



Univerzitet u Novom Sadu  
Prirodno-matematički fakultet  
Departman za matematiku i informatiku



Buda Bajić

# GENERACIJA SCENARIJA U STOHAISTIČKIM PROCESIMA ODLUČIVANJA SA VIŠE ETAPA

Master rad

Novi Sad, 2012

# SADRŽAJ

<b>Predgovor</b>	<b>i</b>
<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2 Stohastičko programiranje</b>	<b>5</b>
2.1 Model inventara sa jednom etapom odlučivanja . . . . .	5
2.2 Uslov ograničenja gubitka . . . . .	10
2.3 Model inventara sa više etapa odlučivanja . . . . .	11
<b>3 Skriveni lanci Markova</b>	<b>13</b>
3.1 Lanci Markova . . . . .	14
3.2 Skriveni lanci Markova . . . . .	15
3.3 Geometrijsko Braunovo kretanje . . . . .	18
3.4 Skriveni lanci Markova sa geometrijskim Braunovim kretanjem . . . . .	18
<b>4 Generisanje drveta scenarija</b>	<b>21</b>
4.1 Aproksimacija problema stohastičke optimizacije sa jednom etapom odlučivanja . . . . .	22
4.2 Aproksimacija slučajne promenljive . . . . .	25
4.3 Aproksimacija problema stohastičke optimizacije sa više etapa odlučivanja	30
<b>5 CVaR</b>	<b>32</b>
5.1 CVaR u problemima portfolio optimizacije . . . . .	37
<b>6 Rezultati numeričkog eksperimenta</b>	<b>43</b>
<b>7 Zaključak</b>	<b>52</b>
<b>Prilozi</b>	<b>i</b>
Prilog 1: MatLab - Ocena GBM parametara . . . . .	ii
Prilog 2: MatLab - Generacija scenarija . . . . .	v
Prilog 3: MatLab - Generacija drveta scenarija . . . . .	vi

Prilog 4: AMPL - Rešenje problema optimizacije . . . . .	viii
<b>Literatura</b>	<b>i</b>

# Predgovor

*U ovom radu rešavan je problem konstruisanja optimalnog portfolija kojeg je moguće re-balansirati, odnosno menjati mu količine pojedinih aktiva, u trenucima između početnog i krajnjeg trenutka investicionog perioda. Obzirom da ovaj problem predstavlja primer problema stohastičkog programiranja sa više etapa, objašnjeni su osnovni koncepti problema stohastičkog programiranja sa jednom i više etapa. Takođe su iznete teorijske osnove modela korišćenog za modelovanje cena rizičnih aktiva u budućnosti kao i metode za generisanje drveta scenarija neophodnog za rešavanje problema portfolio optimizacije. Korišćena mera rizika portfolija u radu je uslovna vrednost pod rizikom (CVaR) čije će najvažnije osobine biti u radu navedene i dokazane. Primer problema konstruisanja optimalnog portfolija je implementiran i rešen u programskim paketima MatLab i AMPL. Na kraju rada su dati numerički rezultati rešavanog problema portfolio optimizacije.*

## Pregled oznaka

U sledećoj tabeli su predstavljene najvažnije oznake koje su korišćene u radu:

Oznaka	Značenje
$t = 0, 1, \dots, T$	vremenski horizont ulaganja
$B$	početno bogatstvo
$\mathcal{A}$	skup aktiva
$\mathcal{N}^t$	skup čvorova drveta scenarija u trenutku $t$
$l_t$	kardinalni broj skupa $\mathcal{N}^t$
$p(n)$	prethodnik čvora $n$ drveta scenarija
$x_{n,a}$	količina novca uložena u aktivu $a \in \mathcal{A}$ u čvoru $n$
$r_{n,a}$	1+prinos aktive $a \in \mathcal{A}$ u čvoru $n$
$z_n$	pomoćna promenljiva (CVaR)
$\gamma$	pomoćna promenljiva (CVaR)
$\kappa$	koeficijent averzije prema riziku
$\alpha$	nivo značajnosti
$f$	funkcija troška/gubitka
$G$	funkcija raspodele slučajne promenljive
$\{X_t\}_t$	lanac Markova
$Q_N$	skup stanja lanca Markova
$A$	matrica prelaza lanca Markova
$\pi$	vektor inicijalnih verovatnoća lanca Markova
$\{Y_t\}_t$	proces cena
$\{r_t\}_t$	proces prinosa
$\sigma$	vektor volatilnosti
$\mu$	vektor driftova
$d_w$	<i>Wasserstein</i> metrika
$\varphi(x, \delta)$	funkcija raspodele gubitka $f(x, y)$
$\delta_\alpha(x)$	$\alpha$ -VaR gubitka
$\phi_\alpha(x)$	$\alpha$ -CVaR gubitka

Tabela 1: Lista oznaka.

# Pregled definicija

Sledi pregled osnovnih definicija.

**Definicija 1 ( $\sigma$ -algebra).**  $\sigma$ -algebra ( $\sigma$ -polje) nad skupom  $\Omega$  je podskup  $\mathcal{F}$  partitivnog skupa  $\mathcal{P}(\Omega)$  ukoliko važe sledeći uslovi:

1.  $\Omega \in \mathcal{F}$ ,
2.  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$  pri čemu je  $A^C$  komplement skupa  $A$ ,
3.  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$ .

**Definicija 2 (Borelova  $\sigma$ -algebra).** Borelovo  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  je najmanja  $\sigma$ -algebra koje sadrži sve zatvorene skupove skupa realnih brojeva.

**Definicija 3 (Funkcija verovatnoće).** Neka je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra nad  $\Omega$ . Funkcija  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  se zove funkcija verovatnoće ako važe sledeći uslovi:

1.  $P(\Omega) = 1$ ,
2.  $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots \Rightarrow P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ .

Uređena trojka  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se naziva prostor verovatnoće.

**Definicija 4 (Slučajna promenljiva).** Funkcija  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  se zove slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ako za svako  $B \in \mathcal{B}$  važi  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ , gde je  $\mathcal{B}$  Borelova  $\sigma$ -algebra. Ekvivalentno, kaže se da je  $X$   $\mathcal{F}$ -merljivo.

1. Slučajna promenljiva  $X$  je diskretnog tipa ako postoji prebrojiv skup  $R_X \subset \mathbb{R}$ , takav da je  $P(\{X \in R_X\}) = 1$ .
2. Slučajna promenljiva  $X$  je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna, integrabilna funkcija  $\varphi(x)$  takva da za svaki Borelov skup  $B \in \mathcal{B}$  važi  $P(\{X \in B\}) = \int_B \varphi(x) dx$ . Funkcija  $\varphi(x)$  se naziva funkcija gustine slučajne promenljive  $X$ .

**Definicija 5 (Funkcija raspodele).** Funkcija  $G(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definisana sa

$$G(x) = P(X(\omega) < x),$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive  $X$ .

**Definicija 6 (Normalna raspodela).** Nепrekidna slučajna promenljiva  $X$  ima normalnu  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$  raspodelu,  $m \in \mathbb{R}$  i  $\sigma > 0$ , ako je njena funkcija gustine data sa:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R},$$

a funkcija raspodele:

$$\phi(x) = G(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Kada su parametri normalne raspodele  $m = 0$  i  $\sigma^2 = 1$  dobija se normalna  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspodela koja se naziva standardizovana normalna raspodela.

**Definicija 7 (Očekivanje).** Očekivanje slučajne promenljive  $X$ ,  $E(X)$ , se definiše:

1.  $E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$  ako je  $X$  diskretna slučajna promenljiva sa skupom vrednosti koje uzima  $R_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ ,
2.  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(x)dx$ , ukoliko je  $X$  neprekidnog tipa sa funkcijom gustine  $\varphi(x)$ .

**Definicija 8 (Zakoni velikih brojeva).** Neka je niz  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  niz slučajnih promenljivih sa jednakim raspodelama i konačnim očekivanjem  $E(X)$  i neka je  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  empirijska srednja vrednost niza. Tada važi:

1. **Slab zakon velikih brojeva.**  $\bar{X}_n$  konvergira u verovatnoći ka  $E(X)$ , odnosno važi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - E(X)| < \epsilon) = 1,$$

za svako  $\epsilon > 0$ .

2. **Jak zakon velikih brojeva.**  $\bar{X}_n$  konvergira skoro sigurno ka  $E(X)$ , odnosno važi:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = E(X)) = 1.$$

**Definicija 9 (Stohastički proces).** Familija slučajnih promenljivih  $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$  definisanih na istom prostoru verovatnoća  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se naziva stohastički proces.

Da se primetiti da je stohastički proces funkcija dve promenljive:  $t \in \mathcal{T}$  i  $\omega \in \Omega$ . Ako se fiksira  $t \in \mathcal{T}$  dobija se jedna slučajna promenljiva  $X(\omega)$ , a ukoliko se fiksira  $\omega \in \Omega$  dobija se jedna realna funkcija  $X(t)$  definisana na skupu  $\mathcal{T}$ .

U radu će se uglavnom pretpostavljati da je parametarski skup  $\mathcal{T}$  konačan skup diskretnih vremenskih trenutaka  $\mathcal{T} = t = 0, 1, \dots, T$ .

**Definicija 10 (Braunovo kretanje).** Za stohastički proces  $\widetilde{W}_t, t \geq 0$  se kaže da je Braunovo kretanje sa driftom  $\mu$  i volatilnošću  $\sigma$  ako:

1.  $\widetilde{W}_0 = 0$ ;
2.  $\widetilde{W}_t$  ima nezavisne priraštaje, to jest za  $0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$ , slučajne promenljive  $\widetilde{W}_{t_1} - \widetilde{W}_{t_0}, \widetilde{W}_{t_2} - \widetilde{W}_{t_1}, \dots, \widetilde{W}_{t_n} - \widetilde{W}_{t_{n-1}}, \dots$  su nezavisne;
3.  $\widetilde{W}_s - \widetilde{W}_t : \mathcal{N}(\mu(s-t), \sigma^2(s-t)), s \geq t \geq 0$ .

**Definicija 11 (Geometrijsko Braunovo kretanje).** Stohastički proces  $e^{\widetilde{W}_t}, t \geq 0$  predstavlja geometrijsko Braunovo kretanje gde je  $\widetilde{W}_t$  Braunovo kretanje.

**Definicija 12 (Osobina sublinearnosti funkcije).** Funkcija  $g : X \rightarrow Y$  je sublinearna, ako zadovoljava sledeća dva uslova:

- a.  $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$  za sve  $x, y \in X$
- b.  $g(\theta x) = \theta g(x)$  za svako  $x \in X$  i proizvoljno  $\theta > 0$ .

Osobina b. se naziva pozitivna homogenost.

**Definicija 13 (Osobina konveksnosti funkcije).** Funkcija  $g : X \rightarrow Y$  je konveksna, ako zadovoljava sledeći uslov:

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y)$$

za sve  $x, y \in X$  i proizvoljno  $\alpha \in (0, 1)$ .



# 1

## Uvod

Pretpostavimo da raspoložemo određenom količinom novca  $B$ , i da postoji mogućnost ulaganja u aktive iz skupa  $\mathcal{A}$ <sup>1</sup>. Želimo da danas (u  $t = 0$ ) formiramo investicioni portfolio ulaganjem inicijalnog bogatstva  $B$  u aktive iz skupa  $\mathcal{A}$ , tako da na kraju perioda ulaganja  $t = T$  maksimiziramo bogatstvo. Pri tome postoji mogućnost rebalansiranja<sup>2</sup> portfolija u trenucima  $t = 1, 2, \dots, T - 1$ .

Obzirom da se govori o budućnosti koja je nepoznata u momentu donošenja odluke odnosno postoji neizvesnost po pitanju njene realizacije, opravdano je govoriti o maksimizaciji **očekivanog bogatstva**. Kao i obično, kod problema konstrukcije optimalnog portfolija nije dovoljno težiti samo maksimizaciji profita, jer bi to često vodilo ulaganju celokupnog bogatstva u najprofitabilniju, ali ujedno i najrizičniju aktivu. Mora se, dakle, sem maksimizacije profita na kraju perioda, voditi računa i o rizičnosti portfolija. U ovom radu kao mera rizika će se koristiti *CVaR*.

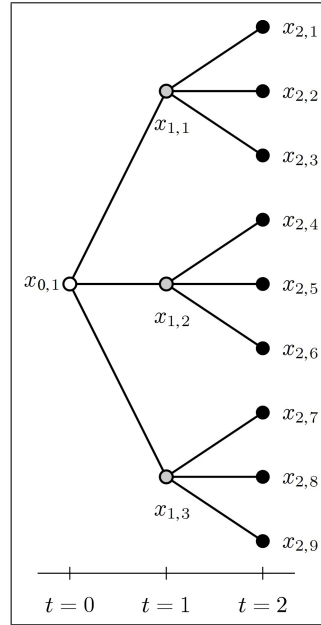
Ovako opisan problem konstruisanja optimalnog portfolija je primer **problema stohastičkog programiranja sa više etapa**, stohastičkog, jer uključuje neizvesnost, a sa više etapa, jer postoji mogućnost rebalansiranja portfolija.

Kako bi se mogao matematički modelovati opisan problem konstruisanja optimalnog portfolija, uvodi se pojam **drveta scenarija**. Neka je dat diskretan stohastički proces  $\{X_t\}_{t=0,1,\dots,T}$  čiji su mogući ishodi u svakom vremenskom trenutku  $t = 0, 1, \dots, T$  predstavljeni u formi drveta prikazanog na slici 1.1.

---

<sup>1</sup>Broj elemenata skupa  $\mathcal{A}$  je najmanje 2 i on se sastoji od rizičnih i nerizičnih aktiva.

<sup>2</sup>Mogućnost rebalansiranja podrazumeva mogućnost prodaje određene količine neke aktive iz portfolija i za dobijeni novac kupovinu neke druge aktive iz portfolija.



Slika 1.1: Drvo scenarija

Svaki čvor drveta predstavlja jedan mogući ishod stohastičkog procesa, dok grane drveta objašnjavaju veze između pojedinih ishoda. Skup čvorova drveta scenarija u vremenskom trenutku  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$  će biti označen sa  $\mathcal{N}^t = \{(t, 1), (t, 2), \dots, (t, l_t)\}$ , pri čemu je  $l_t$  kardinalni broj datog skupa. Sa  $x_{t,i}$  se označava vrednost procesa  $\{X_t\}_{t=0,1,\dots,T}$  u čvoru  $(t, i)$  skupa  $\mathcal{N}^t$ . Sa slike 1.1 se vidi, da proces iz stanja  $x_{1,1}$  u sledećem vremenskom trenutku može da dospe u stanje  $x_{2,1}$ , a ne može u stanje  $x_{2,4}$ . Definisaće se još i funkcija  $p(n)$ , koja za svaki čvor  $n \in \mathcal{N}^t$ ,  $t = 1, \dots, T$  drveta scenarija vraća čvor koji mu prethodi. Primera radi, sa slike 1.1 se vidi da je  $p((2, 1)) = (1, 1)$ . Bitno je napomenuti da svaki čvor drveta scenarija ima jednog i samo jednog prethodnika. Takođe, uvodi se pojam scenario staze. Scenario staza predstavlja skup čvorova drveta scenarija gde su svaka dva susedna čvora međusobno spojena granom. Primer scenario staze sa slike 1.1 je skup događaja  $\{x_{0,1}, x_{1,1}, x_{2,1}\}$ . Svako drvo scenarija sadrži ukupno  $l_T$  scenario staza koje završavaju u čvorovima iz skupa  $\mathcal{N}^T$ .

Neka su moguće vrednosti prinosa svih aktiva iz skupa  $\mathcal{A}$  na kraju svakog vremenskog perioda  $t = 0, 1, 2, \dots, T$  diskretne i neka su date u formi drveta scenarija, tako da ta drva scenarija imaju međusobno istu strukturu<sup>3</sup>. Sa  $r_{n,a}$  će se označiti prinos aktive  $a \in \mathcal{A}$  u čvoru  $n \in \mathcal{N}^t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$  drveta scenarija uvećan za jedan. Drvo scenarija prinosa određene aktive rezultat je modela za modelovanje kretanja cena i prinosa u budućnosti na osnovu istorijskih podataka kao i modela za generisanje drveta

<sup>3</sup>Struktura drveta scenarija čini broj čvorova u pojedinim vremenskim trenucima i broj grana koje kreću iz pojedinih čvorova.

scenarija<sup>4</sup>. Dalje, neka je  $x_{n,a}$  količina novca investirana u aktivu  $a \in \mathcal{A}$  u čvoru  $n \in \mathcal{N}^t$  gde  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ , i neka su  $p_n$ ,  $n \in \mathcal{N}^T$  verovatnoće scenario staza koje završavaju u krajnjim čvorovima. Konačno, rešava se sledeći problem:

$$\max_x \sum_{n \in \mathcal{N}^T} p_n \left( \sum_{a \in \mathcal{A}} r_{n,a} x_{p(n),a} \right) + \kappa \left( \gamma - \sum_{n \in \mathcal{N}^T} \frac{p_n z_n}{1 - \alpha} \right) \quad (1.1)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} x_{n,a} = B, \quad \forall n \in \mathcal{N}^0 \quad (1.2)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} x_{n,a} = \sum_{a \in \mathcal{A}} r_{n,a} x_{p(n),a}, \quad \forall n \in \mathcal{N}^t, \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \quad (1.3)$$

$$z_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}^T \quad (1.4)$$

$$z_n \geq \gamma - \sum_{a \in \mathcal{A}} r_{n,a} x_{p(n),a}, \quad \forall n \in \mathcal{N}^T \quad (1.5)$$

Funkcija cilja se sastoji od dva dela, prvi deo  $\sum_{n \in \mathcal{N}^T} p_n (\sum_{a \in \mathcal{A}} r_{n,a} x_{p(n),a})$  predstavlja očekivano bogatstvo na kraju investicionog perioda gde izraz  $\sum_{a \in \mathcal{A}} r_{n,a} x_{p(n),a}$  predstavlja bogatstvo ostvareno u čvoru  $n \in \mathcal{N}^T$ . Drugi deo funkcije cilja se odnosi na minimizaciju *CVaR* mere rizika.

Uslov (1.2) je uslov da se u  $t = 0$  ulaže suma novca  $B$  u aktive iz skupa  $\mathcal{A}$ . Uslov (1.3) je uslov rebalansiranja portfolija. On govori o tome da za svaki čvor drveta scenarija ukupna svota novca uložena u aktive portfolija mora biti jednaka sumi novca koja je bila uložena u čvoru prethodniku uvećanoj za prinose pojedinih aktiva. Uslovi (1.4) i (1.5) se odnose na minimizaciju *CVaR*-a.

Navedeni problem predstavlja model konstruisanja portfolija sa maksimalnim bogatstvom i minimalnim rizikom na kraju investicionog horizonta, pri čemu je dozvoljeno rebalansiranje portfolija u vremenskim trenucima između početnog ( $t = 0$ ) i krajnjeg trenutka ( $t = T$ ).

Kao što je rečeno, navedeni problem je posebna vrsta problema stohastičkog programiranja. Stoga će u glavi 2 biti izneti osnovni koncepti koji se tiču modeliranja i rešavanja problema stohastičkog programiranja.

Ono što je neophodno da bi se prethodno opisani problem rešio jeste najpre specifikacija aktiva u koje se želi ulagati. Kada je poznat skup aktiva preostaje da se modeluje kretanje njihovih cena. U ovom radu je za modelovanje cena aktiva na osnovu istorijskih podataka korišćen model zasnovan na **skrivenim lancima Markova** i **geometrijskom Braunovom kretanju** i on je opisan u glavi 3.

---

<sup>4</sup>Ovi modeli će biti naknadno opisani u radu.

Nakon što su izmodelovani neprekidni stohastički procesi koji opisuju kretanje cene rizičnih aktiva, neophodno je diskretizovati ih i predstaviti u formi drveta scenarija tj. formi potrebnoj da bi se problem portfolio optimizacije učinio rešivim. Model koji se u ovom radu koristi za diskretizaciju stohastičkih procesa i generisanje drveta scenarija je detaljno izložen u glavi 4.

Najzad, u glavi 5 je predstavljena teorijska podloga korišćene mere rizika  $CVaR$  i izložene su njene osnovne osobine koje svedoče o njenoj superiornosti u odnosu na druge mere rizika.

Glava 6 predstavlja rezultate dobijene rešavanjem prethodno definisanog modela konstrukcije optimalnog portfolija za odabrane aktive u koje želimo da ulažemo i za konkretne vrednosti parametara.

## 2

# Stohastičko programiranje

Za razliku od determinističkih problema optimizacije u čijim formulacijama figurišu poznati parametri, problemi u realnom životu najčešće sadrže parametre koji su nepoznati u trenutku donošenja odluke. Primer može biti konstruisanje portfolija sačinjenog od aktiva čiji su prinosi neizvesni u budućnosti ili pak osmišljavanje ruta za svakodnevnu dostavu mleka potrošačima čija je tražnja neizvesna. Stohastičko programiranje je pristup modeliranju problema optimizacije koji uključuju neizvesnost.

Neizvesnost je često opisana raspodelom verovatnoća mogućih ishoda (prinosi aktiva, tražnja za mlekom itd.), do koje se dolazi na osnovu istorijskih podataka. Cilj je optimizovati očekivanu vrednost funkcije cilja, koja predstavlja funkciju odluke i slučajne promenljive (raspodele verovatnoće).

Kao uvodni problem navešće se model inventara (*Inventory problem*). On će poslužiti kao ilustracija kako se modeluju problemi stohastičkog programiranja i kroz njega će se sagledati njihovi važni aspekti.

