdot \vec{a}}{\|\vec{i}\| \|\vec{a}\|} = \frac{\vec{i} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_x}{\|\vec{a}\|},$$

gde je $\vec{i} = (1, 0, 0)$ jedinični vektor na x -osi. Ostali bazni jedinični vektori (trodimenzionalnog) prostora \mathbb{R}^3 su $\vec{j} = (0, 1, 0)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$.



Podsetimo se još da se skalarni proizvod dva vektora pomoću koordinata računa po formuli

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_x, u_y, u_z) \cdot (v_x, v_y, v_z) = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z.$$

Prema tome, kosinusi pravca su kosinusi uglova pravca, te možemo pisati

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{a_x}{\|\vec{a}\|}, \frac{a_y}{\|\vec{a}\|}, \frac{a_z}{\|\vec{a}\|} \right) = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$

Primetimo da na ovaj način takođe dobijamo normiran nenula vektor.

1.2 Primeri vektorskih funkcija jedne realne promenljive

Tokom prethodnih kurseva matematičke analize izučavali smo realne (skalarne) funkcije jedne realne promenljive. To su funkcije koje jednom realnom broju dodeljuju drugi realni broj (skalar).

Funkcije kojima ćemo se baviti u ovom poglavlju jednom realnom broju dodeljuju vektor. Kasnije, u sledećim poglavljima bavićemo se funkcijama koje vektor slikaju u broj ili vektor, odnosno skalarnim i vektorskim funkcijama više promenljivih.

Dakle, sada ćemo izučavati funkcije oblika $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Vidimo da funkcija \vec{f} jednom realnom broju dodeljuje vektor i zbog toga se zove vektorska funkcija. Naravno, domen funkcije \vec{f} može biti i neki podskup skupa \mathbb{R} . Neka je $t \in \mathbb{R}$, realna nezavisno promenljiva. Tada je $\vec{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t)) \in \mathbb{R}^d$ vektor u koji se slika t . Pišemo još i $\vec{f} = (f_1, \dots, f_d)$ što znači da su skalarnе funkcije f_1, \dots, f_d komponente vektorske funkcije \vec{f} .

Primer 1 (Jedinična kružnica) Neka su $f(t) = \cos t$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g(t) = \sin t$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dve skalarnе funkcije koje su komponente vektorske funkcije $\vec{r} = (f, g)$. To znači da je

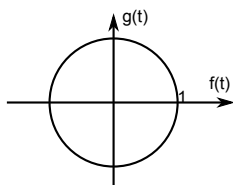
$$\vec{r}(t) = (f(t), g(t)) = (\cos t, \sin t)$$

preslikavanje iz $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

- a) Uzmimo da je $t \in [0, 2\pi]$. Skicirajmo skup $K \equiv \{\vec{r}(t) \mid t \in [0, 2\pi]\} \subset \mathbb{R}^2$. Na horizontalnoj osi ćemo predstaviti vrednosti funkcije f , a na vertikalnoj g . Izračunaćemo prvo nekoliko vrednosti (vektora) funkcije $\vec{r}(t)$,

t	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f(t)$	1	$\frac{1}{2}$	0	-1
$g(t)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

A zatim ćemo i nacrtati skup K ,



Primitimo da smo dobili jediničnu kružnicu, odnosno kružnicu sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika jedan.

- b) Neka je sada $t \in [0, 4\pi]$. Dobićemo istu kružnicu samo dva puta, u smislu da ćemo svaku tačku kružnice dobiti za dve različite vrednosti parametra, na primer $\vec{r}(\pi) = \vec{r}(3\pi) = (-1, 0)$.

Jedinična kružnica se obeležava sa S^1 , kao "jedinična sfera" u \mathbb{R}^2 . Ako iskoristimo jedinične vektore u ravni, $\vec{i} = (1, 0)$ i $\vec{j} = (0, 1)$, vektorsku funkciju \vec{r} možemo zapisati i na sledeći način,

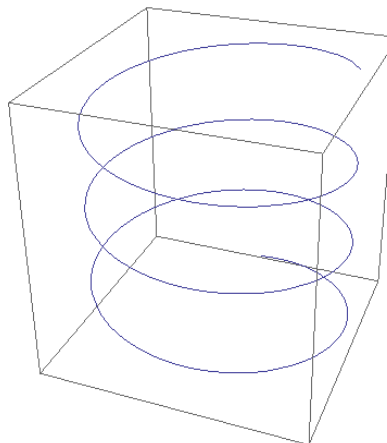
$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j},$$

ili kraće $\vec{r} = f\vec{i} + g\vec{j}$.

Najčešće ćemo se baviti funkcijama kod kojih je $d = 2$ ili $d = 3$. U prethodnom primeru je $d = 2$, a u sledećem je $d = 3$.

Primer 2 (Heliks) Neka je $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$. Sada $\vec{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, a $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$ su osnovni jedinični vektori u \mathbb{R}^3 .

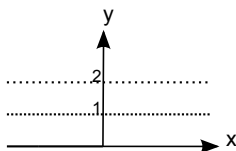
Primitimo da su prve dve komponente iste kao u prethodnom primeru što znači da će projekcija skupa $H \equiv \{\vec{r}(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ na (x, y) -ravan biti jedinična kružnica iz prethodnog primera. Skup H predstavlja jednu krivu u prostoru koja se zove Heliks (ili Helikoida, kružna/cilindrična/spiralna zavojnica) i predstavljen je na slici desno.



Iz prethodna dva primera vidimo da skup vrednosti vektorske funkcije može biti kriva u ravni (za $d = 2$) ili kriva u prostoru (za $d = 3$). Primitimo da što su "lepše" skalarne funkcije komponente, to su lepše i krive. Na primer, ako su komponentne funkcije neprekidne (neprekidnost skalarnih (realnih) funkcija je rađena tokom prethodnih kurseva iz matematičke analize), kriva se crta iz jednog poteza, ako su komponentne funkcije diferencijabilne, kriva nema "špiceva", itd. Preciznije ćemo se ovim osobinama baviti kasnije.

Napomenimo da postoje vektorske funkcije čiji skup slika nije kriva, što ilustruje sledeći primer.

Primer 3 Neka je $f(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$ i $g(t) = \begin{cases} 2, & t \in \mathbb{Q} \\ 1, & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Skicirajmo skup slika vektorske funkcije $\vec{r} = (f, g)$.



Primitimo da smo dobili dve "nepotpune prave", odnosno da sve tačke $\vec{r}(t)$ leže na dve prave, ali ni jedna prava nije potpuno pokrivena ovim tačkama. Takođe primitimo da na donjoj pravoju imamo više tačaka, tačnije na gornjoj imamo prebrojivo, a na donjoj neprebrojivo mnogo tačaka.

Da rezimiramo, funkcije oblika

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

zovemo vektorske funkcije, a skalarne funkcije x, y i z zovemo njenim komponentama ili komponentnim funkcijama.

1.2.1 Limes i neprekidnost vektorske funkcije

Limes (graničnu vrednost) vektorske funkcije definisaćemo po komponentama.

Definicija 4 Granična vrednost vektorske funkcije $\vec{r} = (x, y, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ u tački $a \in \mathbb{R}$ postoji ako postoje granične vrednosti njenih komponentata u tački a , i jednaka je

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow a} x(t), \lim_{t \rightarrow a} y(t), \lim_{t \rightarrow a} z(t) \right).$$

Tačnije, limes vektorske funkcije možemo definisati i pomoću rastojanja, odnosno postoji preciznija definicija, za koju možemo pokazati da joj je data definicija potreban i dovoljan uslov. Tu definiciju ćemo raditi kasnije kad budemo analizirali vektorske funkcije više promenljivih. Za sada smatramo da bi, s obzirom na znanje iz prethodnih kurseva matematičke analize, studentima više odgovarala ovakva definicija, jer se problem pronalaženja limesa vektorske funkcije svodi na pronalaženje nekoliko limesa koje su studenti već naučili tokom prethodnih kurseva iz matematičke analize.

Kombinovanjem ove definicije i osnovnih operacija sa vektorima, dobijamo gotovo sve osnovne osobine za graničnu vrednost kao u slučaju realnih funkcija jedne realne promenljive.

Primer 5 Nađimo $L = \lim_{t \rightarrow 0} \left((1 + t^3)\vec{i} + te^{-t}\vec{j} + \frac{\sin t}{t}\vec{k} \right)$. Kako je $\lim_{t \rightarrow 0} 1 + t^3 = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} te^{-t} = 0$ i $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, to je $L = (1, 0, 1) = \vec{i} + \vec{k}$.

Neprekidnost vektorske funkcije definišemo na uobičajen način.

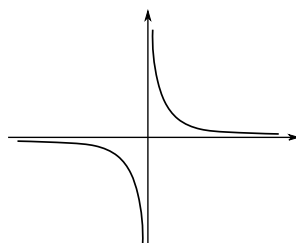
Definicija 6 Vektorska funkcija \vec{r} je neprekidna u tački $a \in \mathbb{R}$ ako i samo ako je

$$\lim_{t \rightarrow a} \vec{r}(t) = \vec{r}(a).$$

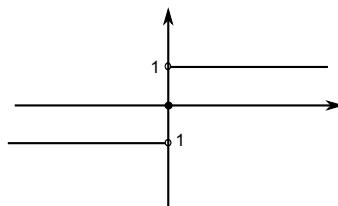
Kao posledicu prethodne dve definicije vidimo da se i neprekidnost može ispitivati po komponentama, odnosno da je vektorska funkcija \vec{r} neprekidna u tački $a \in \mathbb{R}$ ako i samo ako su njene komponente neprekidne u tački a .

Vidimo da su funkcije iz prva dva primera neprekidne, dok u trećem primeru imamo prekidnu vektorsku funkciju (jedna komponenta joj je neprekidna, a druga prekidna). Ipak, može da se desi da vektorska funkcija ne bude neprekidna, a da joj je skup slika kriva, što ilustruju sledeći primeri.

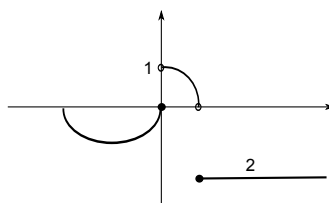
Primer 7 • Funkcija $\vec{r}_1(t) = (t, \frac{1}{t})$ je neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. U nuli nije definisana i ne može se neprekidno produžiti jer je $\lim_{t \rightarrow 0^+} \vec{r}_1(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} \vec{r}_1(t)$. Skup slika ove funkcije čini hiperbola, sa kracima u prvom i trećem kvadrantu.



• Funkcija $\vec{r}_2(t) = (t, \text{sign } t)$, gde je $\text{sign } t = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$, ima, kao i njena druga komponenta, jednu tačku prekida, koja skup slika deli na dve poluprave.



• Funkcija $\vec{r}_3(t) = (t, f(t))$, gde je $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in (-\infty, 0] \\ 1 - t^2, & t \in (0, 1) \\ -2, & t \in [1, \infty) \end{cases}$, ima dve tačke prekida koje skup slika dele na tri krive. Unija ovih krivih je opet kriva.



- U Primeru 3 imamo beskonačno mnogo tačkaka prekida, te je zbog toga neobičan skup slika. Tačnije, sve tačke su prekidne.

1.2.2 Izvod vektorske funkcije

Izvod vektorske funkcije $\vec{r} = (r_1, \dots, r_d) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ u tački $t \in \mathbb{R}$ definišemo kao sledeću graničnu vrednost,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{r_1(t+h) - r_1(t)}{h}, \dots, \frac{r_d(t+h) - r_d(t)}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(t+h) - r_1(t)}{h}, \dots, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_d(t+h) - r_d(t)}{h} \right) = (r_1'(t), \dots, r_d'(t)). \end{aligned}$$

Vidimo da $\vec{r}'(t)$ postoji ako izvod u tački t imaju sve komponentne funkcije i da je izvod vektorske funkcije u tački t jedan vektor.

Možemo da zaključimo da je vektorska funkcija diferencijabilna u nekoj tački ako i samo ako su u toj tački diferencijabilne sve njene komponente i pri tome je izvod vektorske funkcije vektor čije su komponente izvodi komponentnih funkcija. Kao i kod skalarnih funkcija, na skupu svih tačkaka u kojima je funkcija \vec{r} diferencijabilna definišemo izvodnu funkciju \vec{r}' kojoj opet možemo ispitivati diferencijabilnost i doći do pojma drugog izvoda i izvoda višeg reda.

Primer 8 Neka je $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + \ln t \vec{j} + \arctg t \vec{k}$. Funkcija \vec{r} definisana je na skupu $(0, +\infty)$, jer je njena druga komponenta $\ln t$ definisana na istom skupu, a prva i treća na celom \mathbb{R} . Tada je za proizvoljno $t \in (0, +\infty)$,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(e^t \vec{i} + \ln t \vec{j} + \arctg t \vec{k} \right) = e^t \vec{i} + \frac{1}{t} \vec{j} + \frac{1}{1+t^2} \vec{k}.$$

Stoga je, na primer $\vec{r}'(1) = (e, 1, 1/2)$. Izvodna funkcija \vec{r}' definisana je takođe na $(0, +\infty)$, pa je drugi izvod

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(e^t \vec{i} + \frac{1}{t} \vec{j} + \frac{1}{1+t^2} \vec{k} \right) = e^t \vec{i} + \frac{-1}{t^2} \vec{j} + \frac{-2t}{(1+t^2)^2} \vec{k}.$$

Odnos izvoda i vektorskih operacija

Videli smo da je izvod vektorske funkcije u tački vektor (kao i limes), pa se, poznavajući operacije sa vektorima i činjenice da se izvod i limes vektorske funkcije mogu računati po komponentama, vrlo lako prenose osnovne osobine jednodimenzionalnog računa na vektorske funkcije jedne promenljive. Tačnije važe sledeće osobine:

- $\frac{d}{dt} (\vec{u}(t) + \vec{v}(t)) = \frac{d}{dt} \vec{u}(t) + \frac{d}{dt} \vec{v}(t);$

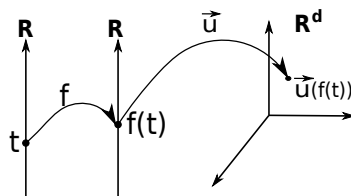
- $\frac{d}{dt}(c\vec{u}(t)) = c\frac{d}{dt}\vec{u}(t)$, gde je $c \in \mathbb{R}$ skalar koji množi vektor;
- $\frac{d}{dt}(f(t)\vec{u}(t)) = \vec{u}(t)\frac{d}{dt}f(t) + f(t)\frac{d}{dt}\vec{u}(t)$, gde je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ skalarna funkcija;
- $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \cdot \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \cdot \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \cdot \vec{v}'(t)$, gde je " \cdot " oznaka za skalarni proizvod dva vektora;
- $\frac{d}{dt}(\vec{u}(t) \times \vec{v}(t)) = \vec{u}'(t) \times \vec{v}(t) + \vec{u}(t) \times \vec{v}'(t)$, gde je " \times " oznaka za vektorski proizvod dva vektora.

Ove osobine se jednostavno pokazuju, te dokaz ostavljamo čitaocima za vežbanje. Osobinu izvoda složene funkcije ćemo posebno formulirati i dokazati.

Lema 9 Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ skalarna funkcija diferencijabilna u tački t , i neka je $\vec{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ vektorska funkcija diferencijabilna u tački $f(t)$.

Tada je kompozicija $\vec{u} \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ diferencijabilna u t i pri tome važi

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(f(t))) = \vec{u}'(f(t)) f'(t).$$



Dokaz: Neka je $\vec{u} = (u_1, \dots, u_d)$. Tada je

$$\frac{d}{dt}(\vec{u}(f(t))) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{u}(f(t+h)) - \vec{u}(f(t))}{h} = \left(\frac{d}{dt}(u_1(f(t))), \dots, \frac{d}{dt}(u_d(f(t))) \right).$$

Kako su u_i , $i = 1, \dots, d$ i f skalarne funkcije, primenjujemo teoremu o izvodu kompozicije za skalarne funkcije, [9]

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}(u_1(f(t))), \dots, \frac{d}{dt}(u_d(f(t))) \right) &= \left(u_1'(f(t)) f'(t), \dots, u_d'(f(t)) f'(t) \right) \\ &= f'(t) \left(u_1'(f(t)), \dots, u_d'(f(t)) \right) = f'(t) \vec{u}'(f(t)). \end{aligned}$$

□

Integral vektorske funkcije

Određeni integral je takođe definisan preko limesa, pa integral vektorske funkcije $\vec{r} = (x, y, z)$ na intervalu $[a, b]$ računamo na sledeći način

$$\int_a^b \vec{r}(t) dt = \left(\int_a^b x(t) dt, \int_a^b y(t) dt, \int_a^b z(t) dt \right).$$

Primer 10 Izračunajmo

$$\int_0^1 (e^t \vec{i} + t \vec{j} + \vec{k}) dt = \int_0^1 e^t dt \vec{i} + \int_0^1 t dt \vec{j} + \int_0^1 dt \vec{k} = (e - 1) \vec{i} + \frac{1}{2} \vec{j} + \vec{k}.$$

Primetimo da je određeni integral vektorske funkcije vektor čije su komponente određeni integrali (skalarnih) komponentnih funkcija.

1.3 Parametarski oblik krive

U ovom poglavlju krivu ćemo posmatrati kao skup tačaka u ravni, odnosno prostoru. Kasnije, u četvrtom poglavlju ćemo precizno definisati krivu po kojoj se integriše.

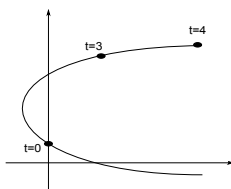
Sa parametarski zadanom krivom u ravni susretali smo se i u okviru kurseva iz računa realnih funkcija jedne realne promenljive. Posmatrali smo parametar $t \in [a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$, i dva preslikavanja $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, koja vrednostima t iz datog intervala pridružuju tačke ravni $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, tj. posmatrali smo preslikavanja oblika

$$t \mapsto (x(t), y(t)).$$

Primer 11 Neka je $x(t) = t^2 - 2t$ i $y(t) = t + 1$. Do skice skupa tačaka $\{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$ možemo doći na više načina. Prvi način je traženjem što više tačaka, što predstavljamo tablicom,

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} t & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline x & 8 & 3 & 0 & -1 & 0 & 3 & 8 \\ \hline y & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}.$$

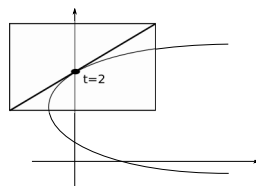
Ponekad možemo i eliminisati parametar, tj. kada iz druge jednakosti izrazimo $t = y - 1$ i uvrstimo u prvu dobijemo $x = (y - 1)(y - 3)$, što znamo da nacrtamo,



Sada ćemo posmatrati vektorsku funkciju $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2 - 2t, t + 1)$, $t \in [0, 3]$, i njen izvod $\vec{r}'(t) = (2t - 2, 1)$. Tako dobijamo jednu parametarski datu krivu sa početnom tačkom $\vec{r}(0) = (0, 1)$ i krajnjom $\vec{r}(3) = (3, 4)$.

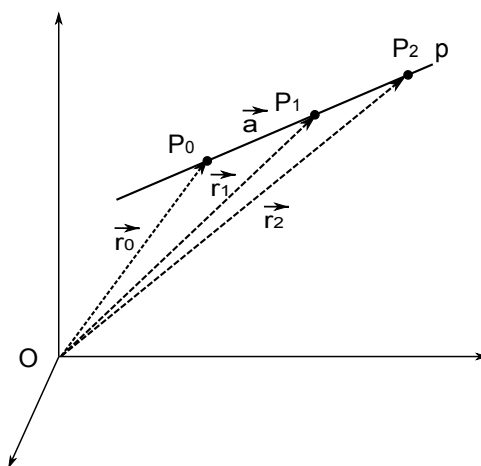
Posmatrajmo tačku $\vec{r}(2) = (0, 3)$ i primetimo da je tangenta na krivu u toj tački paralelna

vektoru $\vec{r}'(2) = (2, 1)$. To nije slučajno.



Vektor $\vec{r}'(t_0)$ je tangenti vektor u tački $\vec{r}(t_0)$, ako postoji i ako nije nula vektor (u tom slučaju i nemamo fizički vektor i taj slučaj ćemo posebno razmatrati kasnije).

Primer 12 (Parametarski zapis prave) Neka su P_0 i P_1 proizvoljne različite tačke jedne prave p . Označimo sa $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ i $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ njihove vektore. Neka je vektor $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$. Vidimo da je $\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{a}$. Neka je $\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + 2\vec{a} = \overrightarrow{OP_2}$. Tada je i tačka $P_2 \in p$.



Dakle, ako je P_0 proizvoljna tačka prave p i \vec{a} proizvoljan nenula vektor paralelan pravoj p , tada je

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{a}, \quad s \in \mathbb{R},$$

parametarski data jednačina prave p sa parametrom $s \in \mathbb{R}$.

Ako želimo da nađemo tangentu na krivu $\vec{r}(t)$ u tački $\vec{r}(t_0)$, onda je $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$, a vektor $\vec{a} = \vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$, pa je jednačina tangente na krivu $\vec{r}(t)$ u tački $\vec{r}(t_0)$, data sa

$$\vec{t}(s) = \vec{r}(t_0) + s\vec{r}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

1.3.1 Tangente

Regularni slučaj

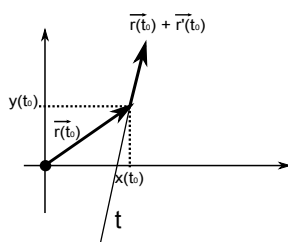
Dakle, ako je $\vec{r}'(t_0) \neq 0$, onda je jednačina tangente na krivu $\vec{r}(t)$ u tački $\vec{r}(t_0)$, data sa

$$\vec{l}(s) = \vec{r}(t_0) + s\vec{r}'(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

U svakoj tački t gde postoji $\vec{r}'(t) \neq 0$, posebno definišemo jedinični tangenti vektor,

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|},$$

gde je $|\vec{r}'(t)|$ intenzitet vektora $\vec{r}'(t)$, $|\vec{r}'(t)| = |(x'(t), y'(t))| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \neq 0$.



Primetimo da ako je $y'(t_0) = 0$, a $x'(t_0) \neq 0$, tangenta je horizontalna, a obratno ako je $x'(t_0) = 0$, a $y'(t_0) \neq 0$ tangenta je vertikalna. Još ćemo ove pojmove prodiskutovati na primerima.

Slučaj "0/0"

Podsetimo se da se koeficijent pravca tangente na grafik funkcije jedne promenljive dobija pomoću formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

Odavde vidimo da ako u nekoj tački t imamo $\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t)) = \vec{0}$, dobijamo neodređeni izraz za nagib tangente $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$. U tom slučaju može svašta da se desi, što ćemo ilustrovati primerima.

Primer 13 Razmotrićemo nekoliko primera krivih koje u nekoj tački imaju $\vec{r}'(t_0) = \vec{0}$.

- $\vec{r}_1(t) = (t^2, t^3)$, $\vec{r}'_1(t) = (2t, 3t^2)$. Izračunajmo prvo nekoliko vrednosti funkcije $\vec{r}_1(t)$

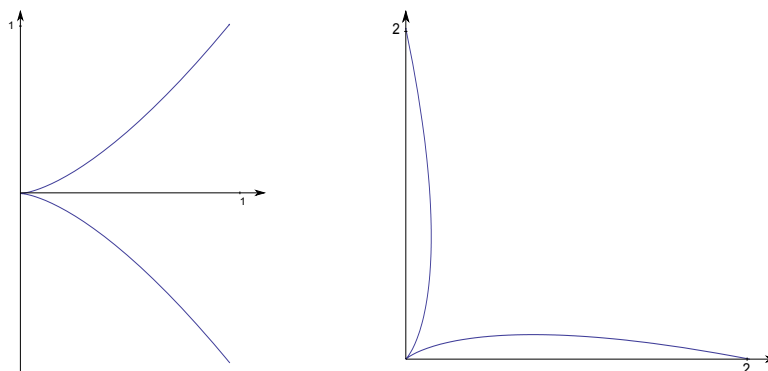
t	x	y
0	0	0
± 1	1	± 1
$\pm\sqrt{2}$	2	$\pm 2\sqrt{2}$
± 2	4	± 8

pa skicirajmo krivu $\{\vec{r}_1(t) : t \in [-2, 2]\}$, vidi sliku levo na kraju ovog primera. Vidimo da je $\vec{r}'_1(0) = (0, 0)$. Kako je koeficijent pravca tangente $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t^2}{2t} = 0$, tangenta je horizontalna, tj. prava $y = 0$.

- $\vec{r}_2(t) = (t^3, t^2)$, $\vec{r}'_2(t) = (3t^2, 2t)$.

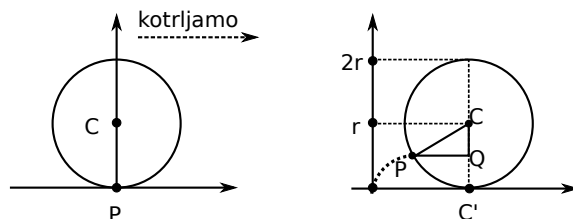
Vidimo da je $\vec{r}'_2(0) = (0, 0)$, a $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2t}{3t^2} = +\infty$. Stoga je tangenta vertikalna, tj. y -osa. Skup slika ove funkcije dobija se rotacijom za 90 stepeni prethodne slike.

- $\vec{r}_3(t) = (t^2, 5t^2)$, $\vec{r}'_3(t) = (2t, 10t)$. Ovde imamo pravu $y = 5x$, pa je i koeficijent pravca tangente $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{10t}{2t} = 5$.
- Skup slika preslikavanja $\vec{r}_4(t) = (t^2 - t^3, t^2 + t^3)$, kod koga je koeficijent pravca tangente u tački $(0, 0)$ jednak -1 , pa je tangenta kosa, dat je na sledećoj slici desno.



Na prvoj slici je skiciran skup tačaka $\{\vec{r}_1(t) : t \in [-1, 1]\}$, a na drugoj $\{\vec{r}_4(t) : t \in [-1, 1]\}$.

Primer 14 (cikloida) Neka je $k = k((0, r); r)$, kružnica sa centrom u $(0, r)$ poluprečnika $r > 0$. Obojimo tačku $P(0, 0) \in k$. Kada se kružnica k kotrlja (bez klizanja) duž pozitivnog dela x -ose, tačka P ostavlja trag. Taj trag je kriva koju zovemo cikloida. Prvo ćemo potražiti njenu parametrizaciju. U početnom položaju je centar kružnice C u tački $(0, r)$, a tačka P u $(0, 0)$.



Na slici levo je kružnica u početnom položaju, a desno je prikazan položaj nakon što smo kružnicu malo zakotrljali.

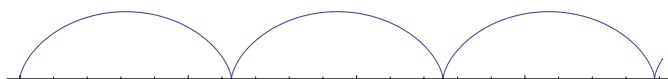
Kada se kružnica malo zakotrlja, dobijamo da je ugao $\angle PCC' =: \theta > 0$, gde je C' projekcija tačke C na x -osu. Taj ugao zovemo ugao rotacije, i on će nam poslužiti kao parametar krive. Obeležimo sa Q projekciju tačke P na duž CC' . Iz pravouglog trougla $\triangle PQC'$ imamo da je $r = |CP| = \frac{|CQ|}{\cos \theta} = \frac{|PQ|}{\sin \theta}$. Obeležimo koordinate tačke $C'(z, 0)$ i tačke $P(x, y)$. Vidimo da je $|CQ| = r - y$, i $|PQ| = z - x$, pa treba još da izrazimo z u funkciji od θ . U tome će nam pomoći analiza karakterističnih položaja:

- Za $\theta = 0$, videli smo da imamo da je $P = C'$ i $z = 0$.
- Za $\theta = \frac{\pi}{2}$, četvrtina kružnice je dodirnula x -osu, tačka P je dospela na pravu $y = r$, pa se centar kruga sada projektuje u $(\frac{r\pi}{2}, 0)$.
- Možemo analizirati i ostale karakteristične položaje, na primer, za $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ i $\theta = 2\pi$.
- U proizvoljnom položaju imamo, dakle, da je $C'(r\theta, 0)$, pa je $x = r(\theta - \sin \theta)$, $y = r(1 - \cos \theta)$, $\theta \geq 0$.

Dakle, vektorska funkcija čiji je skup slika cikloida je

$$\vec{r}(\theta) = (r(\theta - \sin \theta), r(1 - \cos \theta)), \quad \theta \in [0, +\infty).$$

Jedan luk cikloide dobijamo za $\theta \in [0, 2\pi]$, a možemo dozvoliti da θ uzima i negativne vrednosti.



Primetimo da je

$$\vec{r}'(\theta) = (r(1 - \cos \theta), r \sin \theta), \quad \theta \in [0, +\infty).$$

Horizontalne tangente dobijamo kada je $y' = 0$ i $x' \neq 0$, odnosno za $\theta = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Na primer, u tački $\vec{r}(\pi)$ imamo horizontalnu tangentu $y = 2r$.

U slučaju kada je $\vec{r}'(\theta) = \vec{0}$, odnosno za $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, imamo da je

$$\lim_{\theta \rightarrow 2k\pi^\mp} \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \mp \infty,$$

odnosno da su prave $x = 2k\pi$ vertikalne tangente.

Zadatak 15 (Krive na sferi - prelaz na krive u prostoru) *Pokazati da ako je za sve vrednosti parametra t , $|\vec{r}(t)| = k$, gde je $k \in \mathbb{R}$ data konstanta, onda je $\vec{r}'(t)$ ortogonalno na $\vec{r}(t)$, za sve t . Protumačiti rezultat geometrijski.*

Rešenje zadatka: *Identitet $|\vec{r}(t)| = k$ znači da su sve tačke krive na rastojanju k od koordinatnog početka, što znači da se nalaze na kružnici (za $d = 2$, $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$), ili na sferi (za $d = 3$) poluprečnika k .*

Vektori su ortogonalni ako i samo ako im je skalarni proizvod jednak 0, tako da treba pokazati da je

$$\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) = 0, \text{ za sve } t \in \mathbb{R}.$$

Znamo da je $k^2 = |\vec{r}(t)|^2 = \vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)$. Kada ovu jednakost diferenciramo po t , dobijemo da je

$$0 = \frac{d}{dt} (\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)) = 2\vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t), \text{ za sve } t \in \mathbb{R}.$$

Možemo zaključiti da kriva koja leži na sferi ima u svakoj tački tangenti vektor normalan na vektor $\vec{r}(t)$.

1.3.2 Krive u prostoru - dužina luka krive

Sada posmatramo preslikavanja oblika

$$t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in [a, b].$$

Jedan primer slike takvog preslikavanja je Heliks (primer 2).

U okviru prethodnog kursa iz matematičke analize, pokazali smo da se u \mathbb{R}^2 dužina luka krive od tačke $(x(\alpha), y(\alpha))$ do tačke $(x(\beta), y(\beta))$ može izračunati pomoću formule

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt \equiv \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t)| dt.$$

U \mathbb{R}^3 važi identična formula.

Primer 16 Naći dužinu luka Heliksa iz Primera 2, od tačke $(1, 0, 0)$ do $(1, 0, 2\pi)$.

Kako je $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$, vidimo da je $\vec{r}(0) = (1, 0, 0)$ i $\vec{r}(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$. Stoga je dužinu jednog luka Heliksa

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi.$$

1.3.3 Glatka kriva

Definicija 17 • Za krivu kažemo da je *glatka (regularna)*, ako ima glatku parametrizaciju $\vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

- Parametrizacija $\vec{r}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ je *glatka* ako je $\vec{r}'(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, neprekidna ($\vec{r} \in C^1([\alpha, \beta])$) i različita od nule.
- Jedinični tangentni vektor u tački $\vec{r}(t)$ je $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$. Definisan je u svakoj tački glatke krive i pokazuje smer krive.
- Kriva je po delovima glatka, ako je unija konačno mnogo glatkih krivih.

Krivina, normala i binormala

Krivina krive u tački se definiše kao

$$\kappa := \frac{|\vec{T}'(t)|}{|\vec{r}'(t)|} \geq 0,$$

i predstavlja meru zakrivljenosti regularne krive. Ona meri koliko brzo kriva, odnosno tangentni vektor, menja pravac.

Prava ima konstantnu krivinu 0, a kružnica poluprečnika R ima krivinu $1/R$ u svakoj tački. Kao i kružnica, i heliks ima konstantnu krivinu $1/R$.

Postoji mnogo vektora ortogonalnih na $\vec{T}(t)$. Pošto je $|\vec{T}(t)| = 1$ u svakoj tački regularne krive, to na osnovu zadatka 15 znamo da su vektori $\vec{T}'(t)$ i $\vec{T}(t)$ međusobno ortogonalni. Vektor jedinične normale se stoga definiše na sledeći način,

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{|\vec{T}'(t)|}.$$

Vektor binormale je ortogonalan na oba pomenuta vektora,

$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t).$$

Ravan koju formiraju \vec{B} i \vec{N} zove se normalna ravan (normalna je na tangentni vektor), a ravan koju formiraju \vec{T} i \vec{N} zove se oskulatorna ravan (normalna je na vektor binormale).

Brzina i ubrzanje

Kriva $t \mapsto \vec{r}(t)$, $t \geq 0$, može predstavljati putanju kretanja materijalne tačke (čestice). Tada je

- $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ vektor brzine u tački $\vec{r}(t)$,
- $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$ vektor ubrzanja u tački $\vec{r}(t)$.

Imajući u vidu definicije vektora $\vec{T}(t)$, $\vec{N}(t)$ i $\vec{B}(t)$, može se reći da oni čine prateći (prirodni) triedar materijalne tačke koja se kreće po krivoj $\vec{r}(t)$. Naziv prirodni triedar je motivisan kinematikom zato što se brzina i ubrzanje na najjednostavniji način opisuju u odnosu na njega. Brzina ima komponentu samo u pravcu tangente, a ubrzanje ima komponente u pravcu tangete i normale.

Kako parametar t predstavlja vreme, izvodi po t se često obeležavaju tačkom, odnosno $\cdot = \frac{d}{dt}$. U toj notaciji pišemo $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ i $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$, $t \geq 0$.

Zadatak 18 Projektil je ispaljen pod uglom α u odnosu na horizont, početnom brzinom \vec{v}_0 .

- Naći putanju projektila pod dejstvom sile Zemljine teže, uz pretpostavku da je otpor sredine (vazduha) zanemarljiv.
- Naći optimalni ugao α tako da projektil ode najdalje, tj. pređe maksimalnu razdaljinu (dostigne maksimalni domet).

Rešenje zadatka: Neka je brzinom $\vec{v}_0 = (a, b)$ projektil izbačen iz koordinatnog početka (što znači da je $\vec{r}(0) = (0, 0)$ i $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$), pod uglom α u odnosu na x -osu. Rastojanje koju pređe prikazano je, dakle, na x -osi. Tada je $\cos \alpha = \frac{a}{|\vec{v}_0|}$, dok je $\sin \alpha = \frac{b}{|\vec{v}_0|}$.

Gravitaciono ubrzanje deluje u negativnom (ka dole) smeru y -ose, pa je $\vec{a} = -g\vec{j}$, gde je $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ ubrzanje sile Zemljine teže. Osim toga $\vec{a} = \vec{v}'$, pa je $\vec{v}(t) = -gt\vec{j} + \vec{c} = (c_1, -gt + c_2)$, gde su c_1 i c_2 realne konstante koje ćemo odrediti iz uslova da je

$$(a, b) = \vec{v}_0 = \vec{v}(0) = (c_1, c_2).$$

Sada imamo da je

$$\vec{r}'(t) = \vec{v}(t) = (a, b - gt) \text{ i } \vec{r}(0) = (0, 0),$$

odakle nalazimo

$$\vec{r}(t) = (at, bt - g\frac{t^2}{2}), \quad t \geq 0.$$

Sada rešavamo deo pod b). Ako rastojanje koje projektil pređe obeležimo sa d , to znači da će projektil pasti (završiti kretanje) u tački $(d, 0)$. Ta tačka takođe je i krajnja tačka putanje, pa je $\vec{r}(t_{kr}) = (d, 0)$, gde je t_{kr} vreme kada je projektil pao na Zemlju, tj. x -osu. Iz jednačine $(d, 0) = \vec{r}(t_{kr}) = (at_{kr}, bt_{kr} - g\frac{t_{kr}^2}{2})$ dobijamo dve vrednosti za t_{kr} : $t_{kr} = 0$ što daje početnu tačku i $t_{kr} = \frac{2b}{g} = \frac{2|\vec{v}_0| \sin \alpha}{g}$, što nam omogućava da dobijemo rastojanje d u funkciji od ugla α ,

$$d = at_{kr} = \frac{2|\vec{v}_0|^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{2|\vec{v}_0| \sin 2\alpha}{g} = d(\alpha).$$

Sada možemo naći $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ za koje funkcija $d(\alpha)$ dostiže maksimum. To je $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

1.4 Jednačine nekih površi u prostoru

O 3D-koordinatnom sistemu, uglovima i kosinusima pravca pisali smo na početku ovog poglavlja. Takođe smo pominjali sferu, kao jednu površ u prostoru. Sada ćemo definisati neke površi kao skup tačaka u prostoru, dok ćemo kasnije precizno definisati površ.

