Kandidat: Jelena Aleksić, docent na Katedri za Analizu, verovatnoću i diferencijalne jednačine; bavim se primenom (i razvojem) metoda funkcionalne analize i teorije mere na parcijalne diferencijalne jednačine. Uz prijavu **prilažem sledeće radove:**

U Kolomboovoj teoriji uopštenih funkcija:

1. *Approximate generalized solutions and measure-valued solutions to conservation laws,* ITSF, Vol. 20, 2009, pp. 163–170 (koautori: J.F. Colombeau, M. Oberguggenberger i S. Pilipović)

4. *Gauss kernel method for generalized solutions to conservation laws in heterogeneous media,* Integral Transforms Spec. Funct. 22 (2011)

U klasičnoj teoriji PDJ:

2. *Hyperbolic conservation laws with vanishing nonlinear diffusion and linear dispersion in heterogeneous media,* Journal of Evolution Equations 2009 (koautori: D. Mitrović i S. Pilipović)

3. *On the compactness for two dimensional scalar conservation law with discontinuous flux,* Communications in Mathematical Science 2009 (koautor: D. Mitrović)

Kratko obrazloženje doprinosa u navedenim radovima:

1. Kolomboove algebre uopštenih funkcija su se pokazale kao odlično okruženje za množenje distribucija koje se prirodno potapaju u pomenute algebre. Zbog toga su se dobro pokazale i u pronalaženju i izučavanju distributivnih rešenja posebno nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina. Međutim, interpretacija rešenja jednačine kao klase ekvivalencije familija glatkih funkcija, što su po prirodi uopštene funkcije, naišla je na skepticizam u nekim matematičkim krugovima.

Sa druge strane koncept meroznačnih rešenja zakona održanja, koji je osamdesetih godina uveo DiPerna oslanjajući se na rezultate iz kompenzovane kompaktnosti, predstavlja rešenja prihvaćena u svim matematičkim i drugim naučnim centrima.

Primetivši da su u pozadini oba koncepta ustvari familije rešenja aproksimativnih problema zakona održanja i proučavanje konvergencije njihovih podnizova, pokazali smo ekvivalenciju ova dva koncepta rešenja i time dokazali još jedan značaj Kolomboove teorije uopštenih funkcija.

U rešavanju diferencijalnih jednačina posebno su važne uopštene funkcije ograničenog i p-ograničenog tipa koje rešavaju zakone održanja u ovom okruženju. One indukuju jedinstvenu Jangovu resp. L^p-Jangovu meru koja predstavlja meroznačno rešenje i obratno.

Dodatno, u radu je pokazano i postajanje uopštenog rešenja Ojlerovih jednačina koje se dobija (kao i meroznačno rešenje istih, *v. DiPerna, Majda 1987*) kao limes slabih rešenja Navijer-Stoksovih jednačina.

4. U ovom radu rešavan je Košijev problem zakona održanja sa funkcijom fluksa koja eksplicitno zavisi od prostorne promenljive, što su jednačine koje modeliraju procese koji se odvijaju u heterogenim sredinama. Rad predstavlja uopštenje rada *Oberguggenberger, Wang, 1994* na širu klasu zakona održanja.

Pomenuli smo da se rešenja zakona održanja mogu pronaći u klasama Kolomboovih uopštenih funkcija ograničenog tipa. Kako bismo dobili egzistenciju i jedinstvenost rešenja u heterogenim sredinama izučavali smo pomenute klase uopštenih funkcija i pokazali osobinu uniformne ograničenosti istih, koja je bila esencijalna za dobijanje stabilnosti rešenja. Pokazano je da svakoj Kolomboovoj uopštenoj funkciji ograničenog tipa, što je klasa čiji su predstavnici familije glatkih ograničenih funkcija, možemo naći realne konstante a i b koje će biti uniformne granice svih predstavnika. Takođe je i objašnjena procedura kako se do njih dolazi. Na taj način smo koristeći uopštene funkcije sada precizirano a, b-ograničenog tipa mogli posmatrati esencijalan uslov za stabilnost zakona održanja sa heterogenom funkcijom fluksa, a to je da se funkcija fluksa anulira kada rešenje dostigne maksimalnu, odnosno minimalnu vrednost a ili b.