## 2.1 Model inventara sa jednom etapom odlučivanja

Neka jedna kompanija koja se bavi distribucijom nekog proizvoda mora da odluči koju količinu  $x$  tog proizvoda treba danas da naruči da bi zadovoljio sutrašnju tražnju  $d$ . Trošak naručivanja je  $c > 0$  po jedinici proizvoda. Ako je tražnja  $d$  veća od  $x$ , tada je potrebno naručiti još dodatnih jedinica proizvoda po ceni od  $b \geq 0$  po jedinici proizvoda. Trošak dodatnog naručivanja je jednak  $b(d - x)$  ukoliko je  $d > x$ , u suprotnom je jednak nuli. S druge strane ukoliko je  $d < x$ , javljaju se troškovi skladištenja koji su jednaki  $h(x - d) \geq 0$ . Ukupni troškovi su tada jednaki:

$$f(x, d) = cx + b[d - x]^+ + h[x - d]^+, \quad (2.1)$$

gde je  $[a]^+ = \max\{a, 0\}$ . Važi da je  $b > c$  tj. da su troškovi naknadnog naručivanja veći od troškova prvobitnog naručivanja.

Najpre se posmatra slučaj u kome je **tražnja  $d$  poznata**. Cilj je minimizirati ukupni trošak  $f(x, d)$ , gde je  $x$  promenljiva odluke, a  $d$  parametar. Odgovarajući problem optimizacije se može formulirati na sledeći način:

$$\min_{x \geq 0} f(x, d). \quad (2.2)$$

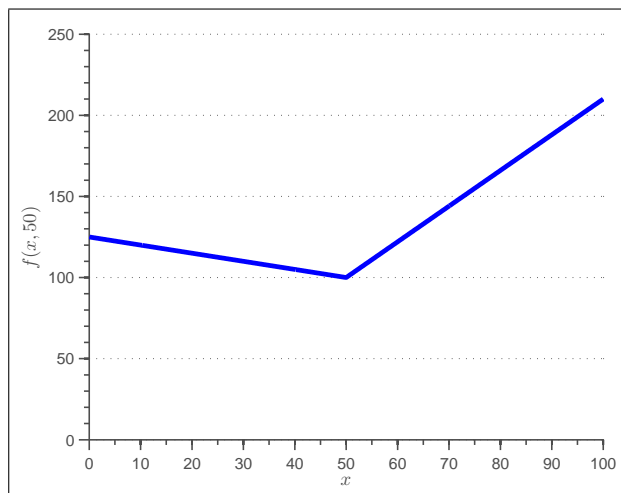
Funkcija cilja  $f(x, d)$  je tada:

$$f(x, d) = \max\{(c - b)x + bd, (c + h)x - hd\}. \quad (2.3)$$

Ova funkcija je po delovima linearna i maksimum dostiže za  $\bar{x} = d$ . Jasno je da je u slučaju kada je tražnja  $d$  poznata najbolja odluka naručiti tačno onoliko proizvoda koliko se i traži odnosno  $d$ . Neka je  $c = 2$ ,  $b = 2.5$  i  $h = 0.2$ . Tada je:

$$f(x, d) = \begin{cases} -0.5x + 2.5d, & \text{za } x < d \\ 2.2x - 0.2d, & \text{za } x \geq d \end{cases} \quad (2.4)$$

Za  $d = 50$ ,  $f(x, 50)$  je prikazana na slici 2.1 i minimum dostiže u  $\bar{x} = 50$ .



Slika 2.1: Funkcija cilja  $f(x, 50)$

Koristeći reprezentaciju funkcije  $f(x, d)$  datu izrazom (2.3), problem (2.2) se može predstaviti i kao problem linearnog programiranja:

$$\min_{x, t} t \quad (2.5)$$

$$t \geq (c - b)x + bd \quad (2.6)$$

$$t \geq (c + h)x - hd \quad (2.7)$$

$$x \geq 0. \quad (2.8)$$

Dalje, neka sada odluka o tome koliko jedinica proizvoda naručiti mora biti doneta pre nego postane poznato kolika je tražnja. Stoga tražnju  $D$  treba posmatrati kao slučajnu promenljivu<sup>1</sup>. Neka je raspodela slučajne promenljive  $D$  poznata<sup>2</sup>. Opravdano je pričati o **očekivanoj** vrednosti ukupnih troškova u oznaci  $E[f(x, D)]$  i problem optimizacije napisati u obliku:

$$\min_{x \geq 0} E[f(x, D)]. \quad (2.9)$$

Prethodna formulacija predstavlja minimizaciju prosečnih ukupnih troškova. Opravdanje ovakvog pristupa je da kada se proces ponavlja, na osnovu zakona velikih brojeva, za fiksirano  $x$ , prosečni ukupni troškovi konvergiraju ka očekivanju  $E[f(x, D)]$ .

Postavlja se pitanje kako rešiti problem optimizacije (2.9). Neka je funkcija raspodele slučajne promenljive  $D$  data sa  $G(z) := P(D \leq z)$ . Kako tražnja ne može biti negativna  $G(z) = 0$ , za svako  $z < 0$ . Dalje, važi tvrđenje sledeće leme.

**Lema 2.1.** [4]

$$E[f(x, D)] = bE[D] + (c - b)x + (b + h) \int_0^x G(z) dz. \quad (2.10)$$

**Dokaz.** Neka je  $v(x) = E[f(x, D)]$ . Funkcija  $v(x)$  je konveksna i neprekidna. Za  $x \geq 0$  važi:

$$v(x) = v(0) + \int_0^x v'(z) dz,$$

gde se pod izvodom  $v'(z)$  podrazumeva desni izvod u tačkama u kojima postoji. Kako je  $D \geq 0$  važi da je  $v(0) = bE[D]$ . Takođe je:

$$\frac{d}{dx} E[\max\{D - x, 0\}] = \text{Prob}(D \geq x)$$

i:

$$\frac{d}{dx} E[\max\{x - D, 0\}] = \text{Prob}(D \leq x)$$

te važi:

$$\begin{aligned} v'(z) &= c + \frac{d}{dz} E[\max\{D - z, 0\} + h \max\{z - D, 0\}] = \\ &= c - b \text{Prob}(D \geq z) + h \text{Prob}(D \leq z) = \\ &= c - bP(1 - G(z)) + hG(z) = \\ &= c - b + (b + h)G(z). \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Označava se sa velikim slovom  $D$  da bi se napravila razlika između slučajne promenljive i jedne njene realizacije  $d$ .

<sup>2</sup>Ovo ima smisla ukoliko se proces poručivanja često ponavlja te raspodela  $D$  može biti ocenjena na osnovu istorijskih podataka.

Konačno se dobija:

$$E[f(x, D)] = bE[D] + (c - b)x + (b + h) \int_0^x G(z) dz. \quad (2.11)$$

□

Diferenciranjem izraza (2.10) po  $x$  i izjednačavanjem sa nulom dobija se da je optimalno rešenje problema (2.2) dato sa:

$$\bar{x} = G^{-1}(s) \quad (2.12)$$

pri čemu je  $s := \frac{b-c}{b+h}$ .

Nažalost, za razliku od gornjeg problema, često u realnosti analitička rešenja problema stohastičkog programiranja ne postoje. Međutim, ukoliko je slučajna promenljiva  $D$  diskretna sa konačno mnogo ishoda odnosno ukoliko uzima vrednosti  $d_1, d_2, \dots, d_K$  koji se nazivaju scenariji, sa verovatnoćama  $p_1, p_2, \dots, p_K$ , problem stohastičkog programiranja se može modelovati kao problem determinističke optimizacije zahvaljujući tome što se očekivana vrednost  $E[f(x, D)]$  u tom slučaju može napisati kao ponderisana suma:

$$E[f(x, D)] = \sum_{k=1}^K p_k f(x, d_k). \quad (2.13)$$

Analogno predstavi determinističkog problema  $\min f(x, d)$  u formi problema linearnog programiranja datog sa (2.5)- (2.8), i problem  $\min \sum_{k=1}^K p_k f(x, d_k)$  se može predstaviti kao problem linearnog programiranja kojeg je moguće rešiti:

$$\min_{x, t_1, \dots, t_K} \sum_{k=1}^K p_k t_k \quad (2.14)$$

$$t_k \geq (c - b)x + b d_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.15)$$

$$t_k \geq (c + h)x - h d_k, \quad k = 1, \dots, K, \quad (2.16)$$

$$x \geq 0. \quad (2.17)$$

Sledi primer u kom će se uporediti funkcija cilja problema inventara kada je tražnja  $D$  neprekidna slučajna promenljiva sa aproksimiranom funkcijom cilja dobijenim na osnovu aproksimacije tražnje  $D$  diskretnom slučajnom promenljivom. Neka vrednosti cena koje figurišu u formulaciji problema redom iznose  $c = 2$ ,  $b = 2.5$  i  $h = 0.2$ , i neka  $D$  ima unifromnu raspodelu na intervalu  $[0, 100]$  tj. njena funkcija raspodele je data sa:

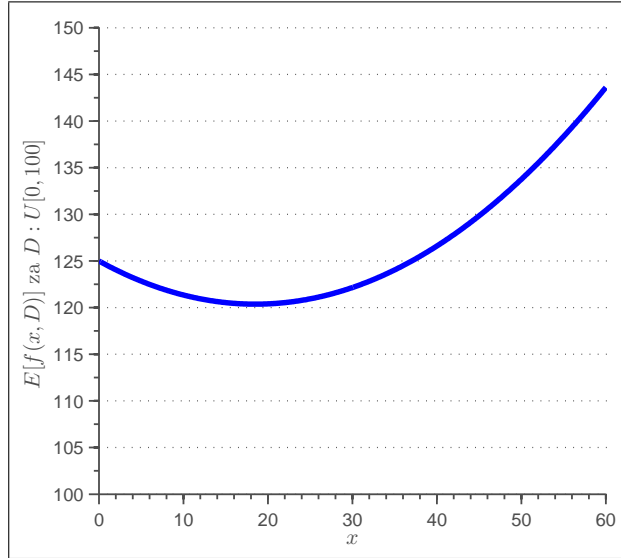
$$G(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{z}{100}, & 0 < z \leq 100 \\ 1, & 100 < z \end{cases} \quad (2.18)$$



Tada, za svako  $x \in [0, 100]$ , funkcija cilja na osnovu (2.10) iznosi:

$$E[f(x, D)] = bE[D] + (c - b)x + (b + h) \int_0^x G(z) dz = 2.5 \cdot 50 - 0.5x + 0.0135x^2, \quad (2.19)$$

i prikazana je na slici 2.2.

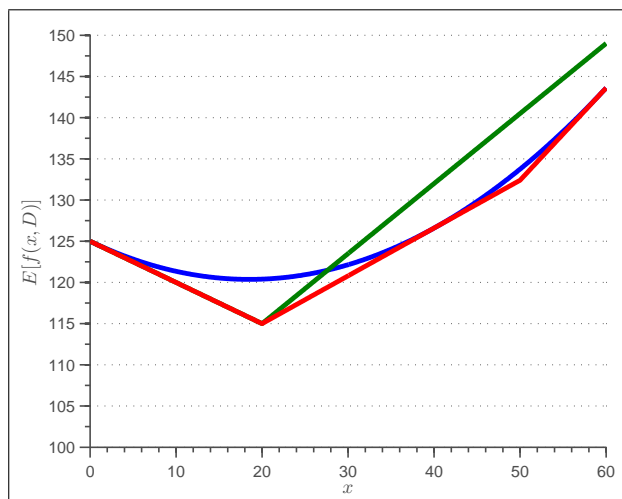


Slika 2.2: Funkcija cilja  $E[f(x, D)]$  za  $D : U[0, 100]$

Neka je zatim tražnja aproksimirana diskretnom slučajnom promenljivom sa dva podjednako verovatna scenarija  $d_1 = 20$  i  $d_2 = 80$ . Tada je aproksimirana funkcija cilja na osnovu (2.13):

$$E[f(x, D)] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 f(x, d_k), \quad (2.20)$$

i prikazana je na slici 2.3 zajedno sa funkcijom cilja za uniformno raspodeljenu  $D$ . Slika 2.3 takođe prikazuje istu konstrukciju sa tri scenarija  $d_1 = 20$ ,  $d_2 = 50$  i  $d_3 = 80$  sa verovatnoćama  $2/5$ ,  $1/5$  i  $2/5$ , respektivno. Očigledno više scenarija vodi boljoj aproksimaciji funkcije cilja.



Slika 2.3: Aproximirana funkcija cilja  $E[f(x, D)]$

Prethodni primer pokreće mnogobrojna pitanja. Kako aproksimirati neprekidnu slučajnu promenljivu diskretnom slučajnom promenljivom? Na koji način rešiti rezultujući aproksimirani problem optimizacije? Kako oceniti kvalitet dobijenog rešenja?

## 2.2 Uslov ograničenja gubitka

Obzirom da za pojedinačnu realizaciju tražnje  $D$ , troškovi  $f(\bar{x}, D)$  mogu biti prilično različiti u poređenju sa troškovima koji su prosečno optimalni tj. troškovima  $E[f(\bar{x}, D)]$ , prirodno pitanje je kako kontrolisati rizik da troškovi  $f(x, D)$  ne budu previše različiti od optimalnih. Na primer, za izabrani prag  $\tau > 0$ , može se dodati problemu (2.9) uslov  $f(x, D) \leq \tau$  koji mora biti zadovoljen za sve moguće realizacije tražnje  $D$ . Na ovaj način se osigurava da ukupni troškovi neće biti veći od  $\tau$  u svim mogućim slučajevima. Numerički, ovo znači da nejednakosti  $(c - b)x + bd \leq \tau$  i  $(c + h)x - hd \leq \tau$  moraju važiti za sve moguće realizacije  $d$  slučajne tražnje. Količina proizvoda  $x$  koju kompanija naručuje mora zadovoljiti sledeću nejednakost:

$$\frac{bd - \tau}{b - c} \leq x \leq \frac{hd + \tau}{c + h}, \text{ za sve realizacije } d. \quad (2.21)$$

Ovaj uslov je i te kako restriktivan. Ukoliko postoji samo jedna realizacija  $d$  veća od  $\frac{\tau}{c}$ , tada je nejednakost (2.21) nerešiva i odgovarajući problem nema dopustivih rešenja.

U ovakvim situacijama razumno je uvesti uslov da verovatnoća da trošak  $f(x, D)$  bude veći od  $\tau$  bude manja od neke unapred zadate vrednosti (nivoa signifikantnosti)  $1 - \alpha \in (0, 1)^3$ . Ovo vodi do takozvanog uslova ograničenja gubitka<sup>4</sup> koji može biti zapisan u

<sup>3</sup> $\alpha$  je najčešće 0.90, 0.95 ili 0.99.

<sup>4</sup>chance constraint

formi:

$$\text{Prob} \{f(x, D) > \tau\} \leq 1 - \alpha, \quad (2.22)$$

ili ekvivalentno:

$$\text{Prob} \{f(x, D) \leq \tau\} > \alpha. \quad (2.23)$$

Nakon dodavanja uslova (2.22) problemu optimizacije (2.9), novoformirani problem optimizacije opisuje minimizaciju ukupnih prosečnih troškova obezbeđujući istovremeno da rizik da troškovi budu suviše veliki bude mali (tj. verovatnoća da troškovi budu veći od  $\tau$  je manja od  $1 - \alpha$ ).

Tada:

$$\text{Prob} \{f(x, D) \leq \tau\} = \text{Prob} \left\{ \frac{(c+h)x - \tau}{h} \leq D \leq \frac{(b-c)x + \tau}{b} \right\}. \quad (2.24)$$

Za  $x \leq \tau/c$  nejednakost na desnoj strani 2.24 je konzistentna i za takvo  $x$  postaje:

$$\text{Prob} \{f(x, D) \leq \tau\} = G \left( \frac{(b-c)x + \tau}{b} \right) - G \left( \frac{(c+h)x - \tau}{h} \right). \quad (2.25)$$

Uslov ograničenja gubitka (2.23) predstavlja značajnu relaksaciju uslova (2.21) sa kojim je korespondentan.

Ovakva vrsta uslova gde se ograničava rizik da gubitak ne bude previše velik je veoma često korišćena u problemima portfolio optimizacije gde je cilj maksimizirati prinos ali ujedno je neophodno voditi računa da gubitak ne bude prevelik. Mera rizika data sa (2.22) je dobro poznata u portfolio optimizaciji i naziva se *VaR* mera rizika i o njoj i njenim osobinama će više biti reči u glavi 5. U primeru portfolio optimizacije sa više perioda koji se rešava u glavi 6, uslov ograničenja rizika je opisan pomoću *CVaR* mere rizika. Ona je superiornija po svojim osobinama u odnosu na *VaR* što će takođe biti pokazano u glavi 5.

## 2.3 Model inventara sa više etapa odlučivanja

Neka kompanija ima pred sobom vremenski horizont dug  $T$  vremenskih jedinica. Tražnja  $D_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$  predstavlja stohastički proces. Na početku, u  $t = 1$ , poznat je nivo zaliha  $y_1$  kojim raspolaže kompanija. U svakom trenutku  $t = 1, 2, \dots, T$  kompanija prvo registruje trenutni nivo zaliha  $y_t$  i tada donosi odluku koliko jedinica robe je potrebno da naruči kako bi ukupno raspolagala sa  $x_t$  jedinica robe. Stoga, ona u momentu  $t$  naručuje  $x_t - y_t$  jedinica robe pri čemu je zadovoljen uslov  $x_t \geq y_t$ . Nakon što je roba nabavljena, tražnja za robom  $d_t$ <sup>5</sup> se realizuje i određuje nivo zaliha kojim

<sup>5</sup>Kao i ranije, i ovde je sa  $d_t$  označena jedna realizacija slučajne promenljive  $D_t$ .

kompanija raspolaže na početku sledećeg vremenskog perioda  $t + 1$  je  $y_{t+1} = x_t - d_t$ . Ukupni troškovi nastali u trenutku  $t$  iznose:

$$c_t(x_t - y_t) + b_t[d_t - x_t]^+ + h_t[x_t - d_t]^+, \quad (2.26)$$

gde su  $c_t$ ,  $h_t$  i  $b_t$  troškovi naručivanja, skladištenja i naknadnog naručivanja po jedinici proizvoda, respektivno, u trenutku  $t$ . Važi da je  $b_t > c_t > 0$  i  $h_t \geq 0$ ,  $t = 1, 2, \dots, T$ . Cilj je minimizirati očekivanu vrednost ukupnih troškova ostvarenih tokom čitavog vremenskog horizonta. Ovo može biti zapisano kao sledeći problem optimizacije:

$$\min_{x_t \geq y_t} \sum_{t=1}^T E\{c_t(x_t - y_t) + b_t[D_t - x_t]^+ + h_t[x_t - D_t]^+\}, \quad (2.27)$$

$$y_{t+1} = x_t - D_t, \quad t = 1, 2, \dots, T - 1. \quad (2.28)$$

Za  $T = 1$  gore navedeni problem je ekvivalentan problemu (2.9) (jedina razlika ovde je pretpostavka o inicijalnom nivou zaliha  $y_1$ ).

Jedan od najčešće korišćenih pristupa za rešavanje problema sa više etapa odlučivanja je pristup diskretizacije stohastičkog procesa  $D_1, \dots, D_T$  u formu drveta scenarija. Ovaj pristup je objašnjen u glavi 4 i biće primenjen u rešavanju primera problema portfolio optimizacije sa dve etape odlučivanja (glava 6).

Najpre sledi opis pristupa koji će biti korišćen za modelovanje stohastičkog procesa cena rizičnih aktiva i za generisanje velikog broja scenario staza u periodu investiranja. Scenario staze će biti polazna tačka za generisanje drveta scenarija.

## 3

# Skriveni lanci Markova

Kao što je i opisano u formulaciji problema portfolio optimizacije (glava 1), budući prinosi mnogih aktiva su nepoznati te je i ishod portfolio optimizacije nepoznat. Cilj kod ovakvih problema je postići optimalnu kombinaciju rizika i očekivanog prinosa koja se postiže rešavanjem stohastičkih programa odnosno problema optimizacije u kojima su neki parametri<sup>1</sup> nepoznati ali su opisani pomoću raspodele. Kod numeričkog rešavanja ovakvih problema neprekidne raspodele se aproksimiraju diskretnim raspodelama sa konačnim brojem ishoda (scenarija). Stoga, osnovni zadatak u vezi sa problemima finansijske optimizacije, pa samim tim i u vezi sa rešavanjem problema konstruisanja portfolija kao posebnim slučajem pomenutih problema, je generisati scenarije budućih realizacija vremenskih serija od značaja. Ovo je usko povezano sa odgovarajućim modeliranjem finansijske vremenske serije.

Geometrijsko Braunovo kretanje je jedna od standardnih metoda za modeliranje vremenskih serija. Glavni nedostatak ove metode je pretpostavka o konstantnim parametrima modela usled čega bitne osobine vremenskih serija poput grupisanja volatilnosti ne mogu biti opisane (uhvaćene). U cilju modeliranja cene akcije koristiće se model u kome parametri geometrijskog Braunovog kretanja mogu imati različite vrednosti u zavisnosti od režima, preciznije oni su upravljani ležećim procesom skrivenog lanca Markova.

Poslednjih godina, modeli zasnovani na skrivenim lancima Markova postaju sve popularniji za modeliranje vremenskih serija. Glavna ideja ovih modela je ta da su neke informacije na tržištu skrivene i ne mogu se opaziti. Skrивene informacije mogu predstavljati različita stanja poslovnih ciklusa poput ekspanzije, recesije i oporavka, koji svakako utiču na kretanje cena. Tržište može s vremena na vreme prelaziti iz jednog u drugo stanje, a svako stanje je okarakterisano različitim parametrima modela za stohastički proces koji je moguće opaziti. U ovom slučaju, jedan model je validan samo za

---

<sup>1</sup>U primeru portfolio optimizacije to su prinosi aktiva u budućnosti.

kratke periode dok modeli koji menjaju režime daju bolje rezultate. Skriveni modeli Markova su posebna vrsta modela koji mogu da menjaju režim rada.