Ravan

Ravan definišemo kao skup tačaka $P(x, y, z)$ u prostoru koje zadovoljavaju jednakost

$$ax + by + cz = d,$$

gde su a, b, c, d konstante takve da je bar jedna od konstanti a, b, c različita od nule. Ova jednačina se dobija na sledeći način. Neka je $P_0(x_0, y_0, z_0)$ jedna fiksirana tačka u ravni, a $P(x, y, z)$ proizvoljna tačka ravni različita od P_0 , i neka su \vec{r}_0 i \vec{r} vektori položaja tačaka P_0 i P , respektivno. Tada je vektor $\vec{r} - \vec{r}_0$ paralelan ravni. Neka je $\vec{n} = (a, b, c)$ normala na ravan u tački P_0 . Jasno je da je $\vec{n} \perp (\vec{r} - \vec{r}_0)$, što znači da je

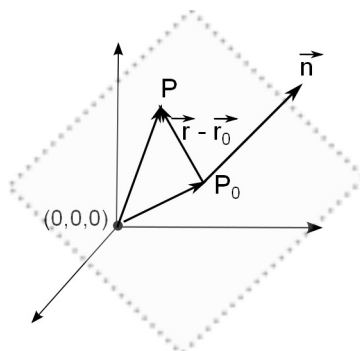
$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0.$$

Odavde je

$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0 = d.$$



Cilindri

Cilindrične površi (cilindri) se dobijaju kao skup svih pravih koje su paralelne datoj pravoj, a prolaze kroz datu ravansku krivu. Ukoliko je ta data prava paralelna nekoj od osa, jedna promenljiva se neće pojavljivati u jednačini cilindrične površi.

Na primer, skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

je jedinična kružnica u (x, y) -ravni, dok je skup

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

cilindrična površ koju dobijamo kao skup svih pravih paralelnih z -osi koje prolaze kroz jediničnu kružnicu u (x, y) -ravni. Može se pokazati da Heliks iz Primera 2 leži na ovoj cilindričnoj površi.

Glava 2

Funkcije više promenljivih - diferencijalni račun

U ovom i narednim poglavljima bavićemo se funkcijama koje zavise od dve, tri ili više promenljivih. One su definisane na nekom podskupu skupa \mathbb{R}^d , $d \geq 2$ i takođe mogu biti skalarne $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (kodomen im je skup realnih brojeva) ili vektorske $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ (kodomen im je skup vektora). Počecemo od najjednostavnijeg slučaja, naime od skalarnih funkcija dve promenljive:

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad \Omega \ni \underbrace{(x, y)}_{\text{vektor}} \mapsto \underbrace{f(x, y)}_{\text{broj}} \in \mathbb{R}.$$

Funkcije dve promenljive; linije nivoa

Grafik ovakvog preslikavanja se može predstaviti u 3D-koordinatnom sistemu,

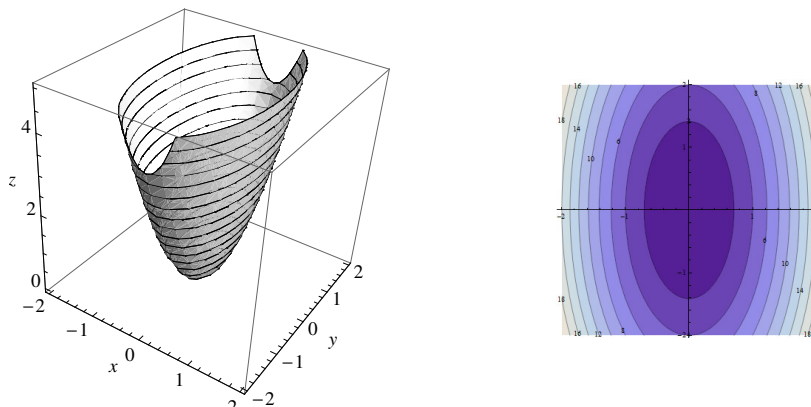
$$\Gamma_f = \left\{ (x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \Omega \right\}.$$

Pišemo i $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, što je često jednačina neke površi. Za skiciranje grafika ovakve funkcije koristimo tzv. tragove. *Tragovi* su krive koje nastaju u preseku površi (grafika funkcije) koje želimo da skiciramo i ravni paralelnih (x, y) -ravni. Projekcija traga na koordinatnu ravan zove se *linija nivoa*.

Primer 19 Skicirajmo grafik funkcije $f(x, y) = 4x^2 + y^2$. Ona je definisana na celom skupu \mathbb{R}^2 , a kako je $f(x, y) \geq 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, to je kodomen funkcije f poluprava $[0, +\infty)$.

U preseku površi $z = 4x^2 + y^2$ i ravni paralelnih (x, y) -ravni dobijamo sledeće tragove. Presek sa ravni $z = 0$ je samo tačka $(0, 0)$. Presek sa ravni $z = 1$ je elipsa $\frac{x^2}{(1/2)^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$, a presek sa

ravni $z = 4$ je elipsa $x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1$.



Na slici levo je grafik date funkcije sa označenim tragovima, a desno su predstavljene linije nivoa, tj. projekcije istih tragova. Grafik predstavlja jednu površ koja se zove eliptični paraboloid, jer su mu linije nivoa u (x, y) -ravni elipse, dok su linije nivoa u ostalim koordinatnim ravnima parabole.

Funkcije tri promjenljive; površi nivoa

Ukoliko je $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, grafik joj je u \mathbb{R}^4 i to je teško predstaviti. Ono što se može predstaviti su površi nivoa, tj. površi koje dobijamo kao skup originala koji se slikaju u isti broj.

Primer 20 Ako posmatramo funkciju rastojanja proizvoljne tačke sa koordinatama (x, y, z) od koordinatnog početka, tj. funkciju $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, vidimo da su njene površi nivoa date jednačinama $d(x, y, z) = k$, $k \geq 0$, odnosno, da su to sfere sa centrom u $(0, 0, 0)$ poluprečnika k .

2.1 Konvergencija

2.1.1 Okoline u \mathbb{R}^d

Topologija skupa \mathbb{R}^d koju ćemo koristiti u ovom kursu je uopštenje topologije na skupu realnih brojeva \mathbb{R} . Na skupu \mathbb{R} smo koristili otvorene intervale, a sada ćemo koristiti otvorene lopte

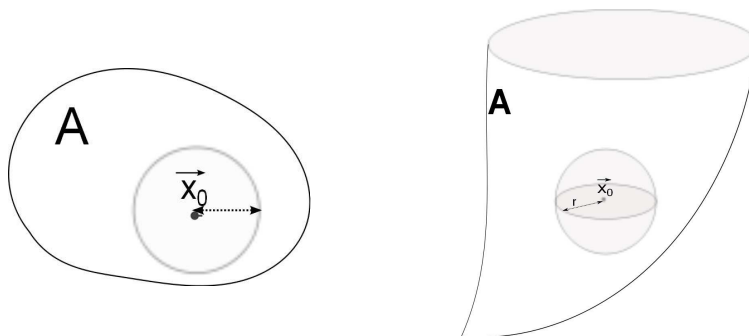
$$B(\vec{x}_0; \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \mid d(\vec{x}, \vec{x}_0) < \varepsilon\}.$$

Ono što su bili zatvoreni intervale, sada su zatvorene lopte,

$$\bar{B}(\vec{x}_0; \varepsilon) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^d \mid d(\vec{x}, \vec{x}_0) \leq \varepsilon\}.$$

Lopta sa centrom u \vec{x}_0 poluprečnika ε u \mathbb{R}^3 je stvarno lopta, tj. ono što smo do sada zvali lopta (telo čiji je omotač (ili rub) sfera), a u \mathbb{R}^2 je krug. U \mathbb{R} je otvoreni interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

Za skup $A \subset \mathbb{R}^d$ kažemo da je okolina tačke \vec{x}_0 , ako postoji otvorena lopta sa centrom u \vec{x}_0 koja cela leži u skupu A . Kao i na skupu \mathbb{R} , definicija okoline je ekvivalentna i ako koristimo zatvorene lopte. To je posledica činjenice da se u svaku otvorenu loptu može upisati zatvorena i obrnuto, tj. $\bar{B}(\vec{x}_0; \varepsilon/2) \subset B(\vec{x}_0; \varepsilon) \subset \bar{B}(\vec{x}_0; \varepsilon)$.



Na slici levo je prikazan skup $A \subset \mathbb{R}^2$ okolina tačke \vec{x}_0 ,

a desno skup $A \subset \mathbb{R}^3$ okolina tačke $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3$.

Ako je skup A okolina tačke \vec{x}_0 , tačku \vec{x}_0 zovemo unutrašnja tačka skupa A . Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A zovemo unutrašnjost skupa A i obeležavamo sa $\text{int}A$ ili sa A^0 .

2.1.2 Nizovi u \mathbb{R}^d

Niz možemo posmatrati kao vektorsku funkciju jedne promenljive $n \in \mathbb{N}$,

$$A : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad n \mapsto A(n) = (a_1(n), \dots, a_d(n)).$$

Svaka komponenta ove vektorske funkcije je jedan realni niz. Koristimo skraćene oznake za n -ti član niza $A_n = (a_1^n, \dots, a_d^n)$, odnosno za niz $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} = (\{a_1^n\}_{n \in \mathbb{N}}, \dots, \{a_d^n\}_{n \in \mathbb{N}})$. Pošto se radi o vektorskoj funkciji, znamo kako definišemo granicu niza,

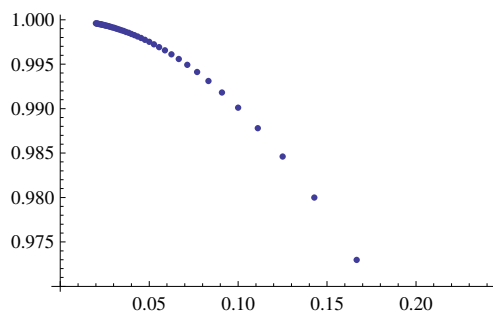
$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_1^n, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_d^n \right).$$

Dakle granica niza $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ postoji ako i samo ako postoje granice njegovih komponentnih nizova $\{a_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $i = 1, \dots, d$.

Primer 21 Pronađimo granicu niza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{n^2}{n^2 + 1} \right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} \right) = (0, 1).$$

Prvih nekoliko članova ovog niza su tačke u ravni $A_1 = (1, \frac{1}{2})$, $A_2 = (\frac{1}{2}, \frac{4}{5})$, $A_3 = (\frac{1}{3}, \frac{9}{10})$. Kada ih skiciramo vidimo da se približavaju graničnoj tački $(0, 1)$.



Na slici su prikazani članovi niza od šestog do pedesetog.

2.1.3 Granična vrednost funkcije dve promenljive

Definicija 22 Neka je funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i neka je za neko $\delta > 0$ tačka $(a, b) \in K((a, b); \delta) \subset D$ unutrašnja tačka skupa D . Tada je

$$l = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in D}} f(x, y) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (x, y) \in D)$$

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \implies |f(x, y) - l| < \varepsilon.$$

Primer 23 Pokažimo da je $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$.

Fiksiramo proizvoljno $\varepsilon > 0$, i tražimo $\delta > 0$, tako da važi uslov iz prethodne definicije. Posmatrajmo one (x, y) za koje je $0 < d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ i razliku

$$|f(x, y) - 0| = d(x, y) < \delta^2.$$

Kako prethodna razlika treba da bude manja od ε , biramo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$ i dobijamo traženi identitet.

Granična vrednost može da se definiše i preko nizova. Naime $l = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in D}} f(x, y)$ ako i samo ako važi da za svaki niz $\{(a_n, b_n)\}_n$ tačaka (originala) iz D čija je granica (a, b) , niz slika $\{f(a_n, b_n)\}_n$ konvergira ka l , odnosno važi implikacija

$$\lim (a_n, b_n) = (a, b) \implies \lim f(a_n, b_n) = l.$$

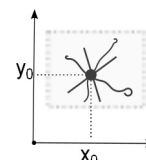
U prethodnom primeru vidimo da niz $(1/n, -2/n)$ konvergira ka tački $(0, 0)$, a niz slika $f(1/n, -2/n) = (1/n)^2 + (-2/n)^2 = 5/(n^2)$ konvergira ka 0, što potvrđuje (ali ne garantuje!) da je $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$.

Definiciju granične vrednosti preko nizova zgodno je koristiti kada treba pokazati da granična vrednost ne postoji u nekoj tački. U tom slučaju dovoljno je naći dva niza koja konvergiraju ka toj tački, a čiji nizovi slika konvergiraju ka različitim tačkama. Ili, dovoljno je naći niz koji konvergira ka traženoj tački, a čiji niz slika nije konvergentan.

Nizovi nam pomažu i da razumemo šta znači " $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ". Sa jednom promenljivom je bilo lakše, nekom realnom broju možemo da pridemo samo sa leve ili desne strane. Tački (a, b) u ravni možemo prići po beskonačno mnogo pravaca, tj. po svakoj pravoj koja prolazi kroz (a, b) . Ali možemo da joj prilazimo i po nekoj krivoj koja kroz nju prolazi. Dakle, ako je

$$l = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in D}} f(x, y),$$

to znači da kada se (x, y) približavaju tački (a, b) po svakom pravcu i po svakoj krivoj koja prolazi kroz (a, b) i leži u domenu funkcije f , vrednosti $f(x, y)$ se približavaju broju l .



Posmatrajmo sada dve različite krive C_1 i C_2 koje prolaze kroz tačku (a, b) i leže u domenu funkcije f . Restrikciju funkcije f na date krive obeležimo redom sa $f|_{C_1}$ i $f|_{C_2}$. Neka su granične vrednosti ovi restrikcija

$$l_1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f|_{C_1}(x, y), \quad l_2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f|_{C_2}(x, y).$$

Ako neka od ove dve graničnih vrednosti ne postoji, ne postoji ni $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$. Ako je $l_1 \neq l_2$, takođe polazna granična vrednost ne postoji. Ako je $l_1 = l_2$ to nam ništa ne znači, osim što nam daje informaciju da ako limes postoji, onda je jednak l_1 . U tom slučaju moramo pokazati po definiciji da je $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = l_1$. Iz ove analize vidimo da su restrikcije zgodne za korišćenje u dokazu da granične vrednosti funkcije f u tački (a, b) ne postoji.

Primer 24 Granične vrednosti funkcije $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ u tački $(0, 0)$ ne postoji.

Kroz tačku $(0, 0)$ prolaze prave $x = 0$ i $y = 0$. Vidimo da je

$$l_1 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{x=0}(x, y) = 1, \quad l_2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{y=0}(x, y) = -1.$$

Kako je $l_1 \neq l_2$, granična vrednost funkcije f u tački $(0, 0)$ ne postoji.

Granica vektorske funkcije $\vec{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$

Podsetimo se da smo rastojanje između dve tačke $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$ i $\vec{x}_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_d})$ u \mathbb{R}^d definisali kao

$$d_{\mathbb{R}^d}(\vec{x}, \vec{x}_0) = \sqrt{(x_1 - x_{0_1})^2 + \dots + (x_d - x_{0_d})^2}.$$

Neka je prvo $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ skalarna funkcija i $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$, $\vec{x}_0 = (x_{0_1}, \dots, x_{0_d}) \in \mathbb{R}^d$. Tada je $l = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d) \quad 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \implies |f(\vec{x}) - l| < \varepsilon.$$

Primitimo da je rastojanje dva broja iz \mathbb{R} apsolutna vrednost njihove razlike.

Sada, ako je $\vec{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ vektorska funkcija, vektor $\vec{l} \in \mathbb{R}^n$ je granica funkcije \vec{f} u tački \vec{x}_0 ako i samo ako

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^d) \quad 0 < d_{\mathbb{R}^d}(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \implies d_{\mathbb{R}^n}(\vec{f}(\vec{x}) - \vec{l}) < \varepsilon.$$

Vektorsku funkciju \vec{f} možemo posmatrati i po komponentama, tj. tražiti granicu kao uređenu n -torku granica komponentnih skalarnih funkcija. Važi sledeće tvrđenje.

Lema 25 Vektor $\vec{l} = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ je granica vektorske funkcije $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$ u tački \vec{x}_0 ako i samo ako je $l_i = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x})$, $i = 1, \dots, n$.

I u \mathbb{R}^d se limes lepo slaže sa osnovnim operacijama. Tačnije, važi sledeće tvrđenje.

Lema 26 Neka je $\vec{a} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{f}(\vec{x})$ i $\vec{b} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \vec{g}(\vec{x})$, gde su funkcije $\vec{f}, \vec{g}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$, definisane na nekoj okolini tačke x_0 . Tada je

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \pm \vec{g}(\vec{x})) = \vec{a} \pm \vec{b}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{g}(\vec{x})) = \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (\vec{f}(\vec{x}) \times \vec{g}(\vec{x})) = \vec{a} \times \vec{b}.$$

2.2 Nепrekidnost

Kada znamo definiciju limesa neke funkcije u nekoj tački, pojam neprekidnosti funkcije u datoj tački se lako definiše. Za funkciju $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna u tački (a, b) ako i samo ako je

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = f(a,b).$$

Za funkciju $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je neprekidna na skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ ako i samo ako je neprekidna u svakoj tački tog skupa. Kako je neprekidnost u tački definisana preko limesa, možemo zaključiti

da se i ova osobina lepo slaže sa osnovnim operacijama.

Bitne neprekidne funkcije su *funkcije projekcije*. Naime, na \mathbb{R}^2 definišemo dve skalarne funkcije projekcije, $\pi_x(x, y) = x$ i $\pi_y(x, y) = y$. Analogno na \mathbb{R}^d definišemo d funkcija projekcije. Pokažimo da je $\pi_x(x, y) = x$ neprekidna u proizvoljnoj, pa i svakoj tački $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Fiksirajmo $\varepsilon > 0$ i nađimo $\delta > 0$ tako da važi

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \implies |x - x_0| < \varepsilon.$$

Kako je

$$|x - x_0| = \sqrt{|x - x_0|^2} \leq \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

biramo $\delta = \varepsilon$.

U Primeru 23 smo videli da je $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0 = f(0, 0)$, odakle zaključujemo da je funkcija $f(x, y) = x^2 + y^2$ neprekidna u tački $(0, 0)$. To nije slučajno. Naime, svi polinomi dve promenljive su neprekidni na \mathbb{R}^2 . To je posledica činjenica da su funkcije projekcije neprekidne, konstantna preslikavanja su neprekidna i neprekidnost se lepo slaže sa osnovnim operacijama. Iz istog razloga su i sve racionalne funkcije neprekidne na svom domenu.

Primer 27 Potražimo $l := \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^2 + xy + y^4 - 4xy^2)$.

Pošto je polinom $P(x, y) = x^2 + xy + y^4 - 4xy^2$ neprekidna funkcija, to je $l = P(1, 0) = 1$.

Primer 28 U kojim tačkama su sledeće funkcije neprekidne? Mogu li se neprekidno produžiti?

a) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$. Ova funkcija definisana je na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Na svom domenu je neprekidna, jer su racionalne funkcije neprekidne na svom domenu. U tački $(0, 0)$ nema granicu, što smo videli u Primeru 24, pa se ne može neprekidno produžiti van svog domena. Koristimo oznaku $f \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ (f je klase C na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$), što znači da je f neprekidna na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

b) $g(x, y) = \frac{3x^2y}{x^2 + y^2}$. Funkcija $g \in C(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, jer je racionalna. Potražimo limes u $(0, 0)$.

Ako posmatramo restrikciju funkcije g na pravu $y = x$ (koja prolazi kroz $(0, 0)$), vidimo da je $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f|_{y=x} = 0$. To znači da, ako postoji limes u $(0, 0)$ to može biti samo broj 0. Pokažimo to po definiciji. Kako je

$$|g(x, y) - 0| = \frac{3x^2}{x^2 + y^2} |y| \leq 3|y| \leq 3\sqrt{x^2 + y^2} < 3\delta,$$

biramo $\delta = \varepsilon/3$.

Dakle funkcija $G(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ je neprekidna na celom \mathbb{R}^2 , pa je stoga najšire neprekidno proširenje funkcije g .

2.3 Parcijalni izvodi

Počnimo opet sa funkcijom f dve promenljive (x, y) . Za trenutak pretpostavimo da je jedna od promenljivih, na primer $y = b$, konstanta. Tada funkciju f možemo posmatrati kao funkciju jedne promenljive,

$$g(x) := f(x; b),$$

a b posmatramo kao parametar. Ako funkcija g ima izvod u tački a , što označavamo $g'(a)$, zovemo ga *parcijalni izvod* funkcije f po promenljivoj x (ili po prvoj promenljivoj) u tački (a, b) , i koristimo sledeće oznake,

$$g'(a) = f_x(a, b) = \partial_x f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \partial_1 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial 1}(a, b).$$

Vidimo da je, dalje,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h}.$$

Analogno, po drugoj promenljivoj, je

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h}.$$

Vidimo da se parcijalni izvodi definišu slično kao izvod funkcije jedne promenljive. Zbog toga očekujemo da i geometrijska interpretacija bude slična. Podsetimo se, kod funkcija jedne promenljive, izvod u tački a daje nagib tangente na grafik funkcije u tački $(a, f(a))$.

Posmatrajmo sada funkciju $f = f(x, y)$ koja u tački (x_0, y_0) ima parcijalne izvode. Tačka $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ je jedna tačka na grafiku funkcije f . Posmatrajmo dalje ravan $x = x_0$ koja je paralelna (y, z) -ravni. Neka je C_1 kriva u preseku ravni $x = x_0$ i grafika funkcije f , odnosno, površi $z = f(x, y)$. Parametrizacija te krive može biti

$$\vec{r}(y) = (x_0, y, f(x_0, y)), \quad y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon).$$

Neka je t_1 tangenta na krivu C_1 u tački P koja takođe leži u ravni $x = x_0$. Tada je

$$\vec{r}'(y_0) = (0, 1, \partial_y f(x_0, y_0)),$$

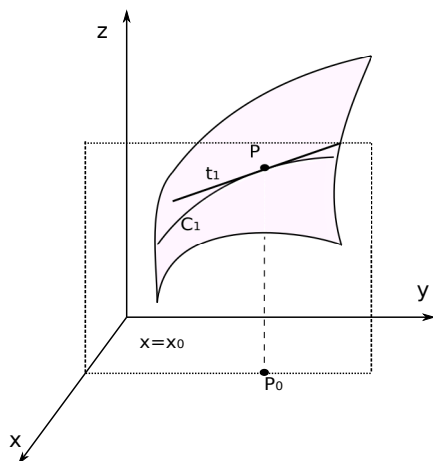
pa je tangenta

$$\vec{t}(s) = \vec{r}(y_0) + s\vec{r}'(y_0) = (x_0, y_0 + s, z_0 + s\partial_y f(x_0, y_0)),$$

gde je $z_0 = f(x_0, y_0)$. Sada eliminacijom parametra dobijamo da je jednačina tangente t_1

$$z - z_0 = s\partial_y f(x_0, y_0) = \partial_y f(x_0, y_0)(y - y_0),$$

odnosno $\partial_y f(x_0, y_0)$ je nagib tangente u tački P na krivu koja leži u preseku ravni $x = x_0$ i grafika funkcije f . Zato kažemo da je $\partial_y f(x_0, y_0)$ brzina promene funkcije f po y kada je $x = x_0$ fiksirano.



Na isti način, posmatrajmo ravan $y = y_0$ koja u preseku sa grafikom funkcije f formira krivu C_2 . Stoga je parametrizacija krive C_2

$$\vec{r}(x) = (x, y_0, f(x, y_0)), \quad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

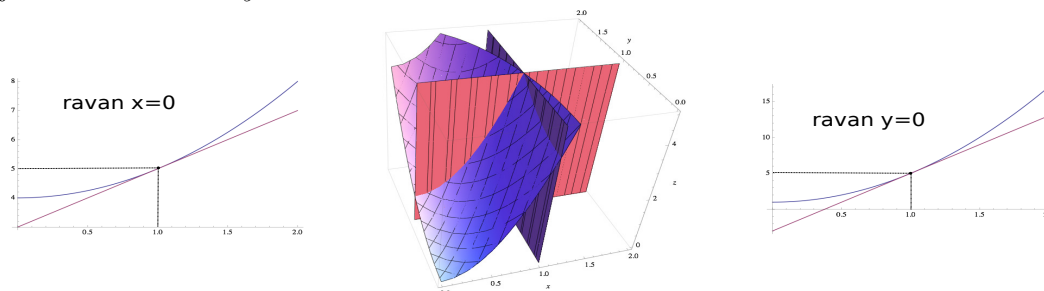
Tangenta t_2 na krivu C_2 u tački P je tada data jednačinom

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0),$$

pa je $\partial_x f(x_0, y_0)$ nagib tangente u tački P na krivu koja leži u preseku ravni $y = y_0$ i grafika funkcije f . Kažemo da je $\partial_x f(x_0, y_0)$ brzina promene funkcije f po x kada je $y = y_0$ fiksirano.

Primer 29 Posmatrajmo opet funkciju $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ i tačku $(1, 1)$. Dakle, $x_0 = 1, y_0 = 1$,

$z_0 = f(1, 1) = 5$, $z_x(1, 1) = 8$, $z_y(1, 1) = 2$. U preseku grafika funkcije i ravni $y = 1$ nalazi se kriva $z = 4x^2 + 1$, a njena tangenta u tački $P(1, 1, 5)$ je prava $z = 8x - 3$. U preseku grafika funkcije i ravni $x = 1$ nalazi se kriva $z = 4 + y^2$, čija je tangenta u tački $P(1, 1, 5)$ prava $z = 2y + 3$. Ove dve prave (tangente) seku se u jednoj tački i obrazuju ravan koja se zove tangentna ravan, čija je jednačina $z = 8x + 2y - 5$.



2.3.1 Parcijalni izvodi višeg reda

Videli smo da je parcijalni izvod skalarne funkcije u tački broj, $\partial_x f(x_0, y_0)$, ali ako skupimo sve tačke (x, y) u kojima postoji $\partial_x f(x, y)$, dobijamo domen nove funkcije $f_x : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{postoji } \partial_x f(x_0, y_0)\} \subset \mathbb{R}^2$. Naravno, isto to važi i za parcijalni izvod po promenljivoj y , a ako funkcija ima više promenljivih i za ostale parcijalne izvode, tj. parcijalne izvode po ostalim promenljivim. Ti izvodi, $\partial_x, \partial_y, \partial_z, \dots$ se zovu *parcijalni izvodi prvog reda*.

Novim funkcijama f_x, f_y, \dots takođe možemo tražiti parcijalne izvode, te na taj način dobijamo parcijalne izvode drugog reda. Koristimo razne oznake, na primer $\partial_{xx}^2, \partial_{xy}^2, \partial_{yx}^2, \partial_{yy}^2, \dots, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \dots, f_{xx}, \dots$.

Primer 30 Nađimo parcijalne izvode prvog i drugog reda funkcije $f(x, y) = x^3 + x^2y^3$:

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3, \quad f_y(x, y) = 3x^2y^2, \quad f_{xx}(x, y) = 6x + 2y^3, \quad f_{xy}(x, y) = 6xy^2, \quad f_{yx}(x, y) = 6xy^2, \quad f_{yy}(x, y) = 6x^2y.$$

Primetimo da smo u prethodnom primeru dobili da su mešoviti parcijalni izvodi drugog reda jednaki u svakoj tački (x, y) , tj. $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$. To nije slučajno, ali ne važi uvek.

Teorema 31 (Kleroova (Clairaut) teorema) Neka je $K = K((a, b); r)$ otvoreni krug sa centrom u (a, b) poluprečnika r i neka je funkcija f neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode prvog reda na $K((a, b); r)$, za neko $r > 0$.

Ako su funkcije f_{xy} i f_{yx} neprekidne na K , onda je $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$.

Dokaz: Po definiciji parcijalnih izvoda imamo da je

$$\begin{aligned} f_{xy}(a, b) &= (\partial_y f_x)(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(a, b+h) - f_x(a, b)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k, b+h) - f(a, b+h)}{k} - \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(a+n, b) - f(a, b)}{n} \right]. \end{aligned}$$

Kad isto ovako ispišemo i $f_{yx}(a, b)$ vidimo da razlike pod limesima treba pogodno grupisati.

Uzmimo $h = k = n$ i definišimo

$$\Delta(h) := \left(f(a+h, b+h) - f(a+h, b) \right) - \left(f(a, b+h) - f(a, b) \right), \quad (2.1)$$

za malo $h \rightarrow 0$, odnosno tako da $(a+h, b+h) \in K$.

Uvedimo funkciju $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tako da je

$$g(a+h) = f(a+h, b+h) - f(a+h, b), \quad g(a) = f(a, b+h) - f(a, b),$$

odnosno, $g(t) := f(t, b+h) - f(t, b)$, za fiksirano b i $b+h$. Dakle, g je funkcija jedne promenljive koja je neprekidna i diferencijabilna na intervalu $\text{Int}[a, a+h] \subset K$. Kada primenimo teoremu srednje vrednosti za funkcije jedne promenljive, dobijemo da postoji $c \in \text{Int}(a, a+h)$, tako da je

$$\Delta(h) = g(a+h) - g(a) = g'(c)(a+h-a) = h(f_x(c, b+h) - f_x(c, b)),$$

jer je $g'(t) = f_x(t, b+h) - f_x(t, b)$. Ovde smo koristili oznake $\text{Int}(a, a+h)$, za otvoreni interval sa granicama a i $a+h$ (jer ne znamo u kom su odnosu a i $a+h$) i $\text{Int}[a, a+h]$ za isti takav samo zatvoreni interval.

Sada definišimo funkciju $\tilde{h}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tako da je

$$\tilde{h}(b+h) = f_x(c, b+h), \quad \tilde{h}(b) = f_x(c, b), \quad \text{odnosno, } \tilde{h}(t) := f_x(c, t).$$

Funkcija \tilde{h} je neprekidna na intervalu $\text{Int}[b, b+h] \subset K$. Kada ponovo primenimo teoremu srednje vrednosti za funkcije jedne promenljive, dobijemo da postoji $c_1 \in \text{Int}(b, b+h)$, tako da je

$$\Delta(h) = h(f_x(c, b+h) - f_x(c, b)) = h^2 \tilde{h}'(c_1) = h^2 f_{xy}(c, c_1).$$

Odavde vidimo da je

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} f_{xy}(c, c_1) = f_{xy} \left(\lim_{h \rightarrow 0} (c, c_1) \right) = f_{xy}(a, b).$$

Poslednje dve jednakosti imamo zato što je $f_{xy} \in C(K)$ uz podsećanje da $c_1 \in \text{Int}(b, b+h)$ i $c \in \text{Int}(a, a+h)$.

Istim postupkom, samo drugačijim grupisanjem u (2.1), $\Delta(h) := (f(a+h, b+h) - f(a, b+h)) - (f(a+h, b) - f(a, b))$, dobijemo da je i $f_{yx}(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta(h)}{h^2}$. \square

Primer 32 (Primer kada ne važi jednakost mešovityh izvoda) Posmatrajmo funkciju

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases},$$

i pokažimo da je $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. Računamo po definiciji $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Za $(x, y) \neq 0$ imamo da su parcijalni izvodi prvog reda

$$f_x(x, y) = \frac{(3x^2y - y^3)(x^2 + y^2) - 2x^2y(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$f_y(x, y) = \frac{(x^3 - 3xy^2)(x^2 + y^2) - 2xy^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

pa opet po definiciji dobijemo da je

$$(f_x)_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^5}{h^5} = -1 \quad \text{i} \quad (f_y)_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^5}{h^5} = 1.$$

2.4 Diferencijabilnost

2.4.1 Tangentna ravan i linearna aproksimacija

Podsetimo se da smo kod diferencijabilne funkcije jedne promenljive $y = f(x)$, u tački $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ imali tangentu

$$t: \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$$

koja je lokalno aproksimirala grafik funkcije $y = f(x)$.

Sada radimo sa funkcijom $z = f(x, y)$ čiji je grafik neka površ u prostoru, te očekujemo da se njen grafik lokalno aproksimira tangentnom ravni u tački $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Kod interpretacije parcijalnih izvoda smo videli da tangente koje smo tamo dobili,

$$t_1: \quad z = z_0 + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad x = x_0,$$

$$t_2: \quad z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0), \quad y = y_0,$$

obrazuju tangentnu ravan (seku se u jednoj tački, a pripadaju različitim koordinatnim ravnima).

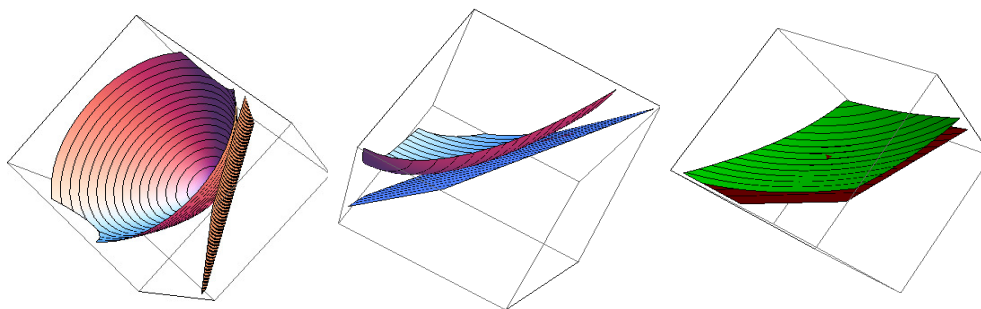
Svaka ravan koja sadrži tačku $P(x_0, y_0, z_0)$ ima jednačinu oblika

$$T: \quad z - z_0 = A(x - x_0) + B(y - y_0).$$

Ako uzmemo u obzir da $t_1, t_2 \subset T$, dobijemo da je $A = f_x(x_0, y_0)$ i $B = f_y(x_0, y_0)$. Dakle, ako funkcija $z = f(x, y)$ ima neprekidne parcijalne izvode na nekoj okolini tačke (x_0, y_0) , onda je jednačina tangentne ravni u tački P ,

$$T: \quad z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (2.2)$$

Primer 33 Posmatrajmo grafik funkcije $f(x, y) = 2x^2 + y^2$, što je jedan paraboloid, i tačku $P(1, 1, 3)$, $3 = f(1, 1)$. Kako je $f_x(1, 1) = 4$ i $f_y(1, 1) = 2$, to je jednačina tangentne ravni $z = 3 + 4(x - 1) + 2(y - 1)$, odnosno $z = 4x + 2y - 3$.



Na slikama su prikazani paraboloid $z = 2x^2 + y^2$ i tangentna ravan $z = 4x + 2y - 3$ u tački $(1, 1, 3)$. Svaka naredna slika je više zumirana. Primetimo da se na poslednjoj slici paraboloid i ravan gotovo poklapaju. Takođe primetimo da tragovi (linije nivoa) paraboloida zumiranjem postaju prave, što je karakteristika ravni.

Dakle, lokalno, tj. za sve $(x, y) \in K((x_0, y_0); \delta)$, ako su parcijalni izvodi funkcije f tu neprekidni, tangentna ravan aproksimira grafik funkcije f , što pišemo

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) =: L(x, y).$$

Funkciju sa desne strane zovemo *linearna aproksimacija* funkcije f u tački (x_0, y_0) , i pišemo

$$f(x, y) \approx L(x, y), \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

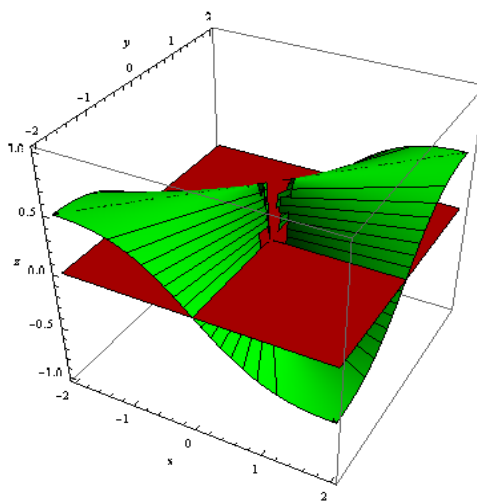
2.4.2 Definicija diferencijabilnosti

Videli smo da kada funkcija ima neprekidne parcijalne izvode u nekoj tački, linearna aproksimacija lokalno stvarno liči na grafik funkcije. Inače to ne mora da važi.