2. U ovom radu analiziramo familiju rešenja višedimenzionalnog zakona održanja sa funkcijom fluksa eksplicitno zavisnom od vremenske i prostorne promenljive regularizovanog iščezavajućim difuzionim i disperzivnim članom. Poboljšan je odnos difuzionog i disperzivnog parametra pod kojim dobijamo L^1_{loc}-kompaktnost ove familije rešenja. Uveden je novi pristup problemu pronalaženja difuziono-disperzivne granice za zakone održanja koji se bazira na Panovljevom proširenju pojma H-mere (ili mikrolokalne mere defekta) na nizove beskonačnih dimenzija i time dobijeno (hronološki) pojačanje sledećih rezultata (koji su svi dati za zakone održanja u homogenim sredinama): *Schonbek (1982)* L^1_{loc}-kompaktnost rešenja KdV jednačine uz odnos parametara $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, $\varepsilon \to 0$; *LeFloch, Natalini (1999)* za jednodimenzionalne zakone održanja u homogenim sredinama; *Kondo, LeFloch (2002)*, uz pojačan uslov $\delta = o(\varepsilon^2)$, za višedimenzionalne zakone održanja, korišćenjem koncepta meroznačnih rešenja i *Hwang (2006)* za višedimenzionalne zakone održanja koristeći kinetički pristup i Leme usrednjenja.

Precizno, glavni rezultat rada je da je familija glatkih rešenja $(u^{\varepsilon,\delta})_{\varepsilon,\delta}$ Košijevog problema za jednačinu

$$\partial_t u^{\varepsilon,\delta} + \mathrm{div}_x f(t,x,u^{\varepsilon,\delta}) = \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} b_j(\nabla_x u^{\varepsilon,\delta}) + \delta \sum_{j=1}^{d} \partial^3_{x_j^3} u^{\varepsilon,\delta} \qquad (1)$$

L^1_{loc}-prekompaktna ako je odnos disperzivnog parametra δ i difuzionog ε, $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{r+3}{r+1}})$, $\varepsilon \to 0$, za neko $r \geq 1$ (što je čak i u slučaju $r = 1$, $\delta = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ do sad najbolji dobijeni odnos parametara). Dobijen je između ostalog i kao posledica ovde pokazanog lokalizacijskog principa za H-meru pridruženu nizovima rešenja transportne jednačine u koju se transformiše jednačina (1).

3. U ovom radu proučavali smo Košijev problem za višedimenzionalni zakon održanja sa prekidnim i heterogenim fluksom. Pokazana je L^1_{loc}-kompaktnost niza rešenja aproksimacije pomenutog problema preko iščezavajuće viskoznosti i uglačavanja funkcije fluksa. Uslov prirodne nelinearnosti je standardan uslov koji se traži da nelinearne jednačine ispunjavaju za dokaz ovakvih rezultata. Medjutim, veliki broj jednačina ne ispunjava uslov prirodne nelinearnosti, a njihove regularizacije imaju L^1_{loc}-kompaktna rešenja (neki primeri pomenutih su dati u radu). Stoga je uveden tzv. uopšteni uslov prirodne nelinearnosti, znatno slabiji od postojećeg, koga zadovoljava velik broj jednačina koje ne zadovoljavaju standardni, i pod novim uslovom pokazana je pomenuta kompaktnost rešenja.

Na taj način smo pokazali postojanje slabog rešenja Košijevog problema višedimenzionalnog zakona održanja kada funkcija fluksa ne mora biti nužno prirodno nelinearna. Navešćemo ovde novi uopšteni uslov prirodne nelinearnosti kako bi se videlo da ga stvarno zadovoljava veliki broj vektorskih funkcija. Dakle, vektorska funkcija $(f_1, ..., f_d) \in \left(C^1(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^d))\right)^d$ zadovoljava uopšteni uslov prirodne nelinearnosti ukoliko postoji funkcija $h(x_1, ..., x_d, \lambda) \in C^1(\mathbb{R}_\lambda; L^\infty(\mathbb{R}^d))$ takva da za skoro sve $x \in \mathbb{R}^d$ i sve $(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_d) \neq 0$ linearna kombinacija $\xi_0 h + \xi_1 f_1 + ... + \xi_d f_d$ nije konstantna funkcija po λ ni na jednom netrivijalnom intervalu. Poređenja radi, klasični uslov prirodne nelinearnosti zahteva da linearna kombinacija $\xi_0 \lambda + \xi_1 f_1 + ... + \xi_d f_d$ nije konstantna funkcija po λ ni na jednom netrivijalnom intervalu. Rezultat je dobijen kao posledica L^1_{loc}-kompaktnosti rešenja pomenutog regularizovanog problema.

U Novom Sadu, 12.5.2013.

Jelena Aleksić