### 3.1 Lanci Markova

**Definicija 3.1.** Diskretan stohastički proces  $\{X_t\}_t$  sa konačnim skupom stanja  $Q_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  se naziva lanac Markova ako zadovoljava sledeći uslov:

$$P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}), \forall t.$$

Stohastički proces se naziva lanac Markova ukoliko ga karakteriše osobina da stanje u kom se trenutno nalazi zavisi isključivo od prethodnog stanja u kom se proces nalazio. Bitno je napomenuti da su stanja lanca Markova međusobno isključiva i da se lanac Markova u određenom trenutku može naći samo u jednom od mogućih stanju.

Lanac Markova karakteriše i matrica prelaza  $A$  čiji elementi predstavljaju verovatnoće prelaza između pojedinih stanja. Element matrice  $A_{N \times N}$ ,  $a_{ij}$ , predstavlja verovatnoću da lanac pređe iz stanja  $x_i$  u stanje  $x_j$  u sledećem vremenskom trenutku, tj.  $a_{ij} = P(X_t = x_j | X_{t-1} = x_i)$  za svako  $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$  pri čemu važe uslovi  $0 \leq a_{ij} \leq 1$  i  $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$  za svako  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Pored skupa stanja  $Q_N$  i matrice prelaza  $A$ , lanac Markova karakteriše i vektor inicijalnih verovatnoća  $\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$  gde je  $\pi_i = P(X_0 = x_i)$  verovatnoća da proces startuje iz  $i$ -tog stanja. Takođe, važi da je  $0 \leq \pi_i \leq 1$  za svako  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  i  $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$ .

Koristeći osobinu Markova, lako je izračunati verovatnoću bilo kog niza događaja. Ilustracije radi, verovatnoća da se lanac Markova nađe redom u stanjima  $x_{l(1)}, x_{l(2)}, \dots, x_{l(k)}$  za proizvoljno  $k \in \{1, 2, \dots, N\}$  pri čemu  $l: \{1, 2, \dots, N\} \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$  predstavlja proizvoljnu permutaciju skupa  $\{1, 2, \dots, N\}$  data je sa:

$$\begin{aligned} & P(X_1 = x_{l(1)}, X_2 = x_{l(2)}, \dots, X_k = x_{l(k)}) = \\ & = P(X_1 = x_{l(1)}) P(X_2 = x_{l(2)} | X_1 = x_{l(1)}) P(X_3 = x_{l(3)} | X_1 = x_{l(1)}, X_2 = x_{l(2)}) \dots \\ & \dots P(X_k = x_{l(k)} | X_{k-1} = x_{l(k-1)}, \dots, X_1 = x_{l(1)}) = \\ & = P(X_1 = x_{l(1)}) P(X_2 = x_{l(2)} | X_1 = x_{l(1)}) P(X_3 = x_{l(3)} | X_1 = x_{l(1)}) \dots \\ & \dots P(X_k = x_{l(k)} | X_{k-1} = x_{l(k-1)}) = \\ & = \pi_{l(1)} \prod_{i=1}^{k-1} a_{l(i), l(i+1)}. \end{aligned}$$

Posledica prethodno objašnjenog postupka jeste da se verovatnoća prelaza između stanja u  $k$  koraka računa stepenovanjem matrice  $A$ . Verovatnoća da lanac iz  $i$ -tog

pređe u  $j$ -to stanje nakon  $k$  perioda je data sa  $P(X_{t+k} = x_j | X_t = x_i) = (A^k)_{ij}$ . Takođe, raspodela verovatnoća nakon  $k$  perioda je data sa  $\pi A^k$ .

## 3.2 Skriveni lanci Markova

Skriveni lanac Markova čine dva stohastička procesa, proces koji se može opaziti  $\{Y_t\}_t$  i proces koji upravlja njime  $\{X_t\}_t$  a koga nije moguće opaziti. Skriveni, ležeći proces  $\{X_t\}_t$  je diskretan lanac Markova sa konačnim skupom stanja  $Q_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$  koja su skrivena i nije ih moguće direktno uočiti. Lanac Markova opisuju međusobno isključiva stanja i ona opisuju sistem u svakom vremenskom trenutku. Jasno, zadovoljena je Markovljeva osobina  $P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_t = x_t | X_{t-1} = x_{t-1})$  koja govori da buduće ponašanje procesa zavisi jedino od trenutnog stanja a da je nezavisno od prethodnih stanja. U svakom skrivenom stanju lanca Markova, jedinstvena funkcija gustine upravlja opservacijama procesa  $\{Y_t\}_t$  te je u momentu  $t$ , opservacija  $y_t$  generisana stanjem  $x_i$  lanca Markova na sledeći način:  $b_{ij} = P(Y_t = y_j | X_t = x_i)$ .

Diskretan model skrivenog lanca Markova stoga karakterišu:

1. Skup stanja  $Q_N, i = 1, 2, \dots, N$ .
2. Skup opservacija  $\{y_j\}_{j=1, \dots, K}$ .
3. Verovatnoće početnog stanja lanca Markova  $\pi(X_0 = x_i), i = \{1, 2, \dots, N\}$ .
4. Skup verovatnoća prelaza lanca Markova koji je predstavljen matricom prelaza  $A$  gde su  $a_{ij} = P(X_t = x_j | X_{t-1} = x_i)$  pri čemu je  $0 \leq a_{ij} \leq 1$  i  $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$  za svako  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ .
5. Skupovi funkcija gustine  $B_i$ , za  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  tj. skupovi  $B_i = \{b_{ij} = P(Y_t = y_j | X_t = x_i), j = 1, 2, \dots, K\}$  čiji elementi  $b_{ij}$  daju verovatnoće da opservabilan proces uzme vrednost  $y_j$  ako je skriveni lanac u stanju  $x_i$ .

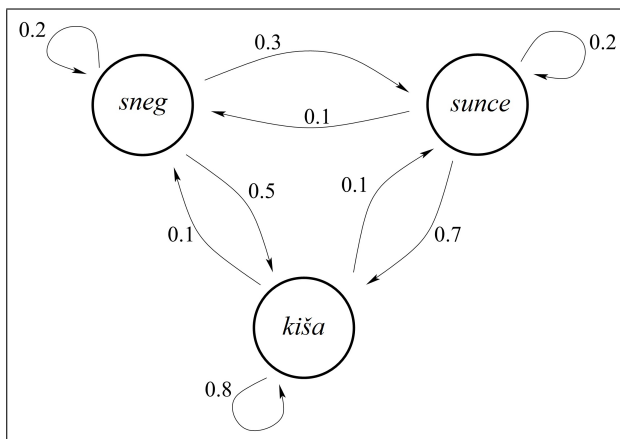
Koncept skrivenih lanaca Markova najbolje je razumeti kroz konkretan **primer**.

Ana potiče iz neke od zemalja sa konstantno toplom klimom, na primer iz Kalifornije. Ona se nedavno preselila u Nemačku, zemlju sa promenljivim vremenom. Promenljivo vreme u Nemačkoj utiče na njeno raspoloženje, i ona to shvata i pokušava da pronađe način da ga predvidi. Takođe, nakon izvesnog vremena Ana uočava da vreme nije potpuno proizvoljno i da vreme u određenom danu zavisi isključivo od vremenskih uslova prethodnog dana. Radi jednostavnosti, svaki dan je okarakterisan sa jednim od tri tipa vremenskih uslova: sunčano vreme, oblačno/kišovito i snežno. Nakon evidentiranja

vremenskih uslova tokom određenog broja dana, Ana uočava određene zavisnosti: ako je jedan dan snežan, verovatnoća da sledeći bude snežan je 0.2, verovatnoća da naredni dan bude kišovit je 0.5 a da bude sunčan 0.3. Sva njena zapažanja su sumirana u matrici  $A_{3 \times 3}$  čiji element  $a_{ij}$  predstavlja verovatnoću da nastupi tip vremena  $j$  u narednom danu ukoliko su u prethodnom vremenski uslovi bili tipa  $i$ :

	sneg	kiša	sunce
sneg	0.2	0.5	0.3
kiša	0.1	0.8	0.1
sunce	0.1	0.7	0.2

Ovo je prikazano i na slici 3.1.



Slika 3.1: Grafička reprezentacija primera lanca Markova

Neka je sreda, i snežno je vreme i Ana želi da ide na skijanje u petak, želi da skija čitav vikend i volela bi da pada kiša u ponedeljak kako se ne bi osećala loše zbog povratka na posao. Stoga, ona je zainteresovana za verovatnoću sledećeg niza vremenskih uslova: snežno (sreda), snežno, sunčano, sunčano, sunčano, kišovito. Verovatnoća ovakvog događaja se može lako izračunati:

$$\begin{aligned}
 &P(\text{snežno danas})P(\text{sn}|\text{sn})P(\text{su}|\text{sn})P(\text{su}|\text{su})P(\text{su}|\text{su})P(\text{ki}|\text{su}) \\
 &= 1 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.7 = 0.00168.
 \end{aligned}$$

Do sada se govorilo o **lancu Markova**. Stanja predstavljaju vremenske uslove, i važi da stanje u datom vremenu zavisi isključivo od prethodnog stanja i opservacije predstavljaju niz stanja.

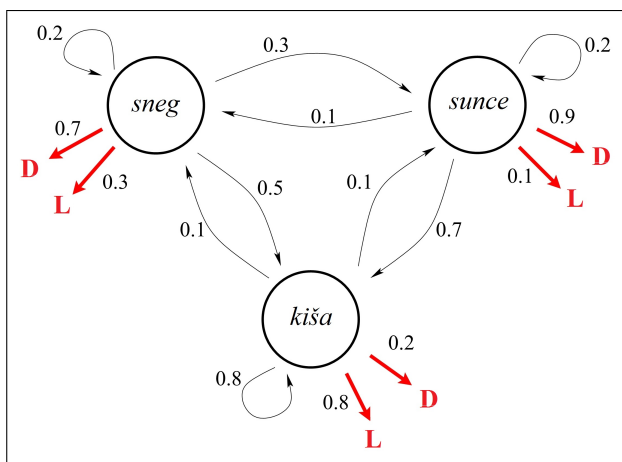
Sada će se modifikovati problem. Umesto opažanja vremenskih uslova, pretpostavlja se da je moguće opaziti samo nešto što zavisi od ovih uslova. Uvodi se **skriveni lanac Markova**.



Pretpostavlja se da Anino raspoloženje zavisi u određenoj meri od vremenskih prilika i to na sledeći način. Kada je sunčano, ona je dobro raspoložena 90% vremena. Kada je kišovito vreme, loše je raspoložena 80% vremena. Takođe, s obzirom da joj je prva godina u Nemačkoj, ona se raduje snegu, te je dobro raspoložena 70% snežnog vremena. Ovo je sumirano u sledećoj tabeli  $E = (e_i(b))_{i=1,2,3, b \in [L,D]}$ .

	sneg	kiša	sunce
$D$	0.7	0.2	0.9
$L$	0.3	0.8	0.1

Neka se Ana svakodnevno čuje telefonom sa svojom mamom koja i dalje živi u Kaliforniji. Mama primećuje da je Ana nekih dana dobro a nekih dana loše raspoložena iz njoj nepoznatog razloga. Naravno, ona živi u Kaliforniji te joj treba vremena da shvati da Anino raspoloženje zavisi od vremenskih prilika, ali nema načina da ih prati. Ona samo može da opazi Anino raspoloženje. Ono što je opazila tokom jedne nedelje bilo je  $L, L, D, D, D, L, D^2$ . Ona je jednom proverila kod Aninog cimera kakvo je vreme bilo, te sada već ima ideje o parametrima datim u tabelama (o  $a_{ij}$ -ovima i  $e_i(b)$ -ovima). Nova situacija je prikazana na slici 3.2.



Slika 3.2: Grafička reprezentacija primera skrivenog lanca Markova

Ovo je sad **skriveni lanac Markova**. Ležeća stanja (vremenski uslovi) i dalje prate jednostavan lanac Markova, ali se više ne mogu direktno opaziti. Umesto toga, opservacije sada predstavljaju nizove simbola (vrste raspoloženja), koji su upravljani stanja lanca Markova (vremenskim uslovima) prema određenoj raspodeli verovatnoća.

<sup>2</sup> $L$  označava loše raspoloženje, a  $D$  dobro raspoloženje.

### 3.3 Geometrijsko Braunovo kretanje

Geometrijsko Braunovo kretanje je neprekidan stohastički proces koji je često korišćen kao razumna aproksimacija dinamike cena akcija. Iako su cene akcija stohastički procesi u diskretnom vremenu, aproksimacija pomoću geometrijskog Braunovog kretanja se najčešće koristi za predviđanje cena u bliskoj budućnosti. Formalno, stohastički proces  $\{Y_t\}_t$  prati geometrijsko Braunovo kretanje ukoliko zadovoljava sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu:

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t dW_t, \quad (3.1)$$

pri čemu je  $W_t$  *Wiener*-ov proces. Za parametre  $\mu$  (drift) i  $\sigma$  (volatilnost) važi da su konstantni.

Jednačina (3.1) ima sledeće analitičko rešenje, pri čemu je  $Y_0$  inicijalna vrednost procesa u  $t = 0$ :

$$Y_t = Y_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}. \quad (3.2)$$

Nedostatak modela je taj što u datoj formi nije moguće predvideti fenomene na finansijskom tržištu poput ekstremnih događaja i grupisanja volatilnosti.

Poznato je da je *Wiener*-ov proces moguće simulirati kao  $\sqrt{t}Z_t$  gde je  $Z_t$  normalno  $\mathcal{N}(0, 1)$  raspedljena slučajna promenljiva. Stoga se geometrijsko Braunovo kretanje može koristiti za generisanje mogućih ishoda (scenarija) za  $Y_t$  uzorkovanjem iz standardne normalne distribucije koristeći (3.2).

### 3.4 Skriveni lanci Markova sa geometrijskim Braunovim kretanjem

Kao što se videlo, kod modela zasnovanih na skrivenim lancima Markova, postoje dva stohastička procesa i to oba u diskretnom vremenu: pored onog od interesa, koji je moguće opaziti (na primer, cene akcija), postoji i drugi proces koji opisuje stanje u kom se tržište nalazi, i koji nije moguće direktno opaziti. Ležeći, skriveni proces koji opisuje stanja tržišta je lanac Markova odnosno zadovoljava uslov Markova, a to je da stanje tržišta u određenom trenutku zavisi samo od stanja u kom se tržište nalazilo u prethodnom trenutku. U svakom vremenskom trenutku, tržište je u jednom od  $N$  mogućih stanja i može da prelazi iz jednog u drugo stanje ili pak da ostane u istom prema verovatnoćama datim u matrici prelaza lanca Markova  $A$ . Druga pretpostavka je da su verovatnoće prelaza iz jednog u drugo stanje lanca Markova vremenski nezavisne. Svako stanje generiše opservacije za stohastički proces od značaja prema svojoj sopstvenoj gustini. Pretpostavlja se da su opservacije cena akcije generisane prema

diskretizovanom geometrijskom Braunovom kretanju, gde svakom stanju lanca Markova odgovaraju različite vrednosti parametara geometrijskog Braunovog kretanja.

Formalno, neka je  $\{X_t\}_t$  ležeći proces modela skrivenog lanca Markova koji nije opservabilan sa skupom stanja  $Q_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , matricom prelaza  $A$  i vektorom inicijalnih verovatnoća  $\pi$ , i neka on upravlja procesom cena  $\{Y_t\}_t$ . Radi jednostavnosti, neka je skup stanja  $Q_N$  jednak bazi prostora  $R^N$   $e_1, e_2, \dots, e_N$  gde je  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ .

Ako se za trenutak prepostavi da proces cena prati geometrijsko Braunovo kretanje sa konstantnim driftom i volatilnošću tj. da za svako  $t$  važi  $Y_t = Y_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$ , dobilo bi se da proces logaritamskih prinosa  $r_{k+1} = \ln\left(\frac{Y_{k+1}}{Y_k}\right)$  prati sledeću dinamiku u diskretnom vremenu:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \ln\left(\frac{Y_{k+1}}{Y_k}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{Y_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(k+1) + \sigma W_{k+1}}}{Y_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})k + \sigma W_k}}\right) = \\ &= \ln\left(e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma(W_{k+1} - W_k))}\right) = \\ &= \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma(W_{k+1} - W_k). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Međutim, prepostaviće se da skriveni lanac Markova upravlja procesom cena tako što svakom stanju lanca Markova odgovaraju različite vrednosti parametara geometrijskog Braunovog kretanja. Umesto konstantnih  $\mu$  i  $\sigma$ , sada drift i volatilnost zavise od trenutnog stanja lanca Markova i u mogućnosti su da prelaze iz režima u režim. U momentu  $t$  parametri su oblika  $\mu(X_t)$  i  $\sigma(X_t)$  te stoga postoji ukupno  $N$  različitih vrednosti drifta i volatilnosti. Prinos u momentu  $k$  stoga iznosi:

$$r_{k+1} = \mu(X_k) - \frac{\sigma(X_k)^2}{2} + \sigma(X_k)(W_{k+1} - W_k) = f(X_k) + \sigma(X_k)Z_{k+1}, \tag{3.4}$$

gde je  $f(X_k) = \mu(X_k) - \frac{\sigma(X_k)^2}{2}$ , a niz  $Z_k$  je niz nezavisnih, standardno normalno raspodeljenih, slučajnih promenljivih. Može se primetiti da jednačina (3.4) govori o tome da opservacije u vremenu  $k + 1$  zavise od toga u kom stanju se u momentu  $k$  nalazi ležeći lanac  $\{X_t\}_t$  te se stoga ima model sa jednom docnjom što je razumna pretpostavka jer cena ne može momentalno reagovati na stanje u kom se tržište nalazi.

Neka su vektori sa vrednostima parametara geometrijskog Braunovog kretanjem označeni sa  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$  i  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)^T$ . Koristeći uvedenu notaciju važi da je  $\mathbf{f}(X_k) = \langle \mathbf{f}, X_k \rangle$  i  $\boldsymbol{\sigma}(X_k) = \langle \boldsymbol{\sigma}, X_k \rangle$  pri čemu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  predstavlja skalarni proizvod.

Kada se donese odluku o broju stanja ležećeg lanca Markova i o njegovoj inicijalnoj raspodeli  $\pi$ , parametri koji ostaju da se ocene, a koji opisuju ovako definisan model su:

1. Matrica prelaza  $A_{N \times N}$  lanca Markova.
2. Vektor  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)^T$  koji sadrži vrednosti volatilnosti za svako stanje lanca Markova.
3. Vektor  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)^T$  koji sadrži razlike drifta i volatilnosti što je ekvivalentno traženju vektora koji sadrži vrednosti drifta za svako stanje lanca Markova  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^T$ .

Metoda za ocenjivanje ovih parametara na osnovu istorijskih podataka je detaljno objašnjena u [2] dok je odgovarajući *MatLab* programski kod za ocenu parametara prikazan u prilogu 1. Jednom kada se parametri ocene, model se može koristiti za generaciju scenarija uz pomoć generatora slučajnih brojeva na osnovu izraza (3.2). *MatLab* programski kod za generaciju scenarija prikazan je u prilogu 2. U glavi 6 prikazani su rezultati dobijeni pomoću opisanog modela primenom na konkretnu rizičnu aktivu.

## 4

# Generisanje drveta scenarija

Velika klasa problema odlučivanja uključuje etape odlučivanja i slučajnost. Primeri su problemi portfolio optimizacije sa više perioda, modeli u energetici, telekomunikacijama, transportu, lancima nabavke itd. Zajednička karakteristika pomenutih modela je činjenica da stohastički procesi koji opisuju slučajnost (cene aktiva, tražnja za energijom, itd.) predstavljaju najvažniji deo ulaznih podataka. Tipično su ti stohastički procesi ocenjeni na osnovu istorijskih podataka i kalibrisani uz pomoć određenih informacija. Za modele odlučivanja sa više etapa, potrebne su numeričke aproksimacije, koje su dovoljno male da omogućavaju računanje u razumnom vremenskom periodu, ali i dovoljno velike da zadrže najvažnije karakteristike problema.

Portfolio optimizacija sa više etapa kao primer problema odlučivanja sa više etapa, je najčešće bazirana na stohastičkom modelu koji opisuje moguća stanja u kojima se tržište može naći. Postoji bogata literatura o modeliranju i oceni neprekidnih finansijskih procesa u pojedinim stanjima. Međutim, osim ekstremno jednostavnih i nerealnih slučajeva, problemi portfolio optimizacije opisani kontinualnim stohastičkim procesima (tj. neprekidnim slučajnim promenljivama u svakom periodu odlučivanja) mogu biti samo formulisani, ali ne i rešeni. Uobičajen način da se ovi problemi učine rešivim je njihova restrikcija tako da ih umesto neprekidnih slučajnih promenljivih u svakoj etapi odlučivanja opisuju diskretne slučajne promenljive u etapama odlučivanja. U ovom slučaju, funkcije odluka se redukuju na vektore odluka velikih dimenzija. Jasno, kvalitet rešenja problema optimizacije u velikoj meri zavisi od kvaliteta modela za diskretizaciju, te se stoga nameće pitanje kako aproksimirati neprekidne procese sa diskretnim scenario procesima u svakom stanju i kako meriti tako napravljenu grešku.