Primer 34 Posmatrajmo funkciju

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Ova funkcija ima parcijalne izvode svuda, ali nisu neprekidni u $(0, 0)$. Kako je $f(0, 0) = 0$ i $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, to je $L(x, y) = 0$. Međutim, $f(a, a) = 1/2$, $a \neq 0$, što znači da na celoj pravoj $y = x$, osim u tački $(0, 0)$, funkcija ima vrednost $1/2$, pa linearna aproksimacija nije dobra.



Na slici je prikazan grafik funkcije $f(x, y)$ i ravan $z = 0$.

Ako je linearna aproksimacija dobra, kažemo da je funkcija diferencijabilna u tački (x_0, y_0) . Preciznije diferencijabilnost u tački definišemo na sledeći način.

Definicija 35 Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencijabilna u tački (x_0, y_0) ako se može prikazati u obliku

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varepsilon_1(x - x_0) + \varepsilon_2(y - y_0), \quad (2.3)$$

gde $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, kada $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$.

Ekvivalentan zapis je takođe

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Teorema 36 (Dovoljan uslov za diferencijabilnost u tački) *Ako parcijalni izvodi funkcije f postoje na nekom krugu $K((x_0, y_0); \delta)$ i neprekidni su u (x_0, y_0) , onda je funkcija f diferencijabilna u tački (x_0, y_0) .*

Dokaz: Dakle, funkciju f treba zapisati u obliku (2.3). Stoga posmatrajmo razliku

$$\begin{aligned} \Delta z := f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Definišimo funkcije $g(x) := f(x, y_0 + \Delta y)$, za fiksirano $y_0 + \Delta y$ i $h(y) := f(x_0, y)$, za fiksirano x_0 . Vidimo da je $g'(x) := f_x(x, y_0 + \Delta y)$ i $h'(y) = f_y(x_0, y)$. Primenićemo isti trik kao u dokazu Kleroove teoreme, tj. koristićemo teoremu srednje vrednosti za funkcije jedne promenljive. Dakle, na osnovu teoreme srednje vrednosti, postoje $a \in \text{Int}(x_0 + \Delta x, x_0)$ i $b \in \text{Int}(y_0 + \Delta y, y_0)$ takvi da je

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(a)\Delta x \quad \text{i} \quad h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(b)\Delta y. \quad (2.5)$$

Napomenimo da oznaku $\text{Int}(\alpha, \beta)$ koristimo za otvoreni interval sa rubnim tačkama α i β kada ne znamo u kom su odnosu ta dva broja. Ravnopravno koristimo i oznaku $\text{Int}[\alpha, \beta]$ za isti takav zatvoreni interval.

Uvrstimo (2.5) u (2.4) i dobijemo

$$\begin{aligned} \Delta z &:= f_x(a, y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0, b)\Delta y \pm f_x(x_0, y_0)\Delta x \pm f_y(x_0, y_0)\Delta y \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + [f_x(a, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)]\Delta x + [f_y(x_0, b) - f_y(x_0, y_0)]\Delta y \end{aligned}$$

Sada iz neprekidnosti prvih izvoda dobijamo da

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &:= [f_x(a, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)] \longrightarrow 0, \text{ kada } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0), \\ \varepsilon_2 &:= [f_y(x_0, b) - f_y(x_0, y_0)] \longrightarrow 0, \text{ kada } (\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0). \end{aligned}$$

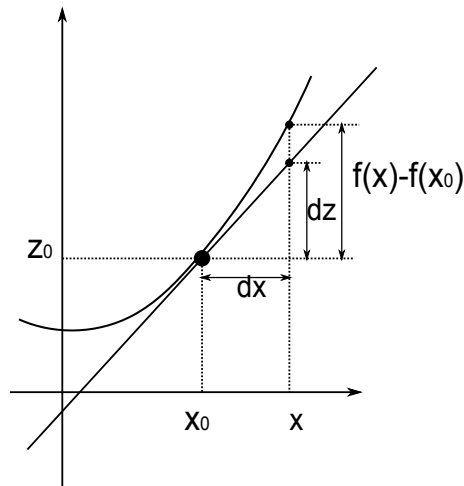
□

2.5 Diferencijal

Prvo ćemo se podsetiti ovog pojma za realne funkcije jedne realne promenljive. Pisaćemo $z = f(x)$ zbog analogije sa dvodimenzionalnim slučajem $z = f(x, y)$. Dakle, posmatramo grafik funkcije $z = f(x)$, odnosno skup $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, te tangentu t na Γ_f u tački (x_0, z_0) . Podsetimo se, tangenta u tački (x_0, z_0) je prava koja najbolje (od svih pravih koje prolaze kroz tačku (x_0, z_0)) aproksimira Γ_f . Neka je θ ugao između pozitivnog smera x -ose i tangente t . Znamo da je

$$\operatorname{tg} \theta = f'(x_0) = \frac{dz}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Pojam diferencijala potiče od jednačine tangente, $z = z_0 + f'(x_0)(x - x_0) =: t(x)$, odakle je $t(x) - z_0 = f'(x_0)dx = dz$.



On je vezan za tačku, kao i tangenta. U svakoj tački diferencijabilne funkcije imamo jedinstvenu tangentu, i obratno. Vidimo da su razlike Δz i Δx proporcionalne i koeficijent proporcionalnosti je $f'(x_0)$. Dakle kada je Δx jako malo, tj. kada $\Delta x \rightarrow 0$, imamo da je $\Delta z \approx dz$. S tim u vezi je i Tejlorov polinom prvog reda, odnosno, aproksimacija funkcije istim, naime,

$$f(z) - f(z_0) \approx f'(x_0)\Delta x, \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Posmatrajmo sada funkciju dve promenljive $z = f(x, y)$ i aproksimirajmo je na sledeći način

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + dz, \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0).$$

Za traženu aproksimaciju koristićemo jednačinu tangentne ravni,

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) =: t(x, y).$$

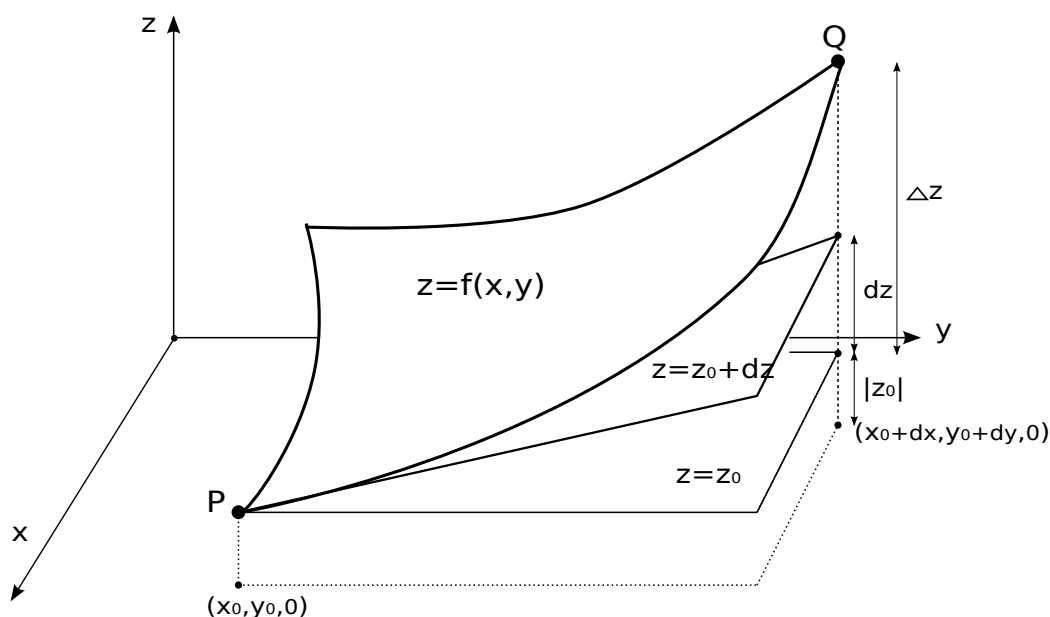
Kako se grafik funkcije lokalno aproksimira tangentnom ravni, koristimo da je

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \quad (x, y) \rightarrow (x_0, y_0),$$

odnosno definišemo diferencijal kao

$$dz := f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

Iako je uobičajeno koristiti oznaku za diferencijal, dz , napomenimo da bi bilo preciznije koristiti $dz = dz_{(x_0, y_0)}(dx, dy)$, što aludira na pun naziv diferencijala funkcije $z = f(x, y)$, naime *diferencijal funkcije $z = f(x, y)$ u tački (x_0, y_0) koji odgovara priraštaju (dx, dy)* . Ipak, najčešće pišemo $dz = z_x dx + z_y dy$. Ova veličina zove se i totalni diferencijal.



Na slici vidimo, grafik funkcije $z = f(x, y)$, tangentnu ravan u tački $P(x_0, y_0, z_0)$ i ravan $z = z_0$. Tačka Q ima koordinate $Q(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + \Delta z)$, jer je $f(x_0 + dx, y_0 + dy) = f(x, y) = z = z_0 + \Delta z$. Diferencijal dz je, stoga, geometrijski predstavljen kao rastojanje između tačke $A(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0)$ koja leži u ravni $z = z_0$ i tačke $B(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz)$ koja leži u tangentnoj ravni $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$.

Diferencijal skalarne funkcije $f = f(x_1, \dots, x_d)$ d -promjenljivih, definišemo analogno, samo nam je sada i vektor priraštaja $d\vec{x} = (dx_1, \dots, dx_d)$. Dakle,

$$df = \begin{pmatrix} f_{x_1} & \dots & f_{x_d} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_d \end{pmatrix} = \nabla f \cdot d\vec{x}.$$

Oznaku $\nabla f(x_0)$ čitamo *gradijent funkcije f u tački x_0* . To je vektor čije su komponente parcijalni izvodi funkcije f u tački x_0 , odnosno, $\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_d}(x_0))$. Kasnije ćemo posebno proučavati gradijent funkcije. Napomenimo da se vektor $\nabla f(x_0) = (f_{x_1}(x_0), \dots, f_{x_d}(x_0))$ označava još i sa $Df(x_0)$ i zove *izvod funkcije f u tački x_0* . Ova reprezentacija važi samo u Dekartovim koordinatama.

Ako je $\vec{f} = \vec{f}(x_1, \dots, x_d)$ vektorska funkcija sa komponentama $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m)$, njen diferencijal koji odgovara priraštaju $d\vec{x}$ (vektor dimenzije $d \times 1$) je vektor dimenzije $m \times 1$, čije su komponente diferencijali skalarnih funkcija komponenti, a koji se dobija množenjem matrice dimenzije $m \times d$ čije su kolone gradijenti komponentnih funkcija, i vektora priraštaja nezavisnih promjenljivih, odnosno,

$$d\vec{f} = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \dots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}_{m \times d} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ \dots \\ dx_d \end{pmatrix}_{d \times 1} = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1 dx_1 + \dots + \partial_{x_d} f_1 dx_d \\ \dots \\ \partial_{x_1} f_d dx_1 + \dots + \partial_{x_d} f_d dx_d \end{pmatrix}_{m \times 1} = \begin{pmatrix} df_1 \\ \dots \\ df_d \end{pmatrix}.$$

2.5.1 Diferencijal drugog i višeg reda

Videli smo da diferencijal funkcije $u = u(x, y)$, dve promjenljive x i y , precizno možemo zapisati kao

$$du_{(x,y)}(dx, dy) = u_x(x, y)dx + u_y(x, y)dy.$$

Ponovnim diferenciranjem dolazimo do diferencijala drugog reda,

$$d^2u = (u_{xx}(x, y)dx + u_{xy}dy)dx + (u_{yx}(x, y)dx + u_{yy}dy)dy$$

Ako je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, mešoviti izvodi su joj jednaki, pa je

$$d^2u = u_{xx}(x, y)(dx)^2 + 2u_{xy}dxdy + u_{yy}(dy)^2.$$

I drugi diferencijal možemo uopštiti na funkcije više promenljivih, pa je za $u \in C^2(\mathbb{R}^d)$,

$$d^2u = \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

Treći diferencijal, ili diferencijal trećeg reda, funkcije dve promenljive $u = u(x, y) \in C^3(\mathbb{R}^2)$ je

$$d^3u = u_{xxx}(dx)^3 + 3u_{xxy}(dx)^2 dy + 3u_{xyy} dx(dy)^2 + u_{yyy}(dy)^3.$$

Vidimo da je diferencijal u tački ustvari polinom po priraštajima. Konstante za diferencijal proizvodnog reda dobijaju se iz Paskalovog trougla, naime za $u = u(x, y) \in C^n(\mathbb{R}^2)$ imamo da je

$$d^n u = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\partial^n u}{\partial x^k \partial y^{n-k}} (dx)^k (dy)^{n-k}.$$

2.5.2 Diferencijal složene funkcije

Krenimo opet od najjednostavnijeg slučaja. Neka su funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ realne funkcije jedne realne promenljive. Obeležimo sa $x = g(t)$ i $y = f(x) = f(g(t)) = (f \circ g)(t)$. Dakle $f \circ g$ je funkcija od t , pa je

$$(f \circ g)'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = f'(x) g'(t) = f'(g(t)) g'(t).$$

Sada, za $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, ćemo pokazati da za kompoziciju $z = z(t) := f(g(t), h(t))$ važi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt}.$$

Kraći zapis bi bio $\frac{dz}{dt} = z_x \frac{dx}{dt} + z_y \frac{dy}{dt}$, ili, ekvivalentno, $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial 1} \frac{d1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial 2} \frac{d2}{dt}$. Kasnije ćemo ovaj rezultat uopštiti na komplikovanije kompozicije. Za očekivati je da važi ista formula kao i u slučaju funkcija jedne promenljive, naime, da je izvod kompozicije dva preslikavanja \vec{f} i \vec{g} (za koja je kompozicija dobro definisana) jednak proizvodu izvoda prve funkcije, \vec{f} , u tački $\vec{g}(\vec{x})$ i izvoda druge funkcije \vec{g} u tački \vec{x} , tj.

$$D(\vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))) = D\vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) \cdot D\vec{g}(\vec{x}).$$

Ovde treba voditi računa o dimenzijama. Naime, nezavisno promenljiva $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, a funkcija $\vec{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m \ni \vec{g}(\vec{x})$, $m \geq 1$, ima matricu izvoda $D\vec{g}$ dimenzije $m \times d$. Dalje, funkcija $\vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k \ni \vec{f}(\vec{g}(\vec{x}))$, $k \geq 1$, ima matricu izvoda $D\vec{f}$ dimenzije $k \times m$, pa se matrice $D\vec{g}$ i $D\vec{f}$

možu množiti tim redom, a proizvod im je matrica $D(\vec{f} \circ \vec{g})$ dimenzije $k \times d$.

Teorema 37 *Neka je $z = f(x, y)$ diferencijabilna funkcija dve promjenljive i neka su $x = g(t)$ i $y = h(t)$ diferencijabilne funkcije jedne promjenljive. Tada je kompozicija $z(t) = f(g(t), h(t))$ diferencijabilna funkcija jedne promjenljive i važi*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dh}{dt}.$$

Dokaz: Kako je z diferencijabilna funkcija, postoje $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, kada $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ tako da važi

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Kako je $x = g(t)$ diferencijabilna, pa i neprekidna funkcija, imamo da $\Delta x = g(t + \Delta t) - g(t) \rightarrow 0$, kada $\Delta t \rightarrow 0$. Analogno dobijamo i da $\Delta y \rightarrow 0$, kada $\Delta t \rightarrow 0$, odnosno da kada $\Delta t \rightarrow 0$, $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, pa i $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, kada $\Delta t \rightarrow 0$.

Dalje, vidimo da je

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \\ &= f_x \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f_y \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \\ &= f_x g'(t) + f_y h'(t). \end{aligned}$$

□

Primer 38 *Pokažimo na nekoliko primera kako se računa izvod složene funkcije.*

- Neka je $z(t) = f(\sin t, \ln t)$, $t > 0$, i f je dvaput diferencijabilna na \mathbb{R}^2 . Tada su njeni prvi i drugi izvod dati sa:

$$\begin{aligned} z'(t) &= f_x(\sin t, \ln t) \cos t + f_y(\sin t, \ln t) \frac{1}{t}; \\ z''(t) &= \left(f_{xx}(\sin t, \ln t) \cos t + f_{xy}(\sin t, \ln t) \frac{1}{t} \right) \cos t - f_x(\sin t, \ln t) \sin t + \\ &\quad + \left(f_{yx}(\sin t, \ln t) \cos t + f_{yy}(\sin t, \ln t) \frac{1}{t} \right) \frac{1}{t} - f_y(\sin t, \ln t) \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

- Neka je $z(t) = (\sin t)^2 + (\ln t)^3 =: x(t)^2 + y(t)^3$. Tada je $z'(t) = 2x(t)x'(t) + 3y(t)^2y'(t) = 2 \sin t \cos t + 3(\ln t)^2 \frac{1}{t}$.
- Uopšte, neka su $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ dovoljno puta diferencijabilne funkcije, a $t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ nezavisno promjenljiva. Tada kompozicija $v = u \circ \vec{x} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$

ima parcijalne izvode

$$\partial_{t_j} v = u_{x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_j} + u_{x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_j} + \dots + u_{x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_j}, \quad j = 1, \dots, d.$$

2.5.3 Diferencijal implicitno definisane funkcije

Neka je funkcija $y = y(x)$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, implicitno definisana jednačinom

$$F(x, y) = 0. \quad (2.6)$$

To znači da za svako $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, važi jednakost

$$F(x, y(x)) = 0.$$

Neke implicitno definisane funkcije ne mogu se izraziti eksplinitno. Ipak iz implicitnog zapisa tražene funkcije možemo dobiti na primer njen Tejlorov polinom (pa i red), ukoliko je dovoljno puta diferencijabilna. Znamo da što je većeg stepena, Tejlorov polinom bolje aproksimira funkciju u tački.

Ukoliko je funkcija F diferencijabilna u tački (x_0, y_0) , diferenciranjem jednačine (2.6) dobijamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0, \quad (2.7)$$

odakle izrazimo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Vidimo da, ukoliko je $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, možemo izračunati prvi izvod funkcije f u tački x_0 ,

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Izvode višeg reda tražimo ponovnim diferenciranjem, sada jednačine (2.7).

Najjednostavniji slučaj teoreme o implicitnoj funkciji dat je u sledećem tvrđenju.

Teorema 39 *Neka je*

- $F(x_0, y_0) = 0$;

- $F \in C^p(L((x_0, y_0), \delta))$;
- $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Tada je na nekoj okolini tačke x_0 , $L(x_0, \varepsilon)$, implicitno definisana funkcija $y = f(x)$, takva da je

- $y_0 = f(x_0)$;
- $f \in C^p(L(x_0, \varepsilon))$;
- $F(x, f(x)) = 0$, za sve $x \in L(x_0, \varepsilon)$.

Napomenimo da ako jednačina $F(x_0, y) = 0$, gde je x_0 fiksirano, ima dva rešenja y_1 i y_2 i važe uslovi teoreme 39 za obe tačke (x_0, y_1) i (x_0, y_2) , onda imamo dve implicitno definisane funkcije $y = f_1(x)$ i $y = f_2(x)$ na nekoj okolini $L(x_0, \varepsilon)$, takve da je $y_1 = f_1(x_0)$, a $y_2 = f_2(x_0)$.

Dokaz Teoreme 39 prevazilazi gradivo predviđeno za ovaj kurs, a može se naći u [18]. Inače u toku studija, ova teorema u opštem slučaju, na tzv. Banahovim prostorima, dokazuje se na naprednijim kursevima matematičke analize.

Primer 40 Posmatrajmo jednačinu

$$F(x, y) \equiv \sin x \cdot y + e^y - 1 = 0, \quad (2.8)$$

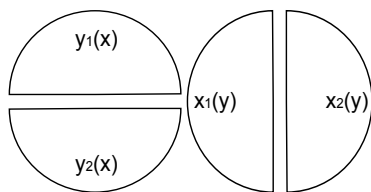
i tačku $x_0 = 0$. Iz $F(0, y_0) = 0$ dobijemo da je $y_0 = 0$. Dakle ovom jednačinom može biti definisana samo jedna funkcija na okolini tačke 0. Proverimo i ostale uslove Teoreme 39. Jasno je da je $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, a $F_y(0, 0) = 1 \neq 0$. Dakle, postoji funkcija $y = y(x)$ definisana jednačinom (2.8) na okolini tačke 0, koja je klase C^∞ na toj okolini i ispunjava uslov $f(0) = 0$.

Stoga jednačinu (2.8) možemo zapisati u obliku

$$\sin x \cdot y(x) + e^{y(x)} - 1 = 0, \quad x \in (-\varepsilon, \varepsilon). \quad (2.9)$$

Diferenciranjem jednačine (2.9) dobijemo da je $y'(0) = 0$, a zatim i da su ostali izvodi u tački 0 takođe jednaki nuli. Dakle, u ovom slučaju, na okolini tačke $x_0 = 0$, definisana je jedinstvena funkcija $y = 0$.

Primer 41 Jednačinom kružnice u ravni $x^2 + y^2 = 1$, definisane su dve funkcije koje možemo i eksplicitno prikazati, $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ i $y_2 = -\sqrt{1 - x^2}$. Ako proverimo uslove Teoreme 39, vidimo da jedino u tačkama $(\pm 1, 0)$ nije ispunjen treći uslov. Geometrijski, znamo da je to zato što funkcije y_1 i y_2 nisu definisane sa leve strane tačke $x = -1$, odnosno desne strane tačke $x = 1$.



Ovaj problem možemo prevazići ako u jednačini $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$ posmatramo x kao funkciju od y . Tada treći uslov postaje $F_x(1, 0) \neq 0$, te dobijamo da su ispunjeni uslovi Teoreme 39. Dakle, na okolini tačke $y = 0$ implicitno su definisane dve funkcije $x_1(y) = \sqrt{1 - y^2}$, i $x_2(y) = -\sqrt{1 - y^2}$.

Složeniji slučajevi implicitno definisane funkcije

Složeniji slučaj Teoreme 39 dobijamo kada je skalarna funkcija dve promenljive $u = u(x, y)$ implicitno definisana jednačinom

$$F(x, y, u) = 0, \quad F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Tada treba da važi sledeće:

- $F(x_0, y_0, u_0) = 0$;
- $F \in C^p(L(x_0, y_0, u_0), \delta)$;
- $F_u(x_0, y_0, u_0) \neq 0$.

Diferenciranjem dobijamo

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_u du = 0,$$

odnosno

$$du = -\frac{F_x}{F_u} dx - \frac{F_y}{F_u} dy.$$

Kako je diferencijal funkcije $u = u(x, y)$, $du = u_x dx + u_y dy$, to je

$$u_x = -\frac{F_x}{F_u}, \quad u_y = \frac{F_y}{F_u}.$$

Odavde vidimo da je

$$u_x = 0 \iff F_x = 0 \quad u_y = 0 \iff F_y = 0,$$

što će nam biti korisno kod traženja ekstrema implicitno definisane funkcije u .

Naravno, procedura je ista i za skalarnu funkciju više promenljivih, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_d)$, $d \geq 2$.

Uopštenje teoreme o implicitno definisanoj funkciji na vektorske funkcije je samo tehnički komplikovanije, a ideja je ista. Dakle, posmatramo sistem m jednačina

$$F_1(t_1, \dots, t_d, u_1, \dots, u_m) = 0$$

$$F_2(t_1, \dots, t_d, u_1, \dots, u_m) = 0$$

...

$$F_m(t_1, \dots, t_d, u_1, \dots, u_m) = 0$$

što kraće pišemo

$$\vec{F}(\vec{t}, \vec{u}) = \vec{0}, \quad \vec{F} = (F_1, \dots, F_m) : \mathbb{R}^{d+m} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{t} = (t_1, \dots, t_d), \quad \vec{u} = (u_1, \dots, u_m).$$

Uslovi teoreme o implicitno definisanoj funkciji u ovom slučaju glase:

- $\vec{F}(\vec{t}_0, \vec{u}_0) = \vec{F}(t_{0_1}, \dots, t_{0_d}, u_{0_1}, \dots, u_{0_m}) = \vec{0}$;
- $\vec{F} \in C^p(L(\vec{t}_0, \vec{u}_0), \delta)$;

$$\bullet \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{pmatrix} (\vec{t}_0, \vec{u}_0) \neq 0.$$

Dakle, ako su ovi uslovi ispunjeni, onda je sistemom $\vec{F}(\vec{t}, \vec{u}) = \vec{0}$ implicitno definisana vektorska funkcija $\vec{u} = (u_1, \dots, u_m) \in C^p(L(\vec{t}, \varepsilon))$, takva da je $\vec{u}(\vec{t}_0) = \vec{u}_0$, odnosno definisane su skalarne funkcije u_1, \dots, u_m .

Primer 42 Pokazaćemo da su sistemom

$$u - e^v = -x \quad v + e^u = y \tag{2.10}$$

implicitno definisane skalarne funkcije u i v na okolini tačke $(1, 1)$. Obeležimo $F(x, y, u, v) = u - e^v + x$, $G(x, y, u, v) = v + e^u - y$. Rašavajući sistem jednačina $F(1, 1, u_0, v_0) = 0$, $G(1, 1, u_0, v_0) = 0$, dobijamo $u_0 = v_0 = 0$. Vidimo da su $F, G \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$, tako da još treba ispitati treći uslov

teoreme o implicitno definisanoj funkciji,

$$\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} (1, 1, 0, 0) = 2 \neq 0.$$

Dakle, postoje jedinstvene funkcije $u = u(x, y)$ i $v = v(x, y)$ implicitno definisane sistemom (2.10) na nekoj otvorenoj okolini L tačke $(1, 1)$ takve da je $u(1, 1) = 0$ i $v(1, 1) = 0$. Funkcije u i v su klase $C^\infty(L)$. Sistem (2.10) sada postaje

$$u(x, y) - e^{v(x, y)} = -x, \quad v(x, y) + e^{u(x, y)} = y, \quad (x, y) \in L. \quad (2.11)$$

Pronađimo i diferencijale funkcija u i v u tački $(1, 1)$. Diferenciranje (2.11) dobijamo

$$du(x, y) - e^{v(x, y)} dv(x, y) = -dx, \quad dv(x, y) + e^{u(x, y)} du(x, y) = dy,$$

odnosno u tački $(1, 1)$, $du - dv = -dx$, $dv + du = dy$, odakle je $du = du(1, 1) = \frac{dy - dx}{2}$ i $dv = dv(1, 1) = \frac{dy + dx}{2}$. Da bismo dobili diferencijale drugog reda potrebno je još jedno diferenciranje, kojim dobijemo da je, na primer drugi diferencijal funkcije u u tački $(1, 1)$ jednak $d^2u = \frac{(dv)^2 - (du)^2}{2}$.

Kvadratna aproksimacija

Dakle, videli smo da iako implicitno definisane funkcije ne možemo implicitno izraziti, možemo im lokalno naći parcijalne izvode i diferencijale, te umesto sa implicitnom funkcijom, raditi sa njenom aproksimacijom. Takođe smo videli da na okolini neke tačke (x_0, y_0) , linearna aproksimacija dobro aproksimira funkcije diferencijabilne u toj tački, tj. imali smo da je

$$f(x, y) \approx L(x, y) := f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

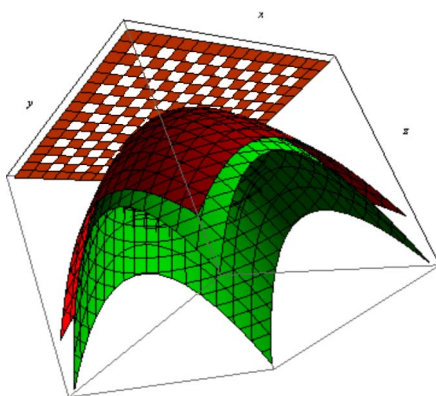
$L(x, y)$ se takođe zove i Tejlorov polinom prvog stepena. Videli smo da je linearna aproksimacija dobra, na primer ako su parcijalni izvodi prvog reda neprekidni. Ako funkcija f ima (neprekidne) parcijalne izvode drugog reda, dobijamo bolju aproksimaciju funkcije f na okolini neke tačke (x_0, y_0) ,

$$f(x, y) \approx Q(x, y) := f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2} \left(f_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2 \right).$$

$Q(x, y)$ zove se kvadratna aproksimacija funkcije f na okolini neke tačke (x_0, y_0) ili Tejlorov polinom drugog stepena. Primetimo da je

$$Q(x, y) = f(x_0, y_0) + df_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2} d^2 f_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0).$$

Primer 43 Funkcija $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$ u tački $(0, 0)$ ima linearnu aproksimaciju $L(x, y) = 1$, a kvadratnu $Q(x, y) = 1 - x^2 - y^2$.



Na slici su prikazani grafik funkcije ("u sredini") i njena linearna i kvadratna aproksimacija. Primećimo da su tragovi na grafiku funkcije i kvadratnoj aproksimaciji skoro identični.

2.6 Izvod po pravcu

Podsetimo se definicije parcijalnog izvoda po x u tački (x_0, y_0) , funkcije $f = f(x, y)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h\vec{i}) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Zbog ovog poslednjeg zapisa, parcijalni izvod po x u tački (x_0, y_0) možemo zvati i *izvod po pravcu vektora \vec{i}* u tački (x_0, y_0) .

Ako se podsetimo i geometrijske interpretacije parcijalnog izvoda u tački, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, znamo da je parcijalni izvod po x određivao nagib tangente na krivu u preseku grafika funkcije f i ravni $y = y_0$. Ta ravan seče (x, y) -ravan po pravoj $y = y_0$ (u (x, y) -ravni), čija parametrizacija je baš

$$h \mapsto (x_0, y_0) + h\vec{i}, \quad h \in \mathbb{R}.$$

Ako istu ideju umesto na vektor \vec{i} primenimo na proizvoljan nenula vektor $\vec{\xi} = (a, b) \neq \vec{0}$, dobijemo pravu u (x, y) -ravni kroz tačku (x_0, y_0) paralelnu vektoru $\vec{\xi}$

$$p: h \mapsto (x_0, y_0) + h\vec{\xi} = (x_0 + ha, y_0 + hb), \quad h \in \mathbb{R},$$

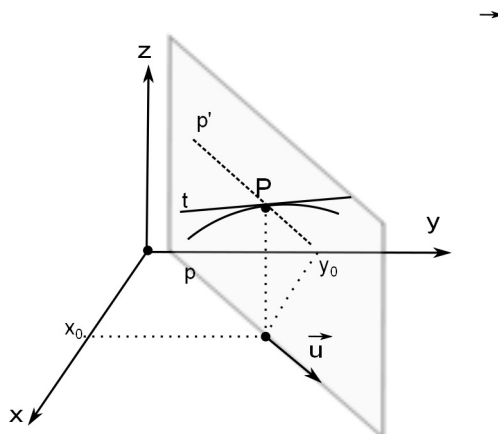
odnosno, eliminacijom parametra h ,

$$y = y_0 + \frac{b}{a}(x - x_0).$$

Ovo je u \mathbb{R}^3 jednačina ravni kroz pravu p paralelne z -osi. Ta ravan na grafiku funkcije f iseca krivu kojoj pripada tačka $P(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Koeficijent nagiba tangente u tački P na tu krivu zove se izvod po pravcu vektora ξ u tački (x_0, y_0) . Koeficijent nagiba tangente je ustvari tangens ugla između tangente i prave (u prostoru) p'

$$p' : h \mapsto (x_0, y_0, z_0) + h\vec{\xi} = (x_0 + ha, y_0 + hb, z_0), \quad h \in \mathbb{R}.$$

Prava p' je paralelna pravoj p i leži u ravni $z = z_0$.



Ako se podsetimo parametarskog zapisa prave, vidimo da ni intenzitet ni smer vektora $\vec{\xi}$ nije bitan, nego samo pravac. Zbog toga, najčešće uzimamo jedinične vektore

$$\vec{u} = \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|} =: (u_1, u_2),$$

i pomoću takvih vektora definišemo izvode po pravcu,

$$\partial_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0, y_0) + h\vec{u}) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Napomenimo još da ukoliko ne koristimo jedinični vektor, onda je razlika $|(\vec{x}_0 + h\vec{\xi}) - \vec{x}_0| = h|\vec{\xi}|$, pa je

$$\partial_{\vec{\xi}} f(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{\xi}) - f(\vec{x}_0)}{h|\vec{\xi}|}$$

Teorema 44 *Ako je skalarna funkcija f diferencijabilna u (x_0, y_0) , onda ima izvode po svim*

pravcima $\vec{u} = (a, b)$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 1$, i pri tom je

$$\partial_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = a \partial_x f(x_0, y_0) + b \partial_y f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}. \quad (2.12)$$

Dokaz: Fiksirajmo $x_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$ i posmatrajmo funkciju jedne promjenljive

$$g(h) = f(x_0 + ha, y_0 + hb).$$

Izračunajmo izvod funkcije g u tački 0,

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \partial_{\vec{u}} f(x_0, y_0).$$

Sada posmatrajmo kompoziciju $g \circ (x, y)$, $x = x(h) = x_0 + ha$, $y = y(h) = y_0 + hb$, i primenimo pravilo o izvodu složene funkcije,

$$\frac{dg}{dh} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dh} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dh} = f_x(x_0 + ha, y_0 + hb)a + f_y(x_0 + ha, y_0 + hb)b,$$

odakle, za $h = 0$ dobijemo da je

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0)a + f_y(x_0, y_0)b.$$

□

Primetimo da, ako je $\vec{u} = (a, b)$, $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, onda je

$$\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta = \angle(\vec{x}^+, \vec{u}),$$

pa je

$$\partial_{\vec{u}} f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta.$$

I za diferencijabilnu skalarnu funkciju $d \geq 2$ promjenljivih važi ista formula. Ako je $\vec{0} \neq \vec{u} = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d$, proizvoljan nenula vektor, onda je

$$\partial_{\vec{u}} f(\vec{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{u}) - f(\vec{x})}{h} = \nabla f \cdot \vec{u}.$$

2.6.1 Vektor gradijenta

Videli smo da za proizvoljnu diferencijabilnu skalarnu funkciju $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, gradijent u tački \vec{x}_0 je vektor

$$\nabla f(\vec{x}_0) = (f_{x_1}(\vec{x}_0), \dots, f_{x_d}(\vec{x}_0)).$$

Ako posmatramo skup D svih tačaka \vec{x} u kojima postoji gradijent funkcije f , na tom skupu možemo definisati vektorsku funkciju $\nabla f : D \rightarrow \mathbb{R}^d$.

U prethodnom odeljku smo videli da izvod po pravcu geometrijski predstavlja nagib neke tangente, pa u skladu sa geometrijskom interpretacijom možemo reći da izvod po pravcu govori koliko se brzo funkcija menja u datoj tački po datom pravcu. Dakle, ako su \vec{u} i \vec{v} proizvoljna dva različita nenula vektora (pravca), i ako je $\partial_{\vec{u}}f(\vec{x}_0) > \partial_{\vec{v}}f(\vec{x}_0)$, nagib prve tangente je veći i kažemo da se funkcija f brže menja po pravcu \vec{u} .

Pravac vektora gradijenta u tački (\vec{x}_0) je

$$\vec{u}_0 := \frac{\nabla f(\vec{x}_0)}{|\nabla f(\vec{x}_0)|},$$

i to je pravac po kome se funkcija najbrže menja, što govori sledeća teorema.

Teorema 45 *Neka je funkcija f diferencijabilna u tački x_0 . Tada je*

$$\max_{|\vec{u}|=1} \partial_{\vec{u}}f(\vec{x}_0) = |\nabla f(\vec{x}_0)|,$$

i maksimum se dostiže u vektoru

$$\vec{u}_0 := \frac{\nabla f(\vec{x}_0)}{|\nabla f(\vec{x}_0)|}.$$

Dokaz: Iz

$$\partial_{\vec{u}}f = \nabla f \cdot \vec{u} = |\nabla f| |\vec{u}| \cos \alpha = |\nabla f| \cos \alpha,$$

gde je α ugao između ∇f i \vec{u} , vidimo da će $\partial_{\vec{u}}f$ biti najveći za $\cos \alpha = 1$, tj. za $\alpha = 0$. Dakle, funkcija se najbrže menja po pravcu paralelnom vektoru $\nabla f(\vec{x}_0)$. \square

Primer 46 Posmatrajmo funkciju $f(x, y) = xe^y$, $\nabla f = (e^y, xe^y)$ i tačku $P_0(2, 0)$, $f(2, 0) = 2$, $\nabla f(2, 0) = (1, 2)$.