Cilj u modelovanju relevantnog stohastičkog procesa sa drvetom scenarija je sledeći. Neka je dat kontinualni stohastički proces (ili diskretan proces sa ogromnim brojem ishoda<sup>1</sup>)  $\{\xi_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$  gde  $\xi_0 = x_0$  predstavlja današnju vrednost koja je poznata.

---

<sup>1</sup>Što je slučaj u ovom radu - Cilj će biti aproksimirati scenario staze drvetom scenarija.

Raspodela ovog procesa može biti rezultat parametarske ili neparametarske ocene zasnovane na istorijskim podacima. Prostor može biti jedno ili višedimenzionalan. Cilj je pronaći jednostavan stohastički proces  $\{\tilde{\xi}_t\}_t$ , koji uzima konačno mnogo vrednosti, koji je dovoljno blizu originalnog procesa  $\{\xi_t\}_t$ , i koji u isto vreme ima strukturu u obliku drveta.

Neka je  $S_t$  konačan prostor stanja procesa  $\{\tilde{\xi}_t\}$ , tj.  $\mathcal{P}(\tilde{\xi}_t \in S_t) = 1$  i neka je  $c(t)$  kardinalni broj  $S_t$ . Važi da je  $c(0) = 1$ . Neka je  $b(x, t)$  broj grana koje izlaze iz čvora  $x \in S_t$ , tj.  $b(x, t) = \#\{y : \mathcal{P}(\tilde{\xi}_{t+1} = y | \tilde{\xi}_t = x) > 0\}$ .

Proces  $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$  se može predstaviti u formi drveta sa korenom u  $(x_0, 0)$  koje još zadovoljava uslov da su čvorovi  $(x, t)$  i  $(y, t+1)$  povezani granom ukoliko važi uslov da je  $\mathcal{P}\{\tilde{\xi}_t = x, \tilde{\xi}_{t+1} = y\} > 0$ .

Da bi se proces  $\{\xi_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$  aproksimirao procesom  $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$ , potrebno je pre svega odrediti strukturu drveta scenarija. Tipične strukture su:

- **Data struktura grananja.** Proces  $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$  ima strukturu grananja  $(b_0, b_1, \dots, b_{T-1})$ , pri čemu  $b_t$  označava broj grana koje izlaze iz jednog čvora u periodu  $t$ . Ukupan broj scenarija procesa  $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$  je  $\prod_{t=0}^{T-1} b_t$ .
- **Dat broj čvorova za svako stanje.** Ukupan broj čvorova procesa  $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$  po stanju  $(l_1, l_2, \dots, l_T)$  je fiksiran, te je ukupno  $l_T$  scenarija.
- **Slobodana struktura.** Struktura grananja i broj čvorova u pojedinim stanjima  $(l_1, l_2, \dots, l_T)$  procesa  $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$  su potpuno slobodni sem činjenice da je broj čvorova u krajnjem stanju (tj. broj scenarija)  $l_T$  unapred zadat.

Koja će struktura biti korišćena najčešće je određeno modelom koji se koristi za generaciju drveta scenarija. U ovom radu se koristi model koji nameće strukturu gde je dat broj čvorova za svako stanje.

## 4.1 Aproksimacija problema stohastičke optimizacije sa jednom etapom odlučivanja

Neka se ima jednostavan problem aproksimacije problema stohastičke optimizacije sa jednom etapom. Neka je problem stohastičke optimizacije minimizirati:

$$F(x) = \int_{x \in X} f(x, u) dG(u), \quad (4.1)$$

gde je  $f(x, u)$  funkcija troškova,  $G$  funkcija raspodele ili neprekidne slučajne promenljive na  $\mathbb{R}$  ili diskretne slučajne promenljive sa ogromnim brojem vrednosti koje uzima u

skupu  $\mathbb{R}$ , i skup  $X \subseteq R$  dopustiv skup. Neka je  $x^* = \operatorname{argmin}_x F(x)$  njegovo rešenje. Radi jednostavnosti pretpostavlja se da je ono jedinstveno.

Problem scenario aproksimacije je naći jednostavnu raspodelu  $\tilde{G}$  koja uzima mali broj vrednosti tako da se umesto problema  $\min F(x)$  rešava problem  $\min \tilde{F}(x)$ , gde je  $\tilde{F}(x) = \int_{x \in X} f(x, u) d\tilde{G}(u)$ . Ona treba da bude takva da rešenje aproksimiranog problema bude blisko rešenju originalnog problema.

Dakle, umesto prave funkcije raspodele  $G$  koristiće se njena aproksimacija, diskretna raspodela  $\tilde{G}$ . Stoga se minimizira:

$$\tilde{F}(x) = \int_{x \in X} f(x, u) d\tilde{G}(u). \quad (4.2)$$

Teško je dobiti kvalitativan odgovor na pitanje koliko je aproksimacija dobra. Sa stanovišta optimizacije, cilj aproksimacije je da razlika između funkcije cilja ova dva problema bude što manja. Greška aproksimacije  $e(F, \tilde{F})$  je data sa:

$$e(F, \tilde{F}) := F(\operatorname{argmin}_x \tilde{F}(x)) - F(\operatorname{argmin}_x F(x)). \quad (4.3)$$

i ona predstavlja cenu koja se mora platiti ukoliko se minimizira  $\tilde{F}$  umesto da se minimizira prava funkcija  $F$ .

Ovako definisanu grešku  $e$  je teško sračunati. Lakše je izračunati njenu gornju granicu koristeći sledeću lemu.

**Lema 4.1.** [4]

$$e(F, \tilde{F}) \leq 2 \sup_x |F(x) - \tilde{F}(x)|. \quad (4.4)$$

**Dokaz.** Neka  $x^* \in \operatorname{argmin} F$  i  $\tilde{x}^* \in \operatorname{argmin} \tilde{F}$  i neka je  $\epsilon = \sup_x |F(x) - \tilde{F}(x)|$ . Takođe neka je  $M = \{x : F(x) \leq F(x^*) + 2\epsilon\}$ . Neka se za početak pretpostavi da je  $\tilde{x}^* \notin M$ . Tada:

$$F(x^*) + 2\epsilon < F(\tilde{x}^*) \leq \tilde{F}(\tilde{x}^*) + \epsilon \leq \tilde{F}(x^*) + \epsilon \leq F(x^*) + 2\epsilon. \quad (4.5)$$

Ovo dovodi do kontradikcije odakle sledi da je  $\tilde{x}^* \in M$  tj. da  $e(F, \tilde{F}) = F(\tilde{x}^*) - F(x^*) \leq 2\epsilon$ .  $\square$

Lema 4.1 govori da  $\tilde{G}$  treba izabrati tako da  $\sup_x |F(x) - \tilde{F}(x)|$  bude mali. Uvodi se sledeća definicija metrike između dve raspodele.

**Definicija 4.1** (**Wasserstein** distanca  $d_w$ ). Neka je  $L_1(f)$  Lipšicova konstanta funkcije  $f$ , tj.

$$L_1(f) = \inf \{L : |f(u) - f(v)| \leq L|u - v|, \forall u, v\}. \quad (4.6)$$

Ukoliko ne postoji takvo  $L$ , pretpostavlja se da je  $L_1(f) = \infty$ .

*Wasserstein*-ova distanca  $d_w$  između  $G$  i  $\tilde{G}$  se definiše kao:

$$d_w(G, \tilde{G}) = \sup \left\{ \int f(u) dG(u) - \int f(u) d\tilde{G}(u) : \forall f, \text{ takve da je } L_1(f) \leq 1 \right\}. \quad (4.7)$$

Ako se raspodela  $G$  aproksimira raspedlom  $\tilde{G}$  tako što se minimizara *Wasserstein*-ova distanca između njih, na osnovu leme 4.1 se minimizira i greška aproksimacije problema (4.1) problemom (4.2). Tako, minimizacija *Wasserstein*-ove distance vodi malim vrednostima grešaka aproksimacije. Poznato je da je ova metrika povezana sa problemom lociranja objekata (*facility location*) kroz tvrđenje sledeće teoreme [1].

**Teorema 4.1.** [4] *Distanca  $d_w$  ima sledeće osobine:*

(i) **Teorema Kantorovich-Rubinstein**

$$d_w(G, \tilde{G}) = \inf \{ E(|X - \tilde{X}|), \quad (4.8)$$

gde je zajednička raspodela  $(X, \tilde{X})$  proizvoljna, ali su marginalne raspodele fiksirane tako da važi  $X \sim G$  i  $\tilde{X} \sim \tilde{G}$ .

(ii)

$$d_w(G, \tilde{G}) = \int |G(u) - \tilde{G}(u)| du = \int |G^{-1}(u) - \tilde{G}^{-1}(u)| du, \quad (4.9)$$

gde je  $G^{-1}(u) = \sup \{v : G(v) \leq u\}$ .

(iii) Među svim  $\tilde{G}$  koje uzimaju vrednosti  $z_1, z_2, \dots, z_K$  najbliža  $G$  mereno  $d_w$  rastojanjem je:

$$\tilde{G}(x) = \sum_{\{k: z_k \leq x\}} G\left(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}\right), \quad (4.10)$$

gde je  $z_{K+1} = \infty$  i  $G(\infty) = 1$ . Za takvo  $\tilde{G}$  supremum iz (4.7) je postignut za  $f(u) = \min_k |u - z_k|$ , tj.

$$d_w(G, \tilde{G}) = \sum_{k=1}^K \int_{\frac{z_{k-1} + z_k}{2}}^{\frac{z_k + z_{k+1}}{2}} |u - z_k| dG(u), \quad (4.11)$$

gde je  $z_0 = -\infty$ . Verovatnoće događaja  $z_1, z_2, \dots, z_K$  određene su sa:

$$p_k = G\left(\frac{z_k + z_{k+1}}{2}\right) - G\left(\frac{z_k + z_{k-1}}{2}\right), \quad (4.12)$$

za svako  $k = 1, 2, \dots, K$ .



Može se pokazati da se infimum u (i) dostiže. Ukoliko je funkcija troškova  $u \mapsto f(x, u)$  uniformno Lipsicova tj. ukoliko važi za sve  $x \in X$ ,  $L_1(f(x, \cdot)) = \inf\{L : |f(x, u) - f(x, v)| \leq L|u - v|\} \leq \bar{L}_1$ , tada  $\sup_x |F(x) - \tilde{F}(x)| \leq \bar{L}_1 d_w(G, \tilde{G})$ , te se originalni problem minimiziranja  $\sup_x |F(x) - \tilde{F}(x)|$  može aproksimirati problemom minimiziranja *Wasserstein*-ove distance  $d_w(G, \tilde{G})$  koji je ekvivalentan traženju diskretne distribucije  $\tilde{G}$  najbliže distribuciji  $G$  u smislu lociranja objekata.

Pored *Wasserstein*-ove distance, koriste se i druge metrike za aproksimaciju slučajne promenljive i stohastičkog procesa. Jedna od njih je često korišćena **Kolmogorov-Smirnov** distanca koja se naziva i uniformna. Optimalna aproksimacija neprekidne raspodele  $G$ , raspodelom koja uzima  $K$  vrednosti  $z_1, z_2, \dots, z_K$  sa verovatnoćama  $p_1, p_2, \dots, p_K$  data je sa:

$$z_k = G^{-1}\left(\frac{2k-1}{2K}\right), \quad p_k = 1/K, \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, K. \quad (4.13)$$

Sledi primer aproksimacije standardne normalne raspodele minimizacijom ove dve distance. Takođe, na primeru modela inventara biće pokazano da korišćenje dobijenih aproksimacija dovodi do različitih vrednosti grešaka aproksimacija.

## 4.2 Aproksimacija slučajne promenljive

**Primer 4.1.** Posmatra se slučajna promenljiva koja ima standardnu normalnu raspodelu. Njena funkcija gustine je:

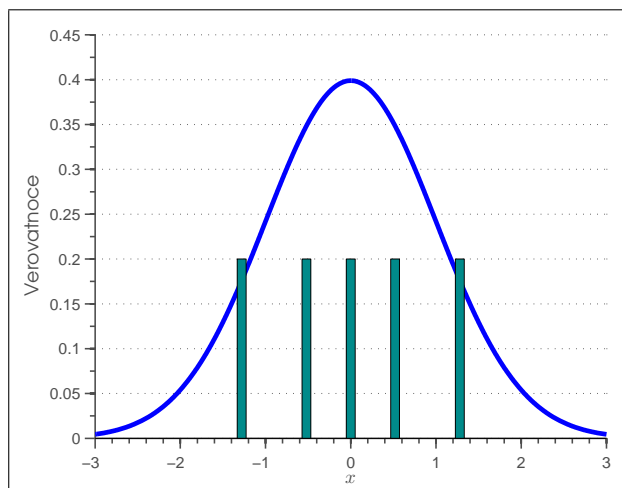
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (4.14)$$

dok funkcija raspodele iznosi:

$$G(x) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(z) dz. \quad (4.15)$$

Cilj je naći diskretnu slučajnu promenljivu koja leži na pet, u parovima, simetričnih tačaka oko nule i aproksimira standardnu normalnu raspodelu.

Normalna raspodela će se najpre aproksimirati pomoću uniformne distance tj. cilj je naći diskretnu raspodelu  $\tilde{G}_1$  koja leži na pet tačaka ( $K = 5$ ) sa jednakim verovatnoćama. Na osnovu (4.13) dobija se da diskretna raspodela  $\tilde{G}_1$  uzima vrednosti  $z_k = \Phi^{-1}\left(\frac{2k-1}{10}\right)$ ,  $p_k = 1/5$  za  $k = 1, \dots, 5$ . Dobija se da diskretna raspodela  $\tilde{G}_1$  leži na tačkama  $z_1 = -1.28$ ,  $z_2 = -0.52$ ,  $z_3 = 0$ ,  $z_4 = 0.52$  i  $z_5 = 1.28$ . Rezultati su prikazani na slici 4.1.



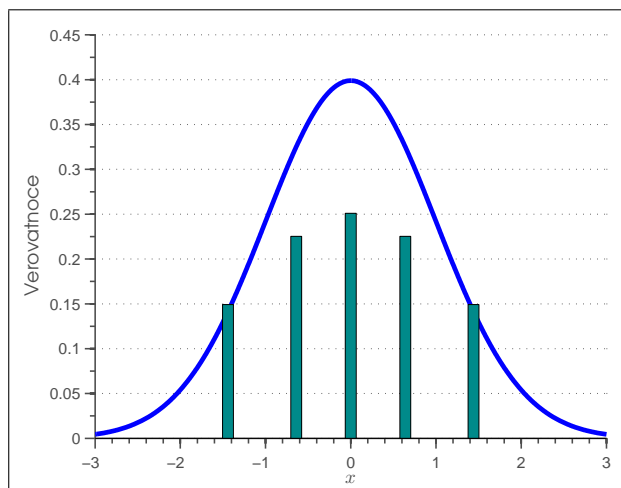
Slika 4.1: Aproksimacija normalne raspodele minimizacijom uniformne distance

Sada će se raspodela  $G$  aproksimirati pomoću *Wasserstein*-ove distance. Neka su tačke na kojima leži diskretna raspodela  $\tilde{G}_2$ ,  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  pri čemu važi da je  $z_1 = -z_5$ ,  $z_2 = -z_4$  i  $z_3 = 0$ . Da bi se došlo do vrednosti tačaka na kojima će ležati diskretna raspodela  $\tilde{G}_2$  najpre se mora minimizirati izraz za distancu:

$$d_w(G, \tilde{G}_2) = \sum_{k=1}^5 \int_{\frac{z_{k-1}+z_k}{2}}^{\frac{z_k+z_{k+1}}{2}} |u - z_k| dG(u). \quad (4.16)$$

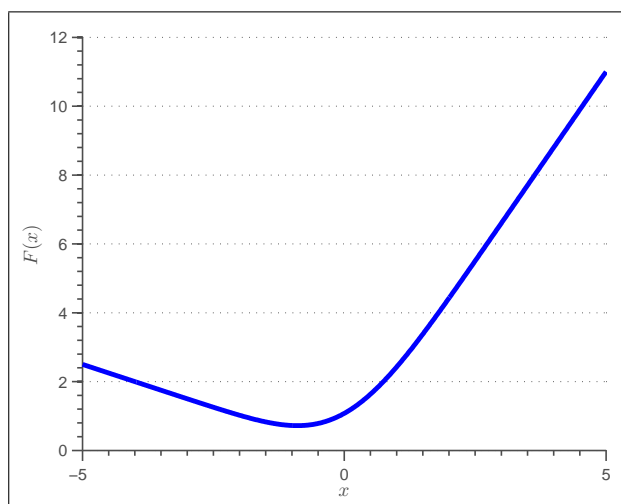
Minimiziranjem prethodnog izraza po promenljivama  $z_4$  i  $z_5$  dobija se da diskretna slučajna promenljiva  $\tilde{G}_2$  uzima vrednosti  $z_1 = -1.44$ ,  $z_2 = -0.64$ ,  $z_3 = 0$ ,  $z_4 = 0.64$  i  $z_5 = 1.44$  sa verovatnoćama  $p_1 = 0.1492$ ,  $p_2 = 0.2253$ ,  $p_3 = 0.2510$ ,  $p_4 = 0.2253$  i  $p_5 = 0.1492$ . Na slici 4.2 su prikazani rezultati. Na njoj se može videti da minimiziranje *Wasserstein*-ove distance daje bolju aproksimaciju repova originalne raspodele u poređenju sa rezultatima dobijenim minimiziranjem uniformne raspodele. Minimiziranje *Wasserstein*-ove distance zapravo znači minimiziranje razlike očekivanja svih Lipšicovih funkcija. Međutim, ono ne mora nužno dati najbolji rezultat u smislu aproksimacije viših momenata. Ako je zahtevana i dobra aproksimacija viših momenata bolje je koristiti *Fortet-Mourier* distancu<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>O *Fortet-Mourier*-ovoj distanci više u [1]



Slika 4.2: Aproksimacija normalne raspodele pomoću Wasserstein-ove distance

Sada će se dobijene aproksimacije iskoristiti za rešavanje problema inventara, opisanog u odeljku 2.1. Neka je tražnja  $D$  normalno raspodeljena neprekidna slučajna promenljiva sa očekivanjem nula i varijansom jednakom jedinici<sup>3</sup>. Na slici 4.3 je prikazana funkcija cilja koja je, sada oblika  $E[f(x, D)] = bE[D] + (c - b)x + (b + h) \int_{-\infty}^x \phi(z) dz$ . Radi jednostavnosti funkcija cilja će se označiti sa  $F(x) = E[f(x, D)]$ .



Slika 4.3: Funkcija cilja problema inventara za  $D : \mathcal{N}(0, 1)$

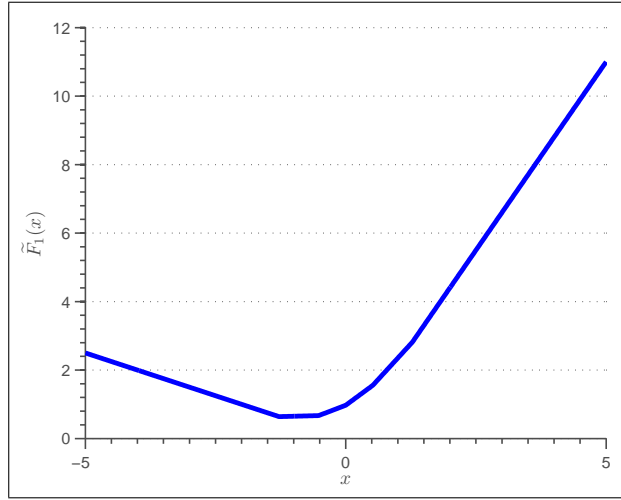
Sledi aproksimacija tražnje  $D$  sa dve prethodno dobijene diskretne raspodele i rešavanje problema inventara  $\min F(x)$ .

<sup>3</sup>Tražnja za nekim proizvodom ne može biti negativna, ali obzirom da je problem invarijantan u odnosu na translaciju i skaliranje, može se pretpostaviti da  $D$  ima normalnu raspodelu  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  za koju je verovatnoća da primi vrednosti sa negativnog dela x-ose zanemarljivo mala.

Aproksimacija tražnje  $D$  diskretnom raspodelom  $\tilde{D}_1$  dobijenom minimizacijom uniformne distance između tražene i originalne raspodele dovodi do aproksimirane funkcije cilja:

$$\tilde{F}_1 = \sum_{k=1}^5 p_k f(x, d_k) = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{5} \max\{(c-b)x + bd_k, (c+h)x - hd_k\}, \quad (4.17)$$

pri čemu su  $d_1 = -1.28$ ,  $d_2 = -0.52$ ,  $d_3 = 0$ ,  $d_4 = 0.52$  i  $d_5 = 1.28$ , a vrednosti parametara  $c$ ,  $b$  i  $h$  su iste kao u odeljku 2.1, tj.  $c = 2$ ,  $b = 2.5$  i  $h = 0.2$ . Na slici 4.4 je prikazana aproksimirana funkcija cilja.