Formirajmo pravu u (x, y) -ravni kroz tačku $(2, 0)$ paralelnu vektoru $(1, 2)$,

$$h \mapsto (2, 0) + h(1, 2) = (2 + h, 2h),$$

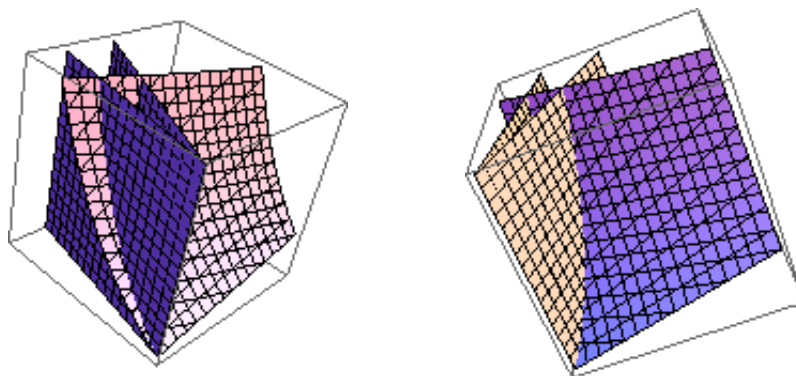
odnosno $y = 2x - 4$. Kako je $|\nabla f(2, 0)| = \sqrt{5}$, to je vektor pravca gradijenta

$$\vec{u}_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

Dakle,

$$\partial_{\vec{u}_0} f(2, 0) = (1, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \sqrt{5} = |\nabla f(2, 0)|.$$

Dakle, funkcija f se najbrže menja po krivoj u preseku grafika funkcije f i ravni $y = 2x - 4$.



Na slici vidimo istu sliku iz dva ugla posmatranja. Na njoj su prikazani grafik funkcije f , ravan $y = 2x - 4$ i ravan $y = 5x - 10$. Na prvoj slici vidimo krivu u preseku grafika funkcije f i ravni $y = 2x - 4$ (po kojoj se funkcija najbrže menja), a na drugoj krivu u preseku grafika funkcije f i ravni $y = 5x - 10$.

Vektor gradijenta kao normala na površ

Neka je

$$S: F(x, y, z) = k$$

jednačina površi S . Uočimo krivu C koja leži na površi S i na krivoj tačku $P(x_0, y_0, z_0)$. Neka je data parametrizacija krive C ,

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad t \in R, \quad (x_0, y_0, z_0) = \vec{r}(t_0).$$

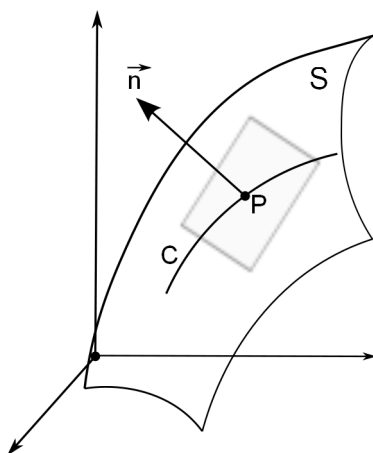
Kako je $C \subset S$, imamo da važi,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = k, \quad t \in R.$$

Pod pretpostavkom da su sve funkcije diferencijabilne, dobijamo da je

$$\nabla F \cdot \vec{r}' \equiv F_x x' + F_y y' + F_z z' = 0,$$

odakle vidimo da je vektor gradijenta funkcije F , ∇F , normalan na tangentni vektor na krivu $C \subset S$, \vec{r}' . Kako je C bila proizvoljna kriva površi S , možemo da zaključimo da je vektor gradijenta normalan na svaku krivu koja leži na površi S i prolazi kroz tačku P , odnosno na tangentnu ravan u tački P .



Dakle, normalu na površ $F(x, y, z) = k$, možemo računati kao

$$\vec{n} = \nabla F = (F_x, F_y, F_z),$$

odnosno jediničnu normalu

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{F_x}{|\nabla F|}, \frac{F_y}{|\nabla F|}, \frac{F_z}{|\nabla F|} \right).$$

Primer 47 Jedinična normala na površ $S : x^2 + y^3 + z^2 - xy = 9$ u tački $P(0, 0, 3)$ je $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

To znači da je ravan $z = z_0 = 3$ tangentna ravan na površ S u tački P .

2.7 Ekstremi

Poznato je da na skupu realnih brojeva imamo definisanu relaciju poretka " \leq ", kojom možemo porediti bilo koja dva realna broja u smislu da za sve $a, b \in \mathbb{R}$ važi bar jedna od sledeće dve relacije, $a \leq b$ ili $b \leq a$. Na skupu \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, nemamo definisanu takvu relaciju poretka. Tačke $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, možemo eventualno porediti njihovim rastojanjima od koordinatnog

početka, odnosno možemo porediti dužine vektora \vec{x} , ali tada ustvari poredimo vrednosti funkcije

$$|\cdot| : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}.$$

Dakle, kodomen funkcija čije tražimo ekstreme će biti skup realnih brojeva, tj. radićemo samo sa skalarnim funkcijama.

2.7.1 Lokalni ekstremi

Lokalne ekstreme tražimo u unutrašnjim tačkama domena skalarne funkcije. Unutrašnje tačke nekog skupa D formiraju skup $\text{int}D$ koji zovemo unutrašnjost skupa D . Podsetimo se da je $\vec{x}_0 \in \text{int}D$ ako postoji lopta $L(\vec{x}_0; r) \subset D$.

Definicija 48 *Neka je $f : D \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ i $\vec{x}_0 \in \text{int}D$.*

- Ako je za neko $r > 0$, $f(\vec{x}_0) \leq f(\vec{x})$, $\vec{x} \in L(\vec{x}_0; r)$, onda je \vec{x}_0 tačka lokalnog minimuma, a $f(\vec{x}_0) = f_{\min}$ je lokalni minimum funkcije f .
- Ako je za neko $r > 0$, $f(\vec{x}_0) \geq f(\vec{x})$, $\vec{x} \in L(\vec{x}_0; r)$, onda je \vec{x}_0 tačka lokalnog maksimuma, a $f(\vec{x}_0) = f_{\max}$ je lokalni maksimum funkcije f .

Funkcija može imati više lokalnih minimuma i maksimuma. Najmanji lokalni minimum zove se globalni minimum, a najveći lokalni maksimum, globalni maksimum.

Primer 49 • Paraboloid $z = x^2 + y^2$ je grafik funkcije $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$. Kako je $f(0, 0) = 0$, to je lokalni minimum $f_{\min} = 0$ i dostiže se u tački $(0, 0)$.

- Konus $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ je grafik funkcije $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$. Kako je $f(0, 0) = 0$, to je lokalni minimum takođe $f_{\min} = 0$ koji se dostiže u tački $(0, 0)$.

Razlika između ova dva primera je ta da u prvom postoje parcijalni izvodi u tački minimuma, dok u drugom ne postoje.

U prethodnom primeru smo videli da u tačkama ekstrema funkcija može da ima parcijalne izvode, ali i ne mora. No ako ih ima, parcijalni izvodi prvog reda u tački ekstrema su jednaki nuli, o čemu govori sledeća teorema.

Teorema 50 *Neka je tačka (a, b) tačka lokalnog minimuma ili maksimuma. Ako postoje parcijalni izvodi $f_x(a, b)$ i $f_y(a, b)$, onda je*

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0.$$

Dokaz: Neka je (a, b) tačka lokalnog minimuma funkcije f , što znači da je za neko $r > 0$,

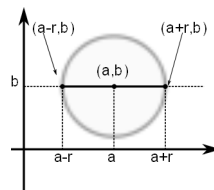
$$f(a, b) \leq f(x, y), \quad (x, y) \in L((a, b); r). \quad (2.13)$$

Fiksirajmo b i posmatrajmo funkciju jedne promenljive

$$g(x) := f(x, b), \quad x \in (a - r, a + r).$$

Iz (2.13) imamo da je i

$$g(a) \leq g(x), \quad x \in (a - r, a + r),$$



što znači da u tački a funkcija g ima lokalni minimum. Kako je $g'(x) = f_x(x, b)$, postoji $g'(a) = f_x(a, b)$, a kako je a tačka lokalnog minimuma funkcije jedne promenljive, to je $g'(a) = 0$, pa je i $f_x(a, b) = 0$.

Za dokaz da je $f_y(a, b) = 0$, fiksirajte a i ponovite proceduru ovog dokaza. \square

Napomena 1 • *Teorema 50 se isto pokazuje i ako pretpostavimo da je (a, b) tačka maksimuma.*

- *Teorema važi i u slučaju da je $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $d \geq 2$. Dakle, ako $\nabla f(\vec{x}_0)$ postoji i tačka \vec{x}_0 je tačka lokalnog minimuma ili maksimuma, onda je $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$.*

Posledica 51 *Ako je funkcija $f : L((a, b); r) \rightarrow \mathbb{R}$, $r > 0$, diferencijabilna u tački (a, b) , i tačka (a, b) je tačka lokalnog ekstrema, onda je tangentna ravan na grafik funkcije f u tački $P(a, b, f(a, b))$ paralelna (x, y) -ravni.*

Dokaz: Kako je funkcija diferencijabilna u (a, b) , postoje parcijalni izvodi u toj tački (pa i $\nabla f(a, b)$), a pošto je (a, b) je tačka lokalnog ekstrema, onda je $\nabla f(a, b) = \vec{0}$. Iz jednačine tangentne ravni (2.2) dobijamo da je tangentna ravan $z = f(a, b)$. \square

Napomena 2 *Primetite sličnost tvrđenja ove posledice sa adekvatnim tvrđenjem za realne funkcije jedne realne promenljive.*

Definicija 52 *Stacionarne ili kritične tačke skalarne funkcije f su one tačke u kojima gradijent funkcije f ne postoji ili je jednak nuli.*

Na primer, za funkciju dve promenljive $f = f(x, y)$, tačka $(a, b) \in \text{int}D_f$ je kritična (stacionarna) tačka ako je $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ ili bar jedan od parcijalnih izvoda prvog reda u tački (a, b) ne postoji.

Na osnovu Teoreme 50 imamo da je potreban uslov da tačka bude tačka ekstrema ustvari da je ona stacionarna tačka. Taj uslov nije dovoljan, tj. postoje stacionarne tačke u kojima funkcija nema ekstrem.

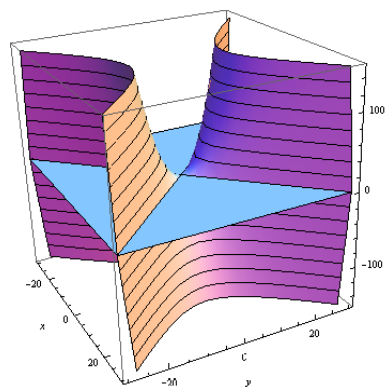
Primer 53 • $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4 \geq 4$, a $f(1, 3) = 4$, odakle vidimo da je $f_{\min} = f(1, 3) = 4$. U ovom primeru nije bilo potrebno tražiti prve izvode jer znamo tačno kako izgleda grafik funkcije f . Dakle, to je paraboloid sa temenom u $(1, 3, 4)$.

- Posmatrajmo sada funkciju $f(x, y) = y^2 - x^2$. Njen gradijent $\nabla f(x, y) = (-2x, 2y)$ definisan je u svakoj tački $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a postaje nula jedino u tački $(0, 0)$. Jedina kritična tačka funkciju f je, stoga, tačka $(0, 0)$, pa ekstrem može da se pojavi samo u toj njoj.

Međutim, primetimo da je

$$f(0, y) = y^2 > 0, \text{ za } y \neq 0;$$

$$f(x, 0) = -x^2 < 0, \text{ za } x \neq 0.$$



Dakle u svakoj okolini tačke $(0, 0)$, sadržana je neka lopta (krug) sa centrom u $(0, 0)$ poluprečnika δ , a iz te lopte možemo izabrati tačke $(0, \frac{\delta}{2})$ i $(\frac{\delta}{2}, 0)$ za koje važi

$$f\left(0, \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\delta^2}{4} > 0 = f(0, 0), \quad f\left(\frac{\delta}{2}, 0\right) = -\frac{\delta^2}{4} < 0 = f(0, 0).$$

Zaključujemo da tačka $(0, 0)$ nije tačka ekstrema i kažemo da je ona *sedlasta tačka*.

Test drugog diferencijala

Prilikom pronalaženja ekstrema funkcije više promenljivih prvo posmatramo tačke \vec{x}_0 u kojima gradijent ne postoji. Prirodu takvih tačaka ispitujemo po definiciji, odnosno poredimo vrednost $z_0 = f(\vec{x}_0)$ i vrednosti $f(\vec{x})$, za \vec{x} iz neke okoline tačke \vec{x}_0 . U slučaju da je $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, to znači da gledamo da li je grafik funkcije f iznad ili ispod ravni $z = z_0$.

Zatim posmatramo tačke u kojima je $\nabla f(\vec{x}_0) = \vec{0}$. Osim po definiciji, prirodu tih tačaka možemo ispitati i pomoću drugog diferencijala funkcije f u tim tačkama. Dakle, u pomenutim

tačkama prvi diferencijal je jednak nuli, $df(x_0, y_0) = 0$, a drugi diferencijal je

$$[d^2 f(x_0, y_0)](dx, dy) = f_{xx}(x_0, y_0)(dx)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) dx dy + f_{yy}(x_0, y_0)(dy)^2$$

polinom drugog stepena po dx i dy . Slučaj $dx = dy = 0$ nas ne zanima, jer to znači da je priraštaj nula, odnosno da se nismo pomerili iz tačke (x_0, y_0) .

Videli smo da je kvadratna aproksimacija funkcije f u tački (x_0, y_0) ,

$$\begin{aligned} Q(dx, dy) &= f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)(dx, dy) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0)(dx, dy) \\ &= f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0)(dx, dy) \end{aligned}$$

jer je $df(x_0, y_0) = 0$. Stoga je

$$d^2 f(x_0, y_0) = 2(Q(dx, dy) - f(x_0, y_0)).$$

Ako je $d^2 f(x_0, y_0) > 0$, onda je $Q(dx, dy) > f(x_0, y_0)$, odnosno kvadratna aproksimacija (koja bolje aproksimira funkciju u tački od tangentne ravni) je iznad tangentne ravni $z = z_0 = f(x_0, y_0)$, pa u tački (x_0, y_0) funkcija f ima lokalni minimum. Analogno, ako je $d^2 f(x_0, y_0) < 0$, onda je $Q(dx, dy) < f(x_0, y_0)$, odnosno kvadratna aproksimacija je ispod ravni $z = z_0 = f(x_0, y_0)$, pa u tački (x_0, y_0) funkcija f ima lokalni maksimum. Ako $d^2 f(x_0, y_0)$ menja znak, kao polinom po (dx, dy) , funkcija f na svakoj okolini tačke (x_0, y_0) ima vrednosti i veće i manje od z_0 , pa u tački (x_0, y_0) nema ekstrem.

Ako je i drugi diferencijal jednak nuli, onda analiziramo znak trećeg diferencijalna itd. Kao i kod funkcija jedne promenljive dolazimo do sledećeg zaključka. Neka je $df(x_0, y_0) = d^2 f(x_0, y_0) = \dots = d^{n-1} f(x_0, y_0) = 0$, a $d^n f(x_0, y_0) \neq 0$, $n \geq 3$. To znači da na okolini tačke (x_0, y_0) postoji sledeća aproksimacija funkcije f ,

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) =: T_n(x - x_0, y - y_0),$$

odnosno važi da je

$$d^n f(x_0, y_0)(dx, dy) = n! [T_n(dx, dy) - f(x_0, y_0)].$$

Ako je n neparan broj, polinom n -tog stepena $d^n f(x_0, y_0)(dx, dy)$ menja znak na okolini tačke $(0, 0)$, pa u tački (x_0, y_0) funkcija f nema ekstrem. Ako je n paran broj, polinom n -tog stepena $d^n f(x_0, y_0)(dx, dy)$ može, ali ne mora da menja znak na okolini tačke $(0, 0)$. Zaključak je isti

kao i u slučaju $n = 2$. Dakle, ako je $d^n f(x_0, y_0)(dx, dy) > 0$, za $(dx, dy) \neq \vec{0}$, u tački (x_0, y_0) funkcija ima lokalni minimum. Ako je $d^n f(x_0, y_0)(dx, dy) < 0$, za $(dx, dy) \neq \vec{0}$, u tački (x_0, y_0) funkcija ima lokalni maksimum, a ako $d^n f(x_0, y_0)(dx, dy)$ menja znak na okolini tačke $(0, 0)$, u tački (x_0, y_0) funkcija f nema ekstrem.

Ako su svi diferencijali funkcije f u tački (x_0, y_0) jednaki nuli, tj. $d^n f(x_0, y_0)(dx, dy) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, to znači da je $f(x, y) = f(x_0, y_0)$ konstantna funkcija na nekoj okolini tačke (x_0, y_0) .

Napomenimo još da ovaj test može da se primeni na sve skalarne funkcije. Zbog jednostavnosti smo dali slučaj funkcije dve promenljive, a za funkcije više promenljivih je u potpunosti ista analiza, samo se umesto znaka polinoma po dx i dy , posmatra znak polinoma po dx , dy i dz , odnosno po dx_1, \dots, dx_d .

Primer 54 Posmatrajmo funkciju $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$. Kao polinom, funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, pa joj je gradijent svuda definisan. Rešavanjem sistema algebarskih linearnih jednačina $\nabla f = (2x - y + 1, 2y - x, 2z - 2) = \vec{0}$, dobijamo jedinu stacionarnu (i kritičnu) tačku $T\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$. Izračunajmo drugi diferencijal funkcije f u tački T ,

$$d^2 f(T) = 2(dx)^2 - 2dxdy + 2(dy)^2 + 2(dz)^2 = (dx - dy)^2 + (dx)^2 + (dy)^2 + 2(dz)^2 \geq 0.$$

Primetimo da je $d^2 f(T) = 0$ ako i samo ako je $dx = dy = dz = 0$, što je slučaj kada se ne pomerimo iz tačke T (priraštaj je nula), pa možemo zaključiti da za nenula priraštaj $(dx, dy, dz) \equiv d(x, y, z) \neq 0$, važi da je $d^2 f(T) > 0$, i tačka T je tačka lokalnog minimuma.

Specijalno za funkcije $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, test drugog diferencijala možemo preformulisati na sledeći način. Uvedimo sledeće oznake,

$$\begin{aligned} [d^2 f(x_0, y_0)](dx, dy) &= f_{xx}(x_0, y_0)(dx)^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0) dx dy + f_{yy}(x_0, y_0)(dy)^2 \\ &=: Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 =: P(h, k), \end{aligned}$$

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0), \quad h = dx, \quad k = dy,$$

i posmatrajmo polinom $P(h, k)$.

- Neka je $A > 0$. Zapišimo polinom $P(h, k)$ u sledećem obliku,

$$P(h, k) = A \left[\left(h + \frac{B}{A}k \right)^2 + k^2 \frac{CA - B^2}{A^2} \right].$$

Ako je $A > 0$ i $CA - B^2 > 0$, onda je i $P(h, k) > 0$, jer smo slučaj $(h, k) = (0, 0)$ isključili.

Dakle, (x_0, y_0) je tačka minimuma.

- Ako je $A < 0$ i $CA - B^2 > 0$, onda je $P(h, k) < 0$, te je (x_0, y_0) tačka maksimuma.
- Ako je $CA - B^2 < 0$, onda polinom $P(h, k)$ menja znak, pa nemamo ekstrem u tački (x_0, y_0) .

Ovaj test formulisaćemo u sledećoj lemi (koju smo upravo pokazali).

Lema 55 Neka je $f : L \equiv L((a, b); r) \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna na L , i neka su $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Označimo sa

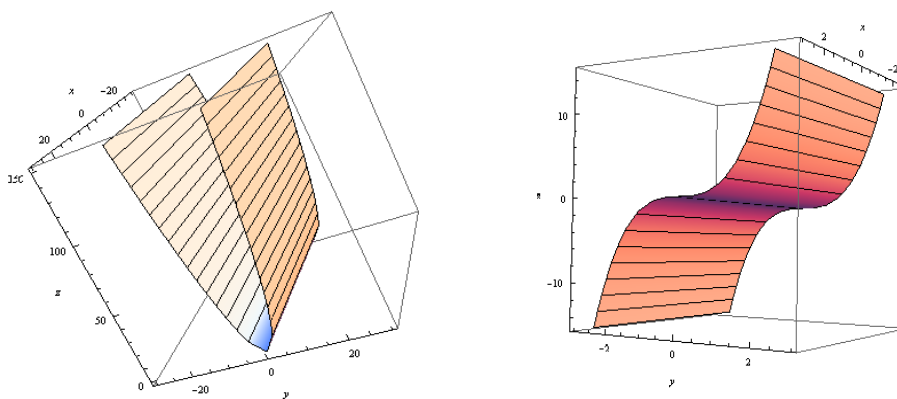
$$\Delta = \Delta(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} (a, b) =: AC - B^2.$$

Tada važe sledeća tvrđenja. Ako je

- $\Delta > 0$ i $f_{xx}(a, b) > 0$, onda je $f(a, b) = f_{\min}$;
- $\Delta > 0$ i $f_{xx}(a, b) < 0$, onda je $f(a, b) = f_{\max}$;
- $\Delta < 0$ onda tačka (a, b) nije tačka ekstrema.

Napomenimo da u trećem slučaju, $\Delta < 0$, tačku (a, b) zovemo sedlasta tačka, a u slučaju $\Delta = 0$, može svašta da se desi što ilustruje sledeći primer.

Primer 56 Posmatrajmo funkcije $z_1(x, y) = y^2$ i $z_2(x, y) = y^3$. Obema su tačke $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, kritične, a $\Delta(x, 0) = 0$ u svim tačkama.



Na slici levo je grafik funkcije z_1 , a desno z_2 .

Funkcija z_1 ima minimum u svim tačkama $(x, 0)$, dok su za funkciju z_2 sve tačke $(x, 0)$ sedlaste.

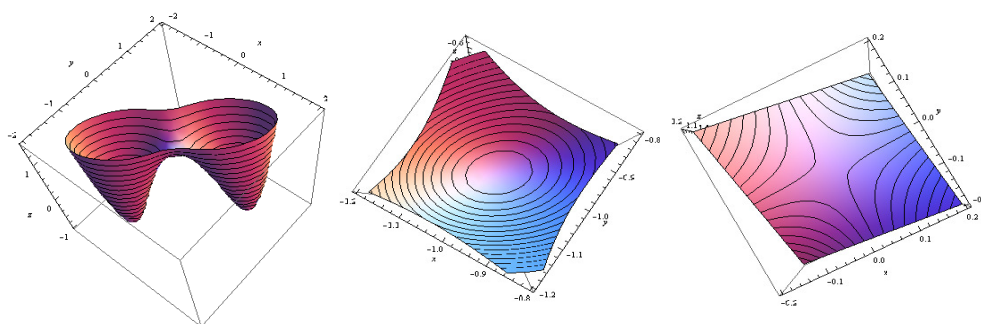
Primer 57 Neka je $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Vidimo da je $\nabla f = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x)$ definisan u svakoj tački \mathbb{R}^2 , pa stacionarne tačke tražimo tamo gde je $\nabla f = \vec{0}$. Dobijemo tri kritične tačke:

$T_1(0, 0)$, $T_2(1, 1)$ i $T_3(-1, -1)$. Tada je

$$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 16(9x^2y^2 - 1),$$

odakle računamo $\Delta(T_1) < 0$, što znači da je T_1 sedlasta tačka, dok je $\Delta(T_2) > 0$ i $\Delta(T_3) > 0$. Kako je $f_{xx}(T_2) = f_{xx}(T_3) = 12 > 0$ obe tačke T_2 i T_3 su tačke minimuma. Dakle funkcija f ima dva lokalna minimuma, $f_{\min 1} = f_{\min 2} = -1$ i slučajno su jednaki.

Kada skicirajmo grafik i linije nivoa funkcije f , primetimo da se linije nivoa koncentrišu oko tačaka ekstrema, a razilaze oko sedlaste tačke.



Na prvoj slici sleva je grafik funkcije f , na kom primećujemo dva jednaka lokalna minimuma. U sredini vidimo linije nivoa koncentrisane oko tačke minimuma, a na poslednjoj slici vidimo linije nivoa koje se razilaze oko sedlaste tačke.

2.7.2 Ekstremi na rubu - uslovni ekstremi

Lokalne ekstreme smo tražili isključivo u unutrašnjim tačkama domena funkcije. Da bismo ispitali i rubne tačke uvodimo pojam uslovnih ekstrema. To nam omogućava da na svakom zatvorenom i ograničenom skupu nađemo tzv. apsolutni maksimum i apsolutni minimum. Apsolutni maksimum/minimum je najveći/najmanji broj među lokalnim maksimumima/minimumima i maksimumima/minimumima na rubu domena funkcije.

Metod Lagranževih množitelja

Metod Lagranževih množitelja rešava sledeći problem. Naći tačke ekstrema funkcije f na skupu

$$\{\vec{x} \mid g(\vec{x}) = k\} \cap D_f,$$

gde je funkcija g neprekidna i diferencijabilna, tj. naći ih među onim tačkama koje ispunjavaju dati uslov $g(\vec{x}) = k$. Uslova može biti i više od jednog, ali ne više od broja promenljivih.

Geometrijski je ova primedba prirodna. Naime, znamo da skup tačkaka u \mathbb{R}^d koje zadovoljavaju jednakost $g(\vec{x}) = k$ ima dimenziju $d - 1$. Na primer, skup tačkaka u ravni koji zadovoljavaju datu jednakost je kriva, a skup tačkaka u prostoru koji zadovoljavaju datu jednakost je površ. Skup tačkaka u prostoru koji zadovoljavaju dve različite nezavisne jednakosti $g(x, y, z) = 0$ i $h(x, y, z) = 0$, za neprekidno-diferencijabilne funkcije g i h , je najviše kriva (može biti i prazan skup ili skup od nekoliko tačkaka). Tačnije, može da se desi da se funkcije g i h poklapaju na nekom skupu koji ima pozitivnu površinu, tada kažemo da uslovi nisu nezavisni. Tri različite (nezavisne) jednakosti može da zadovoljava samo nekoliko tačkaka u \mathbb{R}^3 . Možemo reći da "svaka nova jednakost snižava dimenziju" prostora na kom tražimo ekstrem.

Preciznije, nezavisnost uslova, odnosno funkcija, definišemo na sledeći način. Posmatrajmo dve funkcije $g, h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ i jednačinu $g(\vec{x}) = h(\vec{x})$. Obeležimo sa $S \subset \mathbb{R}^d$ skup rešenja posmatrane jednačine. Ako je mera u \mathbb{R}^{d-1} skupa S jednaka nuli, kažemo da su uslovi $g(\vec{x}) = 0$ i $h(\vec{x}) = 0$ nezavisni. Pojam "mere" još uvek nismo uveli, ali možemo reći da mera skupa S u prostoru \mathbb{R}^{d-1} nije jednaka 0 ako skup S sadrži bilo koji $(d - 1)$ -dimenzionalni interval $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_{d-1}, b_{d-1})$, gde su $a_i < b_i$ proizvoljni realni brojevi. U daljem radu ćemo uvek posmatrati nezavisne uslove.

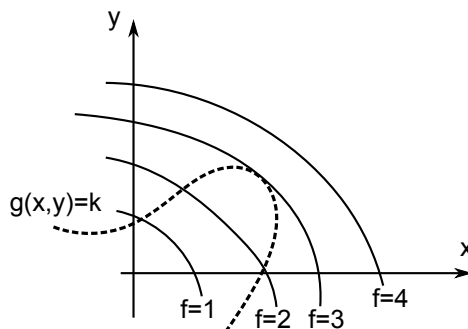
Ako pokušamo naći ekstreme na nekom zatvorenom ograničenom skupu u \mathbb{R}^d neprazne unutrašnjosti, nakon što nađemo lokalne ekstreme među unutrašnjim tačkama, moramo analizirati i tačke na rubu. Rub zatvorenog ograničenog skupa u \mathbb{R}^2 je najčešće glatka kriva data jednom jednačinom ili po delovima glatka kriva čiji je svaki glatki deo dat nekom jednačinom. Zbog toga se problem nalaženja ekstrema na rubu zatvorenog ograničenog skupa svodi na pronalaženje uslovnih ekstrema.

Napomenimo da je skup zatvoren ako mu je komplement otvoren. Zatvoren skup sadrži sve svoje tačke nagomilavanja, pa i rubne tačke. Skup je ograničen ako je ceo sadržan u nekoj lopti $L(\vec{0}; M)$, $M > 0$.

Krenimo od najjednostavnijeg slučaja kada je funkcija $f = f(x, y)$ skalarna funkcija dve promenljive i potražimo njene ekstreme na skupu svih tačkaka u ravni koje zadovoljavaju jedan uslov, tj. na skupu

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = k\},$$

gde je k data konstanta. Linije nivoa funkcije f su krive date jednačinom $f(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Pomoću linija nivoa problem nalaženja ekstrema funkcije f na skupu G može se definisati na sledeći način: naći najveće c za koje linija nivoa $f(x, y) = c$ seče krivu $g(x, y) = k$.



Na slici je najveće c za koje linija nivoa $f(x, y) = c$ seče krivu $g(x, y) = k$

$c = 3$, pa je uslovni maksimum funkcije f jednak 3.

Tražena linija nivoa i kriva $C : g(x, y) = k$ se dodiruju, te u toj jedinoj presečnoj tački imaju zajedničku tangentu. To znači da su im gradijenti u presečnoj tački paralelni, odnosno da postoji neko $\lambda \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

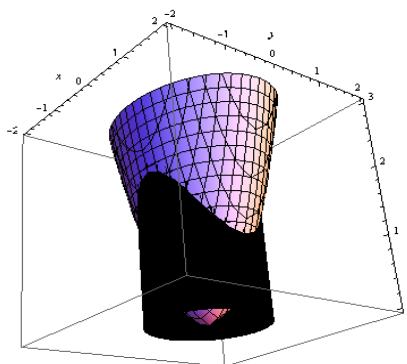
Ovde se prirodno nameće uslov da je $\nabla g(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. U Primeru 59 ćemo videti da, kada je ovaj uslov narušen, metoda Lagranževih množitelja nam neće identifikovati tačku ekstrema. Zbog toga ove tačke treba posebno posmatrati.

Dakle, da bismo dobili stacionarne tačke među tačkama iz skupa G , treba uraditi dve stvari:

- Rešiti jednačinu $\nabla g(x, y) = 0$ na skupu G .
- Rešiti sistem jednačina $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) = 0$, $g(x, y) = k$.

Primer 58 Naći ekstremne vrednosti funkcije $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ na kružnici $x^2 + y^2 = 1$.

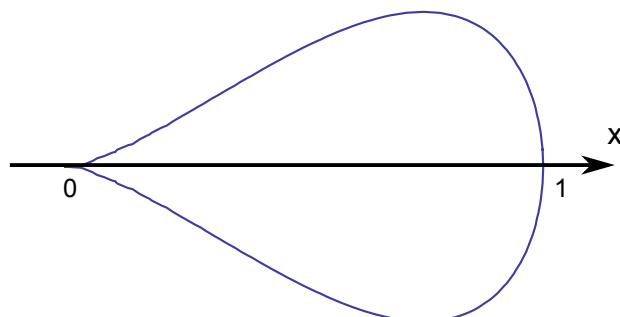
Za $g(x, y) = x^2 + y^2$, $\nabla g(x, y) = (2x, 2y) \neq \vec{0}$, u svim tačkama kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Rešavanjem sistema $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) = 0$, $g(x, y) = 1$, dobijamo tačke $(0, \pm 1)$ i $(\pm 1, 0)$. U prve dve tačke funkcija f dostiže maksimum 2, a u druge dve minimum 1.



Na slici vidimo uslovne maksimume i minimume u preseku

paraboloida $x^2 + 2y^2 = z$ i cilindra $x^2 + y^2 = 1$.

Primer 59 (Piriform) Ravanska kriva $C : y^2 + x^4 - x^3 = 0$ zove se piriform. Prikazana je na slici.



Ako posmatramo funkciju $f(x, y) = x$, vidimo da ona na krivoj C ima minimum 0 u tački $(0, 0)$ i maksimum 1 u tački $(1, 0)$.

Rešavanjem sistema $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$, $g(x, y) := y^2 + x^4 - x^3 = 0$, dobijamo samo tačku maksimuma $(1, 0)$. To je zato što je $\nabla g(0, 0) = \vec{0}$.

Lagranževi množitelji - dva nezavisna uslova

Pretpostavimo da imamo dva nezavisna uslova $g(\vec{x}) = k_1$ i $h(\vec{x}) = k_2$. U ravni bi taj skup bio dimenzije nula, odnosno samo nekoliko tačaka bi mogle da zadovolje obe jednakosti, pa prirodno očekujemo da je $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, jer za nekoliko tačaka prosto možemo izračunati vrednost funkcije u svakoj od njih, i videti koja je najmanja, odnosno najveća.

Geometrijski, kao u prethodnom sučaju, zaključimo da je ∇f paralelan ravni koje obrazuju ∇g i ∇h . S tim u vezi je i pojam nezavisnih uslova. Dakle, uslovi $g(\vec{x}) = k_1$ i $h(\vec{x}) = k_2$ su nezavisni ako im gradijenti nisu paralelni, odnosno ako postoji ravan jedinstveno određena ovim vektorima, odnosno, uslovi $g(\vec{x}) = k_1$ i $h(\vec{x}) = k_2$ su nezavisni ako su im vektori gradijenta linearno nezavisni vektori. Tako dolazimo da postoje $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$, tako da je

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \eta \nabla h.$$

Lagranževi množitelji - više nezavisnih uslova

Neka je sada funkcija $f = f(x_1, \dots, x_d)$. Njen gradijent u tački $\vec{x} = (x_1, \dots, x_d)$ je vektor $\nabla f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^d$. U prostoru \mathbb{R}^d možemo imati najviše d nezavisnih vektora, a d nezavisnih uslova mogu ispunjavati najviše nekoliko tačaka prostora. Zbog toga je prirodno da imamo najviše $d-1$ uslova nametnutih na potencijalne tačke ekstrema. Dakle, ako imamo $k < d$ uslova $g_i(\vec{x}) = c_i$,

$i = 1, \dots, k$, c_i su konstante, za pronalaženje stacionarnih tačaka rešavamo sistem $d + k$ jednačina

$$\begin{aligned}\nabla f(\vec{x}) &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}) \\ g_i(\vec{x}) &= c_i, \quad i = 1, \dots, d,\end{aligned}$$

uz pretpostavku da su vektori $\nabla g_i(\vec{x})$, $i=1, \dots, d$, linearno nezavisni, tj. da je

$$\text{rang} \begin{bmatrix} \partial_{x_1} g_1 & \dots & \partial_{x_d} g_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{x_1} g_k & \dots & \partial_{x_d} g_k \end{bmatrix} (\vec{x}) = k.$$

Dakle, opet, tačke u kojima taj uslov nije ispunjen moramo posebno posmatrati.

Prirodu stacionarnih tačaka možemo ispitati pomoću znaka kvadratne forme $d^2\phi(\vec{x})(dx_1, \dots, dx_d)$, gde je

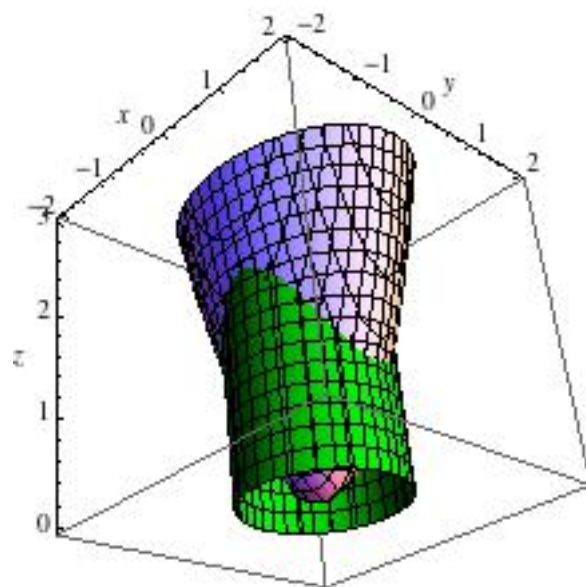
$$\phi(\vec{x}) = f(\vec{x}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\vec{x}).$$

Ova funkcija zove se Lagranževa funkcija koja zavisi od promenljivih x_1, \dots, x_d , a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ se posmatraju kao parametri. Primetimo da je $d\phi(\vec{x}) = 0$ u onim tačkama \vec{x} za koje je ispunjen uslov $\nabla f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(\vec{x})$.

Primer 60 Naći ekstreme funkcije $u(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ na krugu $K((0, 0); 1)$.

U unutrašnjosti kruga K tražimo lokalne ekstreme. Jedini lokalni ekstrem je lokalni minimum $u_{\min} = u(0, 0) = 0$.