Slika 4.4: Aproksimirana funkcija cilja  $F(x)$  dobijena aproksimacijom  $D$  pomoću uniformne distance

Greška aproksimacije je data sa:

$$e(F, \tilde{F}_1) = F(\operatorname{argmin}_x \tilde{F}_1(x)) - F(\operatorname{argmin}_x F(x)), \quad (4.18)$$

pri čemu je:

$$\operatorname{argmin}_x \tilde{F}_1(x) = -1.28, \quad (4.19)$$

$$\operatorname{argmin}_x F(x) = \phi^{-1}\left(\frac{b-c}{b+h}\right) = -0.8958, \quad (4.20)$$

te greška iznosi:

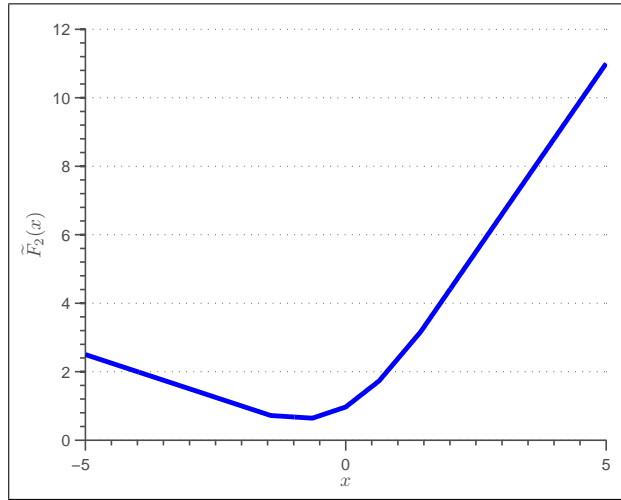
$$e(F, \tilde{F}_1) = F(-1.28) - F(-0.8958) = 0.0471, \quad (4.21)$$

pri čemu  $F(x) = bE[D] + (c-b)x + (b+h) \int_{-\infty}^x \phi(z) dz$ .

Aproksimacija tražnje  $D$  diskretnom raspodelom  $\tilde{D}_2$  dobijenom minimizacijom *Wasserstein*-ove distance između tražene i originalne raspodele dovodi do aproksimirane funkcije cilja:

$$\tilde{F}_2 = \sum_{k=1}^5 p_k f(x, d_k) = \sum_{k=1}^5 p_k \max\{(c-b)x + bd_k, (c+h)x - hd_k\}, \quad (4.22)$$

pri čemu su  $d_1 = -1.44$ ,  $d_2 = -0.64$ ,  $d_3 = 0$ ,  $d_4 = 0.64$  i  $d_5 = 1.44$ . Na slici 4.5 je prikazana aproksimirana funkcija cilja.



Slika 4.5: Aproksimirana funkcija cilja  $F(x)$  dobijena aproksimacijom  $D$  pomoću *Wasserstein*-ove distance

Sada je greška aproksimacije data sa:

$$e(F, \tilde{F}_2) = F(\operatorname{argmin}_x \tilde{F}_2(x)) - F(\operatorname{argmin}_x F(x)) \quad (4.23)$$

pri čemu je:

$$\operatorname{argmin}_x \tilde{F}_2(x) = -0.64, \quad (4.24)$$

$$\operatorname{argmin}_x F(x) = \phi^{-1}\left(\frac{b-c}{b+h}\right) = -0.8958, \quad (4.25)$$

te greška iznosi:

$$e(F, \tilde{F}_2) = F(-0.64) - F(-0.8958) = 0.0254. \quad (4.26)$$

Uočava se da je dobijena manja greška aproksimacije funkcije cilja u slučaju aproksimacije originalne neprekidne raspodele minimiziranjem *Wasserstein*-ove distance nego u slučaju aproksimacije originalne neprekidne raspodele minimiziranjem uniformne distance.

### 4.3 Aproximacija problema stohastičke optimizacije sa više etapa odlučivanja

Kao što je rečeno, problem minimizacije *Wasserstein*-ove distance je ekvivalentan problemu lociranja objekata. Problem lociranja objekata predstavlja problem pronalaženja geografskog položaja objekata koji treba da služe dati skup klijenata. Formalna definicija problema lociranja objekata glasi:

**Definicija 4.2.** Neka je dat bipartitni graf  $G$  sa skupom čvorova  $(C, F)$  gde je  $C$  skup klijenata, a  $F$  skup potencijalnih objekata. Dalje, neka je  $f_i \in \mathbb{R}_+$  trošak otvaranja objekta  $i \in F$  i neka je  $c_{i,j} \in \mathbb{R}_+$  trošak povezivanja klijenta  $j \in C$  i objekta  $i \in F$ . Cilj je pronaći skup objekata  $S \subseteq F$  koji će služiti klijente kao i povezati klijente sa objektima tako da se minimiziraju ukupni troškovi (fiksni troškovi otvaranja objekata i troškovi povezivanja) tj. da se minimizira:

$$\sum_{i \in S} f_i + \sum_{j \in C} c_{\sigma(j)j},$$

pri čemu je  $\sigma : C \rightarrow S$  funkcija koja svakom klijentu pridružuje objekat.

Dakle, kod rešavanja problema lociranja objekata, dat je skup klijenata i zadatak je pronaći položaj unapred zadatog broja objekata koji će služiti klijente tako da se minimiziraju troškovi služenja što je ekvivalentno minimiziranju ukupnog rastojanja između objekata i klijenata. Primera radi, klijenti mogu biti pekare, a objekti mogu biti mlinoi iz kojih se doprema brašno do pekara i za koje treba doneti odluku gde da se sagrade tako da ukupni troškovi dopremanja brašna budu minimalni.

Za rešavanje problema lociranja objekata se koriste metode klaster analize. Klaster analiza ima zadatak da skup objekata podeli u grupe (klasterne) tako da su objekti u istom klasteru sličniji (u unapred definisanom smislu) jedni drugima u poređenju sa onim iz drugih klastera. U ovom radu će biti korišćena metoda klaster analize *k-sredina* koja grupiše originalne objekte u željeni broj klastera tako što iterativno nalazi sredine klastera tzv. centroide a zatim svaki objekat pridružuje najbližem centroidu. Cilj iterativnog postupka je da se minimizira suma distanci između tačaka i pripadajućih centroida.

Ekvivalencija između problema minimiziranja *Wasserstein*-ove distance i problema lociranja objekata, omogućava da se diskretan stohastički proces sa velikim brojem ishoda (kakav će se rešavati u primeru u ovom radu) uprosti sa drvetom scenarija sa više etapa. Pre svega treba odabrati **broj etapa drveta scenarija**  $T$ , što je u portfolio optimizaciji direktno povezano sa brojem trenutaka u kojima će se vršiti rebalansiranje, kao i broj čvorova u svakoj etapi  $\mathcal{N}^t, t = 0, 1, \dots, T$ . Dalje, iz scenario staza

originalnog procesa se formiraju objekti u  $T$ -dimenzionalnom prostoru, koji sadrže vrednosti scenario staze kojoj su korespodnetni, u trenutcima koji odgovaraju etapama drveta scenarija. Broj objekata je jednak broju scenarija. Cilj je date objekte redukovati na manji broj objekata tako što će se odrediti novih  $\mathcal{N}^T$  objekata pomoću metoda *k-sredina*.

Drvo scenarija zahteva da novoformiranih  $\mathcal{N}^T$  objekata budu takvi da imaju samo  $\mathcal{N}^{T-1}$  različitih  $(T-1)$ -ih koordinata,  $\mathcal{N}^{T-2}$  različitih  $(T-2)$ -ih koordinata, ...,  $\mathcal{N}^1$  različitih prvih koordinata. Stoga se uvodi uslov da se  $\mathcal{N}^T$  objekata locira tako da bude raspoređeno na  $\mathcal{N}^{T-1}$  ulica u  $(T-1)$ -dimenzionalnoj ravni, na  $\mathcal{N}^{T-2}$  ulica u  $(T-2)$ -dimenzionalnoj ravni, itd.

Algoritam pomoću kog se originalni objekti redukuju na manji broj objekata je sledeći [1]:

1. Pomoću neke od metoda klaster analize, objekti se grupišu u klustere (susedstva), čiji je broj jednak  $\mathcal{N}^T$ .
2. Za svaki klaster se nađe pripadajući centroid.
3. Dobijeni centroidi se projektuju na  $(T-1)$ -dimenzionalni prostor.
4. Vraća se na korak 1, pri čemu se sada posmatra etapa  $T-1$ .

Algoritam se ponavlja do prve etape.

Zatim se primenjuje postupak svođenja  $\mathcal{N}^T$  objekata na ulice. Iz  $\mathcal{N}^1$  objekata se povlače ulice na koje se svodi  $\mathcal{N}^2$  objekata. Postupak se ponavlja dok se ne dođe do  $\mathcal{N}^T$  objekata. Konačno dobijenih  $\mathcal{N}^T$  objekata se nalazi u  $T$ -dimenzionalnom prostoru i ima  $\mathcal{N}^1$  međusobno različitih prvih koordinata,  $\mathcal{N}^2$  drugih koordinata itd.

Od formiranih  $\mathcal{N}^T$  objekata, konačno se dolazi do drveta scenarija tako što svaka njegova scenario staza odgovara jednom objektu.

Ilustracija opisanog postupka na primeru drveta scenarija sa dve etape odlučivanja je prikazana u glavi 6.

## 5

# CVaR

Kao što je rečeno, mera rizika ima važnu ulogu u portfolio optimizaciji jer postoji neizvesnost u pogledu budućih prinosa tako da investitor mora da se na neki način zaštititi od prevelikog gubitka. Gubitak se može predstaviti kao funkcija  $f(x, y)$  dve promenljive, vektora odluke  $x$  koji treba odabrati iz dopustivog skupa  $X \subset \mathbb{R}^n$  dok  $y \in Y \subset \mathbb{R}^n$  predstavlja neizvesnost koja može da utiče na gubitak. Vektor  $x$  se može interpretirati kao vektor koji karakteriše određeni portfolio i to na način da njegova  $i$ -ta komponenta predstavlja količinu novca investiranu u  $i$ -tu aktivu. Skup  $X$  se može posmatrati kao skup dostupnih portfolija. Promenljiva  $y$  se može interpretirati kao slučajna promenljiva koja predstavlja prinose aktiva u budućnosti. Kada je  $y$  slučajna promenljiva sa poznatom raspodelom, gubitak  $f(x, y)$  postaje slučajna promenljiva sa istom raspodelom koja zavisi od izbora  $x$ .

Za svako  $x$ , sa  $\varphi(x, \delta)$  se označava funkcija raspodele gubitka  $f(x, y)$ , odnosno:

$$\varphi(x, \delta) = P(y | f(x, y) \leq \delta). \quad (5.1)$$

Pretpostavlja se da je  $f(x, y)$  neprekidna u  $x$ , merljiva po  $y$  i da je  $E(|f(x, y)|) < \infty$  za svako  $x \in X$ .

Sa  $\varphi(x, \delta^-)$  označiće se leva granica funkcije  $\varphi(x, \cdot)$  u  $\delta$ :

$$\varphi(x, \delta^-) = P(y | f(x, y) < \delta). \quad (5.2)$$

Ukoliko  $\varphi(x, \cdot)$  ima skok u  $\delta$ , odnosno ako je:

$$\varphi(x, \delta) - \varphi(x, \delta^-) = P(y | f(x, y) = \delta) > 0, \quad (5.3)$$

kaže se da postoji atom verovatnoće u  $\delta$ .

U radu će se koristiti nivoi poverenja  $\alpha \in \{0.90, 0.95, 0.99\} \subset (0, 1)$ .



**Definicija 5.1 (VaR).**  $\alpha$ -VaR gubitka povezanog sa odlukom  $x$  je vrednost:

$$\delta_\alpha(x) = \min(\delta | \varphi(x, \delta) \geq \alpha). \quad (5.4)$$

Kako je funkcija raspodele gubitka  $\varphi(x, \delta)$  neopadajuća i neprekidna sa desne strane u  $\delta$ , minimum iz jednačine (5.4) se postiže. Kada je  $\varphi(x, \cdot)$  neprekidna i strogo rastuća, postoji jedinstveno  $\delta_\alpha(x)$  koje zadovoljava  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)) = \alpha$ . Inače, ili ne postoji rešenje problema ili pak postoji više rešenja.

**Definicija 5.2 (VaR<sup>+</sup>).**  $\alpha$ -VaR<sup>+</sup> ili gornji VaR gubitka povezanog sa odlukom  $x$  je vrednost:

$$\delta_\alpha^+(x) = \inf(\delta | \varphi(x, \delta) > \alpha). \quad (5.5)$$

Za  $\delta_\alpha(x)$  i  $\delta_\alpha^+(x)$  važi nejednakost  $\delta_\alpha(x) \leq \delta_\alpha^+(x)$  dok jednakost važi u slučaju kada je  $\varphi(x, \delta)$  konstantna na nivou  $\alpha$  nad intervalom koji je ili  $[\delta_\alpha(x), \delta_\alpha^+(x))$ , ili  $[\delta_\alpha(x), \delta_\alpha^+(x)]$  u zavisnosti od toga da li  $\varphi(x, \cdot)$  ima skok u  $\delta_\alpha^+(x)$ .

Uzimanje VaR-a za meru rizika znatno otežava optimizaciju jer su problemi stohastičkog programiranja, pa samim tim i problem portfolio optimizacije sa više perioda, bazirani na diskretnim raspodelama čije su funkcije raspodela gubitaka  $\varphi(x, \cdot)$  stepenaste funkcije. Takođe, VaR nije konveksna pa samim tim ni koherentna mera rizika<sup>1</sup>. Svi ovi nedostaci motivisali su naučnike da tragaju za novom merom rizika koja bi se pokazala kao bolja u primenama. Kao alternativna mera rizika javlja se uslovna vrednost pod rizikom, odnosno CVaR. Kao alat u problemima optimizacije CVaR ima superiorne osobine koje će se u nastavku dokazati.

**Definicija 5.3 (CVaR).**  $\alpha$ -CVaR gubitka povezanog sa odlukom  $x$  je vrednost  $\phi_\alpha(x)$ , koja predstavlja očekivanu vrednost gubitka  $f(x, y)$  uz uslovnu raspodelu  $\varphi_\alpha(x, \cdot)$  definisanu sa:

$$\varphi_\alpha(x, \delta) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \delta < \delta_\alpha(x) \\ \frac{\varphi(x, \delta) - \alpha}{1 - \alpha}, & \text{ako je } \delta \geq \delta_\alpha(x) \end{cases} \quad (5.6)$$

Funkcija raspodele  $\varphi_\alpha(x, \delta)$  je dobro definisana jer je neopadajuća i neprekidna sa desne strane, i kada  $\delta \rightarrow \infty$  tada  $\varphi_\alpha(x, \delta) \rightarrow 1$ .

Vrednost funkcije  $\varphi_\alpha(x, \delta)$  je definisana pomoću  $\alpha$ -rep raspodele zbog toga što funkcija raspodele  $\varphi(x, \delta)$  može imati skok u  $\delta_\alpha(x)$ . U tom slučaju  $P(\delta \in [\delta_\alpha(x), \infty]) > 1 - \alpha$ , pošto je  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)^-) < \alpha < \varphi(x, \delta_\alpha(x))$  kada je  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)^-) < \varphi(x, \delta_\alpha(x))$ . U tom smislu  $\alpha$ -rep predstavlja gornji  $1 - \alpha$  deo od cele raspodele. Funkcija raspodele  $\varphi_\alpha(x, \delta)$  je, u stvari, skalirana od  $1 - \alpha$  do 1, umesto od 0 do 1.

---

<sup>1</sup>Koherentna mera rizika će biti definisana u nastavku.

**Definicija 5.4** ( $CVaR^+$  i  $CVaR^-$ ).  $\alpha$ - $CVaR^+$  ili gornji  $CVaR$  gubitka povezanog sa odlukom  $x$  je vrednost:

$$\phi_\alpha^+(x) = E(f(x, y) | f(x, y) > \delta_\alpha(x)). \quad (5.7)$$

$\alpha$ - $CVaR^-$  ili donji  $CVaR$  gubitka povezanog sa odlukom  $x$  je vrednost:

$$\phi_\alpha^-(x) = E(f(x, y) | f(x, y) \geq \delta_\alpha(x)). \quad (5.8)$$

Izraz (5.7) ima smisla samo dok je  $P(f(x, y) | f(x, y) > \delta_\alpha(x)) > 0$ , tj. kada je  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)) < 1$ , što ne mora uvek biti ispunjeno iako je  $\alpha \in (0, 1)$  jer može postojati skok u  $\delta_\alpha(x)$ . Za razliku od definicije date izrazom (5.7), uslovno očekivanje u (5.8) je dobro definisano jer  $P(f(x, y) | f(x, y) \geq \delta_\alpha(x)) \geq 1 - \alpha > 0$ . Sledi opis osnovnih karakteristika  $CVaR$ -a.

**Lema 5.1** (Osobine  $CVaR$ -a [5]).

1. Ako ne postoji atom verovatnoće u  $\delta_\alpha(x)$ , tada važi:

$$\phi_\alpha^-(x) = \phi_\alpha(x) = \phi_\alpha^+(x). \quad (5.9)$$

2. Ako postoji atom verovatnoće u  $\delta_\alpha(x)$  i ako je  $\alpha = \varphi(x, \delta_\alpha(x))$  važi:

$$\phi_\alpha^-(x) < \phi_\alpha(x) = \phi_\alpha^+(x). \quad (5.10)$$

Ako je pak  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)) = 1$ , tada je:

$$\phi_\alpha^-(x) = \phi_\alpha(x). \quad (5.11)$$

3. U svim preostalim slučajevima, kada je:

$$\varphi(x, \delta_\alpha(x)^-) < \alpha < \varphi(x, \delta_\alpha(x)) < 1 \quad (5.12)$$

Važi stroga nejednakost:

$$\phi_\alpha^-(x) < \phi_\alpha(x) < \phi_\alpha^+(x). \quad (5.13)$$

**Dokaz.** Pojasniće se najpre pojmovi  $\phi_\alpha^+(x)$  i  $\phi_\alpha^-(x)$ .

$\phi_\alpha^+(x)$  je očekivana vrednost gubitka pri raspodeli:

$$\varphi_\alpha^+(x, \delta) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \delta < \delta_\alpha(x) \\ \frac{\varphi(x, \delta) - \alpha^+(x)}{1 - \alpha^+(x)}, & \text{ako je } \delta \geq \delta_\alpha(x) \end{cases} \quad (5.14)$$

Slično,  $\phi_\alpha^-(x)$  je očekivana vrednost gubitka pri raspodeli:

$$\phi_\alpha^-(x, \delta) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } \delta < \delta_\alpha(x) \\ \frac{\varphi(x, \delta) - \alpha^-(x)}{1 - \alpha^-(x)}, & \text{ako je } \delta \geq \delta_\alpha(x) \end{cases} \quad (5.15)$$

Podsećanja radi,  $\alpha^+(x)$  i  $\alpha^-(x)$  označavaju kraj i početak vertikalnog skoka raspodele  $\varphi(x, \cdot)$  u  $\delta_\alpha(x)$ .

1. Kada ne postoji atom verovatnoće u  $\delta_\alpha(x)$ , važi:

$$\alpha^-(x) = \alpha^+(x) = \alpha(x) \in (0, 1).$$

Tada su distribucije date sa (5.6), (5.14) i (5.15) identične te stoga važi jednakost:

$$\phi_\alpha^-(x) = \phi_\alpha(x) = \phi_\alpha^+(x).$$

2. Ako pak postoji atom verovatnoće, ali važi  $\alpha = \alpha^+(x)$ , dobija se da je:

$$\phi_\alpha^-(x) < \phi_\alpha(x) = \phi_\alpha^+(x),$$

kada:

$$\alpha = \varphi(x, \delta_\alpha(x)).$$

Ako je  $\alpha^+(x) = 1$ , dobija se:

$$\phi_\alpha^-(x) = \phi_\alpha(x).$$

3. Ako je ispunjen uslov (5.12), iz definicija funkcija raspodela (5.6), (5.14) i (5.15) sledi i stroga nejednakost data sa (5.13).  $\square$

**Lema 5.2.** [5] *Neka je  $p_\alpha(x)$  verovatnoća dodeljena gubitku  $f(x, y) = \delta_\alpha(x)$  sa  $\alpha$ -repom raspodele prema definiciji 5.3, tj.*

$$p_\alpha(x) = \frac{\varphi(x, \delta_\alpha(x)) - \alpha}{1 - \alpha}. \quad (5.16)$$

*Ako je  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)) < 1$ , odnosno postoji mogućnost da gubitak bude veći od  $\delta_\alpha(x)$ , tada važi:*

$$\phi_\alpha(x) = p_\alpha(x) \delta_\alpha(x) + [1 - p_\alpha(x)] \phi_\alpha^+(x) \quad (5.17)$$

*sa  $p_\alpha(x) < 1$ . Ako je  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)) = 1$  to jest,  $\delta_\alpha(x)$  je najveći gubitak koji se može dogoditi (stoga je  $p_\alpha(x) = 1$  i  $\phi_\alpha^+(x)$  nije dobro definisano), onda važi:*

$$\phi_\alpha(x) = \delta_\alpha(x). \quad (5.18)$$

**Dokaz.** Na osnovu definicije 5.1 važi da je  $\alpha \leq \varphi(x, \delta_\alpha(x))$ . Ako postoji verovatnoća da gubitak bude veći od  $\delta_\alpha(x)$ , tada je:

$$\alpha \leq \varphi(x, \delta_\alpha(x)) < 1,$$

pa je i  $p_\alpha(x) < 1$ . Kako je  $\phi_\alpha(x)$  očekivana vrednost gubitka, a  $\phi_\alpha^+(x)$  očekivana vrednost gubitka u slučaju kada je  $f(x, y) > \delta_\alpha(x)$ , po definiciji se dobija:

$$\phi_\alpha(x) = p_\alpha(x) \delta_\alpha(x) + [1 - p_\alpha(x)] \phi_\alpha^+(x).$$

Sa druge strane, ako je  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)) = 1$ , odnosno najveći mogući gubitak je  $\delta_\alpha(x)$ , tada je  $p_\alpha(x) = 1$ , odnosno pokazano je i (5.18).  $\square$

**Posledica** [5].

$$\phi_\alpha(x) \geq \delta_\alpha(x)$$

**Dokaz.** Na osnovu prethodne leme važi:

$$\phi_\alpha(x) = p_\alpha(x) \delta_\alpha(x) + [1 - p_\alpha(x)] \phi_\alpha^+(x).$$

Za  $p_\alpha(x) < 1$  važi  $\phi_\alpha(x) = p_\alpha(x) \delta_\alpha(x) + [1 - p_\alpha(x)] \phi_\alpha^+(x) > \delta_\alpha(x)$  jer je po definiciji  $\phi_\alpha^+(x) > \delta_\alpha(x)$ .