Na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ tražimo uslovne ekstreme. Neka je $g(x, y) = x^2 + y^2$. Uslov $\nabla g \neq \vec{0}$ je ispunjen u svim tačkama kružnice, pa će sve tačke biti obuhvaćene metodom Lagranževih množitelja. Dobijamo $u_{\min} = u(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = u(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = 1/2$ i $u_{\max} = u(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = u(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = 3/2$.



Na slici vidimo lokalni minimum u temenu paraboloida $z = x^2 + y^2 - xy$, kao i uslovni minimum i uslovni maksimum na krivoj u preseku paraboloida $z = x^2 + y^2 - xy$ i cilindra $x^2 + y^2 = 1$.

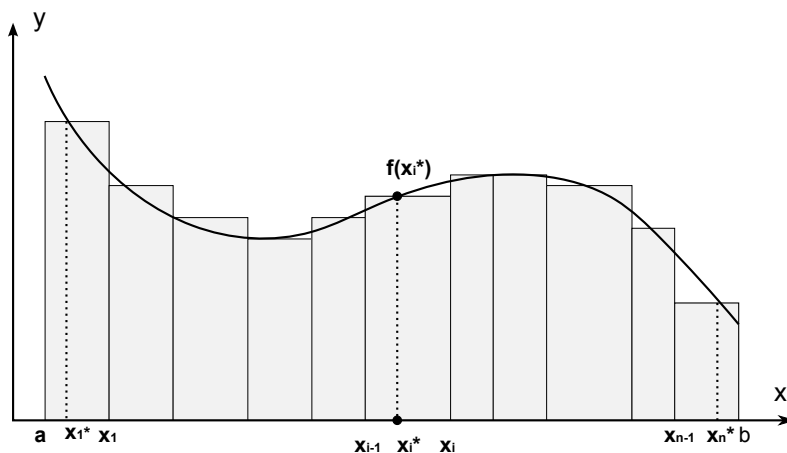
Glava 3

Višestruki integrali

Višestruki integrali proširuju pojam određenog integrala realne funkcije jedne realne promenljive na funkcije više promenljivih. Podsetimo se stoga kako smo definisali određeni integral. Neka je funkcija $f = f(x)$, $x \in [a, b]$, neprekidna na intervalu $[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. Određeni integral funkcije f na intervalu $[a, b]$ definiše se kao

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i,$$

pri čemu je $a \equiv x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n \equiv b$, proizvoljna podela intervala $[a, b]$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$, i $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, proizvoljna tačka intervala $[x_{i-1}, x_i]$. Takođe znamo da, kao posledica jedinstvenosti granične vrednosti, definicija određenog integrala ne zavisi od izbora tačaka podele intervala $[a, b]$, niti od izbora tačaka $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$. Za više detalja o određenom integralu preporučujemo [9].



Činjenica da određeni integral ne zavisi od podele intervala i izbora tačaka nam omogućava da napravimo najpovoljniji izbor tačaka x_i i x_i^* , i zbog toga najčešće biramo intervale podele

$[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \dots, n$, jednakih dužina $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} =: \Delta x$, $i = 1, \dots, n$. Takođe, često biramo da je $x_i^* = x_{i-1}$ i dobijamo da je

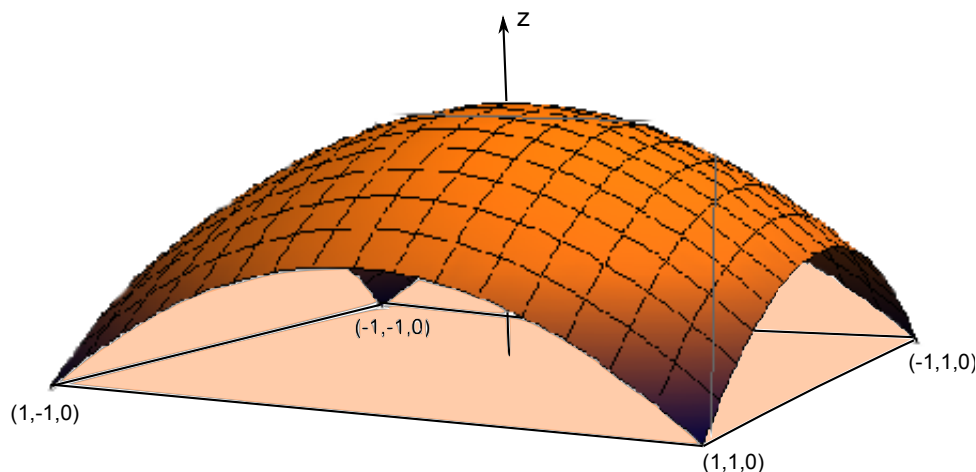
$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_{i-1}) \Delta x = (b-a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(a + (i-1) \Delta x).$$

Ukoliko drugačije ne bude naglašeno, u nastavku, podrazumevaćemo da smo tačke podele birali na ovaj način.

3.1 Dvostruki integral realne funkcije dve promenljive

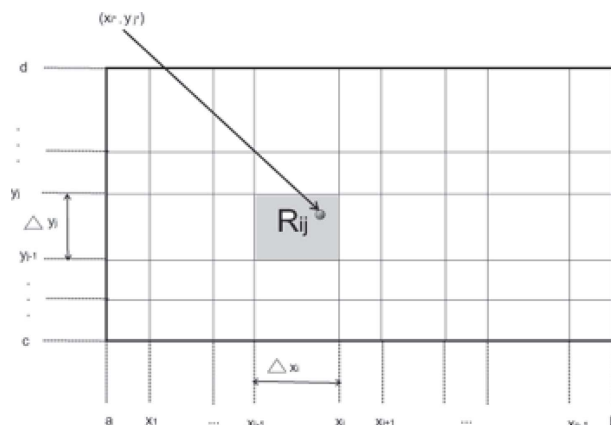
Prvi korak u proširenju određenog integrala na više dimenzija je dvostruki integral. Sada za oblast integracije biramo deo ravni konačne površine. Naime, podsetimo se da smo određeni integral na intervalu $[a, b]$ nenegativne neprekidne funkcije $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, interpretirali kao površinu dela (x, y) -ravni ograničene pravama $x = a$, $x = b$, $y = 0$ i grafikom funkcije $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (govorili smo "površina iznad x -ose i ispod grafika funkcije f "). Da bi ta površina postojala, odnosno bila veća od nule i manja od beskonačno, bilo je potrebno integraliti na intervalu ili uniji intervala ili bilo kom podskupu realne prave koji ima dužinu veću od nule i manju od beskonačno. Tako i sada, kada je oblast integracije deo ravni, tražimo da ima površinu veću od nule i manju od beskonačno. Dakle, uzećemo skup $D \subset \mathbb{R}^2$ takav da je $0 < P(D) < +\infty$, pri čemu smo sa $P(D)$ obeležili površinu skupa D . Dalje, ako na skupu D imamo definisanu funkciju $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, koja je neprekidna i nenegativna, dvostruki integral funkcije f na skupu D ćemo interpretirati kao zapreminu tela iznad skupa D i ispod grafika funkcije f .

Na primer, na sledećoj slici vidimo telo od dole ograničeno kvadratom $[-1, 1] \times [-1, 1]$ u (x, y) -ravni, a od gore grafikom funkcije $z = 4 - x^2 - y^2$.



3.1.1 Dvostruki integral na pravougaoniku

Počecemo od najjednostavnijeg slucaja, tj. za skup D cemo uzeti pravougaonik $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \text{ i } y \in [c, d]\}$, $a < b$ i $c < d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Primenicemo istu tehniku podele oblasti integracije kao i kod određenog integrala. Naime, ako interval $[a, b]$ podelimo na n , a interval $[c, d]$ na m intervala, tom podelom smo pravougaonik R podelili na $n \cdot m$ manjih pravougaonika.



Dakle, biramo tačke podele $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ i $c = y_0 < y_1 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$, i dobijamo pravougaonike R_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, čije su dužine stranica $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ i $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, kao na gornjoj slici. Površina pravougaonika R_{ij} je tada $\Delta R_{ij} := \Delta x_i \Delta y_j$. Zatim iz svakog malog pravougaonika R_{ij} biramo proizvoljnu tačku $T_{ij} \in R_{ij}$. Koordinate tačke T_{ij} tada pripadaju intervalima $[x_{i-1}, x_i]$ i $[y_{j-1}, y_j]$, odnosno $T_{ij}(x_i^*, y_j^*)$, $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ i $y_j^* \in [y_{j-1}, y_j]$. Primitimo da će tada $f(x_i^*, y_j^*) \Delta R_{ij}$ biti zapremina kvadra baze R_{ij} i visine $f(x_i^*, y_j^*)$.

Dakle, dvostruki integral funkcije f po pravougaoniku R aproksimiracemo sumom zapremina oblika $f(x_i^*, y_j^*) \Delta R_{ij}$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$. Tako dobijamo dvostruku Rimanovu sumu kojom aproksimiramo dvostruki integral,

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta R_{ij}.$$

Oznaka dA potiče od "Aria", engleske reči za površinu, i u skladu sa njom možemo dvostruki integral po pravougaoniku zvati i integral po površini pravougaonika R , ili kasnije integral po površini oblasti u ravni.

Definicija 61 Dvostruki integral funkcije f po pravougaoniku R , u oznaci $\iint_R f(x, y) dA$, definišemo

kao

$$\iint_R f(x, y) dA := \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta R_{ij},$$

ako ta granična vrednost postoji, odnosno ako je konačan broj, za svaku podelu pravougaonika R . Tada kažemo da je funkcija f integrabilna na R .

Napomenimo da moramo opravdati Definiciju 61, odnosno pokazati da definisana vrednost ne zavisi od podele intervala niti od izbora tačaka (x_i^*, y_j^*) . Dokaz je jednostavna posledica definicije granične vrednosti i konvergencije običnih Rimanovih suma za određeni integral.

Primetimo da u Definiciji 61 nismo tražili da je funkcija f nenegativna. Nenegativnost funkcije f koristimo prilikom interpretacije dvostrukog integrala po pravougaoniku R kao zapremine tela iznad pravougaonika R i ispod grafika funkcije $z = f(x, y) \geq 0, (x, y) \in R$.

Činjenica da je Definicija 61 dobra nam omogućava da biramo najpovoljnije tačke, na primer, $x_i^* = x_{i-1} = a + (i-1)\frac{b-a}{n}$ i $y_j^* = y_{j-1} = c + (j-1)\frac{d-c}{m}$. To je donji levi ugao pravougaonika R_{ij} (takođe se često bira i gornji desni ugao). Tim izborom dobijamo da je za sve i, j , $\Delta R_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = \frac{(b-a)(d-c)}{nm} =: \Delta x \Delta y =: \Delta A$, odnosno dobijamo najčešće korišćenu definiciju dvostrukog integrala,

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(x_i^*, y_j^*) \Delta R_{ij} \\ &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{m} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f\left(a + (i-1)\frac{b-a}{n}, c + (j-1)\frac{d-c}{m}\right). \end{aligned}$$

Primer 62 Pronađimo zapreminu tela iznad kvadrata $(x, y) \in [0, 2,] \times [0, 2,]$ i ispod eliptičnog paraboloida datog jednačinom $z = 9 - x^2 - y^2 =: f(x, y)$. Uzmimo podelu $\Delta x = \Delta y = \frac{2}{n}$, $x_i = y_i = \frac{2i}{n}$, $i = 0, 1, \dots, n$. Tada je,

$$\begin{aligned} V &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \frac{2}{n} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(9 - \left(\frac{2i}{n}\right)^2 - \left(\frac{2j}{n}\right)^2\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \left(9n - \frac{4i^2}{n} - \frac{4}{n^2} \sum_{j=1}^n j^2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2} \left(9n^2 - 2 \frac{4(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{76}{3}. \end{aligned}$$

Ovde smo koristili da je suma kvadrata prvih n prirodnih brojeva, $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Osnovne osobine dvostrukog integrala

Kako je dvostruki integral definisan pomoću limesa, jasno je da važe sledeće osobine:

- $\iint_R (f \pm g) dA = \iint_R f dA \pm \iint_R g dA$, ako integrali na R funkcija f i g postoje;
- $\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA$, $c \in \mathbb{R}$, ako integral na R funkcije f postoji.

Kako integral nenegativne funkcije interpretiramo kao zapreminu, očigledna je i sledeća osobina,

$$\bullet \quad 0 \leq f(x, y) \leq g(x, y), (x, y) \in R \implies 0 \leq \iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA.$$

Takođe iz definicije dvostrukog integrala možemo primetiti da je

- $\iint_R 0 dA = 0$;
- $\iint_R 1 dA = P(R) = (b - a)(d - c)$.

Srednja vrednost funkcije

Podsetimo se da smo srednju vrednost realne integrabilne funkcije jedne realne promenljive, $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, definisali kao

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dakle, to je broj koji zadovoljava relaciju $f_{\text{ave}} \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx$, odnosno daje dužinu druge stranice pravougaonika čija je jedna stranica $b - a$, takvog da mu je površina jednaka baš određenom integralu funkcije f . U slučaju da je f nenegativna, to je pravougaonik koji ima tačno onoliku površinu kolika je površina ispod grafika funkcije $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Detaljnije o srednjoj vrednosti funkcije jedne promenljive možete naći u [9]. Primetimo da ako je funkcija konstantna, $f(x) = c$, i njena srednja vrednost je jednaka toj konstanti, $f_{\text{ave}} = c$.

Analogno definišemo i srednju vrednost funkcije dve promenljive na pravougaonku R .

Definicija 63 Neka je funkcija f integrabilna na pravougaoniku R . Tada je srednja vrednost funkcije f na pravougaoniku R broj

$$f_{\text{ave}} = \frac{1}{(b - a)(d - c)} \iint_R f(x, y) dA = \frac{1}{P(R)} \iint_R f(x, y) dA.$$

3.1.2 Iterirani integrali i Fubinijeva teorema

Neka je funkcija $f = f(x, y)$ integrabilna na pravougaoniku R . Fiksirajmo jednu promenljivu, na primer $x \in [a, b]$, odnosno posmatrajmo je kao parametar. Tako možemo definisati funkciju

$g(y) = f(x, y)$ promenljive $y \in [c, d]$. Vodimo računa da nam je sada x jedan fiksirani broj iz intervala $[c, d]$.

Pokažimo da je funkcija $g = g(y) = f(x, y)$ integrabilna na $[c, d]$, gde je proizvoljno (i fiksirano) $x \in [a, b]$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji podela intervala $[c, d]$ takva da $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(y_i^*) \Delta y_i$ ne postoji. Tada ako interval $[a, b]$ ne podelimo, tj. posmatramo kao podelu $a = x_0, b = x_1$, imamo da za podelu pravougaonika R na n pravougaonika $R_{ij} = R_i = [a, b] \times [y_{i-1}, y_i]$, važi

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x, y_i^*) \Delta R_{ij} = (b - a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n g(y_i^*) \Delta y_i. \quad (3.1)$$

Kontradikciju pronalazimo u činjenici da leva strana jednakosti (3.1) postoji, a desna ne postoji. Dakle, iz ovog dokaza proizilazi sledeće tvrđenje.

Lema 64 *Ako je funkcija $f = f(x, y)$ integrabilna na pravougaoniku $R = [a, b] \times [c, d]$, tada je i za sve (fiksirane) x funkcija $g(y) = f(x, y)$ integrabilna na intervalu $[c, d]$, odnosno za sve (fiksirane) y funkcija $h(x) = f(x, y)$ je integrabilna na intervalu $[a, b]$.*

Na osnovu prethodne leme vidimo da je određeni integral funkcije g na intervalu $[c, d]$ broj koji se menja u zavisnosti od fiksiranog broja $x \in [a, b]$. Dakle funkcija

$$A(x) := \int_c^d g(y) dy = \int_c^d f(x, y) dy,$$

je dobro definisana na intervalu $[a, b]$ i naziva se *parcijalni integral po y funkcije f* . Ako pretpostavimo da je funkcija $A(x)$ integrabilna na $[a, b]$, onda možemo pisati

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (3.2)$$

Ovakvu integraciju, kada funkciju dve promenljive prvo integralimo po jednoj pa po drugoj promenljivoj, nazivamo *iterirana integracija*, a integrale iz (3.2) *iterirani integrali*. Ako promenimo redosled pa prvo fiksiramo $y \in [c, d]$, dobijamo da je *parcijalni integral po x funkcije f*

$$B(y) := \int_a^b f(x, y) dx$$

dobro definisana funkcija na intervalu $[c, d]$, i ako je tu još i integrabilna, onda dobijamo drugi

redosled integracije kod iteriranih integrala,

$$\int_c^d B(y)dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Primer 65 Pronađimo iterirane integrale funkcije $f(x, y) = x^2y$, $x \in [0, 3]$, $y \in [1, 2]$. Ako prvo integralimo po y , pa zatim po x , dobijemo

$$\int_0^3 \left(\int_1^2 x^2y dy \right) dx = \int_0^3 x^2 \left(\int_1^2 y dy \right) dx = \frac{3}{2} \int_0^3 x^2 dx = \frac{27}{2}.$$

Kada promenimo redosled integracije dobićemo isti rezultat, tj.

$$\int_1^2 \left(\int_0^3 x^2 dx \right) dy = \frac{27}{2}.$$

Jednak rezultat u oba redosleda nije dobijen slučajno. Primetimo da je podintegralna funkcija neprekidna.

O jednakosti iteriranih integrala i dvostrukog integrala govori jedna od najznačajnijih teorema za višestruke integrale, Fubinijeva teorema. Njen specijalan slučaj je sledeće tvrđenje.

Teorema 66 *Ako je realna funkcija $f = f(x, y)$ neprekidna na pravougaoniku $R = [a, b] \times [c, d]$, tada je*

$$\iint_R f(x, y)dA = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)dx \right) dy.$$

Uslov neprekidnosti u Teoremi 66 se može oslabiti. Naime, dovoljno je da je funkcija f :

- ograničena na R ,
- prekidna na najviše konačno mnogo glatkih krivih i
- iterirani integrali postoje.

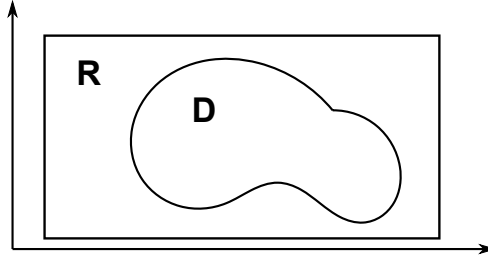
Dokaz ovog tvrđenja prevazilazi nivo gradiva našeg kursa. Fubinijeva teorema se detaljno proučava u okviru naprednih kurseva matematičke analize koji se bave teorijom mere i integrala.

Primer 67 Kada znamo Fubinijevu teoremu, zapreminu iz Primera 62 možemo izračuati na mnogo lakši način. Kako je funkcija $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ neprekidna na kvadratu $[0, 2] \times [0, 2]$, imamo da je

$$V = \int_0^2 \left(\int_0^2 (9 - x^2 - y^2)dy \right) dx = \int_0^2 \left(18 - 2x^2 - \frac{8}{3} \right) dx = \frac{76}{3}.$$

3.1.3 Dvostruki integral na proizvoljnoj oblasti u ravni

Krenućemo od proizvoljnog ograničenog skupa $D \subset \mathbb{R}^2$. Njega možemo upisati u neki pravougaonik $R = [a, b] \times [c, d]$, kao na sledećoj slici:



Ako funkciju f proširimo (dodefinišemo) nulom van skupa D , dobijamo funkciju

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in R \setminus D \end{cases} \quad (3.3)$$

koja je definisana na celom R . Pomoću nje možemo definisati dvostruki integral funkcije f na ograničenom skupu D . Napomenimo da za skup $D \subset \mathbb{R}^2$ kažemo da je ograničen ako postoji krug $K = K((0, 0); M)$ koji sadrži D . Ekvivalentna definicija bi bila i ta da postoji pravougaonik R koji sadrži D .

Definicija 68 *Dvostruki integral funkcije f na ograničenom skupu $D \subset \mathbb{R}^2$ definišemo na sledeći način,*

$$\iint_D f(x, y) dA := \iint_R F(x, y) dA,$$

gde je R proizvoljan pravougaonik koji sadrži skup D , a funkcija F neprekidno proširenje nulom funkcije f definisano u (3.3).

Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu D ako je $\iint_D f(x, y) dA$ realan broj.

Primenimo ovu definiciju na izračunavanje integrala funkcije F na $R \setminus D$, preciznije restrikcije funkcije F na $R \setminus D$, $F|_{R \setminus D}$. Kada funkciju $F|_{R \setminus D}$ proširimo nulom na ceo R , dobijamo da je njeno proširenje nulom funkcija $G(x, y) = 0$. Tada je

$$\iint_{R \setminus D} F(x, y) dA = \iint_R G(x, y) dA = 0.$$

U ovoj analizi se krije i dokaz sledeće osobine dvostrukog integrala.

Lema 69 Neka je D ograničen skup u ravni. Tada je

$$\iint_D 0 \, dA = 0.$$

Ova lema nam pokazuje i da je Definicija 68 dobra, odnosno da ne zavisi od izbora pravougaonika koji sadrži D . Naime, ako posmatramo dva različita pravougaonika R_1 i R_2 koja sadrže ograničen skup D , tada je

$$\iint_{R_1} F(x, y) \, dA = \iint_D f(x, y) \, dA = \iint_{R_2} F(x, y) \, dA.$$

Ostale osobine dvostrukog integrala po ograničenom skupu D su posledice Definicije 68 i samo ćemo ih navesti (svakako, izvođenje ovih osobina se preporučuje za vežbanje):

- $\iint_D 1 \, dA = P(D)$;
- Ako je $P(D) = 0$, onda je $\iint_D dA = 0$. Štaviše, ako je funkcija f ograničena na D i $P(D) = 0$, onda je $\iint_D f \, dA = 0$;
- $\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) \, dA = \alpha \iint_D f(x, y) \, dA + \beta \iint_D g(x, y) \, dA$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ako integrali funkcija f i g postoje. Ova osobina se zove linearnost;
- Ako je $f(x, y) \leq g(x, y)$, za sve $(x, y) \in D$ i ako integrali funkcija f i g postoje, onda je $\iint_D f(x, y) \, dA \leq \iint_D g(x, y) \, dA$. Ova osobina se zove monotonost;
- Ako je $D = D_1 \cup D_2$ i $P(D_1 \cap D_2) = 0$, gde je P oznaka za površinu, onda je

$$\iint_D f(x, y) \, dA = \iint_{D_1} f(x, y) \, dA + \iint_{D_2} f(x, y) \, dA; \quad (3.4)$$

- $\iint_{D \cup \partial D} f(x, y) \, dA = \iint_D f(x, y) \, dA$;
- Ako je $m \leq f(x, y) \leq M$, za sve $(x, y) \in D$, onda je $m \cdot P(D) \leq \iint_D f(x, y) \, dA \leq M \cdot P(D)$.

Poslednja navedena osobina je korisna kada ne možemo da izračunamo integral, jer nam daje ocene integrala.

Primer 70 Ocenimo integral $\iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA$, gde je D krug sa centrom u $(0, 0)$ poluprečnika 2.

Kako je $-1 \leq \sin x \cos y \leq 1$ i $P(D) = 4\pi$, imamo da je $\frac{4\pi}{e} \leq \iint_D e^{\sin x \cos y} \, dA \leq 4\pi e$.

Povoljni oblici oblasti integracije kod dvostrukog integrala

Neka je oblast¹ $D \subset \mathbb{R}^2$ konačne pozitivne površine. Ako je funkcija f neprekidna na skupu D , onda je njeno neprekidno proširenje nulom, funkcija F , neprekidna u svim tačkama pravougaonika R , osim eventualno rubnih tačaka skupa D . Ako je rub oblasti D po delovima glatka kriva, onda na pravougaonik R i funkciju F možemo primeniti Fubinijevu teoremu, pa imamo da je

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b F(x, y) dx dy. \quad (3.5)$$

Neka prave $x = a$ i $x = b$ ujedno ograničavaju i oblast D , tj. neka je $D = \{(x, y) | x \in [a, b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$, gde su funkcije $y = g_i(x)$, $i = 1, 2$ neprekidne na $[a, b]$ i važi $d \geq g_2(x) \geq g_1(x) \geq c$, $x \in [a, b]$, Slika 3.1 levo. Fiksirajmo $x_0 \in [a, b]$, tada je

$$G(y) = F(x_0, y) = \begin{cases} f(x_0, y), & y \in [g_1(x_0), g_2(x_0)] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

funkcija jedne promenljive $y \in [c, d]$, te je njen određeni integral

$$\int_c^d F(x_0, y) dy = \int_c^d G(y) dy = \int_{g_1(x_0)}^{g_2(x_0)} f(x_0, y) dy.$$

Kada to primenimo na (3.5), dobijemo da je

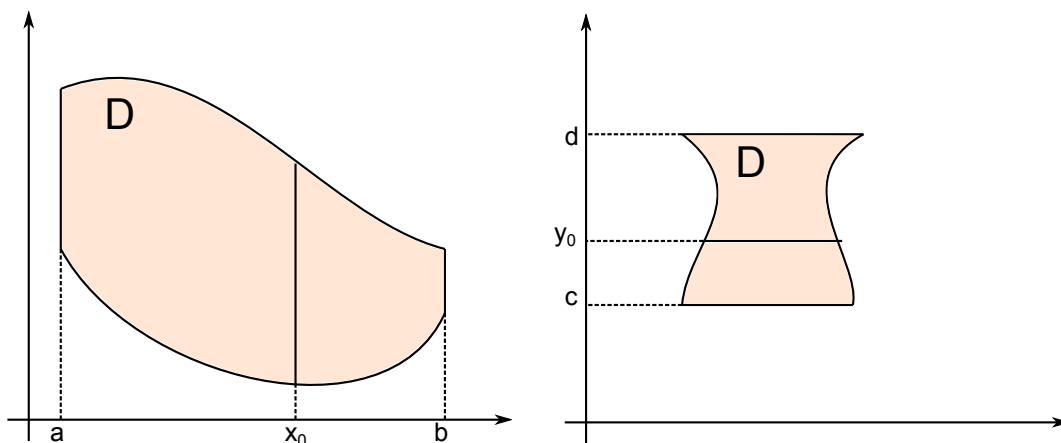
$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_R F(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d F(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (3.6)$$

Drugi povoljan tip oblasti integracije, Slika 3.1 desno, dobijamo kada zamenimo promenljive, tj. kada se D može opisati kao $D = \{(x, y) | h_1(y) \leq x \leq h_2(y), y \in [c, d]\}$, gde su funkcije $x = h_i(y)$, $i = 1, 2$, neprekidne na $[c, d]$ i važi $b \geq g(y) \geq h(y) \geq a$, $y \in [c, d]$. Tada na isti način iz (3.5) dobijemo da je

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (3.7)$$

Primer 71 Izračunajmo iterirani integral $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx$. Kako je funkcija $f(x, y) = e^{y^2}$ neprekidna na celom \mathbb{R}^2 , možemo primeniti Fubinijevu teoremu, tj. jednakost (3.7). Dakle, $\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx = \iint_D e^{y^2} dA$, gde je $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$ trougao sa temenima u tačkama $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 1)$. Kako se D može predstaviti i u obliku drugog povoljnog tipa, tj.

¹Napomenimo da se često, u mnogim matematičkim knjigama na srpskom jeziku, pojam "oblast" koristi za otvoren i povezan skup. Mi ga ovde nećemo koristiti u tom kontekstu.



Slika 3.1: Povoljni tipovi oblasti integracije

$D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, primenom jednakosti (3.6), dobijamo da je

$$\int_0^1 \int_x^1 e^{y^2} dy dx = \iint_D e^{y^2} dA = \int_0^1 e^{y^2} \int_0^y dx dy = \int_0^1 ye^{y^2} dy = \frac{1}{2}(e - 1),$$

što je jednostavno izračunati. Kako realna funkcija jedne promenljive e^{y^2} nema antiizvod (primitivnu funkciju), izračunavanje iteriranog integrala u prvobitnom obliku prilično je komplikovano, te možemo da zaključimo da Fubinijeva teorema ima poseban značaj kod izračunavanja integrala po oblasti koja se može predstaviti u oba povoljna oblika.

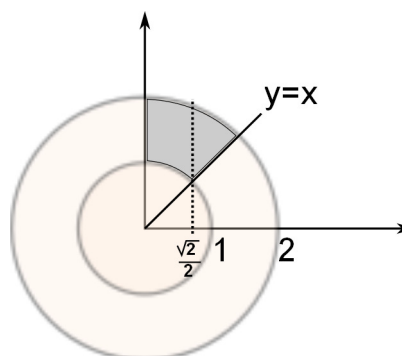
Napomenimo još da koristeći osobinu (3.4) možemo računati dvostruki integral po uniji konačno mnogo oblasti povoljnog tipa.

3.1.4 Smena promenljivih u dvostrukom integralu

Poći ćemo sada od jednog primera u kome je oblast integracije mnogo jednostavnije opisati pomoću polarnih nego standardnih, pravougljih koordinata (x, y) .

Primer 72 Neka je oblast D u ravni ograničena kružnicama sa centrom u $(0, 0)$ poluprečnika 1 i 2 i pravim $y = x$ i $x = 0$. Pri tome je tačka $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \in D$.

Ako hoćemo da oblast D opišemo preko (x, y) -koordinata, moramo je podeliti na uniju dva skupa. Na primer, prava $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ deli odlast $D = D_1 \cup D_2$, pri čemu je $D_1 = \{(x, y) | x \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2}], y \in [\sqrt{1-x^2}, \sqrt{4-x^2}]\}$ i $D_2 = \{(x, y) | x \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}], y \in [x, \sqrt{4-x^2}]\}$.



Primetimo da čak iako je podintegralna funkcija jednostavna, na primer konstanta, izračunavanje dvostrukog integrala po D_1 , odnosno D_2 , je prilično komplikovano.

Rešenje ovog problema je mnogo jednostavnije ukoliko oblast D opišemo pomoću polarnih koordinata, (ρ, φ) , pri čemu je $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Sve tačke koje se nalaze između date dve kružnice se mogu opisati sa $1 \leq \rho \leq 2$, a sve tačke između pravih $y = x$ i $x = 0$, sa $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Tako dobijemo da je $D = \{(\rho, \varphi) | \rho \in [1, 2], \varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]\}$. Vidimo da je sada skup D mnogo jednostavnije opisan. Ovakav oblik skupa D se zove *polarni pravougaonik*, jer polarne koordinate pripadaju intervalima sa konstantnim rubnim tačkama.

Kada smo oblast integracije D opisali pomoću polarnih koordinata, ostaje nam jos i da izvršimo takozvanu smenu promenljivih, odnosno da i diferencijal dA izrazimo pomoću diferencijala novih promenljivih, $d\rho$ i $d\varphi$.

Teorema 73 Neka je funkcija $f = f(x, y)$ neprekidna na skupu $D \subset \mathbb{R}^2$, koji se pomoću polarnih koordinata može predstaviti u obliku $D = \{(x, y) | x = \rho \sin \varphi, y = \rho \cos \varphi; \rho \in [a, b], \varphi \in [\alpha, \beta]\}$, odnosno $D = R = \{(\rho, \varphi) | \rho \in [a, b], \varphi \in [\alpha, \beta]\}$ je polarni pravougaonik. Tada je

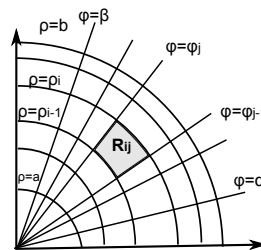
$$\iint_R f dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (3.8)$$

Dokaz: Podelimo polarni pravougaonik R polupravama oblika $\varphi = \varphi_j$, $j = 1, \dots, n - 1$, i lukovima kružnica $\rho = \rho_i$, $i = 1, \dots, m - 1$, na sledeći način,

$$a = \rho_0 < \rho_1 < \dots < \rho_{m-1} < \rho_m = b,$$

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta,$$

$$\Delta\rho_i = \frac{b-a}{m}, \quad \Delta\varphi_j = \frac{\beta-\alpha}{n},$$



i uočimo jedan mali polarni pravougaonik podele $R_{ij} = \{(\rho, \varphi) | \rho \in [\rho_{i-1}, \rho_i], \varphi \in [\varphi_{j-1}, \varphi_j]\}$. Izračunajmo površinu polarnog pravougaonika R_{ij} (kao površinu kružnog isečka),

$$P(R_{ij}) = \Delta R_{ij} = (\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2) \pi \frac{\Delta\varphi_j}{2\pi} = \Delta\varphi_j \Delta\rho_i \rho_i^*, \quad \rho_i^* := \frac{\rho_i + \rho_{i-1}}{2}.$$

Izaberimo i $\varphi_j^* = \frac{\varphi_j + \varphi_{j-1}}{2}$ i formirajmo dvostruku Rimanovu sumu za funkciju f i oblast R ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta R_{ij} &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (f(\rho_i^* \cos \varphi_j, \rho_i^* \sin \varphi_j) \rho_i^*) \Delta \varphi_j \Delta \rho_i \\ &\xrightarrow{m, n \rightarrow \infty} \iint_R (f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho) d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Dobili smo dvostruki integral funkcije $g(\rho, \varphi) := f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho$ koja je neprekidna na polarnom pravougaoniku $R = \{(\rho, \varphi) | \rho \in [a, b], \varphi \in [\alpha, \beta]\}$, pa možemo primeniti Fubinijevu teoremu da bismo dobili formulu (3.8). \square

Primer 74 Izračunajmo integral funkcije $f(x, y) = 1$ iz Primera 72. Kako je je $D = \left\{(\rho, \varphi) | \rho \in [1, 2], \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$, imamo da je

$$\iint_D dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \rho d\rho d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot \int_1^2 \rho d\rho = \frac{3\pi}{8}.$$

Kako je integral jedinice numerički jednak površini oblasti integracije, ovaj rezultat možemo dobiti i geometrijski računajući površinu kružnog isečka, $P = \frac{1}{8}\pi(2^2 - 1^2)$.

Teorema 73 može se posmatrati kao specijalni slučaj teoreme o regularnoj smeni promenljivih u dvostrukom integralu, koja je opet specijalni slučaj teoreme o regularnoj smeni promenljivih u višestrukom integralu. Naime, smenom promenljivih $x = x(\rho, \varphi)$, $y = y(\rho, \varphi)$, posmatramo ustvari preslikavanje oblika $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(\rho, \varphi) \mapsto (x, y)$, čiji je izvod matrica

$$\begin{bmatrix} x_\rho & x_\varphi \\ y_\rho & y_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Primetimo da je determinanta ove matrice baš $J = \rho$. Podsetimo se da se determinanta (matrice) izvoda preslikavanja $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ zove Jakobijeva determinanta, ili samo Jakobijan, i obeležava se sa J . Zapazimo još i da je, u ovom slučaju $J \geq 0$, svuda, a da je $J = 0$ samo u jednoj tački, koordinatnom početku, stoga možemo zaključiti da je Jakobijan za smenu pravougaonih koordinata polarnim skoro svuda pozitivan.

Sada možemo formulisati i teoremu o regularnoj smeni u dvostrukom integralu.

Definicija 75 Za smenu promenljivih $(u, v) \mapsto (x, y)$ kažemo da je regularna, ako je preslikavanje $F : D_1 \rightarrow D$, $F(u, v) = (x, y)$, skoro svuda C^1 -bijekcija.

Primetimo da je uslov iz definicije ekvivalentan uslovu da Jakobijan postoji skoro svuda i da je skoro svuda $J \neq 0$.

Teorema 76 (Smena promenljivih u dvostrukom integralu) *Neka je:*

- $f \in C(D)$, $u, v \in C^1([\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta])$;
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = u(\xi, \eta), y = v(\xi, \eta), \xi \in [\alpha, \beta], \eta \in [\gamma, \delta]\}$
 $= \{(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) \in \mathbb{R}^2 : \xi \in [\alpha, \beta], \eta \in [\gamma, \delta]\}$;
- $J = \det \begin{bmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{bmatrix} (\xi, \eta) \neq 0$, za skoro sve $(\xi, \eta) \in [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$.

Tada je

$$\iint_D dA = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta f(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) |J| d\xi d\eta.$$

Napomenimo da ćemo kasnije dokazati ovu teoremu u opštem slučaju, odnosno za n -tostruki integral.

3.1.5 Dvostruki integral na neograničenom skupu

Neke nenegativne funkcije dve promenljive posmatrane čak i na celom \mathbb{R}^2 , imaju grafik ispod kojih je "beskonačno telo" konačne zapremine. Trivijalan primer je funkcija

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Zapremina "tela" ispod njenog grafika je 1. Zbog toga je prirodno posmatrati i dvostruki integral na neograničenom skupu u ravni.

Prvi korak bi bio skup $D = [0, +\infty) \times [0, 1]$. Njega na beskonačno male pravougaonike možemo podeliti na sledeći način. Realnu polupravu, odnosno pozitivni deo x -ose podelimo tačkama $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}_0$ a interval $[0, 1]$ standardno tačkama $y_j = \frac{j}{m}$, $j = 0, \dots, m$. Ako $m \rightarrow \infty$, onda i površine pravougaonika podela $R_{nj} = [n, n+1] \times \left[\frac{j}{m}, \frac{j+1}{m}\right]$ teže ka nuli. Stoga možemo definisati dvostruki integral na $D = [0, +\infty) \times [0, 1]$,

$$\iint_{[0, +\infty) \times [0, 1]} f dA = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^{\infty} f\left(n, \frac{j}{m}\right) \frac{1}{m}.$$

Drugi način za definisanje ovakvog integrala bi bio sledeći,

$$\iint_{[0, +\infty) \times [0, 1]} f dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{[0, n] \times [0, 1]} f dA. \quad (3.9)$$

Jasno je da u slučaju da je funkcija f neprekidna i ograničena na D , ove dve definicije postaju ekvivalentne. Naravno, ovakav integral ne mora da postoji čak i ako je funkcija f neprekidna i ograničena. Trivijalan primer je konstantna funkcija. No ako je f neprekidna i ograničena na D , u (3.9) možemo iskoristiti Fubinijevu teoremu i svesti ovakav integral na jedan određeni i jedan nesvojstveni integral,

$$\iint_{[0,+\infty) \times [0,1]} f \, dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \int_0^1 f(x, y) \, dy \, dx = \int_0^\infty \int_0^1 f(x, y) \, dy \, dx.$$

Jasno je da se na isti način može računati i integral po $D = [0, +\infty) \times [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Takođe i integral po $(-\infty, +\infty) \times [a, b]$ možemo računati na ovaj način, podelivši $(-\infty, +\infty) \times [a, b]$ na $(-\infty, 0] \times [0, 1] \cup [0, +\infty) \times [a, b]$.

Dalje, uvođenjem još jednog limesa možemo umesto intervala $[a, b]$ posmatrati realnu polupravu ili pravu. Tako dolazimo do dvostrukog integrala po celoj ravni neprekidne ograničene funkcije. U slučaju da nam je oblast integracije ceo \mathbb{R}^2 , preporučljivo je koristiti polarne koordinate, jer se tako integral po \mathbb{R}^2 svodi na integral oblika (3.9). Naime, \mathbb{R}^2 pomoću polarnih koordinata opisujemo kao $\mathbb{R}^2 = \{(\rho, \varphi) | \rho \in [0, \infty), \varphi \in [0, 2\pi]\}$.

Sledeći primer ilustruje primenu Fubinijeve teoreme i teoreme o smeni promenljivih.

Primer 77 Pokažimo da je $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \, dA = \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2} \, d\varphi \, d\rho = \pi.$$

3.2 Trostruki integral

Trostruki integral dobijamo kao direktno proširenje dvostrukog na funkcije tri promenljive i na oblast u \mathbb{R}^3 . Prirodno, i u ovom slučaju, najjednostavnija oblast je kvadar $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$. Kvadar B podelimo na male kvadre B_{ijk} tako što svaki od intervala $[a, b]$, $[c, d]$ i $[r, s]$ delimo standardno kao do sada izborom tačaka $x_i \in [a, b]$, $i = 1, \dots, n$, $y_j \in [c, d]$, $j = 1, \dots, m$ i $z_k \in [r, s]$, $k = 1, \dots, l$. Zapreminu malog kvadra B_{ijk} označićemo sa $\Delta B_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k = \Delta x \, \Delta y \, \Delta z = \Delta V$, za sve i, j, k . Pretpostavićemo, dakle da smo intervale $[a, b]$, $[c, d]$ i $[r, s]$ podelili na male intervale jednakih dužina, redom Δx , Δy , i Δz . Tada možemo definisati trostruki integral na sledeći način,

$$\iiint_B f \, dV := \lim_{n, m, k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(x_i^*, y_j^*, z_k^*) \, \Delta V,$$

gde je tačka (x_i^*, y_j^*, z_k^*) proizvoljna tačka kvadra B_{ijk} .

Dakle, trostruki integral definišemo kao i dvostruki, preko limesa sada trostruke Rimanove sume, stoga važe iste osobine kao kod dvostrukog integrala samo prilagođene trodimenzionalnim oblastima i funkcijama tri promenljive. Na primer, ako je $f \in C(B)$ (neprekidna na skupu B), onda njen trostruki integral postoji, tj. funkcija f je integrabilna na B . I trostruki integral je najlakše računati preko iteriranih integrala, tj. primenom Fubinijeve teoreme. Sada imamo šest redosleda integracije. Navešćemo dva od šest. Dakle, ako je funkcija f neprekidna na B , tada važi

$$\iiint_B f dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_r^s f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx = \int_a^b \left(\int_r^s \left(\int_c^d f(x, y, z) dy \right) dz \right) dx.$$

Takođe, Fubinijeva teorema važi i uz oslabljene uslove, ako je f ograničena i prekidna na najviše konačno mnogo glatkih površi i iterirani limesi postoje.

Primer 78 Neka je $B = [0, 1] \times [-1, 2] \times [0, 3]$, onda je

$$\iiint_B xyz^2 dV = \int_0^1 x \left(\int_{-1}^2 y \left(\int_0^3 z^2 dz \right) dy \right) dx = \frac{27}{4}.$$

I na proizvoljnom ograničenom skupu u \mathbb{R}^3 , trostruki integral definišemo kao i dvostruki, pomoću proširenja na proizvoljni kvadar koji sadrži taj skup nulom podintegralne funkcije. Preciznije, ako je $E \subset \mathbb{R}^3$ takav da je $0 < V(E) < +\infty$, gde je $V(E)$ zapremina skupa E , tada postoji kvadar $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s] \supset E$. Proširenje nulom je onda funkcija $F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in E \\ 0, & (x, y, z) \in B \setminus E \end{cases}$, pa trostruki integral po E definišemo kao

$$\iiint_E f(x, y, z) dV := \iiint_B F(x, y, z) dV.$$

3.2.1 Svodjenje trostrukog integrala na dvostruki

Ukoliko oblast integracije ima povoljan oblik, trostruki integral možemo rešavati kao jedan određeni i jedan dvostruki integral. To dobijamo opet kao posledicu definicije trostrukog integrala i Fubinijeve teoreme. "Povoljni oblici" oblasti integracije su sledeći:

- $E_1 = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$
- $E_2 = \{(x, y, z) \mid (y, z) \in D \subset \mathbb{R}^2, u(y, z) \leq x \leq v(y, z)\}$
- $E_3 = \{(x, y, z) \mid (z, x) \in D \subset \mathbb{R}^2, u(z, x) \leq y \leq v(z, x)\}$

Dakle, ako je funkcija f neprekidna na ograničenom skupu oblika E_1 , tada njen trostruki integral računamo kao

$$\iiint_{E_1} f(x, y, z) dV = \iint_D \left(\underbrace{\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z) dz}_{\text{određeni integral po } z} \right) dA.$$

Slično računamo i trostruki integral funkcije f neprekidne na skupu E_2 , odnosno E_3 .

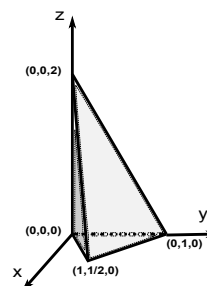
Jasno je da će trostruki integral jedinice po ograničenom telu $T \subset \mathbb{R}^3$ dati zapreminu tog tela,

$$V(T) = \iiint_T 1 dV.$$

Primer 79 Naći zapreminu tetraedra E ograničenog ravnima $x = 0$, $x = 2y$, $z = 0$ i $x + 2y + z = 2$. Pri rešavanju ovakvih zadataka, zgodno je skicirati dve slike, tetraedra E u prostoru i njegove projekcije na (x, y) -ravan, trougla D . Tada je

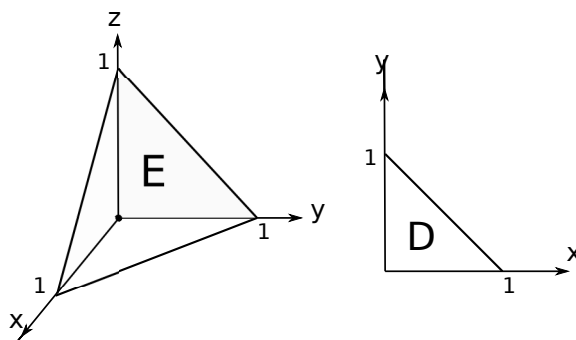
$$V(E) = \iiint_E 1 dV = \iint_D \left(\int_0^{2-x-2y} dz \right) dA = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2-x}{2}} (2-x-2y) dy dx = \frac{1}{3}.$$

Primetimo da smo zapreminu ovog tetraedra mogli izračunati i pomoću formule za računanje zapremine piramide.



Primer 80 Neka je E tetraedar ograničen ravnima $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z = 1$. Projekcija tetraedra E na (x, y) -ravan je trougao D , pa se skup E može zapisati u obliku

$$E = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$



Ako treba da izračunamo trostruki integral funkcije $f(x, y, z) = z$ po telu E , možemo ga svesti

na jedan određeni (po z) i jedan dvostruki (na D) integral na sledeći način,

$$\iiint_E z dV = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} z dz \right) dA = \iint_D \frac{(1-x-y)^2}{2} dA = \frac{1}{24}.$$

3.2.2 Cilindrične koordinate

Cilindrične koordinate koristimo za opisivanje tela koja se nalaze unutar nekog cilindra. Naime, sve tačke prostora koje se nalaze unutar cilindra projektuju se na bazu cilindra (ili na neki njen deo). Baza cilindra nalazi se u ravni, najčešće (x, y) -ravni, pa za njen opis možemo koristiti neke od 2D-koordinata, kao što su polarne ili eliptične. Treća promenljiva, na primer, z , čijoj je osi paralelna osa cilindra, ostaje nepromenjena.

Najčešće se koriste sledeće koordinate. Neka je data tačka $P(x, y, z)$ i njena projekcija na (x, y) -ravan $P'(x, y, 0)$. Ako promenljive x i y zamenimo polarnim ρ i φ , dobijamo sledeći opis tačaka $P'(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, 0)$ i $P(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$. Na taj način smo promenljive (x, y, z) zamenili sa (ρ, φ, z) .

Primer 81 Tačka sa koordinatama $(x, y, z) = (1, 1, 3)$ ima cilindrične koordinate $(\rho, \varphi, z) = (\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 3)$. Ako je tačka data cilindričnim koordinatama $(\rho, \varphi, z) = (2, \frac{2\pi}{3}, 1)$, Dekartove koordinate tačke su $(-1, \sqrt{3}, 1)$.

Kako smo upoznali tehniku svođenja trostrukog integrala na dvostruki, vidimo da su ove koordinate veoma korisne za računanje trostrukog integrala. Dakle, ako je

$$\iiint_T F(x, y, z) dV = \iint_D \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} F dz dA,$$

i ako D opišemo polarnim koordinatama, $D = \{(\rho, \varphi) | \rho \in [a, b], \varphi \in [\alpha, \beta]\}$, dobijemo da je $dA = \rho d\rho d\varphi$, tj. $dV = dz dA = \rho dz d\rho d\varphi$, odnosno

$$\iiint_T F(x, y, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_a^b \left(\int_{u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)}^{v(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)} F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz \right) \rho d\rho \right) d\varphi.$$

Primetimo da je Jakobijan preslikavanja $(x, y, z)(\rho, \varphi, z) = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$ isti kao kod polarnih koordinata, tj. $J = \rho$.

Primer 82 Pokažimo pomoću trostrukog integrala da je zapremina valjka jednaka $r^2 \pi H$, gde je r poluprečnik baze valjka, a H njegova visina. Smestimo centar jedne baze u koordinatni

početak, a druge u tačku $(0, 0, H)$. Tada je

$$V_{\text{valjka}} = \iiint_T dV = \iint_D \int_0^H dz dA = H \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho d\rho d\varphi = r^2 \pi H.$$

Takođe, ako centar lopte poluprečnika r smestimo u koordinatni početak, dobijemo da je

$$V_{\text{lopte}} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \left(\int_{-\sqrt{r^2-\rho^2}}^{\sqrt{r^2-\rho^2}} dz \right) \rho d\rho d\varphi = \frac{4}{3} r^3 \pi.$$

3.2.3 Sferne koordinate

Videli smo da se lopta, i delovi lopte, mogu opisati pomoću cilindričnih koordinata. Ipak prirodan način za opisivanje delova lopte je pomoću tzv. sfernih koordinata. Sfernim koordinatama loptu transformišemo u tzv. sferni paralelogram (kao što smo polarnim koordinatama krug transformisali u polarni pravougaonik).

Neka je data tačka $P(x, y, z)$ u prostoru. Ako je P koordinatni početak, opisaćemo je jednostavno sa $\rho = 0$. Dakle, prva sferna koordinata je $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i predstavlja rastojanje (u \mathbb{R}^3) tačke P od koordinatnog početka. Koordinatni početak O je, dakle, jedina tačka čija je prva sferna koordinata $\rho = 0$. Dalje, neka je tačka $P'(x, y, 0)$ projekcija tačke P na (x, y) -ravan. Druga sferna koordinata, φ , je ugao između pozitivnog dela x -ose i vektora $0\vec{P}'$. Pišemo $\varphi = \angle(\vec{x}^+, \vec{OP}')$. Treća koordinata $\theta = \angle(\vec{OP}', \vec{OP})$. Ovi uglovi su orijentisani, orijentacija se uzima gledano iz koordinatnog početka, dakle, bitno je koji je krak prvi a koji drugi. Vidimo da je $\rho \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ i $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Primer 83 Tačka $(0, 2\sqrt{3}, -2)$ se pomoću sfernih koordinata može predstaviti $(\rho, \varphi, \theta) = (4, \pi/2, -\pi/3)$. Ako je tačka data preko sfernih koordinata $(\rho, \varphi, \theta) = (2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$, to je ustvari tačka čije su Dekartove koordinate $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3})$. Ako se tačka nalazi na z osi, na primer, $(0, 0, 3)$, njene sferne koordinate su $(\rho, \varphi, \theta) = (3, 0, \frac{\pi}{2})$, dok $(0, 0, -3)$, ima sferne koordinate $(\rho, \varphi, \theta) = (3, 0, -\frac{\pi}{2})$.

Izvedimo sada formule za sferne koordinate. Iz pravouglog trougla $\triangle OP'P$ vidimo da je

$$\cos \theta = \frac{OP'}{OP} = \frac{\rho'}{\rho} \text{ i } \sin \theta = \frac{z}{\rho}$$

gde je $\rho' = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dalje, iz pravouglog trougla $\triangle OXP'$, gde je $X(x, 0, 0)$, imamo da je

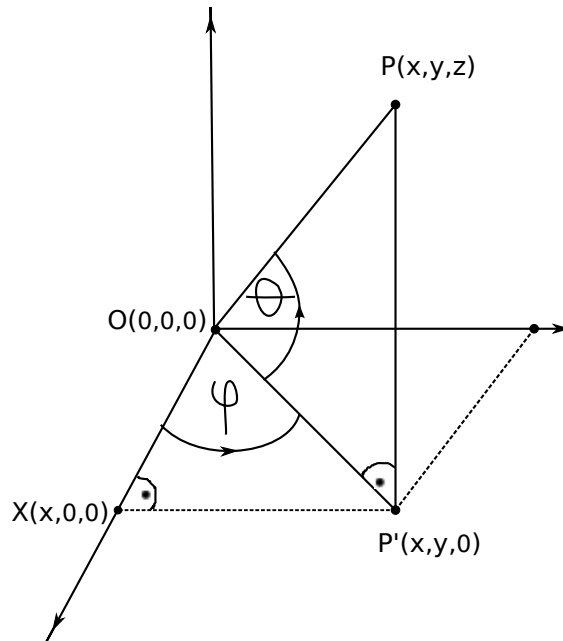
$$\cos \varphi = \frac{x}{\rho'} \text{ i } \sin \varphi = \frac{y}{\rho'},$$

odakle dobijamo da je

$$x = \rho' \cos \varphi = \rho \cos \varphi \cos \theta,$$

$$y = \rho' \sin \varphi = \rho \sin \varphi \cos \theta,$$

$$z = \rho \sin \theta.$$



Jakobijan preslikavanja $(x, y, z)(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \theta)$ je $J = \rho^2 \cos \theta$, i skoro svuda je različit od nule. Tačnije, Jakobijan je jednak nuli samo u tačkama z -ose, što je samo jedna prava zapremine nula.

Ako hoćemo da primenimo smenu promenljivih $(x, y, z) \mapsto (\rho, \varphi, \theta)$ na trostruki integral, korišćićemo sledeću formulu,

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \iiint_{T_{\rho\varphi\theta}} f(\rho \cos \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho^2 \cos \theta d\rho d\varphi d\theta, \quad (3.10)$$

gde je $T_{\rho\varphi\theta}$ telo T opisano preko sfernih koordinata. Formula (3.10) može se izvesti na sličan način kao formula za smenu polarnim koordinatama u dvostrukom integralu, samo se umesto površine kružnog isečka računa zapremina loptinog isečka. Ista formula je ustvari specijalan slučaj teoreme o smeni promenljivih u višestrukome integralu koju ćemo dati kasnije.

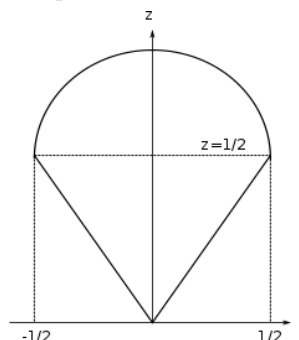
Primer 84 Izračunajmo zapreminu tela iznad konusa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ i ispod sfere $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Data sfera ima centar u tački $(0, 0, 1/2)$ i seče konus u ravni $z = \frac{1}{2}$. Kada u jednačinu konusa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ uvrstimo smenu (3.10) dobijemo da su tačke konusa $\rho = 0$, odnosno koordinatni početak, i $\theta = \frac{\pi}{4}$. Kada (3.10) uvrstimo u jednačinu sfere, dobijemo da je $\rho = 0$ ili $\rho = \sin \theta$.

Dakle, traženo telo se preko sfernih koordinata može opisati kao skup

$$T = \left\{ (\rho, \varphi, \theta) \mid \rho \in [0, \sin \theta], \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right], \varphi \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Stoga je,

$$V(T) = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin \theta} \rho^2 \cos \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi = \frac{\pi}{8}.$$



Zapreminu ovog tela možemo izračunati i geometrijski kao zbir zapremine kupe i polulopte, ili pomoću cilindričnih koordinata. Primitimo da je rub ovog tela obrtna površ koja se dobija obrtanjem konture na slici oko z -ose.

3.3 Višestruki integral

Videli smo da određeni integral u prvom koraku definišemo na intervalu, dvostruki na pravougaoniku, a trostruki na kvadru. Pravougaonik možemo zvati dvodimenzionalni interval, ili skraćeno 2D-interval, a paralelepiped 3D-interval. Tako dolazimo do uopštenja pojma intervala na n dimenzija, tzv. n -dimenzionalni interval,

$$I^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2], \dots, x_n \in [a_n, b_n]\},$$

gde su $a_i < b_i$, $i = 1, \dots, n$ dati realni brojevi. Za $n > 3$, ovakav interval više ne možemo nacrtati, no možemo ga posmatrati kao oblast integracije n -tostrukog integrala.

Višestruki (n -tostruki) integral na n -dimenzionalnom intervalu I^n , definiše se analogno kao dvostruki i trostruki, samo pomoću n -tostruke Rimanove sume. n -dimenzionalni interval, I^n , delimo na male n -dimenzionalne intervale tako što delimo svaki od (jednodimenzionalnih) intervala $[a_i, b_i]$. Umesto dužine malih intervala (kod određenog), površine malih pravougaonika podele (kod dvostrukog), odnosno zapremine malih kvadara (kod trostrukog integrala), sada uzimamo tzv. *meru* malih n -dimenzionalnih intervala. Mera intervala I^n je

$$m(I^n) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Kao što smo trostruki integral svodili na dvostruki, istom tehnikom možemo n -tostruki računati kao jedan određeni i jedan $(n - 1)$ -tostruki integral. Naime, ako je funkcija $f =$

$f(x_1, \dots, x_n)$ neprekidna na I^n , onda je

$$\begin{aligned} \int_{I^n} f(x_1, \dots, x_n) dI^n &= \int_{I^{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) dI^{n-1} = \dots \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) dx_{n-1} \dots dx_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

gde je $I^{n-1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2], \dots, x_{n-1} \in [a_{n-1}, b_{n-1}]\}$ $(n-1)$ -dimenzionalni interval. U jednakostima iz (3.11) smo koristili Fubinijevu teoremu za višestruki integral. Tvrdjenje Fubinijeve teoreme dobijamo direktnim uopštenjem sa dvostrukog i trostrukog na višestruki integral. Ako je funkcija $F = F(x_1, \dots, x_n)$ takva da je $\partial_{x_n} F = f$ na I^n , onda iz (3.11) i Njutn-Lajbnicove formule za određeni integral imamo da je

$$\int_{I^n} f(x_1, \dots, x_n) dI^n = \int_{I^{n-1}} \left(F(x_1, \dots, x_{n-1}, b_n) - F(x_1, \dots, x_{n-1}, a_n) \right) dI^{n-1}.$$

Višestruki integral na proizvoljnom ograničenom skupu u \mathbb{R}^n možemo definisati analogno kao dvostruki i trostruki. Skup A je ograničen u \mathbb{R}^n ako postoji n -dimenzionalni interval I^n koji ga sadrži. Mera skupa A u \mathbb{R}^n će precizno biti definisana na naprednijim kursovima matematičke analize. Napomenimo ovde da je ona uopštenje dužine, površine, odnosno zapremine i da je svakako $m(A) \leq m(I^n)$, jer je $A \subset I^n$. Dakle, podintegralna funkcija se proširi nulom na $I^n \setminus A$, i njen integral na A se definiše kao integral proširenja na I^n .

Ako se u skup A može upisati neki drugi n -dimenzionalni interval J^n , onda je $m(A) \geq m(J^n) > 0$, pa kažemo da skup A nije mere nula. Skup $B \subset \mathbb{R}^n$ je mere nula ako se u njega ne može upisati ni jedan n -dimenzionalni interval. Oblast integracije je najčešće ograničen skup koji nije mere nula, tj. onaj koji se može upisati i u koji se može upisati n -dimenzionalni interval. Tada pišemo $0 < m(A) < +\infty$.

Primer 85 Izračunajmo meru n -dimenzionalnog tela

$$T_n := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \right\}.$$

Za $n = 2$, T^2 je trougao sa temenima u tačkama $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$, čija je površina jednaka $\frac{1}{2}$.

U slučaju $n = 3$, T^3 je tetraedar sa temenima u tačkama $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, i $(0, 0, 1)$, čija je zapremina jednaka $\frac{1}{6}$.

Možemo posmatrati i jednodimenzionalni slučaj u kom dobijemo zatvoreni interval $[0, 1]$ dužine

jednake 1. Na osnovu ova tri dobijena broja možemo pretpostaviti da je $m(T^n) = \frac{1}{n!}$. Pre izračunavanja $m(T^n)$, radi vežbanja se preporučuje izračunati i gore pomenute površinu trougla T^2 i zapreminu tetraedra T^3 pomoću dvostrukog, odnosno trostrukog integrala. Izračunajmo sada $m(T^n)$ za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} m(T^n) &= \int_{T^n} dx_n \dots dx_1 = \int_{T^{n-1}} \left(\int_{x_n=0}^{x_n=1-\sum_{i=1}^{n-1} x_i} dx_n \right) dx_{n-1} \dots dx_1 = \\ &= \int_{T^{n-1}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) dx_{n-1} \dots dx_1 = \dots = \\ &= \frac{1}{2} \int_{T^{n-2}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-2} x_i \right)^2 dx_{n-2} \dots dx_1 = \dots = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \int_{T^{n-3}} \left(1 - \sum_{i=1}^{n-3} x_i \right)^3 dx_{n-3} \dots dx_1 = \dots = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n-2} \int_{T^2} \left(1 - \sum_{i=1}^2 x_i \right)^{n-2} dx_2 = \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

3.3.1 Smena promenljivih u višestrukome integralu

Kao i kod dvostrukog i trostrukog integrala i ovde možemo koristiti smenu promenljivih. Ako imamo promenljive $(x_1, \dots, x_n) = \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, i hoćemo da uvedemo nove promenljive $(u_1, \dots, u_n) = \vec{u} \in \mathbb{R}^n$, mi ustvari radimo sa vektorskom funkcijom, odnosno, transformacijom

$$\vec{T}(\vec{u}) = \left(x_1(u_1, \dots, u_n), \dots, x_n(u_1, \dots, u_n) \right), \quad \vec{T} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n,$$

gde je A data oblast integracije, $0 < m(A) < +\infty$, a $B \subset \mathbb{R}^n$ je takav da važi

$$\vec{T}(B) = A, \quad (x_1, \dots, x_n) \in A, (u_1, \dots, u_n) \in B.$$

Dakle, B je ista oblast integracije samo opisana preko koordinata (u_1, \dots, u_n) . Prema tome,

$$\vec{T} : B \rightarrow A, \quad \vec{T}(\vec{u}) = \vec{x}.$$

Prirodno je da, osim što koordinate \vec{x} možemo izraziti eksplicitno kao funkciju od \vec{u} , i obrnuto možemo izraziti eksplicitno \vec{u} kao funkciju od \vec{x} . Zbog toga je potrebno da je preslikavanje $\vec{T} : B \rightarrow A$ bijekcija, odnosno postoji njeno inverzno preslikavanje

$$\vec{T}^{-1} : A \rightarrow B, \quad \vec{T}^{-1}(\vec{x}) = \vec{u}.$$

Za izračunavanje diferencijala promenljivih nam trebaju i parcijalni izvodi, stoga je potrebno i da \vec{T} bude klase $C^1(B)$, što znači da je \vec{T} neprekidna, diferencijabilna i parcijalni izvodi su joj neprekidi na nekom otvorenom skupu u \mathbb{R}^n koji sadrži B . Definišimo sada precizno regularnu smenu promenljivih.

Definicija 86 *Smena (transformacija) promenljivih u višestrukome integralu po oblasti $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 < m(A) < +\infty$, je*

$$C^1\text{-bijekcija } \vec{T} : B \rightarrow A,$$

gde je $B = \vec{T}^{-1}(A)$. To znači da je vektorska funkcija \vec{T} bijekcija i klase $C^1(B)$.

Kako su \vec{T} i \vec{T}^{-1} međusobno inverzna preslikavanja, to znači da je

$$\begin{aligned} \vec{T}^{-1}(\vec{T}(\vec{u})) &= \vec{T}^{-1}(\vec{x}) = \vec{u}, & \vec{u} \in B \\ \vec{T}(\vec{T}^{-1}(\vec{x})) &= \vec{T}(\vec{u}) = \vec{x}, & \vec{x} \in A, \\ \vec{T}^{-1} \circ \vec{T} &= \vec{I}_B \quad \text{i} \quad \vec{T} \circ \vec{T}^{-1} = \vec{I}_A, \end{aligned} \tag{3.12}$$

gde je \vec{I}_A identičko preslikavanje skupa A ($\vec{I}_A(\vec{x}) = \vec{x}$, za sve $\vec{x} \in A$), a \circ je oznaka za kompoziciju preslikavanja.

Primenimo teoremu o izvodu kompozicije preslikavanja (o izvodu složene funkcije) na (3.12) i dobićemo da je

$$D\vec{T}^{-1} \cdot D\vec{T} = D\vec{I}_B = I_n \quad \text{i} \quad D\vec{T} \cdot D\vec{T}^{-1} = D\vec{I}_A = I_n, \tag{3.13}$$

gde je \cdot množenje matrica, a I_n je jedinična dijagonalna matrica dimenzija $n \times n$. Iz (3.13) vidimo da su matrice $D\vec{T}^{-1}$ i $D\vec{T}$ međusobno inverzne, što znači da su regularne, odnosno da su im determinante različite od nule. Determinanta matrice $D\vec{T}$ je ustvari Jakobijan preslikavanja \vec{T} , pa vidimo da za regularnu smenu promenljivih važi da je

$$J = \det(D\vec{T}) = \left| \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right| \neq 0.$$

Teorema 87 *Neka je transformacija $\vec{T} : B \rightarrow A$, C^1 -bijekcija, $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 < m(A) < +\infty$ i $B = \vec{T}^{-1}(A)$ i neka je funkcija f neprekidna na A . Tada je*

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n) d\vec{x} = \int_B f(\vec{T}(\vec{u})) |\det(D\vec{T})| d\vec{u}.$$

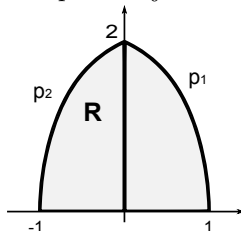
Vidimo da se uslovi Teoreme 87 mogu i oslabiti. Naime, umesto da je $\vec{T} : B \rightarrow A$, C^1 -bijekcija, možemo tražiti da je $|\det(D\vec{T})| > 0$, skoro svuda na B , odnosno da je skup tačaka u B u kojima je Jakobijan jednak nuli, mere nula (u njega se ne može upisati ni jedan n -dimenzionalni interval).

Primer 88 Izračunajmo $\iint_R y \, dA$, gde je R oblast u ravni ograničena x -osom i parabolama $p_1 : y^2 = 4 - 4x$ i $p_2 : y^2 = 4 + 4x$, pri čemu je $y \geq 0$, smenom promenljivih $x = u^2 - v^2$ i $y = 2uv$.

Jakobijan preslikavanja $(x, y) = (u^2 - v^2, 2uv)$

je $J = 4u^2 + 4v^2$. Kako je $y \geq 0$, vidimo da

su u i v istog znaka.



Kad uvrstimo smenu u jednakost $y^2 = 4 - 4x$, dobijemo da je $u = \pm 1$, a kada uvrstimo u $y^2 = 4 + 4x$, dobijemo da je $v = \pm 1$. Pretpostavimo da su $u, v \geq 0$. Tada se R preko u, v može opisati kao $u, v \in [0, 1]$. U slučaju da su $u, v \leq 0$ onda je $R = [-1, 0] \times [-1, 0]$. Dakle,

$$\iint_R y \, dA = \int_0^1 \int_0^1 2uv(4u^2 + 4v^2) \, du \, dv = 2.$$

Glava 4

Krivolinijski integral

4.1 Vektorsko polje

U ovom i narednom poglavlju, osim skalarnih, bavićemo se i vektorskim funkcijama više promenljivih,

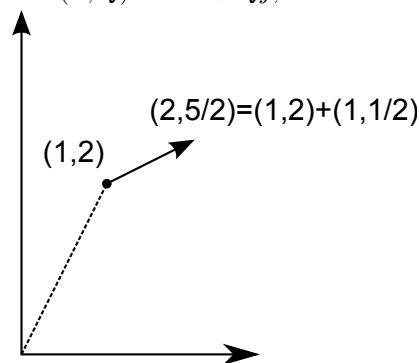
$$\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{F} = (F_1, \dots, F_m), \quad F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, m,$$

koje zovemo i *vektorska polja*. Skalarnе funkcije $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, zovemo komponentne funkcije ili komponente vektorskog polja \vec{F} . Da bismo razlikovali vektorske od skalarnih funkcija, koristimo oznaku \vec{F} za vektorsko polje (strelicu ne stavljamo kod skalarnih funkcija).

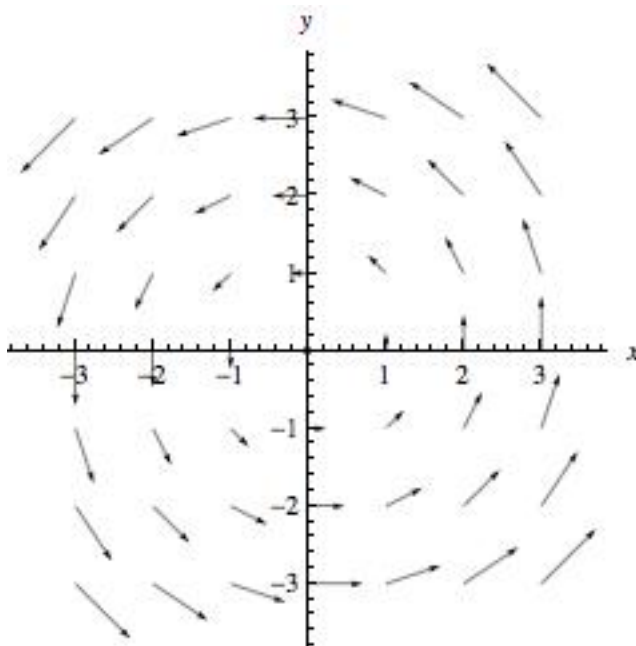
Primer 89 • Ako $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, onda najčešće pišemo $\vec{F} = (P, Q) = P\vec{i} + Q\vec{j}$, odnosno

$$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}.$$

Grafički, polje \vec{F} možemo prikazati u ravni tako što vektor $\vec{F}(x, y)$ crtamo iz tačke (x, y) . Na primer, ako je $\vec{F}(1, 2) = (1, 1/2)$, to ćemo prikazati tako što nacrtamo vektor $(1, 1/2)$ transliran u tačku $(1, 2)$.



• Ako je $\vec{F}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$, ovo vektorsko polje možemo prikazati kao na sledećoj slici:

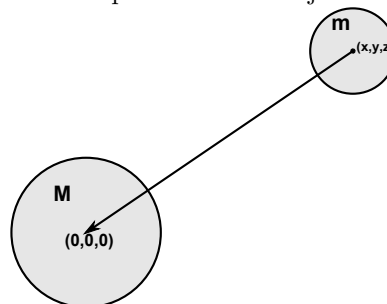


Primetimo da ovo polje zadovoljava jednakost $(x, y) \cdot \vec{F}(x, y) = 0$, što znači da je vektor $\vec{F}(x, y)$ normalan na vektor tačke (x, y) . Ta jednakost, naravno, ne važi za svako vektorsko polje.

- Značajan primer vektorskog polja je tzv. *polje gradijenta* skalarne funkcije $f = f(x, y)$, $\vec{F} = \nabla f = (f_x, f_y)$. Bitno je primetiti da je polje gradijenta skalarne funkcije ortogonalno na linije nivoa iste funkcije.

Primer 90 Jedan važan primer trodimenzionalnog vektorskog polja je *gravitaciono polje*. Naime, posmatrajmo dva tela masa M i m , pri čemu je $M > m$. Gravitaciona sila je usmerena od jednog ka drugom telu. Posmatrajmo silu \vec{G} kojom telo veće mase M privlači telo manje mase m .

Intenzitet gravitacione sile je proporcionalan masama M i m , a obrnuto proporcionalan kvadratu rastojanja između ta dva tela, dakle $|\vec{G}| = \frac{mM}{r^2}G$, gde je G univerzalna gravitaciona konstanta.



Ako u centar tela mase M stavimo koordinatni početak, a centar tela mase m ima koordinate (x, y, z) , onda je $\vec{G} = \frac{mMG}{r^2} \frac{-(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -mMG \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3}$.

Primetimo da za gravitaciono polje \vec{G} važi $\vec{G} = \nabla g$, gde je skalarne funkcija $g(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$. Zbog ove osobine kažemo da je gravitaciono polje konzervativno u skladu sa sledećom definicijom.

Definicija 91 Za vektorsko polje \vec{F} kažemo da je konzervativno, ako postoji skalarna funkcija f takva da je $\vec{F} = \nabla f$. Skalarna funkcija f se u tom slučaju zove funkcija potencijala, ili potencijal polja \vec{F} .

4.2 Krivolinijski integral skalarne funkcije

4.2.1 Parametrizacija krive

Već smo pričali o parametarskom obliku krive. Rekli smo da krivu u ravni predstavljamo vektorskom funkcijom jedne promenljive $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$,

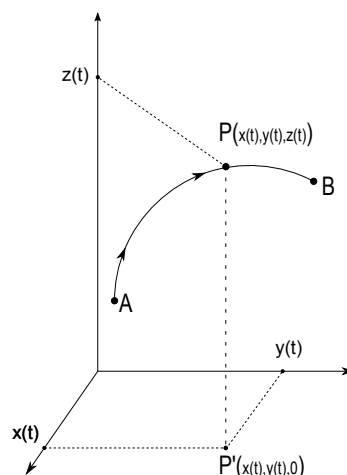
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b],$$

gde su jedinični vektori $\vec{i} = (1, 0)$ i $\vec{j} = (0, 1)$.

Slično, kriva u prostoru se može predstaviti vektorskom funkcijom jedne promenljive $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

pri čemu su jedinični vektori u \mathbb{R}^3 , $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ i $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Vektorsku funkciju \vec{r} zovemo *parametrizacija* krive, a promenljivu t *parametar*.