Kada je  $p_\alpha(x) = 1$  tada  $\phi_\alpha(x) = p_\alpha(x) \delta_\alpha(x) + [1 - p_\alpha(x)] \phi_\alpha^+(x) = \delta_\alpha(x)$ .  $\square$

Navedena posledica govori o tome da portfoliji sa malim *CVaR*-om imaju i mali *VaR*.

**Teorema 5.1 (CVaR za scenario modele** [5]). *Neka slučajna promenljiva  $y \in Y$  ima konačno mnogo ( $K$ ) ishoda  $(y_1, \dots, y_K)$ , te je za svako  $x \in X$  raspodela gubitka  $f(x, y)$  diskretna i leži na konačno mnogo tačaka, a funkcija raspodele gubitka  $\varphi(x, \cdot)$  je stepenasta funkcija sa skokovima u datim tačkama. Za fiksirano  $x \in X$  neka su odgovarajući gubici dati u rastućem poretku  $f(x, y_1) < f(x, y_2) < \dots < f(x, y_K)$ , gde je verovatnoća gubitka  $f(x, y_k)$  data sa  $p_k > 0, k = 1, 2, \dots, K$ . Neka je  $k_\alpha$  jedinstveni indeks takav da važi:*

$$\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k \geq \alpha > \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k. \quad (5.19)$$

$\alpha$ -*VaR* gubitka je dat sa:

$$\delta_\alpha(x) = f(x, y_{k_\alpha}). \quad (5.20)$$

$\alpha$ -*CVaR* gubitka dat je sa:

$$\phi_\alpha(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \left[ \sum_{k=1}^{k_\alpha} (p_k - \alpha) f(x, y_{k_\alpha}) + \sum_{k=k_\alpha+1}^K p_k f(x, y_k) \right]. \quad (5.21)$$

Dalje, pod ovim okolnostima važi:

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{1 - \alpha} \left( \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) \leq \frac{p_{k_\alpha}}{p_{k_\alpha} + \dots + p_K}. \quad (5.22)$$

**Dokaz.** Na osnovu pretpostavke  $\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k \geq \alpha > \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k$  sledi:

$$\varphi(x, \delta_\alpha(x)) = \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k,$$

$$\varphi(x, \delta_\alpha(x)^-) = \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k,$$

i

$$\varphi(x, \delta_\alpha(x)) - \varphi(x, \delta_\alpha(x)^-) = p_{k_\alpha}.$$

Koristeći definiciju za  $\varphi_\alpha^+(x, \cdot)$  i prethodnu lemu dobija se da tvrđenje važi osim za gornju granicu za  $p_\alpha(x)$ . Međutim, ako se opet iskoristi pretpostavka, dobija se:

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha} \left( \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) \leq \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k} \left( \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k \right) = \frac{p_{k_\alpha}}{p_{k_\alpha} + \dots + p_K}. \quad \square$$

Posledica ovog tvrđenja se odnosi na slučaj kada najveći gubitak  $f(x, y_K)$  ima verovatnoću  $p_K > 1 - \alpha$  tj. slučaj kada je  $k_\alpha = K$ . U tom slučaju važi:

$$\phi_\alpha(x) = \delta_\alpha(x) = f(x, y_K).$$

Ova posledica može biti korisna prilikom rešavanja modela stohastičkog programiranja.

## 5.1 CVaR u problemima portfolio optimizacije

U delu koji sledi biće pokazano da se  $\alpha$ -VaR i  $\alpha$ -CVaR gubitka  $f(x, y)$  povezanog sa izborom  $x$  mogu izračunati istovremeno rešavanjem problema optimizacije konveksnog tipa u jednoj dimenziji. Da bi se ovo pokazalo, definiše se pomoćna funkcija:

$$F_\alpha(x, \delta) = \delta + \frac{1}{1-\alpha} E([f(x, y) - \delta]^+), \quad (5.23)$$

gde je  $[x]^+ = \max\{0, x\}$ .

**Teorema 5.2.** [5] Funkcija  $F_\alpha(x, \delta)$ ,  $\delta \in \mathbb{R}$  je neprekidna i važi da:

$$\phi_\alpha(x) = \min_{\delta} F_\alpha(x, \delta). \quad (5.24)$$

Štaviše, važi da je  $\delta_\alpha^+(x)$  gornja granica  $\operatorname{argmin} F_\alpha(x, \delta)$ , a  $\delta_\alpha^-(x)$  je donja granica  $\operatorname{argmin} F_\alpha(x, \delta)$ , gde se  $\operatorname{argmin}$  odnosi na skup  $\delta - \alpha$  u kojima je postignut minimum i u ovom slučaju je neprazan, zatvoren i ograničen. Takođe, važi:

$$\delta_\alpha(x) \in \operatorname{argmin} F_\alpha(x, \delta) \quad (5.25)$$

i

$$\phi_\alpha(x) = F_\alpha(x, \delta_\alpha(x)). \quad (5.26)$$

**Dokaz.** Na osnovu pretpostavke da je  $E(|f(x, y)|) < \infty$  za svako  $x \in X$  sledi da funkcija  $F_\alpha(x, \delta)$  uzima samo konačne vrednosti. Obzirom da je  $[f(x, y) - \delta]^+$  konveksna u odnosu na  $\delta$ , sledi i konveksnost funkcije  $F_\alpha(x, \delta)$  po  $\delta$  za svako fiksirano  $x \in X$ . Iz konveksnosti i konačnosti sledi i neprekidnost funkcije  $F_\alpha(x, \delta)$  po  $\delta$ .

Dalje, kako je funkcija konveksna i uzima samo konačne vrednosti sledi da funkcija ima konačan desni i levi izvod u bilo kom  $\delta$  [5].

Posmatra se najpre izraz:

$$\frac{F_\alpha(x, \delta') - F_\alpha(x, \delta)}{\delta' - \delta} = 1 + \frac{1}{1 - \alpha} E \left( \frac{[f(x, y) - \delta']^+ - [f(x, y) - \delta]^+}{\delta' - \delta} \right). \quad (5.27)$$

Analiza će se razdvojiti na dva slučaja, prvi kada je  $\delta' > \delta$  i drugi kada je  $\delta' < \delta$ .

1. Slučaj kada je  $\delta' > \delta$ .

Kada je  $\delta' > \delta$  važi:

$$\frac{[f(x, y) - \delta']^+ - [f(x, y) - \delta]^+}{\delta' - \delta} = \begin{cases} -1, & f(x, y) \geq \delta' \\ 0, & f(x, y) \leq \delta \\ \in (0, 1), & f(x, y) \in (\delta, \delta') \end{cases}$$

Dalje, važi:

$$P(y|f(x, y) > \delta') = 1 - \varphi(x, \delta'),$$

i:

$$P(y|\delta < f(x, y) \leq \delta') = \varphi(x, \delta') - \varphi(x, \delta).$$

Odavde sledi egzistencija vrednosti  $\gamma(\delta, \delta') \in [0, 1]$  za koju je:

$$E \left( \frac{[f(x, y) - \delta']^+ - [f(x, y) - \delta]^+}{\delta' - \delta} \right) = -[1 - \varphi(x, \delta')] - \gamma(\delta, \delta') [\varphi(x, \delta') - \varphi(x, \delta)].$$

Pošto  $\varphi(x, \delta') \rightarrow \varphi(x, \delta)$  kada  $\delta' \rightarrow \delta$ , dobija se:

$$\lim_{\delta' \rightarrow \delta} E \left( \frac{[f(x, y) - \delta']^+ - [f(x, y) - \delta]^+}{\delta' - \delta} \right) = -[1 - \varphi(x, \delta')].$$

Odnosno, kada se primeni na (5.27) dobija se:

$$\lim_{\delta' \rightarrow \delta} \frac{F_\alpha(x, \delta') - F_\alpha(x, \delta)}{\delta' - \delta} = 1 + \frac{1}{1 - \alpha} [-1 + \varphi(x, \delta')] = \frac{\varphi(x, \delta') - \alpha}{1 - \alpha}.$$

Dakle, važi:

$$\frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \delta}(x, \delta) = \frac{\varphi(x, \delta_\alpha(x)) - \alpha}{1 - \alpha}. \quad (5.28)$$

2. Slučaj kada je  $\delta' < \delta$ .

Kada je  $\delta' < \delta$  važi:

$$\frac{[f(x, y) - \delta']^+ - [f(x, y) - \delta]^+}{\delta' - \delta} = \begin{cases} -1, & f(x, y) \geq \delta \\ 0, & f(x, y) \leq \delta' \\ \in (-1, 0), & f(x, y) \in (\delta', \delta) \end{cases}$$

Dalje, važi:

$$P(y|f(x, y) \geq \delta) = 1 - \varphi(x, \delta^-),$$

i:

$$P(y|\delta' < f(x, y) < \delta) = \varphi(x, \delta^-) - \varphi(x, \delta').$$

Kako  $\varphi(x, \delta') \rightarrow \varphi(x, \delta^-)$  kada  $\delta' \rightarrow \delta$ , dobija se:

$$\lim_{\delta' \rightarrow \delta} E \left( \frac{[f(x, y) - \delta']^+ - [f(x, y) - \delta]^+}{\delta' - \delta} \right) = -[1 - \varphi(x, \delta^-)].$$

Odnosno, kada se primeni na (5.27) dobija se:

$$\lim_{\delta' \rightarrow \delta} \frac{F_\alpha(x, \delta') - F_\alpha(x, \delta)}{\delta' - \delta} = 1 + \frac{1}{1 - \alpha} [-1 + \varphi(x, \delta^-)] = \frac{\varphi(x, \delta^-) - \alpha}{1 - \alpha}.$$

Konačno se dobija da je:

$$\frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \delta}(x, \delta) = \frac{\varphi(x, \delta_\alpha(x)^-) - \alpha}{1 - \alpha}. \quad (5.29)$$

Kako je funkcija  $F_\alpha(x, \delta)$  konveksna, izvedeni jednostrani izvodi su nerastući po  $\delta$  i važi:

$$\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \delta}(x, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \delta}(x, \delta) = 1.$$

Sa druge strane:

$$\lim_{\delta \rightarrow -\infty} \frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \delta}(x, \delta) = \lim_{\delta \rightarrow -\infty} \frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \delta}(x, \delta) = -\frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Za bilo koji izbor  $c \in \mathbb{R}$  nivo skup  $\{\delta | F_\alpha(x, \delta) \leq c\}$  je ograničen, pa se stoga dostiže  $\min_\delta F_\alpha(x, \delta)$ . Vrednosti  $\delta$  su okarakterisane na sledeći način:

$$\frac{\partial^- F_\alpha}{\partial \delta}(x, \delta) < 0 \leq \frac{\partial^+ F_\alpha}{\partial \delta}(x, \delta).$$

Prema izrazima (5.28) i (5.29) to su vrednosti koje zadovoljavaju  $\varphi(x, \delta^-) \leq \alpha \leq \varphi(x, \delta)$ . Prema definiciji 5.1 najmanja takva vrednost je  $\delta_\alpha(x)$ , a prema definiciji 5.2 najveća je  $\delta_\alpha^+(x)$ .  $\square$

Ova teorema je važna jer otkriva fundamentalni razlog zašto se *CVaR* ponaša mnogo bolje od *VaR*-a, kada se neizvesnost od izbora  $x$  mora kontrolisati. Razlog je dobro poznat i leži u teoriji optimizacije.

**Teorema 5.3 (Konveksnost CVaR-a [5]).**

1. Ako je  $f(x, y)$  konveksna po  $x$ , tada je i  $\phi_\alpha(x)$  konveksna po  $x$ . U tom slučaju je funkcija  $F_\alpha(x, \delta)$  konveksna u odnosu na obe promenljive.
2. Ako je  $f(x, y)$  sublinearna po  $x$ , tada je i  $\phi_\alpha(x)$  sublinearna po  $x$  dok je funkcija  $F_\alpha(x, \delta)$  sublinearna u odnosu na obe promenljive.

**Dokaz.**

1. Kako je  $[f(x, y) - \delta]^+$  konveksna po  $(x, \delta)$ , kada je  $f(x, y)$  konveksna po  $x$ , sledi konveksnost funkcije  $F_\alpha(x, \delta)$  po obe promenljive. Jasno, kako je:

$$\phi_\alpha(x) = F_\alpha(x, \delta_\alpha(x)),$$

sledi konveksnost funkcije  $\phi_\alpha(x)$  po  $x$ .

2. Sledi dokaz za sublinearnost. Kako važi osobina da ukoliko je funkcija konveksna i pozitivno homogena da je ona i sublinearna, dovoljno je pokazati pozitivnu homogenost funkcije  $F_\alpha(x, \delta)$ . Neka je funkcija  $f(x, y)$  sublinearna. Tada važi  $f(\theta x, y) = \theta f(x, y)$ , te sledi:

$$\begin{aligned} F_\alpha(\theta x, \theta \delta) &= \theta \delta + \frac{1}{1 - \alpha} E([f(\theta x, y) - \theta \delta]^+) = \\ &= \theta \delta + \frac{1}{1 - \alpha} E([\theta(f(x, y) - \delta)]^+) = \\ &= \theta \delta + \frac{\theta}{1 - \alpha} E([f(x, y) - \delta]^+) = \\ &= \theta F_\alpha(x, \delta). \end{aligned}$$

□

**Definicija 5.5 (Definicija koherentne mere rizika).** Za operator  $T$  kaže se da je koherentna mera rizika u užem smislu ako ispunjava sledeće uslove:

1.  $T(c) = c$ , za svaku konstantu  $c$ .
2.  $T((1 - \theta)x + \theta y) \leq (1 - \theta)T(x) + \theta T(y)$ , za  $\theta \in (0, 1)$  (uslov konveksnosti).
3.  $T(x) \leq T(y)$ , za  $x \leq y$ .
4.  $T(x) \leq 0$  ako  $\|x - x^k\|_2 \rightarrow 0$  za  $T(x^k) \leq 0$ .
5.  $T(\theta x) \leq \theta T(x)$  (osobina pozitivne homogenosti).

**Teorema 5.4.** [5]  $\alpha$ -CVaR je koherentna mera rizika u užem smislu.



**Dokaz.**

Sledi dokaz da  $\alpha$ -*CVaR* ispunjava uslove 1-5. iz prethodne definicije.

1. Ako je  $f(x, y) = c$ , tada je i  $\delta_\alpha(x) = c$  i  $\varphi(x, \delta_\alpha(x)) = 1$ .
2. Konveksnost je dokazana u prethodnoj teoremi.
3. Ako je  $f(x, y) \leq f(\tilde{x}, y)$  tada je i  $F_\alpha(x, \delta) \leq F_\alpha(\tilde{x}, \delta)$ , pa je samim tim i  $\phi_\alpha(x) \leq \phi_\alpha(\tilde{x})$ .
4. Neka je  $\phi_\alpha(x^k) \leq 0$  i  $\|f(x, y) - f(x^k, y)\|_2 \rightarrow 0$ , tada je po definiciji norme:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(f(x, y) - f(x^k, y)) = 0$$

Iz čega sledi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [E(f(x, y)) - E(f(x^k, y))] = 0,$$

Odnosno:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E(f(x^k, y)) = E(f(x, y)).$$

Stoga, važi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_\alpha(x^k, \delta) = F_\alpha(x, \delta) \leq 0,$$

Pa je i  $\phi_\alpha(x) \leq 0$ .

5. Pozitivna homogenost je dokazana u prethodnoj teoremi. □

**Teorema 5.5** (*Stabilnost CVaR-a* [5]). *Funkcija  $\phi_\alpha(x)$  je neprekidna u odnosu na izbor  $\alpha \in (0, 1)$  i ima desni i levi izvod dat sa:*

$$\frac{\partial^-}{\partial \alpha} \phi_\alpha(x) = \frac{1}{(1-\alpha)^2} E([f(x, y) - \delta_\alpha(x)]^+),$$

$$\frac{\partial^+}{\partial \alpha} \phi_\alpha(x) = \frac{1}{(1-\alpha)^2} E([f(x, y) - \delta_\alpha^+(x)]^+).$$

**Dokaz.** Za dokaz pogledati [5]. □

Veoma korisna osobina *CVaR*-a je ta da u problemima optimizacije, *CVaR* može biti i cilj i ograničenje. Takođe, velika prednost *CVaR*-a u odnosu na *VaR* je očuvanje konveksnosti. U numeričkim aplikacijama, konveksnost funkcije  $F_\alpha(x, \delta)$  po obe promenljive je čak i važnija od konveksnosti  $\phi_\alpha(x)$  po  $x$ , zbog činjenice da se minimizacija  $\phi_\alpha(x)$  po  $x$  može transformisati u mnogo prilagodljiviji problem minimiziranja  $F_\alpha(x, \delta)$  po obe promenljive o čemu govori teorema koja sledi.

**Teorema 5.6.** [5] *Minimiziranje  $\phi_\alpha(x)$  po  $x \in X$  je ekvivalentno minimiziranju  $F_\alpha(x, \delta)$  po  $(x, \delta) \in X \times \mathbb{R}$  tj.*

$$\min_{x \in X} \phi_\alpha(x) = \min_{(x, \delta) \in X \times \mathbb{R}} F_\alpha(x, \delta).$$

**Dokaz.**

Tvrđenje je posledica činjenice da je minimizacija funkcije  $F_\alpha(x, \delta)$  u odnosu na  $(x, \delta)$  ekvivalentna minimizaciji iste funkcije u odnosu na  $\delta$  za svako fiksirano  $x$ .  $\square$

Kada se slučajna promenljivu  $y$  aproksimira diskretnom slučajnom promenljivom, problem minimizacije *CVaR*-a postaje problem linearnog programiranja.

Kada se  $y$  aproksimira sa ukupno  $K$  scenarija  $y_1, \dots, y_K$  sa verovatnoćama redom  $p_1, \dots, p_K$ , funkcija  $F_\alpha(x, \delta)$  postaje:

$$F_\alpha(x, \delta) = \delta + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^K p_k [f(x, y_k) - \delta_\alpha(x)]^+.$$

Minimizacija funkcije  $F_\alpha(x, \delta)$  na  $(x, \delta) \in X \times \mathbb{R}$  svodi se na sledeći problem. Ekvivalentna funkcija cilja postaje:

$$\delta + \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{k=1}^K p_k z_k \tag{5.30}$$

gde su  $z_k$  pomoćne promenljive. Ograničenja su:

$$z_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K \tag{5.31}$$

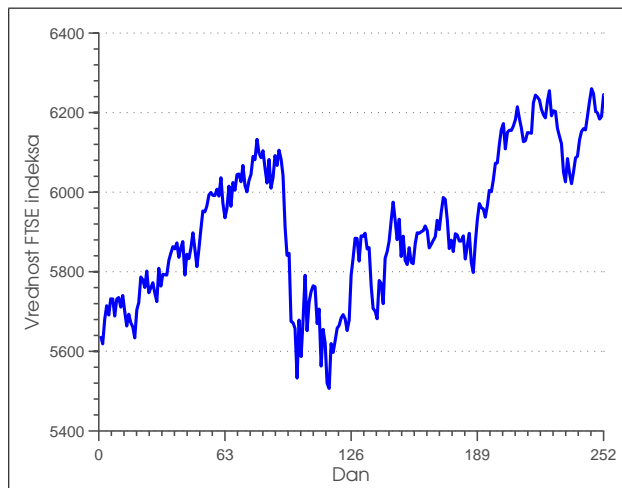
i:

$$z_k \geq f(x, y_k) - \delta, \quad k = 1, \dots, K. \tag{5.32}$$

## 6

# Rezultati numeričkog eksperimenta

Ova glava je posvećena numeričkoj implementaciji teorije iznesene u ovom radu. Pretpostavimo da smo na početku 2007. godine i da želimo da uložimo 10000 novčanih jedinica u dve aktive, jednu rizičnu i jednu nerizičnu. Dakle, formalno govoreći, neka skup aktiva  $\mathcal{A}$  čine dve aktive, rizična  $R$  i nerizična  $S$ , tj.  $\mathcal{A} = \{R, S\}$ , dok je početno bogatstvo  $B = 10000$ . Pri tome, za nerizičnu aktivu znamo da daje prinos od 3.36% na godišnjem, odnosno 0.28% na mesečnom nivou. Pretpostavimo da za rizičnu aktivu imamo istorijske vrednosti cena iz prethodne (2006.) godine. One su grafički prikazane na slici 6.1.