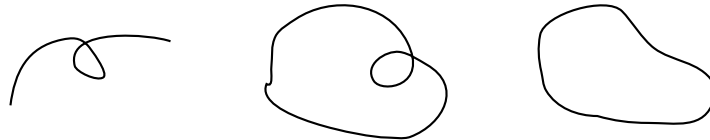


Definicija 92 • Za parametrizaciju $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ kažemo da je *regularna*, ako je preslikavanje $\vec{r}: [a, b] \rightarrow C$, $C \subset \mathbb{R}^3$, C^1 -bijekcija.

- Ako kriva ima regularnu parametrizaciju, kažemo da je kriva *glatka*.
- Ako parametar $t \in [a, b]$, onda $\vec{r}(a)$ daje koordinate početne tačke krive, $A(x(a), y(a), z(a))$. Analogno, $\vec{r}(b)$ daje koordinate krajnje tačke krive, $B(x(b), y(b), z(b))$.
- Kada odredimo početnu, odnosno krajnju tačku krive, odredili smo i njenu *orijentaciju*. Kažemo da je kriva C orijentisana od tačke A ka tački B . Na grafiku krive orijentaciju prikazujemo strelicom kao na prethodnoj slici. Ako se početna i krajnja tačka krive poklapaju, tada kažemo da je kriva *zatvorena*. U tom slučaju koristimo pojmove pozitivno i negativno orijentisana kriva. Kažemo da je zatvorena kriva *pozitivno orijentisana*, ako

je orijentisana suprotno od kretanja kazaljke na satu (gledano iz koordinatnog početka). Inače kažemo da je negativno orijentisana.

- Ako se kriva samopreseca u nekoj tački $D(\alpha, \beta, \gamma)$, to znači da postoje dve različite vrednosti parametra t , $a \leq c < d \leq b$, takve da je $\vec{r}(c) = \vec{r}(d) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Tačka D se u tom slučaju zove *samopresečna tačka*. Ako zatvorena kriva nema samopresečnih tačaka, kažemo da je ona *kontura*. Krivu koja nema samopresečnih tačaka zovemo *prosta kriva*.



Prvi crtež sleva predstavlja nezatvorenu krivu sa jednom samopresečnom tačkom, drugi zatvorenu krivu koja nije kontura, jer nije prosta, a na trećoj slici je skicirana jedna kontura, tj. zatvorena prosta kriva.

Primetimo da ako je parametrizacija \vec{r} regularna, tada je $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$ za sve $t \in (a, b)$. Naime, ako je preslikavanje $\vec{r} \in C^1([a, b])$ to znači da ima prvi izvod i da je $\vec{r}' = (x', y', z')$ neprekidna vektorska funkcija. Dodatno, uslov $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, $t \in (a, b)$, obezbeđuje injektivnost preslikavanja \vec{r} .

Injektivnost preslikavanja \vec{r} nam garantuje da kriva nema samopresečnih tačaka. Međutim, ako kriva ima, na primer, jednu samopresečnu tačku, po njoj se može integraliti. Stoga u definiciji krivolinijskog integrala možemo oslabiti uslov regularnosti krive. Na primer, ako je za $a \leq c < d \leq b$, $\vec{r}(c) = \vec{r}(d)$, onda krivu C možemo podeliti na uniju dve krive $C = C_1 \cup C_2$, gde tačke krive C_1 dobijamo za vrednosti parametra $t \in [a, d]$, a tačke krive C_2 za vrednosti parametra $t \in [d, b]$. Ako je to jedina samopresečna tačka krive C , onda C_1 i C_2 nemaju samopresečnih tačaka. Ako su C_1 i C_2 glatke krive, C je po delovima glatka. Analogno problem možemo rešiti i ako kriva ima konačno mnogo samopresečnih tačaka, što znači da je uslov injektivnosti narušen za konačno mnogo vrednosti parametra t . Tada kažemo da je preslikavanje $\vec{r}: [a, b] \rightarrow C$ skoro svuda injektivno.

Dakle, kriva po kojoj integralimo treba da bude: po delovima glatka, u konačno mnogo tačaka može da se naruši uslov "1-1", i u konačno mnogo tačaka može da važi $\vec{r}'(t) = \vec{0}$.

4.2.2 Integral po glatkoj krivoj

Podelom intervala parametra $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, kao kod određenog integrala, glatku krivu C sa parametrizacijom $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, delimo na n lukova l_i , $i = 1, \dots, n$. Tačke i -tog luka l_i , odgovaraju vrednosti parametra $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Sa Δl_i obeležićemo dužinu luka l_i . Ako

je skalarna funkcija f definisana u tačkama krive C , onda je kompozicija $f(\vec{r}(t)) = (f \circ \vec{r})(t)$ skalarna funkcija jedne promenljive definisana na intervalu $[a, b]$. Krivolinijski integral skalarne funkcije f duž glatke krive C definišemo preko Rimanovih suma na sledeći način:

$$\int_C f(x, y) dl := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\vec{r}(t_i^*)) \Delta l_i, \quad (4.1)$$

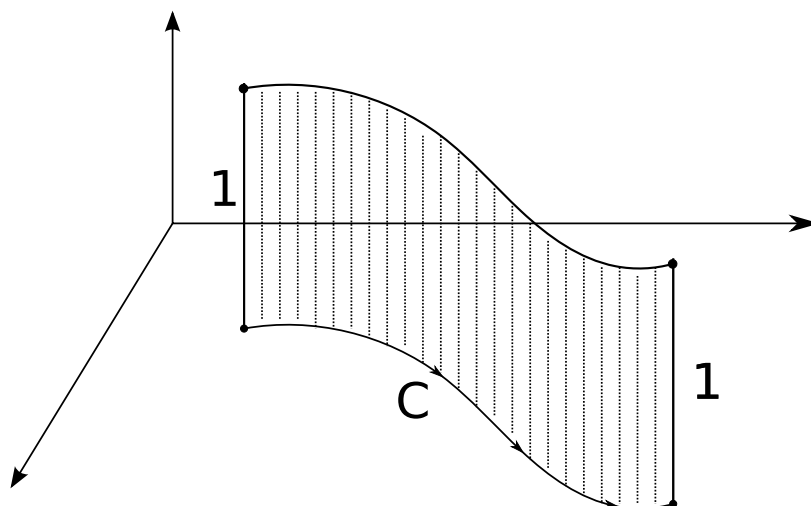
gde su t_i^* proizvoljno birane tačke intervala $[t_{i-1}, t_i]$. Ukoliko je kriva C po delovima glatka, onda je $C = C_1 \cup \dots \cup C_k$, $k \in \mathbb{N}$, gde su C_i , $i = 1, \dots, k$ glatke disjunktne krive, pa integral po ovakvoj krivoj računamo tako što saberemo integrale po glatkim krivim C_i , $i = 1, \dots, k$, odnosno

$$\int_C f(x, y) dl = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} f(x, y) dl$$

Ako je kriva C ravanska, iz prethodnog kursa analize znamo da se dužina luka krive C računa po formuli,

$$l = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt =: \int_C dl,$$

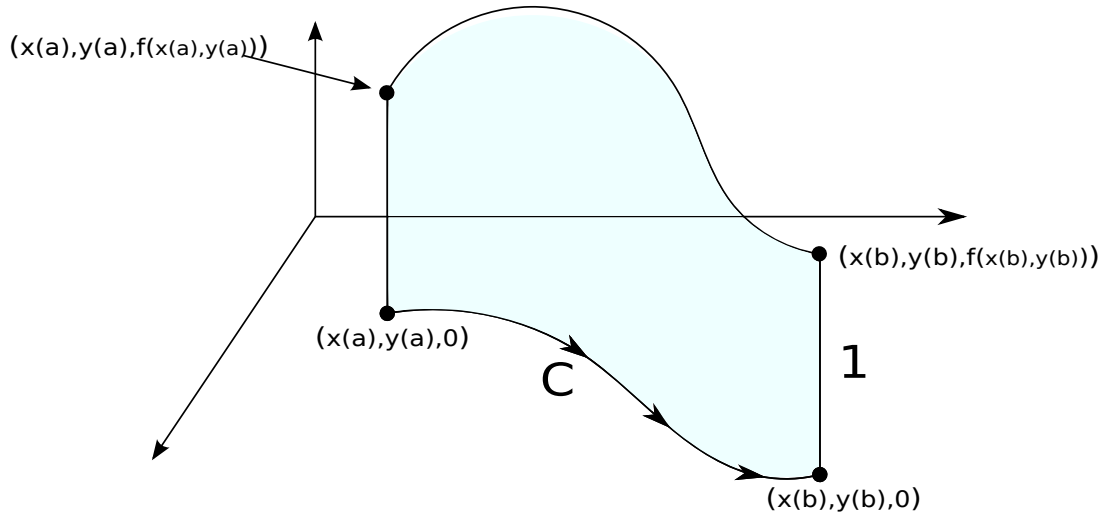
što možemo interpretirati kao krivolinijski integral jedinice (konstantne funkcije $f(x, y) = 1$) po krivoj C . Preciznije to bi bila površina površi dobijene "prevlačenjem" krive C u (x, y) -ravni na visinu 1 paralelno sa z -osom, kao na sledećoj slici:



Površina ove površi je numerički jednaka dužini krive C .

U skladu sa pomenutom interpretacijom, krivolinijski integral nenegativne skalarne funkcije

f bi se mogao interpretirati kao površina sledeće površi:



Prirodna parametrizacija krive (po dužini luka)

Krivolinijski integral definisan sa (4.1) zovemo još i integral po dužini luka krive. Sama oznaka dl upućuje na takav naziv (od engleske reči "length"). Definišimo sada funkciju dužine luka krive. Neka je početna tačka krive $\vec{r}(a)$ fiksirana. Dužinu luka krive C od tačke $\vec{r}(a)$ do tačke $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$ računamo kao

$$l(t) := \int_a^t \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds, \quad t \in [a, b].$$

Na taj način smo dobili funkciju koja zavisi od $t \in [a, b]$. Ako je kriva C glatka, definisanu funkciju možemo diferencirati, pa dobijemo da je

$$\frac{dl}{dt} = l'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2},$$

odnosno da je

$$dl = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt,$$

što zovemo diferencijal luka krive. Kada to povežemo sa Definicijom (4.1) dobijemo da je

$$\int_C f(x, y) dl = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt.$$

Precizno, ovu formulu izvodimo kao što smo izveli formulu za dužinu luka na prethodnom kursu iz analize.

Primer 93 Izračunajmo integral funkcije $f(x, y) = 2 + x^2y$ duž gornje polukružnice jedinične kružnice u ravni. Gornja polukružnica jedinične kružnice ima parametrizaciju $\vec{r}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\varphi \in [0, \pi]$, stoga je

$$\int_C (2 + x^2y) dl = \int_0^\pi (2 + \cos^2 \varphi \sin \varphi) \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} d\varphi = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

Primetimo da, ako imamo krivu $C = C_1 \cup C_2$, gde su C_1 i C_2 glatke krive date parametrizacijom \vec{r}_1 , odnosno \vec{r}_2 , takve da je dužina $C_1 \cap C_2$ nula, onda se integral po C može računati kao zbir integrala po C_1 i C_2 .

Krivolinijski integral po jednoj promenljivoj

Ponekad je potrebno integraliti samo po jednoj promenljivoj, na primer, x . Takav "parcijalni" krivolinijski integral dobijamo tako što u Definiciji (4.1) Δl_i zamenimo sa $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Pri tom vodimo računa da je $x = x(t)$ i $dx/dt = x'(t)$, pa dobijemo da je *krivolinijski integral po x* definisan na sledeći način,

$$\int_C f(x, y) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\vec{r}(t_i^*)) \Delta x_i = \int_a^b f(x(t), y(t)) x'(t) dt.$$

Analogno, *krivolinijski integral po y* je definisan kao

$$\int_C f(x, y) dy := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\vec{r}(t_i^*)) \Delta y_i = \int_a^b f(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

Ova dva integrala često se pojavljuju zajedno i tada formalno pišemo

$$\int_C f(x, y) dx + \int_C g(x, y) dy =: \int_C f dx + g dy.$$

Krivolinijski integral po krivoj u prostoru

Ako je kriva C prostorna, njena parametrizacija je funkcija $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. Ako je parametrizacija regularna, važi ista formula kao i za ravansku krivu, tj.

$$\int_C f(x, y, z) dl = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt,$$

pri čemu je sada $|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$. Analogno se definišu i (parcijalni) krivolinijski integrali po x , y , odnosno z .

Primer 94 Izračunajmo integral funkcije $f(x, y, z) = y \sin z$ duž jednog luka heliksa: $x = \cos t$,

$y = \sin t$, $z = t$, $t \in [0, 2\pi]$. Imamo da je

$$\int_C y \sin z \, dl = \int_0^{2\pi} \sin t \sin t \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} \, dt = \sqrt{2}\pi.$$

Možemo da zaključimo sledeće:

- Ako je C glatka kriva sa regularnom parametrizacijom $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a, b]$ i f skalarna funkcija tri promenljive neprekidna na C , onda je

$$\int_C f \, dl = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt = \int_a^b (f \circ \vec{r})(t) |\vec{r}'(t)| \, dt.$$

- Ako je C po delovima glatka kriva, odnosno ako je $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$, gde su C_i , $i = 1, \dots, k$, glatke krive takve da je za $i \neq j$, $C_i \cap C_j$ dužine nula, onda je

$$\int_C f \, dl = \sum_{i=1}^k \int_{C_i} f \, dl.$$

- Ovakav integral ima više naziva: *krivolinijski integral skalarne funkcije*, *krivolinijski integral po dužini luka krive* ili *krivolinijski integral prve vrste*.

4.3 Krivolinijski integral vektorskog polja

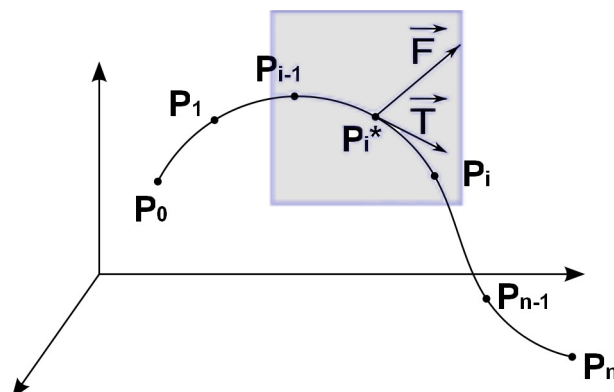
Ako želimo da integralimo vektorsku funkciju $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ po glatkoj prostornoj krivoj C , pitamo se šta bi bio integral funkcije \vec{F} po C . Odgovor tražimo u fizici.

Znamo da ako konstantna sila \vec{F} deluje na pravolinijskom putu od tačke P do tačke Q , njen rad računamo kao skalarni proizvod (vektora) sile i vektora pomeranja, \vec{PQ} ,

$$W = \vec{F} \cdot \vec{PQ}.$$

Sada, neka vektor sile neprekidno zavisi od tačke u prostoru na koju sila deluje, tj. neka je $\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ neprekidno polje (funkcija) sile, a neka deluje na česticu koja vrši krivolinijsko kretanje po glatkoj krivoj C sa parametrizacijom $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$. Podelimo krivu C na n lukova l_i , $i = 1, \dots, n$, tako što ćemo podeliti interval $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ (kako je parametrizacija bijekcija, svakoj tački krive odgovara jedna tačka intervala i

obratno). Označimo sa P_i tačke na krivoj C koje odgovaraju vrednosti parametra t_i , $i = 0, \dots, n$.



Dakle, tačke i -tog luka l_i , odgovaraju vrednosti parametra $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Sa Δl_i obeležićemo dužinu luka l_i , a $P_i^* = \vec{r}(t_i^*)$, $t_i^* \in [t_{i-1}, t_i]$, će biti proizvoljna tačka luka l_i , $P_i^* \in l_i$. Neka je $\vec{T} = \vec{T}(t_i^*)$ jedinični vektor tangente u tački $\vec{r}(t_i^*)$, odnosno u tački P_i^* , a $\vec{F} = \vec{F}(r(t_i^*))$. Rad sile \vec{F} duž putanje l_i , u oznaci W_i , aproksimiraćemo na sledeći način

$$W_i \approx \vec{F} \cdot \vec{T} \Delta l_i,$$

tj. radom konstantne sile $\vec{F}_i = \vec{F}(r(t_i^*))$ po pravolinijskoj putanji u smeru tangentskog vektora \vec{T}_i , dužine Δl_i . Jasno je da što je dužina luka l_i manja to je ova aproksimacija bolja odnosno približnija. Dakle, umesto luka od tačke P_{i-1} do tačke P_i uzećemo duž iste dužine ($l_i \approx \vec{T} \Delta l_i$), i pretpostavićemo da je sila u svakoj tački luka l_i jednaka onoj u tački P_i^* ($\vec{F}(\vec{r}(t)) \approx \vec{F}(\vec{r}(t_i^*))$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$). Kad saberemo sve W_i dobijamo ukupni rad na celoj putanji C , dakle

$$W = \sum_{i=1}^n W_i \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(P_i^*) \cdot \vec{T}(t_i^*) \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \left((\vec{F} \circ \vec{r}) \cdot \vec{T} \right) (t_i^*) \Delta l_i.$$

Primetimo da je $(\vec{F} \circ \vec{r}) \cdot \vec{T}$ skalarna funkcija, i da kada $n \rightarrow \infty$ onda i $\Delta l_i \rightarrow 0$, pa koristeći definiciju krivolinijskog integrala skalarne funkcije zaključujemo da je

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left((\vec{F} \circ \vec{r}) \cdot \vec{T} \right) (t_i^*) \Delta l_i = \int_C \left((\vec{F} \circ \vec{r}) \cdot \vec{T} \right) (t) dl.$$

Dalje, kako je $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ i $dl = |\vec{r}'(t)| dt$, dobijamo da je

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt =: \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Ovim smo definisali krivolinijski integral vektorske funkcije \vec{F} po krivoj C sa regularnom parametrizacijom $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$.

Ako je $\vec{F} = (P, Q, R)$, a $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, dobijamo još jedan zapis krivolinijskog integrala vektorske funkcije,

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (P x' + Q y' + R z') dt = \int_C P dx + Q dy + R dz.$$

Uvešćemo oznaku $-C$ za krivu koju čini isti skup tačaka kao krivu C sa regularnom parametrizacijom $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, samo je kriva $-C$ suprotno orijentisana, tj. parametrizacija krive $-C$ je $\vec{r}_1(t) = \vec{r}(t)$, $t \in [b, a]$. Primetimo da je

$$\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_b^a \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Primer 95 Izračunajmo krivolinijski integral funkcije $\vec{F} = (xy, y, z)$ duž krive C koja je deo grafika funkcije $y = x^2$ u (x, y) -ravni od tačke $(0, 0)$ do tačke $(1, 1)$.

Kriva C ima parametrizaciju $\vec{r}(t) = (t, t^2, 0)$, $t \in [0, 1]$, pa je $\vec{r}'(t) = (1, 2t, 0)$, te je

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 (t^3, t^2, 0) \cdot (1, 2t, 0) dt = \int_0^1 (t^3 + 2t^3 + 0) dt = \frac{3}{4}.$$

4.4 Osnovna teorema za krivolinijski integral

Podsetimo se Njutn-Lajbnicove formule za određeni integral. Naime, ako je $F \in C^1([a, b])$, onda je

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Sada, kada ∇F posmatramo kao izvod skalarne funkcije $F \in C^1(C)$, gde je C glatka kriva data parametrizacijom $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$, očekujemo da slična formula važi i za krivolinijski integral vektorske funkcije ∇F ,

$$\int_C \nabla F \cdot d\vec{r} = F(\vec{r}(b)) - F(\vec{r}(a)).$$

Ovakva formula bi nam omogućila da računamo krivolinijski integral konzervativnog polja samo poznavajući vrednosti funkcije potencijala u krajnjoj i početnoj tački krive C . Ako je kriva C zatvorena, integral konzervativnog polja po C bi bio 0.

Teorema 96 *Neka je*

- C glatka kriva data parametrizacijom $\vec{r}(t)$, $t \in [a, b]$,

- f diferencijabilna skalarna funkcija takva da je ∇f neprekidna vektorska funkcija.

Tada važi,

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)).$$

Dokaz: Iz definicije krivolinijskog integrala vektorske funkcije imamo da je

$$\begin{aligned} \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} &= \int_a^b [f_x(\vec{r}(t)), f_y(\vec{r}(t)), f_z(\vec{r}(t))] \cdot \vec{r}'(t) dt = \\ &= \int_a^b [f_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) + f_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt = \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(f \circ (x, y, z))(t) dt = \int_a^b (f \circ \vec{r})'(t) dt. \end{aligned}$$

Funkcija $(f \circ \vec{r})'$ je neprekidna, te možemo primeniti Njutn-Lajbnicovu formulu i zaključiti da je

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = (f \circ \vec{r})(b) - (f \circ \vec{r})(a) = f(\vec{r}(b)) - f(\vec{r}(a)). \quad \square$$

Primer 97 Naći rad gravitacione sile $\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{mMG}{|\vec{x}|^3}\vec{x}$ prilikom kretanja čestice mase $m < M$ iz tačke $(3, 4, 12)$ u tačku $(2, 2, 0)$ po po delovima glatkoj krivoj C .

Videli smo da je funkcija potencijala gravitacione sile $g(x, y, z) = \frac{mMG}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, pa je stoga

$$W = \int_C \nabla g \cdot d\vec{r} = g(2, 2, 0) - g(3, 4, 12) = mMG \left(\frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{13} \right).$$

Primetimo da putanja po kojoj se čestica kreće nije bitna, odnosno da rad zavisi samo od početne i krajnje tačke kretanja. Ovo je osobina konzervativnog polja koja se zove nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije.

Primer 98 Ovaj primer pokazuje da je dovoljno znati vrednost funkcije u početnoj i krajnjoj tački krive da bismo izračunali integral gradijenta te funkcije.

U tabeli su date vrednosti funkcije $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ u nekim tačkama $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$x \setminus y$	0	1	2
0	1	6	4
1	3	5	9
2	8	2	9

Izračunati krivolinijski integral gradijenta funkcije f po krivoj C čija je parametrizacija data sa $\vec{r}(t) = (x(t), y(t)) = (t^2 + 1, t^3 + t^2)$, $t \in [0, 1]$.

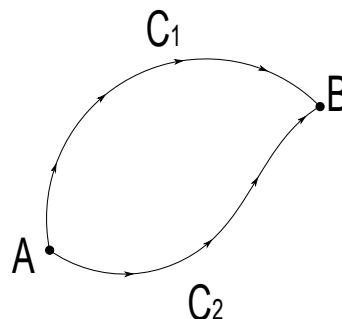
Početna tačka krive C je $\vec{r}(0) = (1, 0)$, a krajnja $\vec{r}(1) = (2, 2)$. Iz tabele čitamo vrednosti funkcije u ovim tačkama i zaključujemo da je krivolinijski integral gradijenta funkcije f po krivoj C jednak $9 - 3 = 6$.

4.5 Nezavisnost krivolinijskog integrala od putanje integracije

Neka su C_1 i C_2 po delovima glatke krive koje spajaju tačku A i tačku B , date parametrizacijom $\vec{r}_1(t)$, odnosno $\vec{r}_2(t)$, $t \in [a, b]$, $\vec{r}_1(a) = \vec{r}_2(a) = A$ i $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(b) = B$.

Pominjali smo da ako je vektorsko polje konzervativno, onda su njegovi krivolinijski integrali duž ovih krivih jednaki. Međutim, za proizvoljno polje to ne važi, tj. u opštem slučaju važi

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.2)$$



Ukoliko u (4.2) imamo jednakost za sve po delovima glatke krive koje spajaju tačke A i B , kažemo da krivolinijski integral funkcije \vec{F} ne zavisi od putanje integracije od tačke A do tačke B . Ako ta osobina važi sa svake dve proizvoljne tačke nekog skupa D , kažemo da krivolinijski integral funkcije \vec{F} ne zavisi od putanje integracije u D .

Definicija 99 *Krivolinijski integral funkcije \vec{F} ne zavisi od putanje integracije u skupu $D \subset \mathbb{R}^3$, ako za svake dve proizvoljne tačke $A, B \in D$, i za svake dve proizvoljne po delovima glatke krive $C_1, C_2 \subset D$, koje spajaju tačke A i B , važi*

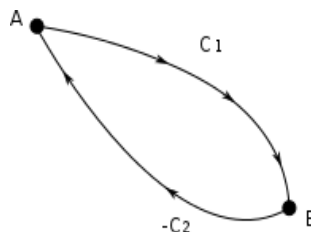
$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (4.3)$$

Pretpostavimo da krivolinijski integral funkcije \vec{F} ne zavisi od putanje integracije od tačke A do tačke B . Izaberimo neke dve po delovima glatke krive C_1 i C_2 , takve da je $\vec{r}_1(a) = \vec{r}_2(a) = A$ i $\vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(b) = B$. Iz (4.2) vidimo da je

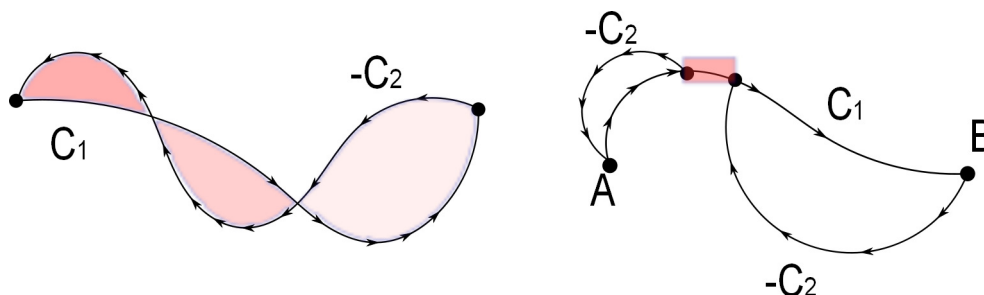
$$\int_{C_1 \cup (-C_2)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0,$$

gde smo sa $-C_2$ obeležili krivu C_2 sa promenjenom orijentacijom od tačke B do tačke A .

Kriva $C_1 \cup (-C_2)$ je očigledno zatvorena, po delovima glatka kriva. Ona može biti kontura (kao na slici desno), ili može imati samo-presečne tačke.



Ako se C_1 i C_2 seku, na primer u dve tačke, dobićemo krivu koja se sastoji od tri konture (slika levo).



No, krive C_1 i C_2 mogu imati i neprebrojivo mnogo zajedničkih tačaka, na primer ceo jedan segment (slika desno), ali ni to neće uticati na zaključak da je integral po $C_1 \cup (-C_2)$ jednak nuli.

Posledica Definicije 99 i Teoreme 96 je sledeće tvrđenje.

Posledica 100 *Krivolinijski integral funkcije \vec{F} ne zavisi od putanje integracije u skupu $D \subset \mathbb{R}^3$, ako i samo ako je*

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

po svakoj zatvorenoj krivoj $C \subset D$.

Dokaz: Neka je krivolinijski integral funkcije \vec{F} nezavisan od putanje integracije i neka je C zatvorena kriva u D . Izaberimo dve proizvoljne različite tačke $A, B \in C$. Tako smo krivu C podelili na dve krive C_1 i C_2 koje spajaju tačke A i B i od kojih je jedna, na primer, C_1 , orijentisana isto kao i C , a druga suprotno. Imamo da je $C = C_1 \cup (-C_2)$, pa je $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, jer krivolinijski integral funkcije \vec{F} ne zavisi od putanje integracije.

Neka je sada $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ po svakoj zatvorenoj krivoj $C \subset D$ i neka su A i B dve proizvoljne tačke skupa D , spojene po delovima glatkim proizvoljnim krivim C_1 i C_2 koje leže u D . Tada je $C_1 \cup (-C_2)$ zatvorena kriva koja leži u D , te je integral po $C_1 \cup (-C_2)$ jednak nuli, odakle je jasno da je $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

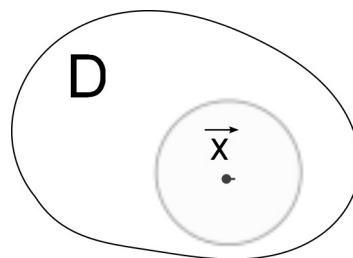
4.5.1 Krivolinijski integral konzervativnog polja

Videli smo da svako konzervativno vektorsko polje po zatvorenoj krivnoj ima integral (rad) nula. Važi i obratno.

Posledica 101 Neka je vektorsko polje \vec{F} neprekidno na otvorenoj, povezanoj oblasti D . Ako je krivolinijski integral funkcije \vec{F} nezavisan od putanje integracije u skupu $D \subset \mathbb{R}^3$, tada je \vec{F} konzervativno u D .

Pre dokaza pojasnimo pojmove iz Posledice 101.

Da je skup $D \subset \mathbb{R}^3$ otvoren znači da je okolina svake svoje tačke, odnosno da za svaku tačku $\vec{x} \in D$ postoji lopta sa centrom u \vec{x} koja leži u D .

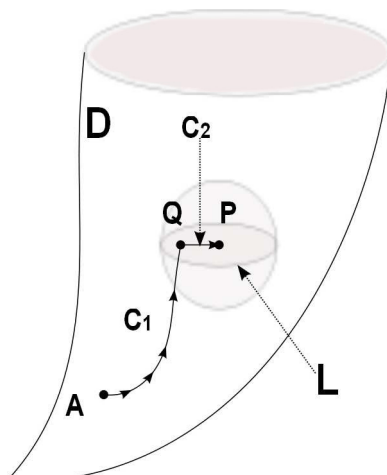


Povezan skup znači da se svake dve tačke tog skupa mogu spojiti (povezati) po delovima glatkom krivom koja leži cela u D . Tada kažemo da su svake dve tačke povezane *putanjom* u D . U engleskoj literaturi se za otvoren povezan skup koristi pojam "domain", a neki naši autori koriste pojam "oblast".

Dokaz posledice 101: Treba pokazati da je \vec{F} konzervativno u D , odnosno treba konstruisati funkciju potencijala vektorskog polja \vec{F} . Fiksirajmo proizvoljnu tačku $A(a, b, c) \in D$ i posmatrajmo proizvoljnu tačku $P(x, y, z) \in D$. Kako je skup D povezan, postoji po delovima glatka kriva \widehat{AP} koja spaja tačke A i P i cela leži u D . Definišimo sledeću funkciju,

$$f(x, y, z) = \int_{\widehat{AP}} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Funkcija f je dobro definisana jer integral ne zavisi od putanje. Kako je D otvoren, postoji lopta $L \equiv L(P, \delta) \subset D$. Izaberimo tačku $Q(x_1, y, z) \in L$, takvu da je $x_1 < x$. Zatim, izaberimo po delovima glatku krivu $C_1 = \widehat{AQ}$ koja spaja tačke A i Q i leži u D , te obeležimo sa $C = C_1 \cup C_2 = \widehat{AQ} \cup \overline{QP}$.



Tada je $f(x, y, z) = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, gde prvi integral u sumi ne zavisi od x , a drugi zavisi. Stoga diferencirajmo po x i dobićemo $f_x(x, y, z) = \partial_x \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Kako je C_2 duž koja spaja tačke $P(x, y, z)$ i $Q(x_1, y, z)$, ima parametrizaciju $\vec{r}(t) = (t, y, z)$, $t \in [x_1, x]$, $d\vec{r} = (dt, 0, 0)$. Ako je $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, imamo da je

$$f_x(x, y, z) = \partial_x \int_{C_2} (F_1, F_2, F_3) \cdot (dt, 0, 0) = \partial_x \int_{x_1}^x F_1(t, y, z) dt = F_1(x, y, z).$$

Slično, birajući za tačku $Q(x, y_1, z) \in L$, odnosno $Q(x, y, z_1) \in L$, dobijamo da je $f_y(x, y, z) = F_2(x, y, z)$, odnosno $f_z(x, y, z) = F_3(x, y, z)$. \square

I dalje tražimo odgovor na pitanje kada je vektorsko polje konzervativno a kada ne. Videli smo ako je dvodimenzionalno vektorsko polje $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ konzervativno, to znači da postoji skalarna funkcija f takva da je $f_x = P$ i $f_y = Q$. Ako su $P, Q \in C^1$, možemo diferencirati ove jednakosti pa dobijemo, kao posledicu Klerooove teoreme, da je

$$P_y = f_{xy} = f_{yx} = Q_x.$$

Dakle, ako je $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ konzervativno i $P, Q \in C^1$, onda je $P_y = Q_x$. Obratno tvrđenje važi samo na posebnim oblastima.

Definicija 102 Za skup u D kažemo da je *prosto povezan* ako je povezan i svaka kontura u D ograničava skup koji ceo leži u D .

Na primer, kružni prsten jeste povezan skup ali nije prosto-povezan. Dva kruga koja nemaju presek čine nepovezanu oblast koja se sastoji iz dve prosto-povezane oblasti. Jednostavnim rečima možemo reći da skup nije prosto povezan ako ima "rupe" ili ako se sastoji od disjunktne skupova.

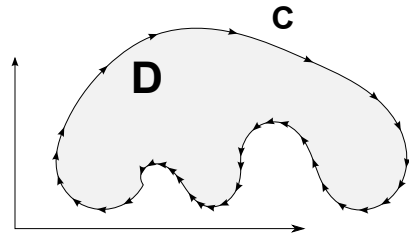
Teorema 103 Neka je $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ vektorsko polje definisano na otvorenoj, prosto-povezanoj oblasti D i neka su $P, Q \in C^1(D)$. Tada važi

$$P_y = Q_x, \text{ na } D \iff \text{ je } \vec{F} \text{ konzervativno.}$$

Dokaz ove teoreme je posledica Grinove teoreme koja sledi.

4.6 Grinova teorema

Grinova teorema je jedna od osnovnih teorema integralnog računa i povezuje krivolinijski integral duž pozitivno orijentisane ravanske konture C i dvostruki integral po oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ ograničene konturom C .



Na slici je kriva C koja ograničava skup D negativno orijentisana.

Primitimo da ako je rub oblasti u ravni kontura, onda je ta oblast ograničena, $D \setminus C$ je otvoren, a $\bar{D} = D \cup C$ zatvoren skup u \mathbb{R}^2 .

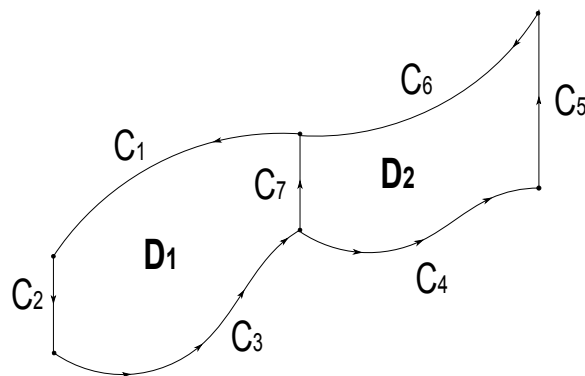
Teorema 104 Neka je

- C pozitivno orijentisana po delovima glatka kontura u ravni,
- D oblast u ravni ograničena konturom C , $\partial D = C$,
- $\vec{F} = (P, Q) \in C^1$ (na proizvoljnoj otvorenoj oblasti koja sadrži \bar{D}).

Tada važi,

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA \quad (4.4)$$

Dokaz ove teoreme u opštem slučaju je prilično težak. Mi ćemo je pokazati za oblast tipa 1, vidi Sliku 3.1. Kada pokažemo da Grinova formula važi na skupovima tipa 1, lako zaključujemo da važi i skupu u \mathbb{R}^2 ograničenom konturom koji se može prikazati kao unija takva dva skupa, kao na sledećoj slici.



Na slici imamo dve oblasti tipa 1, D_1 i D_2 . Obeležimo uniju ta dva skupa sa $D = D_1 \cup D_2$. Oblast D_1 ograničena je po delovima glatkom pozitivno orijentisanom konturom $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_7$, oblast D_2 konturom $C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup -C_7$, a oblast D konturom $C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6$. Dvostruki integral po D jednak je zbiru dvostrukih integrala po D_1 i D_2 , pa možemo primeniti Grinovu teoremu i dobiti

$$\begin{aligned} \iint_D (Q_x - P_y) dA &= \iint_{D_1} (Q_x - P_y) dA + \iint_{D_2} (Q_x - P_y) dA \\ &= \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_7} P dx + Q dy + \int_{C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup -C_7} P dx + Q dy \\ &= \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Naime, postoji tvrđenje koje kaže da se svaka oblast u ravni ograničena konturom može prikazati kao do na granicu disjunktna unija oblasti tipa 1 i tipa 2. Do na granicu disjunktna unija znači da u preseku bilo koja dva dela može da bude najviše rub nekog od tih skupova. Ovo tvrđenje ćemo samo prihvatiti bez dokaza, jer je intuitivno jasno, a dokaz prevazilazi gradivo našeg kursa. Zajedno sa dokazom Grinove formule na skupu tipa 1 i 2, ovo tvrđenje nam daje da Grinova teorema važi na svakoj oblasti u \mathbb{R}^2 ograničenoj po delovima glatkom konturom.

Pre dokaza Grinove formule, pokazaćemo da važi još jedna formula koja nam je potrebna za dokaz. Formulisaćemo je u obliku leme. Pre toga, podsetimo se Osnovne teoreme kalkulusa za funkcije jedne promenljive. Dakle, ako je funkcija $f = f(y)$ integrabilna na intervalu $[a, b]$, njena primitivna funkcija $F(x) = \int_a^x f(y) dy$, $x \in [a, b]$, je diferencijabilna na $[a, b]$ i važi

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(y) dy = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Funkcija $G(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(y) dy$ je diferencijabilna ukoliko su diferencijabilne funkcije $a(x)$ i $b(x)$,

i važi

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(y) dy = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x), \quad x \in [a, b].$$

Sličnu formulu možemo izvesti za funkciju definisanu pomoću iteriranog integrala funkcije $f = f(x, y)$ koja je integrabilna po drugoj promenljivoj.

Lema 105 (Izvod funkcije definisane preko integrala) *Neka su funkcije $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ i $a, b \in C^1(\mathbb{R})$. Tada važi*

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, y) dy + f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x).$$

Dokaz: Kako je $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, ona je i neprekidna (pa i integrabilna) po drugoj promenljivoj, odnosno postoji njena "primitivna funkcija po y ", tj. postoji $F(x, y)$ takva da je $\partial_y F(x, y) \equiv \partial_2 F(x, y) = f(x, y)$. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy &= \frac{d}{dx} [F(x, b(x)) - F(x, a(x))] \\ &= \partial_1 F(x, b(x)) + \partial_2 F(x, b(x))b'(x) - \partial_1 F(x, a(x)) - \partial_2 F(x, a(x))a'(x) \\ &= f(x, b(x))b'(x) - f(x, a(x))a'(x) + \partial_1 F(x, b(x)) - \partial_1 F(x, a(x)). \end{aligned}$$

Dalje iz $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ imamo da je $g(x, y) := \partial_1(\partial_2 F(x, y)) = \partial_1 f(x, y) = f_x(x, y) \in C(\mathbb{R}^2)$, pa je

$$\partial_1 F(x, b(x)) - \partial_1 F(x, a(x)) = \int_{a(x)}^{b(x)} g(x, y) dy = \int_{a(x)}^{b(x)} f_x(x, y) dy.$$

□

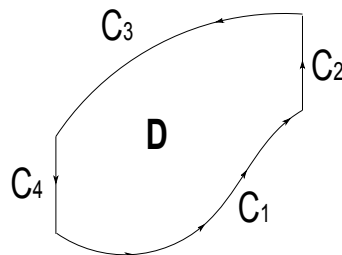
Dokaz Grinove teoreme za oblast tipa 1: Neka je $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ i } u(x) \leq y \leq v(x)\}$, gde su $u, v \in C^1([a, b])$. Tada je $C = \partial D = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$ po delovima glatka kriva, čiji su delovi dati sledećim parametrizacijama:

$$C_1 : x = t \in [a, b], y = u(t), dx = dt, dy = u'(t)dt,$$

$$C_2 : x = b, y = t \in [u(b), v(b)], dx = 0, dy = dt,$$

$$C_3 : x = t \in [b, a], y = v(t), dx = dt, dy = v'(t)dt,$$

$$C_4 : x = a, y = t \in [v(a), u(a)], dx = 0, dy = dt.$$



Izračunajmo sada integrale iz Grinove formule (4.4).

- Prvo izračunajmo dvostruki integral

$$-\iint_D P_y(x, y) dx dy = -\int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} P_y(x, y) dy \right) dx = \int_a^b [P(x, u(x)) - P(x, v(x))] dx.$$

- Zatim računamo krivolinijski integral po $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Kako je $dx = 0$ na C_2 i C_4 , imamo da je

$$\int_C P(x, y) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_3} P(x, y) dx = \int_a^b P(t, u(t)) dt + \int_b^a P(t, v(t)) dt.$$

Iz prethodne dve jednakosti vidimo da je

$$-\iint_D P_y(x, y) dx dy = \int_C P(x, y) dx.$$

- Drugi krivolinijski integral koji računamo je

$$\int_C Q(x, y) dy = \int_a^b Q(t, u(t)) u'(t) dt + \int_{u(b)}^{v(b)} Q(b, t) dt + \int_b^a Q(t, v(t)) v'(t) dt + \int_{v(a)}^{u(a)} Q(a, t) dt.$$

- Na kraju računamo preostali dvostruki integral u kome ćemo primeniti lemu 105,

$$\begin{aligned} \iint_D Q_x(x, y) dx dy &= \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} Q_x(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} Q(x, y) dy - Q(x, v(x))v'(x) + Q(x, u(x))u'(x) \right] dx \\ &= \int_a^b [Q(x, u(x))u'(x) - Q(x, v(x))v'(x)] dx + \int_{u(b)}^{v(b)} Q(b, y) dy - \int_{u(a)}^{v(a)} Q(a, y) dy \end{aligned}$$

Iz prethodne dve jednakosti vidimo da je

$$\iint_D Q_x(x, y) dx dy = \int_C Q(x, y) dx.$$

□

4.6.1 Vektorski oblik Grinove teoreme

Za vektorski oblik Grinove teoreme potrebna su nam dva poznata diferencijalna operatora, rotor i divergencija. Rotor je parcijalni diferencijalni operator koji deluje na vektorsku funkciju $\vec{F} = (P, Q, R)$ na sledeći način

$$\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \operatorname{curl}\vec{F} := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}.$$

Ovaj operator slika vektorsku funkciju $\vec{F} = (P, Q, R)$ u vektorsku funkciju $(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y)$, dakle funkcija na koju deluje mora imati parcijalne izvode. Ako je $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ onda je $\operatorname{rot}\vec{F} \in C(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, odnosno $\operatorname{rot} : C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \rightarrow C(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$. $\operatorname{rot}\vec{F}$ zovemo *rotor vektorskog polja* $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Divergencija je takođe parcijalni diferencijalni operator koji deluje na vektorsku funkciju $\vec{F} = (P, Q, R)$,

$$\operatorname{div}\vec{F} := P_x + Q_y + R_z = \nabla \cdot \vec{F}.$$

Međutim, divergencija slika vektorsku funkciju $\vec{F} = (P, Q, R)$ u skalarnu funkciju $P_x + Q_y + R_z$. Ako je $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ onda je $\operatorname{div}\vec{F} \in C(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, odnosno $\operatorname{div} : C^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \rightarrow C(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$. $\operatorname{div}\vec{F}$ zovemo *divergencija vektorskog polja* $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Posmatrajmo vektorske funkcije $\vec{r} = (x, y)$ i $\vec{F} = (P, Q)$ definisane u formulaciji Grinove teoreme. Funkcije $\vec{r} = (x, y)$ i $\vec{F} = (P, Q)$ su ravanske, ali ih možemo dodefinisati nulom kako bi postale "prostorne", $\vec{r} = (x, y, 0)$ i $\vec{F} = (P, Q, 0)$, odnosno da ravansku krivu C sa parametrizacijom \vec{r} posmatramo kao prostornu krivu koja leži u ravni (x, y) . Tada tvrđenje Grinove teoreme možemo napisati u obliku

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

Kako je $\operatorname{curl}\vec{F} = \operatorname{curl}(P, Q, 0) = (Q_x - P_y)\vec{k}$, imamo da je $\operatorname{curl}\vec{F} \cdot \vec{k} = Q_x - P_y$, dobijamo vektorski oblik Grinove teoreme

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (\operatorname{curl}\vec{F} \cdot \vec{k}) dA.$$

U fizici, za računanje fluksa, integrali se skalarni proizvod funkcije \vec{F} i normale na krivu C , naime $\vec{F} \cdot \vec{n}$. Kako je $\vec{F} \cdot \vec{n}$ skalarna funkcija, to je $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} dl$ krivolinijski integral prve vrste. Neka

je $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, parametrizacija gladke konture C . Tada je $\vec{T} = \frac{x'}{|\vec{r}'|} \vec{i} + \frac{y'}{|\vec{r}'|} \vec{j}$ jedinični tangentni vektor, a $\vec{n} = \frac{y'}{|\vec{r}'|} \vec{i} - \frac{x'}{|\vec{r}'|} \vec{j}$ jedinični vektor normale. Stoga je

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, dl &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} (Py' - Qx') |\vec{r}'(t)| dt = \int_C -Q \, dx + P \, dy = \\ &= \iint_D (P_x - (-Q_y)) \, dx dy = \iint_D \operatorname{div} \vec{F} \, dA, \end{aligned}$$

što je drugi vektorski oblik Grinove teoreme. Kako je $\vec{n} \, dl = \left(\frac{y'}{|\vec{r}'|} \vec{i} - \frac{x'}{|\vec{r}'|} \vec{j} \right) |\vec{r}'(t)| dt = dy \vec{i} - dx \vec{j}$, to se $\int_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, dl$ zove još i krivolinijski integral po normali.

Glava 5

Površinski integral

5.1 Parametrizacija i površina površi

Parametrizovana površ S data je parametrizacijom

$$\vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad t \in [a, b], \quad s \in [c, d],$$

gde je preslikavanje $\vec{r}: [a, b] \times [c, d] \rightarrow S$ bijektivno preslikavanje pravougaonika $R = [a, b] \times [c, d]$ na površ S . Napomenimo da postoje površi koje se ne mogu parametrizovati, ali mi nećemo raditi sa takvim površima.

Ako u svakoj tački površ ima jedinstvenu tangentnu ravan, kažemo da je površ glatka. Tangentnu ravan dobijamo na sledeći način. Fiksirajmo $t_0 \in [a, b]$ i posmatrajmo krivu $C_1 \subset S$ parametrizovanu na sledeći način,

$$\vec{r}_1(s) = \vec{r}(t_0, s), \quad s \in [c, d].$$

Kriva C_1 u tački $\vec{r}(t_0, s_0)$ ima tangentu, ako je tangentni vektor

$$\vec{r}_1'(s_0) = \partial_s \vec{r}(t_0, s_0) \neq \vec{0}.$$

Analogno, za fiksirano $s_0 \in [c, d]$ dobijamo krivu $C_2 \subset S$ parametrizovanu sa,

$$\vec{r}_2(t) = \vec{r}(t, s_0), \quad t \in [a, b],$$

koja u tački $\vec{r}(t_0, s_0)$ ima tangentu, ako je tangentni vektor

$$\vec{r}'_2(t_0) = \partial_t \vec{r}(t_0, s_0) \neq \vec{0}.$$

Ako su vektori $\vec{r}'_2(t_0)$ i $\vec{r}'_1(s_0)$ linearno nezavisni (tj. nisu paralelni), oni određuju jedinstvenu ravan koja se zove tangentna ravan na površ S u tački $\vec{r}(t_0, s_0)$. Dakle, možemo reći da je *površ glatka* ako i samo ako su vektori $\partial_t \vec{r}(t, s)$ i $\partial_s \vec{r}(t, s)$ linearno nezavisni, što možemo zapisati u obliku vektorskog proizvoda,

$$\partial_t \vec{r}(t, s) \times \partial_s \vec{r}(t, s) \neq \vec{0}.$$

Površ je *po delovima glatka* ako je unija nekoliko glatkih površi.

Primer 106 Neka su $x(u, v) = u^2$, $y(u, v) = v^2$, $z(u, v) = u + 2v$ komponentna preslikavanja parametrizacije $\vec{r}(u, v)$ površi S . Pronađimo tangentnu ravan u tački $P(1, 1, 3)$.

Iz sistema jednačina $\vec{r}(u_0, v_0) = (1, 1, 3)$, odnosno iz

$$x_0 = 1 = u_0^2, \quad y_0 = 1 = v_0^2, \quad z_0 = 3 = u_0 + 2v_0$$

dobijamo vrednosti parametara u i v u tački P , $u_0 = v_0 = 1$.

Dalje, kako je $\vec{r}(u, v) = u^2 \vec{i} + v^2 \vec{j} + (u + 2v) \vec{k}$, $\partial_u \vec{r}(u, v) = 2u \vec{i} + \vec{k}$, $\partial_v \vec{r}(u, v) = 2v \vec{j} + \vec{k}$, vidimo da su vektori $\partial_u \vec{r}$ i $\partial_v \vec{r}$ linearno nezavisni jer je $\partial_u \vec{r}$ paralelan (z, x) -ravni, a $\partial_v \vec{r}$ je paralelan (y, z) -ravni. Preciznije, kada izračunamo

$$\partial_u \vec{r}(u, v) \times \partial_v \vec{r}(u, v) = -2v \vec{i} - 4u \vec{j} + 4uv \vec{k} \neq \vec{0} \iff u \neq 0 \text{ ili } v \neq 0.$$

Dakle, u tački P postoji jedinstvena tangentna ravan, čija je normala u tački P vektor $\vec{n} = (\partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r})(1, 1) = (-2, -4, 4)$. Stoga je jednačina tangentne ravni $-2(x - 1) - 4(y - 1) + 4(z - 3) = 0$, odnosno $x + 2y - 2z + 3 = 0$.

Površina dela površi

Znamo da pomoću formule

$$l = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt = \int_C dl$$

računamo dužinu dela glatke krive date parametrizacijom $\vec{r}'(t) = (x(t), y(t), z'(t))$, $t \in [a, b]$.

Želimo sličnu formulu za računanje površine dela glatke površi datog parametrizacijom

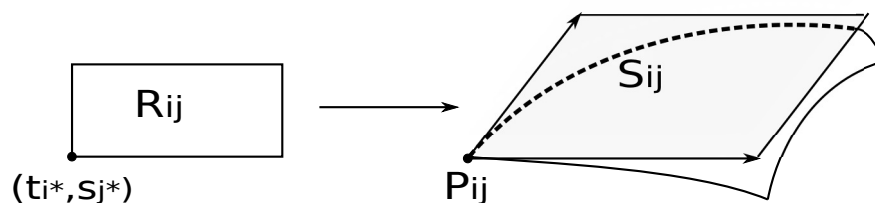
$$\vec{r}(t, s) = x(t, s)\vec{i} + y(t, s)\vec{j} + z(t, s)\vec{k}, \quad t \in [a, b], \quad s \in [c, d],$$

gde je preslikavanje $\vec{r} : [a, b] \times [c, d] \rightarrow S$ bijektivno preslikavanje pravougaonika $R = [a, b] \times [c, d]$ na površ S .

Površ S podelićemo na uniju malih površi S_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, tako što ćemo interval $[a, b]$ podeliti na n malih jednakih intervala dužine $\Delta t = \Delta t_i = \frac{b-a}{n}$, a interval $[c, d]$ na m intervala dužine $\Delta s = \Delta s_j = \frac{d-c}{m}$. Dakle,

$$S_{ij} = \vec{r}(R_{ij}) = \vec{r}([t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]).$$

U pravougaoniku R_{ij} biramo donji levi ugao, tj. $P_{ij} = \vec{r}(t_i^*, s_j^*) = \vec{r}(t_{i-1}, s_{j-1})$.



Površ S_{ij} aproksimiraćemo paralelogramom na slici koji leži u tangentnoj ravni površi S_{ij} u tački P_{ij} , a određen je vektorima $\Delta t \cdot \vec{r}_t^*$ i $\Delta s \cdot \vec{r}_s^*$, gde su $\vec{r}_t^* = \partial_t \vec{r}(t_i^*, s_j^*)$ i $\vec{r}_s^* = \partial_s \vec{r}(t_i^*, s_j^*)$. Kako je intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora jednak površini paralelograma koji ta dva vektora zaklapaju, površina površi S_{ij} aproksimirana je sa

$$\Delta S_{ij} \approx |\Delta t \cdot \vec{r}_t^* \times \Delta s \cdot \vec{r}_s^*| = \Delta t \Delta s |\vec{r}_t^* \times \vec{r}_s^*|.$$

Sada, sumiranjem po $i = 1, \dots, n$ i $j = 1, \dots, m$ i prelaskom na graničnu vrednost kad $n, m \rightarrow \infty$ dobijamo da je

$$\begin{aligned} P(S) &= \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i, j} |\partial_t \vec{r}(t_i^*, s_j^*) \times \partial_s \vec{r}(t_i^*, s_j^*)| \Delta t_i \Delta s_j = \int_a^b \int_c^d |\partial_t \vec{r}(t, s) \times \partial_s \vec{r}(t, s)| dt ds \\ &= \iint_{[a, b] \times [c, d]} |\vec{r}_t \times \vec{r}_s| dA =: \int_S 1 dS, \end{aligned}$$

gde je $\iint_{[a, b] \times [c, d]} |\vec{r}_t \times \vec{r}_s| dA$ dvostruki integral skalarne funkcije $|\vec{r}_t \times \vec{r}_s|$, a $\int_S 1 dS$ oznaka koju ćemo koristiti za površinski integral po površi S konstantne funkcije $f(x, y, z) = 1$.

Specijalno, ako je površ S grafik diferencijabilne funkcije dve promenljive $z = f(x, y)$, $x \in [a, b]$, $y \in [c, d]$, za parametre možemo izabrati promenljive x i y , pa je parametrizacija površi data sa

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x, y)\vec{k}, \quad \vec{r}_x = \vec{i} + f_x\vec{k}, \quad \vec{r}_y = \vec{j} + f_y\vec{k}.$$

Tada je $|\vec{r}_x \times \vec{r}_y| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$, te se površina površi S računa pomoću formule

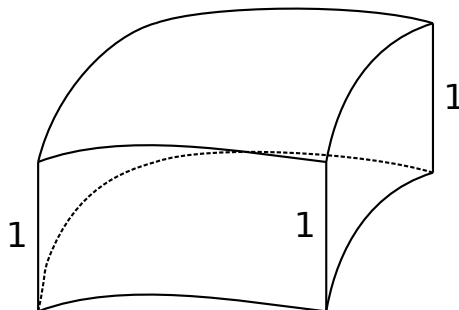
$$P(S) = \iint_{[a,b] \times [c,d]} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1} dA.$$

5.2 Površinski integral skalarne funkcije

U prethodnom odeljku videli smo da je

$$\iint_S 1 dS = \iint_{[a,b] \times [c,d]} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv,$$

gde je S glatka površ data parametrizacijom $\vec{r}(u, v) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$. Napomenimo da, numerički, površinski integral jedinice po površi S je ustvari zapremina tela koje se dobija "podizanjem" površi S na visinu jedan, kao na sledećoj slici.



Na sličan način integralimo po površi S proizvoljnu funkciju f . Naime, glatku površ S opet delimo na male delove S_{ij} tako što, ustvari, pravougaonik parametara delimo na male pravougaonike P_{ij} , kao u prethodnom odeljku, te površine površi S_{ij} množimo vrednošću funkcije f u tački P_{ij} , tako da površinski integral skalarne funkcije $f = f(x, y, z)$, definisane na glatkoj površi S možemo definisati na sledeći način,

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(P_{ij}) \Delta S_{ij} = \iint_{[a,b] \times [c,d]} f(\vec{r}(u, v)) |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv,$$

Primer 107 Izračunajmo integral po jediničnoj sferi funkcije $f(x, y, z) = x^2$. Za parametrizaciju sfere koristimo sferne koordinate $\rho = 1$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $x = \cos \phi \cos \theta$, $y = \sin \phi \cos \theta$,

$z = \sin \theta$. Stoga je parametrizacija jedinične sfere preslikavanje

$$\vec{r}(\phi, \theta) = \cos \phi \cos \theta \vec{i} + \sin \phi \cos \theta \vec{j} + \sin \theta \vec{k}, \quad \phi \in [0, 2\pi], \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

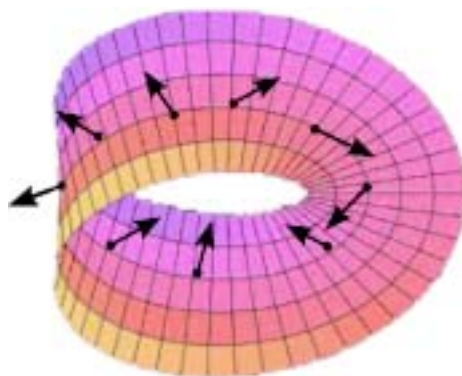
te je $|\vec{r}_\phi \times \vec{r}_\theta| = \cos \theta > 0$, za $\theta \neq \pm \frac{\pi}{2}$. Stoga je

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \phi \cos^3 \theta d\theta d\phi = \dots = \frac{4\pi}{3}.$$

5.2.1 Orijentacija dvostrane površi

Rekli smo da u svakoj tački glatka površ ima normalu. Normala je određena jediničnim vektorom normale, tj. vektorom intenziteta jedan koji je paralelan normali. Takvih vektora imamo dva, koji su suprotnih smerova. Zbog toga uvodimo pojam strane površi, pa svakom jediničnom vektoru normale dodeljujemo po jednu stranu površi. Ako je to moguće u svakoj tački površi, kažemo da je površ dvostrana. Da bismo bili sigurni da je površ dvostrana, tu osobinu testiramo na sledeći način. Posmatramo proizvoljnu tačku P površi S i zatvorenu krivu C koja prolazi kroz tačku P i leži na izabranoj strani površi S . Zatim posmatramo normalu na izabranu stranu površi S u tački P . Krećemo se po krivoj C i posmatramo normale na istu stranu u tačkama krive C . Kada se vratimo u tačku P ako smo i dalje na istoj strani površi S možemo zaključiti da je površ S dvostrana (naravno, ova osobina treba da važi za sve tačke i sve zatvorene krive).

Postoje površi koje nisu dvostrane. Takva je, na primer, Mebijusova traka, data na sledećoj slici:



Nju možete napraviti tako što napravite traku (pravougaonik male širine i velike dužine) od papira, pa zalepите jednu za drugu kraće stranice, ali ne da dobijete prsten, nego im obrnete uglove.

Za neke dvostrane površi uvodimo pojam spoljašnje i unutrašnje strane. Za stranu kažemo da

je unutrašnja ako je u svakoj tački površi površ između normale i tangentne ravni, a spoljašnja ako je tangentna ravan između površi i normale. Za neke površi te pojmove ne možemo definisati.

5.3 Površinski integral vektorske funkcije

U svakoj tački dvostrane glatke površi S imamo dva jedinična vektora normale na površ, odnosno na tangentnu ravan u toj tački. Označimo ih sa $\vec{n} = (a, b, c)$ i $-\vec{n} = (-a, -b, -c)$. One su definisane u svakoj tački glatke površi, pa na S definišemo funkcije $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$ i $-\vec{n} = -\vec{n}(x, y, z)$. Neka je \vec{F} neprekidno vektorsko polje definisano na S . Skalarni proizvod $\vec{F} \cdot \vec{n}$ (ili $\vec{F} \cdot (-\vec{n})$) je skalarna funkcija koju možemo da integralimo po S , pa ćemo površinski integral vektorske funkcije \vec{F} definisati kao površinski integral skalarne funkcije $\vec{F} \cdot \vec{n}$ na sledeći način,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} := \iint_S \vec{F} \cdot (\pm \vec{n}) dS.$$

U zavisnosti od toga po kojoj strani površi S integralimo, uzimamo adekvatnu normalu \vec{n} ili $-\vec{n}$. Površinski integral vektorske funkcije zove se još i površinski integral druge vrste.

Motivacija za definisanje površinskog integrala vektorskog polja dolazi iz fizike, kao rešenje problema računanja fluksa vektorskog polja \vec{F} kroz površ S . Do date definicije dolazi se na isti način kao kod krivolinijskog integrala druge vrste, dakle podelom površi S na male S_{ij} , itd.

Ako je $\vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D \subset \mathbb{R}^2$, parametrizacija površi S , i \vec{n} vektor normale na željenu stranu površi S , imamo da je

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) dA,$$

jer je $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ i $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dA$. Ako preciznije zapišemo $\vec{r}(u, v) = x(u, v) \vec{i} + y(u, v) \vec{j} + z(u, v) \vec{k}$, $(u, v) \in D$, i

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (y_u z_v - z_u y_v) \vec{i} + (z_u x_v - x_u z_v) \vec{j} + (x_u y_v - y_u x_v) \vec{k},$$

možemo uvesti oznaku

$$dx \wedge dy := (x_u y_v - y_u x_v) du dv,$$

i pomoću ovih oznaka dobijemo još jedan oblik (zapis) površinskog integrala druge vrste,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D \vec{F} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv = \iint_D P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy,$$

za $\vec{F} = (P, Q, R)$.

Primer 108 • Naći fluks vektorskog polja $\vec{F} = (x, 1, yz)$ kroz površ $S : \vec{r}(s, t) = (\cos t, \sin t, s)$, $t \in [0, 2\pi]$, $s \in [0, 1]$.

Površ S je omotač valjka visine 1, čija je baza krug sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 1 koji leži u (x, y) -ravni. Normalu dobijamo iz

$$\vec{r}_s \times \vec{r}_t = -\cos t \vec{i} - \sin t \vec{j}.$$

Ovaj vektor je dužine 1, pa ako integralimo po spoljnoj strani površi S , za jediničnu normalu ćemo uzeti $\vec{n} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$. Dakle,

$$\Phi = \iint_S (x, 1, yz) \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (\cos t, 1, s \sin t) \cdot (\cos t, \sin t, 0) ds dt = \pi.$$

- Ako je S deo grafika neke funkcije $z = f(x, y)$, orijentaciju normale je lakše odrediti, jer joj je treća komponenta uvek konstantna. Na primer, ako je S deo grafika funkcije $z = 1 - x^2 - y^2$ iznad (x, y) -ravni, parametrizacija joj je (kada za parametre uzmemo baš x i y)

$$\vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + (1 - x^2 - y^2)\vec{k}, \quad (x, y) \in K,$$

gde je $K \subset \mathbb{R}^2$ krug sa centrom u $(0, 0)$ poluprečnika 1. Tada je $\vec{n} = \pm(2x, 2y, 1)$, odnosno $\vec{n}_1 = (2x, 2y, 1)$ normala na spoljašnju stranu površi S , a $\vec{n}_2 = (-2x, -2y, -1)$ normala na unutrašnju stranu površi S . Tada je

$$\iint_{S^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dS = \iint_K (4xy + 1 - x^2 - y^2) dA = \frac{\pi}{2}.$$

Oznaku S^+ koristimo kada hoćemo da istaknemo da integralimo po spoljašnjoj strani površi S .

5.3.1 Stoksova teorema

Znamo da je Grinova teorema, u \mathbb{R}^2 , povezivala dvostruki integral po oblasti D i krivolinijski integral po konturi ∂D . Sledeća teorema će povezivati krivolinijski integral po konturi ∂S u \mathbb{R}^3 , sa površinskim integralom po površi S ograničenoj tom konturom. Orijehtacija ovakve površi i orijentacija konture koja je ograničava su povezane pravilom desne šake. Naime, ako prsti desne šake pokazuju smer orijentacije konture, tada palac pokazuje smer normale na površ.

Teorema 109 *Neka je:*

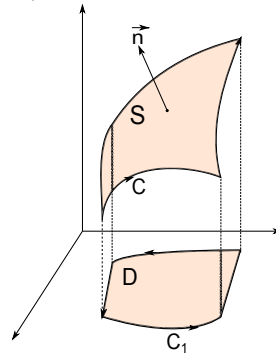
- $C = \partial S$ po delovima glatka kontura;
- S dvostrana po delovima glatka površ ograničena konturom C , čija je orijentacija indukovana orijentacijom krive C ;
- $\vec{F} = (P, Q, R)$ vektorska funkcija klase C^1 na nekom otvorenom skupu koji sadrži $S \cup C$.

Tada je

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Dokaz: Dokaz ćemo izvesti u specijalnom slučaju kada je S deo grafika funkcije $z = g(x, y)$, $(x, y) \in D$, $g \in C^2(D)$, a ∂D je glatka kontura. Tada je S data parametrizacijom $\vec{r}(x, y) = (x, y, g(x, y))$, $(x, y) \in D$ i $\vec{r}_x \times \vec{r}_y = (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1)$.

Izaberimo pozitivnu orijentaciju konture $C_1 = \partial D$, koja indukuje pozitivnu orijentaciju konture $C = \partial S$, što opet indukuje izbor normale "ka gore", $\vec{n} = (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1)$.



Neka je

$$I_1 = \iint_S \operatorname{curl} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D (-g_x(R_y - Q_z) - g_y(P_z - R_x) + (Q_x - P_y)) dx dy.$$

Dalje, neka je parametrizacija krive C_1 data sa $\vec{r}_1(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, $t \in [a, b]$. Tada je parametrizacija krive C , pošto leži na površi S , data sa $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + g(x(t), y(t))\vec{k}$, $t \in [a, b]$, pa je

$$d\vec{r}(t) = (x'(t), y'(t), g_x(x(t), y(t))x'(t) + g_y(x(t), y(t))y'(t)) dt, \quad t \in [a, b].$$

Sada računamo,

$$I_2 := \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b (P x' + Q y' + R z_x x' + R z_y y') dt = \int_{C_1} (P + R z_x) dx + (Q + R z_y) dy,$$

jer je $z = g(x, y)$. Sada primenimo Grinovu formulu, jer je C_1 ravanska kriva, i dobijemo da je

$$I_2 = \iint_D (\partial_x(Q + R z_y) - \partial_y(P + R z_x)) dx dy = \iint_D (-g_x(R_y - Q_z) - g_y(P_z - R_x) + (Q_x - P_y)) dx dy.$$

□

Kao posledica Stoksove teoreme vidimo da ako je rotor vektorskog polja \vec{F} jednak nuli, njegov krivolinijski integral po svakoj konturi je nula, što znači da krivolinijski integral vektorskog polja \vec{F} ne zavisi od putanje integracije, odnosno da je \vec{F} konzervativno polje. Važi i obratno tvrđenje što ćemo formulisati u sledećoj posledici.

Posledica 110 Vektorsko polje $\vec{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$ je konzervativno ako i samo ako je $\text{curl} \vec{F} = \vec{0}$.

Dokaz: Ostaje da pokažemo da je rotor konzervativnog polja $\vec{F} = (f_x, f_y, f_z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ jednak nula. Ako je $\vec{F} = (f_x, f_y, f_z) \in C^1(\mathbb{R}^3)$ to znači da je funkcija potencijala $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, te su joj mešoviti parcijalni izvodi drugog reda jednaki. Zbog toga je

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}) \vec{i} + (f_{xz} - f_{zx}) \vec{j} + (f_{yx} - f_{xy}) \vec{k} = \vec{0}.$$

□

Primer 111 Krivolinijski integral vektorskog polja $\vec{F} = -y^2 \vec{i} + x \vec{j} + z^2 \vec{k}$ po krivoj koja leži u preseku ravni $y + z = 2$ i cilindra $x^2 + y^2 = 1$, lako možemo izračunati primenom Stoksove teoreme. Kako je $\text{curl} \vec{F} = (1 + 2y) \vec{k}$, to je

$$I = \iint_S (0, 0, 1 + 2y) \cdot d\vec{S} = \iint_S (1 + 2y) dx \wedge dy$$

gde je S deo ravni $z = f(x, y) = 2 - y$ unutar cilindra $x^2 + y^2 = 1$, odnosno onaj deo ravni koji se projektuje na krug $K : x^2 + y^2 \leq 1$ u (x, y) -ravni. Dalje je

$$I = \iint_K (1 + 2y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2\rho \sin \phi) \rho d\rho d\phi = \pi.$$

5.3.2 Teorema divergencije

Treća teorema koja povezuje dva tipa integrala zove se Teorema divergencije ili Teorema Gaus-Ostrogradskog. Pre formulacije podsetimo se drugog vektorskog oblika Grinove teoreme, odnosno integrala po normali vektorskog polja po ravanskoj konturi,

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{n} \, dl = \iint_D \operatorname{div} \vec{F}(x, y) \, dA,$$

gde je $C = \partial D \subset \mathbb{R}^2$ ravanska pozitivno orijentisana po delovima glatka kontura koja ograničava oblast D , a $\vec{F} \in C^1(U)$, gde je U otvoren skup koji sadrži D . Proširenje ove formule na \mathbb{R}^3 daje sledeća teorema, koju ovde navodimo bez dokaza. Ona povezuje površinski integral vektorskog polja po zatvorenoj površi $S = \partial V$, sa trostrukim integralom po telu V divergencije datog vektorskog polja.

Teorema 112 *Neka je:*

- S po delovima glatka, zatvorena površ, orijentisana ka spolja, koja ograničava telo $V \subset \mathbb{R}^3$;
- $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, vektorsko polje klase C^1 na nekom otvorenom skupu koji sadrži $V \cup S$.

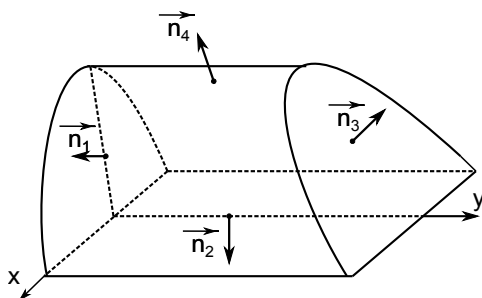
Tada je

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV.$$

Primer 113 • Potražimo fluks vektorskog polja $\vec{F} = z\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ kroz jediničnu sferu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, primenom teoreme divergencije,

$$\phi = \iint_{S^2} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{L^3} \operatorname{div} \vec{F} \, dV = \iiint_{L^3} (0 + 1 + 0) \, dV = \frac{4}{3}\pi.$$

- Izračunajmo površinski integral funkcije $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$, po spoljašnjoj strani tela T ograničenog paraboličnim cilindrom $z = 1 - x^2$ i ravnima $z = 0$, $y = 0$ i $y + z = 2$.



Površ po kojoj integralimo je po delovima glatka, tačnije, sastoji se od četiri glatke površi, pa bismo direktnim računanjem integral računali kao zbir četiri površinska integrala.

Međutim površ je zatvorena, a funkcija glatka, pa možemo primeniti teoremu divergencije.

Dakle,

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\bar{T}} (y + 2y + 0) dV = \frac{184}{35}.$$

Literatura

- [1] Adnađević, D., Kadelburg, Z. *Matematička analiza II*, Beograd: Nauka, 1994.
- [2] Apostol, T. M. *Calculus, Vol. 2. Calculus of Several Variables with a applications to probability and vector analysis.* - New York: Blaisdell Publ. Co., 1962.
- [3] Baxter, M. *Financial calculus*, Cambridge: Cambridge University Press, 1996
- [4] Binmore, K. *Calculus*, Cambridge: Cambridge University Press, 2001.
- [5] Bittinger, M. L. *Calculus and its applications*, Reading: Addison-Wesley, 2000
- [6] Colley, S. J. *Vector Calculus*, Upper Saddle River: Pearson, Prentice Hall, 2006
- [7] Crowell, R. H. *Calculus of Vector Functions*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962.
- [8] Eriksson, K. *Applied mathematics, Vol. 3. Calculus in several dimensions.* - Berlin [etc.]: Springer, 2004.
- [9] Gajić, Lj. *Predavanja iz analize 1* Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2006.
- [10] Gajić, Lj. *Predavanja iz voda u analizu* Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 2006.
- [11] Hildebrand, F. B. *Advanced Calculus for Applications*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1962.
- [12] Hoffman, J. *Dreams of Calculus*, Berlin, Springer, 2004.
- [13] Hull, McA. H.: *The Calculus of Physics*, New York: W. A. Benjamin, Inc., 1969.
- [14] Ivanović, D. M. *Vektorska analiza*, Beograd: Naučna knjiga, 1971.
- [15] Javor, P. *Matematička analiza 2*, Zagreb: Element, 2004.
- [16] Marder, L. *Calculus of Several Variables*, London: George Allen & Unwin Ltd, 1971.
- [17] Marsden, J.E., Weinstein, A., *Calculus III*, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1985.

-
- [18] Perišić, D., Pilipović, S., Stojanović, M., *Funkcije više promenljivih. Diferencijalni i integralni račun*, Univerzitet u Novom Sadu, PMF, Novi Sad, 1997.
- [19] Radenović, S., *Matematička analiza II. Metodska zbirka zadataka*, 3. izdanje, D.P. Studentski trg, Beograd, 2002.
- [20] Stewart, J., *Multivariable Calculus*, 6th edition, Thompson Books/Cole, Toronto, 2009.
- [21] Stewart, J., *Calculus*, 7th edition, Brooks/Cole, Belmont, 2012.
- [22] Strauss, M. J. *Calculus*, Upper Saddle River [etc.]: Prentice Hall, 2002.