Slika 6.1: Istorijski podaci - FTSE 100

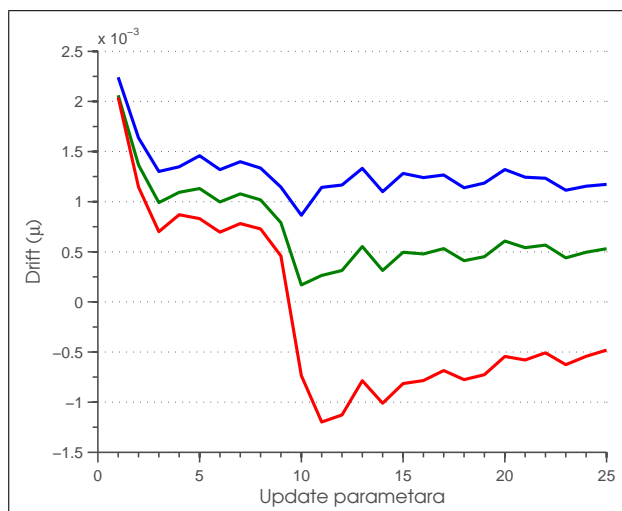
Dalje, pretpostavimo da je vremenski horizont našeg ulaganja dug dva meseca tj.  $T = 2$  pri čemu trenutak  $t = 0$  predstavlja sadašnjost tj. početak januara 2007. godine,  $t = 1$  početak februara 2007. godine i  $t = T = 2$  početak marta 2007. Cilj je doneti odluku koji deo početnog bogatstva uložiti u raspoložive aktive tako da se na kraju horizonta

maksimizira profit i ujedno minimizira rizik. Takođe, pretpostavljamo da na početku februara postoji mogućnost realociranja sredstava između dve aktive.

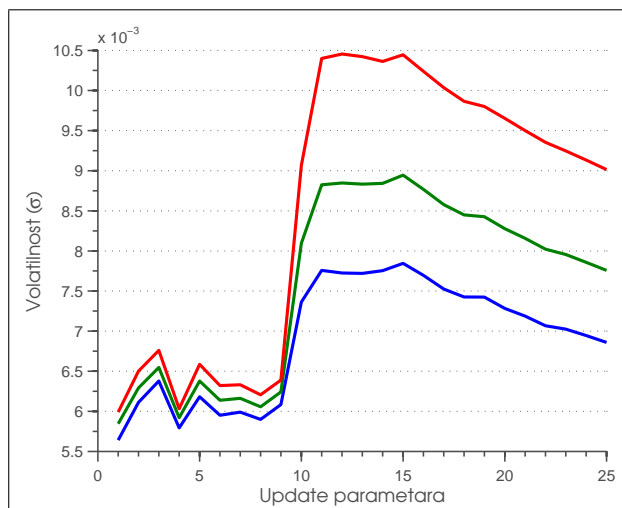
Kao što je objašnjeno u glavi 1, za rešavanje problema portfolio optimizacije sa više etapa za početak je neophodno kretanja budućih cena rizične aktive predstaviti u formi drveta scenarija.

Da bi se formiralo drvo scenarija potrebno je najpre na osnovu istorijskih podataka generisati veliki broj scenarija. Za ovo je korišćen model zasnovan na skrivenim lancima Markova. Pretpostavka je da skriveni lanac Markova ima tri moguća stanja koja odgovaraju stanjima visoke, umerene i niske volatilnosti.

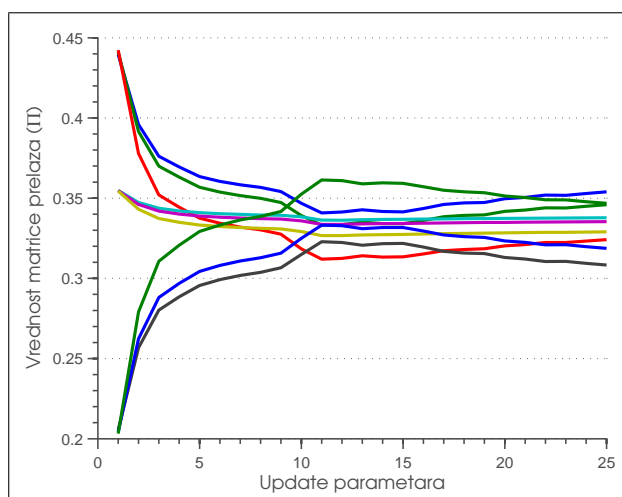
*MatLab* programski kod za ocenu parametara modela (drift, volatilnost i matrica prelaza skrivenog lanca Markova) je prikazan u prilogu 1. Ocenjeni parametri su prikazani grafički na slikama 6.2, 6.3 i 6.4.



*Slika 6.2: Drift*

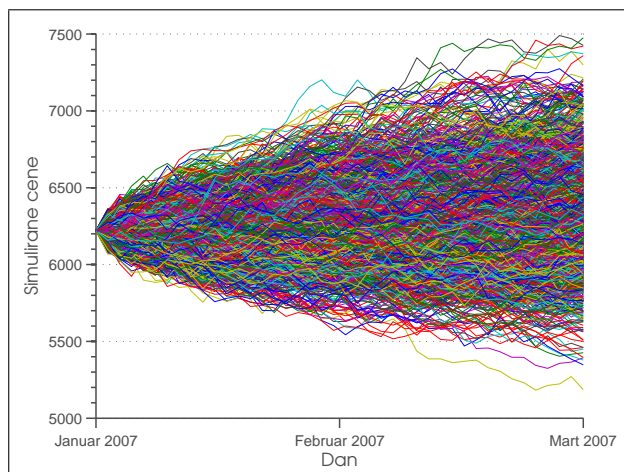


Slika 6.3: Volatilitnost

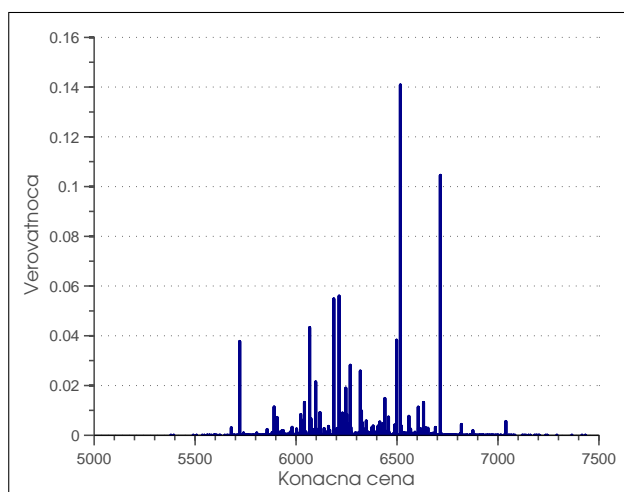


Slika 6.4: Matrica prelaza

Na osnovu ocenjenih parametara modela i uz pomoć generatora slučajnih brojeva iz normalne raspodele generisano je 2000 scenario staza za januar i februar 2007. (predstojeća 42 radna dana). *MatLab* programski kod za generisanje scenarija je prikazan u prilogu 2. Generisani scenariji su prikazani na slici 6.5, a verovatnoće scenario staza na slici 6.6.



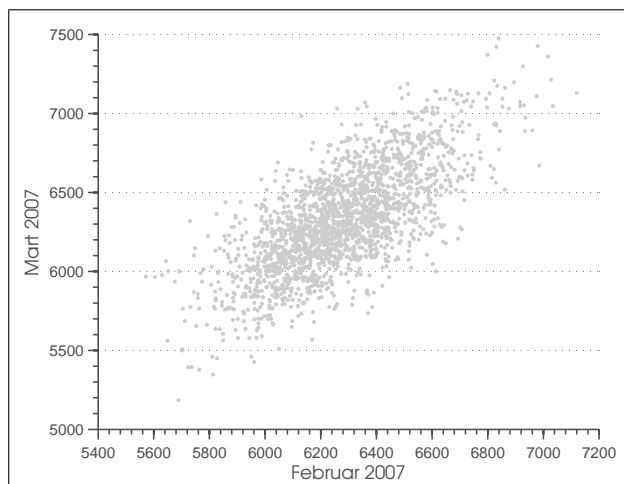
*Slika 6.5: Generisane scenario staze za nastupajuća dva meseca*



*Slika 6.6: Verovatnoće scenario staza*

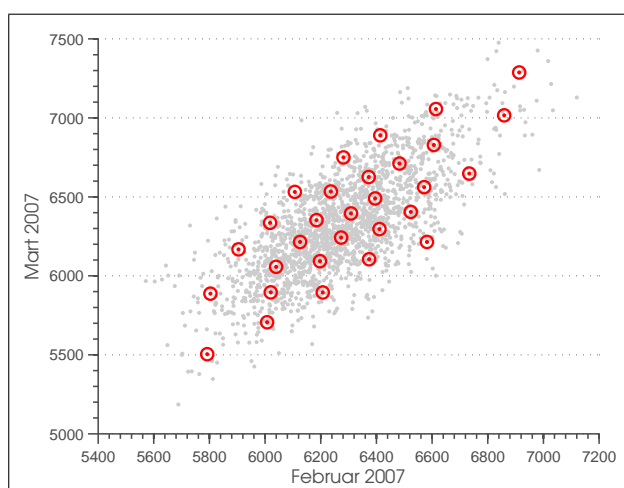
Pomoću algoritma lociranja objekata od scenario staza cilj je generisati drvo scenarija koje se sastoji od 10 čvorova u  $t = 1$  i 30 čvorova na kraju horizonta ulaganja u  $t = T = 2$ .

Da bi se napravilo opisano drvo scenarija, na osnovu generisanih scenario staza uzimaju se vrednosti cena u  $t = 1$  tj. na dan 1. februar i u  $t = 2$  odnosno na dan 1. mart 2007. godine. Odatle se formira 2000 objekata tako što se na  $x$  osu nanose cene u  $t = 1$ , a na  $y$  osu cene u  $t = 2$ , što je prikazano na slici 6.7. Slika 6.7 pokazuje vrednost svake simulirane staze na dan 1. februar i 1. mart 2007. godine pri čemu svaki objekat odgovara jednoj stazi sa slike 6.5.



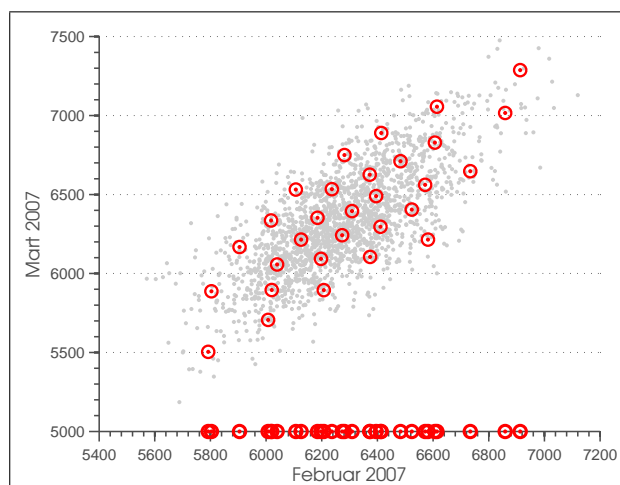
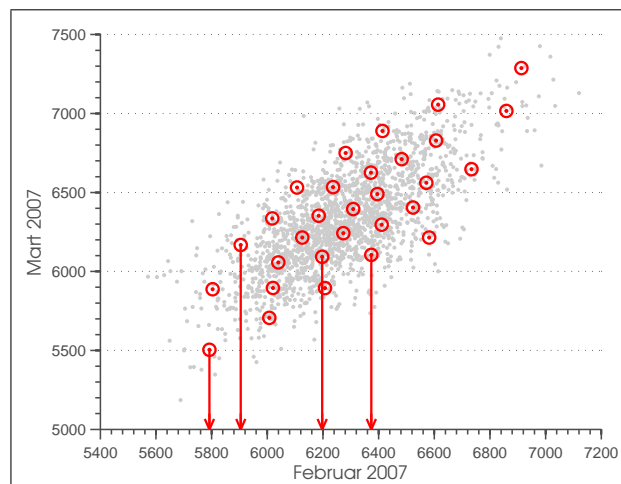
*Slika 6.7: 2000 objekata*

Pomoću *MatLab* funkcije *kmeans* 2000 objekata se redukuje na 30 objekata, što je željeni broj čvorova drveta scenarija u  $t = 2 = T$ . Redukovani objekti su prikazani na slici 6.8.



*Slika 6.8: 30 redukovanih objekata*

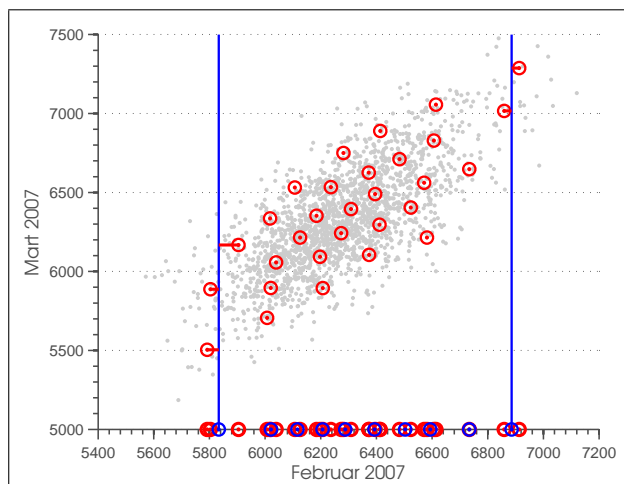
Redukovani objekti se dalje projektuju na  $x$  osu, što je prikazano na slici 6.9.



Slika 6.9: Projekcija redukovanih objekata na  $x$  osu

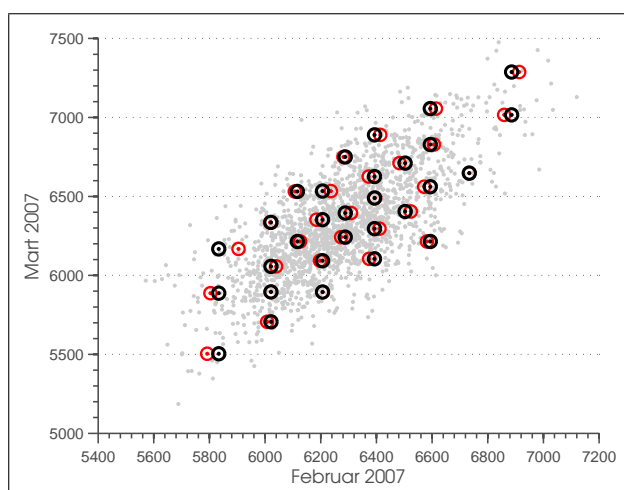
Sada se projektovani objekti grupišu opet pomoću *kmeans* funkcije i to na 10 ulica, što je ujedno i broj čvorova drveća scenarija u  $t = 1$ . Formirane ulice su prikazane na slici 6.10.



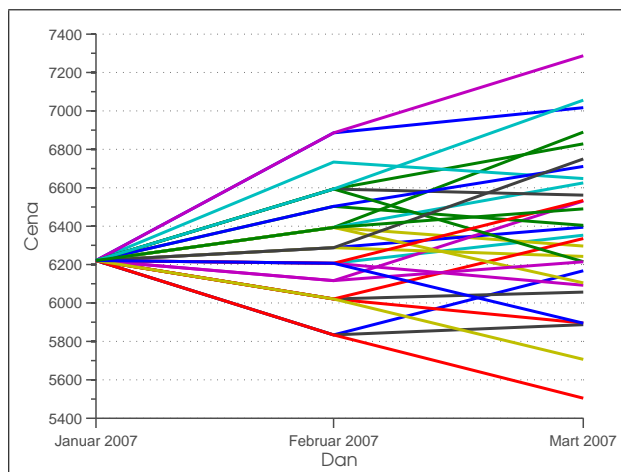


*Slika 6.10: 10 ulica*

Konačno se 30 redukovanih objekata projektuje na formirane ulice, što je poslednji korak algoritma lociranja objekata.  $x$  koordinate formiranih objekata predstavljaju vrednosti cena u čvorovima drveta scenarija u  $t = 1$ , a  $y$  koordinate u  $t = 2$ . Formirani objekti su prikazani na slici 6.11, a odgovarajuće drvo scenarija je prikazano na slici 6.12.

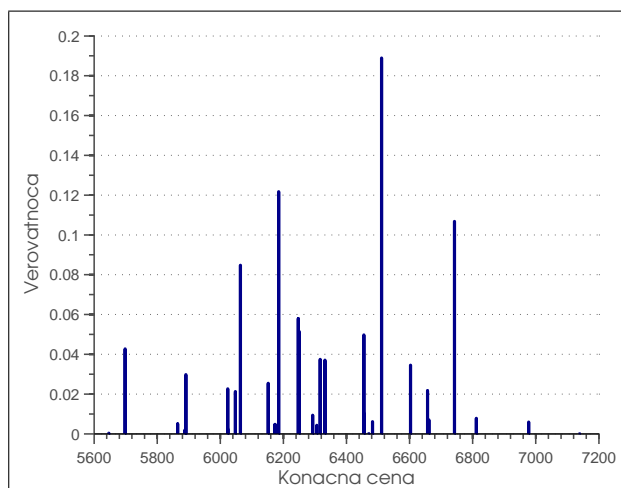


*Slika 6.11: 30 objekata u 10 ulica*



Slika 6.12: Drvo scenarija

Verovatnoće pojedinih scenarija drveta scenarija su prikazane su slici 6.13<sup>1</sup>.



Slika 6.13: Verovatnoće pojedinih scenarija drveta scenarija

*MatLab* programski kod za generisanje drveta scenarija i računanje verovatnoća je prikazan u prilogu 3.

Konačno se dolazi do konkretne formulacije uopštenog problema višestapne optimizacije koji je opisan u 1. Ona glasi:

$$\max_x \sum_{n \in \mathcal{N}^T} p_n \left( \sum_{a \in \mathcal{A}} r_{n,a} x_{p(n),a} \right) + \kappa \left( \gamma - \sum_{n \in \mathcal{N}^T} \frac{p_n z_n}{1 - \alpha} \right), \quad T = 2 \quad (6.1)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} x_{n,a} = B = 10000, \quad \forall n \in \mathcal{N}^0 \quad (6.2)$$

<sup>1</sup>Ove verovatnoće su dobijene na osnovu teoreme *Kantorovich-Rubinstein*.

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} x_{n,a} = \sum_{a \in \mathcal{A}} r_{n,a} x_{p(n),a}, \quad \forall n \in \mathcal{N}^t, \quad t = 1, 2 \quad (6.3)$$

$$z_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathcal{N}^T, \quad T = 2 \quad (6.4)$$

$$z_n \geq \gamma - \sum_{a \in \mathcal{A}} r_{n,a} x_{p(n),a}, \quad \forall n \in \mathcal{N}^T, \quad T = 2 \quad (6.5)$$

Do vrednosti prinosa rizične aktive  $r_{n,R}, \forall n \in \mathcal{N}^t$ , za  $t = 1, 2$  se došlo iz drveta scenarija cena. Prinosi nerizične aktive su, kao što je rečeno na početku ovog poglavlja  $r_{n,S} = 0.28\%, \forall n \in \mathcal{N}^t$ , za  $t = 1, 2$ .

Kao mera rizika u navedenom problemu portfolio optimizacije korišćena je *CVaR* mera rizika opisana u glavi 5. Na osnovu jednačina (5.30), (5.31) i (5.32) vidi se da je problem minimizacije *CVaR*-a ekvivalentan problemu lineranog programiranja. Podsetimo se da je  $\min f(x) \Leftrightarrow \max(-f(x))$ . Kod problema portfolio optimizacije funkcija gubitka predstavlja negativno bogatstvo pojedinih scenarija. Za nivo signifikantnosti  $\alpha$  korišćena je vrednost  $\alpha = 0.9$ . Koeficijent  $\kappa$  predstavlja koeficijent averzije prema riziku i njegova vrednost u ovom primeru iznosi  $\kappa = 0.3$ .

Gornji model je rešen pomoću programskog paketa *AMPL*. Programski kod je prikazan u prilogu 4. Rešavanjem modela se dobija da je očekivani kapital na kraju horizonta 10178 novčanih jedinica. Pri tome, u prvoj etapi odlučivanja treba da uložimo 5935 novčanih jedinica u rizičnu i 4065 u novčanih jedinica u nerizičnu aktivu. U drugoj etapi rebalansiranje vršimo u zavisnosti od stanja drveta scenarija u koje ćemo dospeti, što je prikazano sledećom tabelom:

Čvor	Rizična	Nerizična
1	10593	0
2	0	10460
3	9139	1127
4	0	10145
5	10054	0
6	2867	7108
7	9886	0
8	0	9818.5
9	9736	0
10	0	9640

Tabela 6.1: Rebalansiranje u drugoj etapi odlučivanja

# 7

## Zaključak

U ovom radu je rešavan problem konstruisanja optimalnog portfolija sačinjenog od rizične i nerizične aktive kojeg je moguće rebalansirati u trenutku između početnog i krajnjeg momenta investicionog perioda. Optimalan portfolio je onaj sa maksimalnim očekivanim bogatstvom na kraju horizonta ulaganja i minimalnim rizikom merenim *CVaR*-om. Mogućnost rebalansiranja portfolija je veoma važna investitoru jer mu dozvoljava da reaguje na novonastale okolnosti na tržištu i da im prilagođava svoj portfolio menjajući učešća pojedinih aktiva.

Da bi se problem rešio potrebno je bilo modelovati cenu rizične aktive za šta je korišćen model skrivenog lanca Markova sa geometrijskim Braunovim kretanjem([2]), kao i konstruisati drvo scenarija cena za koje je korišćen metod predložen u [1].

Problem je implementiran i rešen pomoću programskih paketa *MatLab* i *AMPL*. Kao rezultat dobio se odgovor na pitanje koji deo inicijalnog bogatstva uložiti u pojedine aktive u početnom čvoru drveta scenarija, koje reprezentuje sadašnjost kako bi se na kraju investicionog perioda ostvarilo sračunato maksimalno bogatstvo. Takođe, dobila se i strategija rebalansiranja u čvorovima u trenutku u kom je rebalansiranje portfolija dozvoljeno. Ova strategija predstavlja smernicu na koji način bi investitor trebalo da rebalansira svoj portfolio ukoliko se ostvari neki od mogućih ishoda opisanih čvorovima drveta scenarija. Jasno, jedina potpuno primenljiva strategija je strategija koji deo bogatstva uložiti u koju aktivu u trenutku konstruisanja portfolija, dok strategija koja se odnosi na rebalansiranje nije u potpunosti primenljiva iz razloga što je izuzetno mala verovatnoća da neko od pretpostavljenih stanja nastupi. Međutim, investitor može zaključiti kada dospe moment rebalansiranja koji čvor je najbliži ostvarenom stanju na tržištu pa postupiti u skladu sa strategijom predloženom za dati čvor.

Implementirani model je lako prilagoditi za rešavanje problema konstruisanja optimalnog portfolija za drugačiji skup aktiva od korišćenog u ovom radu kao i za drugačiji vremenski horizont investiranja. Postojeći model moguće je unaprediti u sofisticiraniji i

realističniji tako što bi se uključili transakcioni troškovi za koje se u radu pretpostavlja da su jednaki nuli. Druga mogućnost za unapređenje modela bi bila uvođenje pretpostavke o mogućnosti priliva novca ili pozajmljivanja novca u periodima rebalansiranja.

# Prilozi

## Prilog 1: MatLab - Ocena GBM parametara

```
clear;

load FTSE
h=1;
C=[];
K=[];

C=FTSE(1:253);
K=price2ret(C);

batch=10;
no_paramupdate=(floor((length(K)-2)/batch))
state=3;

%INICIJALNE VREDNOSTI PARAMETARA
meanK=mean(K(1:30))
stdK=std(K(1:30))
mu=[1.5*meanK; meanK;0.7*meanK];
sigma=[0.9*stdK; stdK;1.1*stdK];

%INICIJALNA MATRICA PRELAZA LANCA MARKOVA
A=[0.44,0.36,0.2;0.44,0.36,0.2;0.44,0.36,0.2];

%POCETNO STANJE LANCA MARKOVA
xi(:,1)=[0.998 0.001 0.001]';
E=eye(state);
x1=xi(:,1);
xhat(:,1)=x1./sum(x1);

for i=1:state
    Y11(i)=(K(1)-mu(i))/(sigma(i));
    Z11(i)=(normpdf(Y11(i),0,1))/(sigma(i)*normpdf(K(1),0,1));
    D1(i)=Z11(i);
end

%DIJAGONALNA MATRICA KOJA SE KORISTI ZA PROMENU PROSTORA VEROVANTOCE
DD1=diag(D1);
xi(:,2)=A*DD1*xi(:,1);
x2=xi(:,2);
xhat(:,2)=x2./sum(x2);

%INICIJALNE VREDNOSTI GAMMA PROCESA
%gammaj(1, 2 ili 3) je filter „skok“ procesa, gammao je filter
%procesa opservacija i gammat je filter pomocnog procesa
for i=1:state
    gammaj1(:,i)=[0;0;0];
    gammaj2(:,i)=[0;0;0];
    gammaj3(:,i)=[0;0;0];
    gammao(:,i)=[0;0;0];
    gammat(:,i)=[0;0;0];
    gammatq(:,i)=[0;0;0];
end

%NORMIRANJE FILTERA
normfactor = sum(xi(:,2));
remainderSJ1(:,1)=(sum(gammaj1)./normfactor)';
```

```

remainderSJ2(:,1)=(sum(gammaj2)./normfactor)';
remainderSJ3(:,1)=(sum(gammaj3)./normfactor)';
remainderSO(:,1)=(sum(gammaao)./normfactor)';
remainderST(:,1)=(sum(gammat)./normfactor)';
remainderSTQ(:,1)=(sum(gammatq)./normfactor)';

a=2;
e=batch+a;
for u=1:no_paramupdate
    B=K(a:e);
    n=length(B);
    for k=1:batch
        hh=(xi(:,a+k-2));
        for i=1:state
            Y1(k,i)=(B(k)-mu(i))/(sigma(i));
            Z1(k,i)=(normpdf(Y1(k,i),0,1));
            D(k,i)=(Z1(k,i))/(sigma(i)*hh(i)*normpdf(B(k),0,1));
            NennerD(k,i)=(sigma(i)*normpdf(B(k),0,1));
        end
        monitorY1(a+k-1,:)=Y1(k,:);
        monitorZ1(a+k-1,:)=Z1(k,:);
        monitorD1(a+k-1,:)=D(k,:);
        monitorNennerD(a+k-1,:)=NennerD(k,:);

        DD=diag(D(k,:));
        xi(:,a+k-1)=(A*diag(D(k,:))*xi(:,a+k-2));
        ff1=xi(:,a+k-1);
        xhat(:,a+k-1)=ff1./(sum(xi(:,a+k-1)));

        for r=1:state
            gammaj1(:,r)=(A*diag(D(k,:))*(gammaj1(:,r))+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*A\
(1,r)*E(:,1));
            gammaj2(:,r)=(A*diag(D(k,:))*(gammaj2(:,r))+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*A\
(2,r)*E(:,2));
            gammaj3(:,r)=(A*diag(D(k,:))*(gammaj3(:,r))+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*A\
(3,r)*E(:,3));
            gammaao(:,r)=(A*diag(D(k,:))*gammaao(:,r)+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*A*E(:,\
r));
            gammat(:,r)=(A*diag(D(k,:))*gammat(:,r)+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*B(k)\
*A*E(:,r));
            gammatq(:,r)=(A*diag(D(k,:))*gammatq(:,r)+xi(r,a+k-2)*D(k,r)*B(k)\
^2*A*E(:,r));
        end
        normfactor = sum(xi(:,a+k-1));
        remainderSJ1(:,a+k-1)=(sum(gammaj1)./normfactor)';
        remainderSJ2(:,a+k-1)=(sum(gammaj2)./normfactor)';
        remainderSJ3(:,a+k-1)=(sum(gammaj3)./normfactor)';
        remainderSO(:,a+k-1)=(sum(gammaao)./normfactor)';
        remainderST(:,a+k-1)=(sum(gammat)./normfactor)';
        remainderSTQ(:,a+k-1)=(sum(gammatq)./normfactor)';
    end

    %PREDVIDJANJE VREMENSKE SERIJE
    for k=1:batch
        chi=xi(:,a+k-2);
        phat=chi./sum(chi);

```



```

d=(A^h)*phat;
sum1=d(1)*exp(mu(1)-0.5*sigma(1)^2)+d(2)*exp(mu(2)-0.5*sigma(2)^2)+d(
(3)*exp(mu(3)-0.5*sigma(3)^2);
S(k+h)=C(a+k-2)*sum1;
end
F(:,u)=S(1+h:batch+h)';

%UPDATE PARAMETARA
for i=1:state
AA(1,i)=remainderSJ1(i,a+batch-1)/remainderSO(i,a+batch-1);
AA(2,i)=remainderSJ2(i,a+batch-1)/remainderSO(i,a+batch-1);
AA(3,i)=remainderSJ3(i,a+batch-1)/remainderSO(i,a+batch-1);
end
A=AA;

for i=1:state
mu(i)=remainderST(i,a+batch-1)/remainderSO(i,a+batch-1);
end
for i=1:state
sigma(i)=sqrt((remainderSTQ(i,a+batch-1)-2*mu(i)*remainderST(i,
a+batch-1)+mu(i)^2*remainderSO(i,a+batch-1))/remainderSO(i,a+batch-1));
end

M1(u,:)=mu(1);
M2(u,:)=mu(2);
M3(u,:)=mu(3);

SI1(u,:)=sigma(1);
SI2(u,:)=sigma(2);
SI3(u,:)=sigma(3);

PROB1(u,:)=A(1,1);
PROB2(u,:)=A(1,2);
PROB3(u,:)=A(1,3);
PROB4(u,:)=A(2,1);
PROB5(u,:)=A(2,2);
PROB6(u,:)=A(2,3);
PROB7(u,:)=A(3,1);
PROB8(u,:)=A(3,2);
PROB9(u,:)=A(3,3);

a=a+batch;
e=e+batch;
end

forecast1(:,h)=F(:);
m=length(forecast1(:,h));
Kx1=(1:m);
datap=C(2:m+1);

%PREDVIDJANJE PRINOSA
FReturn=price2ret(forecast1);
len=length(FReturn);
Kx2=(1:len);

```

*Slika 7.1: MatLab programski kod za ocenu parametara*

## Prilog 2: MatLab - Generacija scenarija

```
%Ocenjeni parametri
A=[PROB1(end),PROB2(end),PROB3(end);PROB4(end),PROB5(end),PROB6(end);PROB7(
(end),PROB8(end),PROB9(end)];

mu=[M1(end);M2(end);M3(end)];
sigma=[SI1(end);SI2(end);SI3(end)];

ksi=xi(:,end);
x_0=ksi./sum(ksi);

%Generacija 2000 scenario staza za 42 dana (predvijanje cena za dva meseca)
B=[];
for s=1:2000
    x=x_0;
    S_scen(1)=FTSE(254);
    for t=2:42
        w_scen(s,t)=randn(1,1);
        x=A*x;
        mu_scen=sum(mu.*x);
        sigma_scen=sum(sigma.*x);
        S_scen(t)=S_scen(t-1)*exp((mu_scen-0.5*sigma_scen^2)+sigma_scen.*
*w_scen(s,t));
    end
    B=[B;S_scen];
end

%Racunanje verovatnoca
x1=w_scen(:,2:42);
x2=normpdf(x1);
for j=1:2000
    n(j)=prod(x2(j,:));
end
x3=sum(n);
x4=n./x3;
x5=[B(:,42) x4'];
x6=sortrows(x5,1);
```

Slika 7.2: MatLab programski kod za generaciju scenarija

## Prilog 3: MatLab - Generacija drveta scenarija

```
%ORIGINALNI OBJEKTI ZA FACILITY LOCATION
X=[B(:,21),B(:,42)];

brul=10;
brob=3*brul;

%REDUKOVANJE BROJA OBJEKATA POMOCU KMEANS ALGORITMA
opts=statset('Display','final');
[IDX,redob]=kmeans(X,brob,'Distance','sqEuclidean','Replicates',5,'Options',opts);

%FORMIRANJE ULICA
opts=statset('Display','final');
[IDX1,ul]=kmeans(redob(:,1),brul,'Distance','sqEuclidean','Replicates',100,'Options',opts);

%SVODJENJE REDUKOVANIH OBJEKATA NA ULICE
ob=redob;
for j=1:brob
    min=abs(redob(j,1)-ul(1));
    ob(j,1)=ul(1);
    for k=2:brul
        if abs(redob(j,1)-ul(k))<min
            min=abs(redob(j,1)-ul(k));
            ob(j,1)=ul(k);
        end
    end
end

%RACUNANJE PRINOSA
cene1=sortrows(ob,-2);
cene=sortrows(cene1,-1);
prinosi3=[cene(:,1)/FTSE(254) cene(:,2)./cene(:,1)];
prinosi2=sort(unique(prinosi3(:,1)),'descend');
prinosi1=[prinosi2' prinosi3(:,2)'];
prinosi=[[2:(brob+brul+1)]' prinosi1' 1.0028*ones(1,brob+brul)'];

%NALAZENJE PRETHODNIKA
prethodnici = [[2:(brob+brul+1)]' ones(1,brob+brul)'];
for j=1:brob
    for k=1:brul
        if prinosi3(j,1) == prinosi2(k)
            prethodnici(j+brul,2)=k+1;
        end
    end
end

%RACUNANJE VEROVATNOCA
cene_rast = sortrows(ob,2);
G1=zeros(brob,1);
G2=zeros(brob,1);
pz1=zeros(brob,1);
pz2=zeros(brob,1);
G1(brob)=1;
```

```

for i=1:(brob-1)
    pz1(i)=(cene_rast(i,2)+cene_rast(i+1,2))/2;
    j=1;
    while pz1(i) > x6(j,1)
        j=j+1;
    end
    G1(i)=sum(x6(1:(j-1),2));
end
G2(1)=0;
for i=2:brob
    pz2(i)=(cene_rast(i,2)+cene_rast(i-1,2))/2;
    j=1;
    while pz2(i) > x6(j,1)
        j=j+1;
    end
    G2(i)=sum(x6(1:(j-1),2));
end
G=G1-G2;
verovatnoce3=[cene_rast G];
verovatnoce2=sortrows(verovatnoce3,-2);
verovatnoce1=sortrows(verovatnoce2,-1);
verovatnoce = [[brul+2:brob+brul+1]' verovatnoce1(:,3)];

%KREIRANJE .DAT FAJLA ZA AMPL
f_m = fopen(sprintf('D:\01 STUDIJE\Master teza\5 AMPL\amplcml\m_%i.dat',
brul), 'wt');
fprintf(f_m, 'param BrCvorova := %i', brob+brul+1);
fprintf(f_m, ';\n');
fprintf(f_m, 'param PrviKrajnji := %i', brul+2);
fprintf(f_m, ';\n\n');

fprintf(f_m, 'param Prinos: R S :=\n');
fprintf(f_m, '%i %.4f %.4f\n', prinosi);
fprintf(f_m, ';\n');

fprintf(f_m, 'param Prethodnik :=\n');
fprintf(f_m, '%i %i\n', prethodnici);
fprintf(f_m, ';\n');

fprintf(f_m, 'param Verovatnoca :=\n');
fprintf(f_m, '%i %.8f\n', verovatnoce);
fprintf(f_m, ';\n');
fclose(f_m);

```

*Slika 7.3: MatLab programski kod za generaciju drveta scenarija*

## Prilog 4: AMPL - Rešenje problema optimizacije

```
set Aktive;

param BrCvorova;
param PrviKrajnji;

param B;

param k := 0.3;
param alfa := 0.9;

param Pri nos{2 .. BrCvorova, Aktive};
param Verovatnoca{PrviKrajnji .. BrCvorova};
param Prethodnik{2 .. BrCvorova};

var x{1 .. PrviKrajnji-1, Aktive} >= 0;

var gama;
var z{PrviKrajnji .. BrCvorova} >= 0;

var OcekivanoBogatstvo;

maximize OcekivanoBogatstvo_i_Rizik:
    sum{n in PrviKrajnji .. BrCvorova}
        Verovatnoca[n] * sum{i in Aktive} Pri nos[n,i] * x[Prethodnik[n],i] +
        k*(gama-sum{n in PrviKrajnji .. BrCvorova} Verovatnoca[n]*z[n]/(1-alfa));

subject to InvestiratiSavNovac:
    sum{i in Aktive} x[1,i] = B;

subject to RavnotezaBogatstva{n in 2 .. PrviKrajnji-1}:
    sum{i in Aktive} x[n,i] = sum{i in Aktive} Pri nos[n,i] * x[Prethodnik[n],i];

subject to CVar{n in PrviKrajnji .. BrCvorova}:
    z[n] >= gama-sum{i in Aktive} Pri nos[n,i] * x[Prethodnik[n],i];
```

*Slika 7.4: AMPL programski kod*

# Literatura

- [1] Hochreiter R., Pflug Ch. G., *Financial scenario generation for stochastic multi-stage decision processes as facility location problems*, Annals of Operations Research, 152: 257-272, 2007
- [2] Erlwein C., Mitra G., Roman D., *HMM based scenario generation for an investment optimisation problem*, Springer Science+Business Media, 2011
- [3] Messina E., Toscani D., *Hidden Markov models for scenario generation*, IMA Journal of Management Mathematics, 19: 379-401, 2008
- [4] Pflug Ch. G., *Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization*, Department of Statistics and Decision Support Systems, University of Vienna
- [5] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Conditional value-at-risk for general loss distributions*, Journal of Banking and Finance, 26: 1443-1471, 2002
- [6] Rockafellar R. T., Uryasev S., *Optimization of conditional value-at-risk*, Journal of Risk, 2/3, 2000
- [7] Uryasev S., *Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications*, Financial Engineering News, 14, 2000
- [8] Shapiro A., Ruszczyński A., *Lectures on Stochastic Programming*, 2007
- [9] Shapiro A., Philpott A., *A Tutorial on Stochastic Programming*, 21, 2007
- [10] <http://profs.sci.univr.it/liptak/ALBioinfo/files/chapter6.pdf>
- [11] <http://uk.finance.yahoo.com>
- [12] Vulcanovic R., *Uvod u obradu teksta sistemom Latex*, Novi Sad, 1991
- [13] Fourer R., Gay D., Kernighan B., *AMPL A Modeling Language for Mathematical Programming*, Duxbury Thomson, 2003

[14] Programski paket *MatLab 2009b*

[15] Programski paket *AMPL*

# Kratka biografija



---

Buda Bajić je rođena 14.02.1988. godine u Novom Kneževcu. Završila je Osnovnu školu *Jovan Jovanović Zmaj* u Srpskom Krsturu, kao nosilac *Vukove diplome*, a potom prirodno-matematički smer gimnazije u Novom Kneževcu, takođe kao nosilac *Vukove diplome*. Studije matematike finansija na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu je upisala 2007. godine. Osnovne studije je završila u junu 2011. godine sa prosečnom ocenom 10.00. Iste godine je upisala master studije primenjene matematike, modul matematika finansija, na istom fakultetu. Zaključno sa junskim ispitnim rokom 2012. godine, položila je sve predviđene ispite sa prosečnom ocenom 10.00. Od januara 2012. godine, zaposlena je u Narodnoj banci Srbije.



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

**RBR**

Identifikacioni broj:

**IBR**

Tip dokumentacije:

**TD**

monografska dokumentacija

Tip zapisa:

**TZ**

tekstualni štampani materijal

Vrsta rada:

**VR**

master rad

Autor:

**AU**

Buda Bajić

Mentor:

**ME**

dr Nataša Krejić

Naslov rada:

**NR**

Generacija scenarija u stohastičkim procesima  
odlučivanja sa više etapa

Jezik publikacije:

**JP**

srpski (latinica)

Jezik izvoda:

**JI**

s/en

Zemlja publikovanja:

**ZP**

Republika Srbija

Uže geografsko područje:

**UGP**

Vojvodina

Godina:

**GO**

2012

Izdavač: autorski reprint  
**IZ**

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4  
**MA**

Fizički opis rada: (7/52/15/4/3/24/4)  
**FOR** (broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/  
grafika/priloga)

Naučna oblast: matematika  
**NO**

Naučna disciplina: primenjena matematika  
**ND**

Predmetne odrednice, ključne reči (**PO, UDK**): portfolio optimizacija sa više perioda, rebalansiranje, stohastičko programiranje, skriveni lanci Markova, generacija scenarija, drvo scenarija, lociranje objekata, *CVaR*

Čuva se: U biblioteci Departmana za matematiku i  
**ČS** informatiku

Važna napomena:  
**VN**

Izvod (**IZ**): U radu je rešavan problem konstruisanja optimalnog portfolija kojeg je moguće tokom vremena rebalansirati. Obzirom da ovaj problem predstavlja primer problema stohastičkog programiranja sa više etapa objašnjeni su osnovni koncepti problema stohastičkog programiranja sa jednom i više etapa. Takođe su iznete teorijske osnove modela korišćenog za modelovanje cena rizičnih aktiva u budućnosti kao i metode za generisanje drveta scenarija neophodnog za rešavanje problema portfolio optimizacije. Korišćena mera rizika portfolija u radu je uslovna vrednost pod rizikom (*CVaR*) čije su najvažnije osobine u radu navedene i dokazane. Primer problema konstruisanja optimalnog portfolija je implementiran i rešen i prikazani su dobijeni rezultati.

Datum prihvatanja teme od 10.05.2012.  
strane NN veća:

**DP**

Datum odbrane: 28.12.2012.

**DO**

Članovi komisije:

**KO**

Predsednik:

dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno-  
matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član:

dr Miloš Božović, docent Ekonomskog fakulteta u  
Beogradu

Mentor:

dr Nataša Krejić, redovni profesor Prirodno-  
matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE  
KEY WORDS DOCUMENTATION

Serial number:  
**SNO**

Identification number:  
**INO**

Document type: monograph type  
**DT**

Type of record: printed text  
**TR**

Contents code: master's thesis  
**CC**

Author: Buda Bajić  
**AU**

Mentor: dr Nataša Krejić  
**ME**

Title: Financial scenario generation for stochastic  
multi-stage decision processes  
**TI**

Language of text: Serbian (Latin)  
**LT**

Language of abstract: s/en  
**LA**

Country of publication: Republic of Serbia  
**CP**

Locality of publication: Vojvodina  
**LP**

Publication year: 2012  
**PY**

Publisher: author's reprint  
**PU**

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4  
**PP**

Physical description: (7/52/15/4/3/24/4)  
**PD** (chapters/pages/literature/tables/pictures/  
graphs/add.lists)

Scientific field: Mathematics  
**SF**

Scientific discipline: Applied Mathematics  
**SD**

Subject, key words (**SKW**): scenario generation, geometrical Brownian motion, hidden Markov model, portfolio optimization, CVaR

Holding data: In library of Department of Mathematics and Informatics  
**HD**

Note:  
**N**

Abstract (**AB**): This paper is dedicated to design of optimal portfolio that can be rebalanced during the time. Such problems are problems of multistage stochastic programming. In paper are described basic concepts of stochastic programming problems, with two and multi stages. Moreover, paper provides theoretical basis for risk assets price modeling in future and methods for generation of scenario tree, that is required for solving of problem. Applied measure of risk is *CVaR*. The most important features of *CVaR* are presented and proved in paper. Example of optimal portfolio design is implemented and solved.

Accepted on Scientific board 10.05.2012.  
on:  
**AS**

Defended: 28.12.2012.  
**DE**

Thesis Defend board:  
**DB**

President: dr Zorana Lužanin, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Member: dr Miloš Božović, Assistant Professor, Faculty of Economics, University of Belgrade

Mentor: dr Nataša Krejić, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad