UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jelena Rodić

Optimizacija portfolija algoritamskih strategija trgovanja

-MASTER RAD-

Novi Sad, april 2017.

Sadržaj

Predgovor

Danas je portfolio analiza od velikog značaja prilikom donošenja investicionih odluka. Problemom optimizacije portfolija, kao veoma atraktivnom temom, naučnici se bave decenijama. Rukovodioci investicionih projekata koji sadrže veći broj investicionih opcija pridaju veliki značaj optimizaciji investicionog portfolija. Njihov zajednički cilj jeste donošenje optimalne investicione strategije koja bi uz minimalan rizik ostvarila maksimalan prinos.

Ovaj rad za temu ima optimizaciju portfolija kod algoritamskih strategija trgovanja (engl. *"Black Box"* - BB strategije). Termin algoritamsko trgovanje ili automatsko trgovanje (engl. *Algorithmic Trading, Automated Trading*) odnosi se na softver u kome je implementirana neka od strategija trgovanja finansijskim instrumentima.

Ovaj način automatizovanog elektronskog trgovanja je široko zastupljen u delovanju investicionih banaka, penzionih fondova i ostalih učesnika na finansijskim tržištima koji za cilj imaju ostvarivanje profita od investiranja. Integracijom algoritamskog trgovanja moguće je automatizovati sve ili samo neke korake u procesu analize podataka, formiranja strategije, odlučivanja i samog delovanja na tržistu u cilju realizovanja strategije.

Prvi deo rada bavi se analizom BB strategija. Pomoću skrivenih lanaca Markova vrši se generisanje mogućih stanja sveta za sve strategije, a zatim se proverava ponašanje svake strategije u svakom od stanja sveta. Strategija u svakom stanju može imati sebi svojstvenu reakciju.

Nakon analize BB strategija, predviđaju se buduća stanja sveta, nakon čega se posebna pažnja posvećuje izradi modela za optimizaciju portfolija sastavljenog od određenog broja BB strategija. Model se zasniva na funkciji korisnosti koju investitor poseduje, gde u zavisnosti od predviđenih stanja sveta investitor bira u koju će od ponuđenih strategija uložiti. Ceo model se na kraju primenjuje na realne podatke, tj. vremenske serije dobijene iz investicionog fonda, a zatim testira In-Out-Sample metodom.

Glava 1 posvećena je osnovnim matematičkim pojmovima, definicijama i teoremama neophodnim za postavljanje teorijske pozadine modela. Sledeća glava, Glava 2, bavi se objašnjenjem mera performansi portfolia koje su zasnovane na odnosu prinosa i rizika portfolia. Pored varijanse portfolija, od pomenutih mera u praksi su najviše rasprostranjene Sharpe-ov i Calmar-ov količnik, kao i korisnost koju portfolio donosi vlasniku, sa posebnim naglaskom na kvadratnu funkciju korisnosti. U Glavi 3 se matematički postavljaju problemi optimizacije. U ovom slučaju, u fokusu su minimizacija rizika i maksimizacija korisnosti kod portfolija, kao i potrebni i dovoljni uslovi za postojanje ekstremnih vrednosti. Glava 4 je posvećena opisu konkretnog problema i konstrukciji modela koji predstavlja građenje "master" strategije ulaganja. Optimizacija portfolija algoritamskih strategija trgovanja, dobija se iz problema maksimizacije funkcije korisnosti u zavisnosti od predviđenih stanja sveta. Poslednja glava prikazuje primenu modela nad konkretnim vremenskim serijama 22 BB strategije za 10 godina. Podaci su realni i preuzeti iz jednog investicionog fonda. Nakon prezentovanja rezultata i interpretacije istih, deo ove glave posvećen je zapažanjima i idejama koje su proistekle prilikom izrade ovog rada, a koje mogu biti od izuzetnog značaja za neka dalja istraživanja i radove sličnog tipa.

Na kraju, želim da izrazim posebnu zahvalnost svojoj mentorki, prof. dr Nataši Krejić, na pruženim savetima i smernicama tokom pisanja ovog rada, a pre svega na nesebično pruženom znanju i podršci tokom studiranja.

Zahvalnost dugujem Dr. Miles Kumaresan-u koji je formulisao obrađeni problem i obezbedio podatke.

Takođe, zahvalila bih se članovima komisije, prof. dr Danijeli Rajter Ćirić i dr Nataši Krklec Jerinkić, na svom prenetom znanju i lepoj saradnji, kao i asistentkinji Mileni Kresoji na pruženoj pomoći i podršci tokom stvaranja rada i celokupnog studiranja.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, majci i ocu, na ljubavi i podršci koju mi neprestano pružaju.

1 Pregled osnovnih pojmova, definicija i teorema

Na samom početku, neophodno je uvesti neke osnovne pojmove, kao i obratiti pažnju na definicije i teoreme koje su od značaja za postavku modela.

1.1 Osnovne definicije i teoreme

Aksioma 1.1 *(σ – **algebra**) Podskup $\mathcal{F}$ partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ - polje (σ - algebra) nad Ω ako važe uslovi:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. *ako* $A \in \mathcal{F}$, *onda* $\overline{A} \in \mathcal{F}$, *pri čemu je* $\overline{A}$ *komplement skupa* A,
3. *ako* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, *onda* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Definicija 1.1 *Borelovo σ -polje $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ je jedno σ - polje definisano nad skupom realnih brojeva. Formira se pomoću familije poluotvorenih intervala $[a, b), a, b \in \mathbb{R}$. Borelovo σ - polje $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sadrži sve skupove koji se dobijaju kao konačne ili prebrojive unije ili preseci te familije, kao i skupove koji se dobijaju uzimanjem komplemenata. Borelova σ - algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je najmanja σ - algebra koja sadrži sve otvorene podskupove skupa realnih brojeva.*

Aksioma 1.2 ***(Aksioma verovatnoće)***

Neka je Ω skup elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ σ - polje nad Ω. Funkcija $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ se zove verovatnoća na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ ako zadovoljava sledeće uslove:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. *Ako* $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}, A_i \cap A_j = , i \neq j, i, j = 1, 2, ...,$ *onda*

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Prostor verovatnoća je uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gde je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ je σ - polje nad Ω, a P je verovatnoća na $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definicija 1.2 *(**Uslovna verovatnoća**) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $A, B \in \mathcal{F}$, pri čemu je $P(B) > 0$. Uslovna verovatnoća $P(A|B)$ (verovatnoća događaja A pod uslovom da se realizovao događaj B) je*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Teorema 1.1 [24] *Funkcija* $P(\cdot|B), B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$*, jeste funkcija verovatnoće na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *i važi da je* $P(B|B) = 1$.

Definicija 1.3 *Preslikavanje* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ako* $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$ *za svako* $S \in \mathcal{B}$*, gde je* $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *Borelovo* σ *- polje. Ekvivalentno, kažemo da je* X $\mathcal{F}$*-merljivo.*

Definicija 1.4 *(**Diskretna slučajna promenljiva**) Slučajna promenljiva X je diskretna (diskretnog tipa) ako postoji prebrojiv skup brojeva* R_X *takav da je* $P\{X \in \overline{R_x}\} = 0$*, odnosno ako je skup slika od X najviše prebrojiv skup.*

Ako je $R_X = \{x_1, x_2, ...\}$ skup različitih vrednosti slučajne promenljive X diskretnog tipa, tada sa $p(x_i),\ i = 1, 2, ...,$ označavamo verovatnoću događaja $\{X = x_i\} = \{\omega | X(\omega) = x_i\}$:

$$p(x_i) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) = x_i\} = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, ...$$

Definicija 1.5 *(**Funkcija raspodele**) Funkcija* $F_X(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definisana sa*

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x)) = P\{\omega \in \Omega | X(\omega) < x\},$$

naziva se funkcija raspodele slučajne promenljive X.

Funkciju raspodele F_X u tački $x \in \mathbb{R}$ kraće zapisujemo

$$F_X(x) = P\{X < x\}.$$

Definicija 1.6 *(**Apsolutno neprekidna slučajna promenljiva**) Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji nenegativna integrabilna funkcija* $\varphi_X(x),\ -\infty < x < \infty$*, takva da je, za svaki skup* $S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*,*

$$P\{X \in S\} = \int_S \varphi_X(x) dx.$$

Funkcija $\varphi_X(x)$ zove se funkcija gustine raspodele verovatnoća (ili samo gustina raspodele) slučajne promenljive X.

Teorema 1.2 *(**Radon-Nikodym**) Ako su P i* $\tilde{P}$ *dve mere verovatnoće na prostoru* $(\Omega, \mathcal{B})$ *takva da je* $\tilde{P}$ *apsolutno neprekidna u odnosu na P, tada postoji nenegativna slučajna promenljiva* Λ *takva da za svako* $C \in \mathcal{B}$ *važi* $\tilde{P}(C) = \int_C \Lambda dP$*. Ova slučajna promenljiva zove se Radon-Nikodym izvod* $\tilde{P}$ *u odnosu na P i zapisujemo ga kao*

$$\Lambda = \frac{d\tilde{P}}{dP}$$

Definicija 1.7 *(**Očekivanje**) Očekivanje $E(X)$ diskretne slučajne promenljive X sa raspodelom $p(x_k)$, $k = 1, 2, ...$, definiše se sa:*

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p(x_k),$$

i postoji ako i samo ako

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p(x_k) < \infty.$$

Definicija 1.8 *(**Momenat**) Momenat reka $k, k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X je $E(X^k)$.*
Centralni momenat reda $k, k \in \mathbb{N}$, slučajne promenljive X je

$$E\big((X - E(X))^k\big).$$

Dakle, matematičko očekivanje je momenat reda 1.

Definicija 1.9 *(**Disperzija**) Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive X zove se diserzija (varijansa) slučajne promenljive X i označava se sa $D(X)$ ili $\sigma^2(X)$.*

Dakle,

$$D(X) = E\big((X - E(X))^2\big).$$

Za izračunavanje disperzije često se koristi izraz u sledećoj formi:

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X).$$

Definicija 1.10 *(**Standardno odstupanje**) Standardna devijacija (standardno odstupanje, prosečno odstupanje) slučajne promenljive X se definiše kao*

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Definicija 1.11 *(**Kovarijansa**) Kovarijansa slučajne promenljive (X, Y) je*

$$cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija 1.12 *(**Koeficijent korelacije**) Koeficijent korelacije slučajne promenljive (X, Y) je*

$$\varphi_{XY} = cov(X^*, Y^*) = cov\Big(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\Big),$$

gde su X^* i Y^* standardizovane slušajne promenljive.

$$\varphi_{XY} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_1 \sigma_2} = \varphi.$$

Teorema 1.3 [24] *Za koeficijent korelacije φ_{XY} važi*

$$|\varphi_{XY}| \leq 1.$$

Za slučajne promenljive X i Y čiji je koeficijent korelacije $\varphi_{XY} < 0$ kažemo da su negativno korelisane, za $\varphi_{XY} = 0$ kažemo da nisu korelisane, a za $\varphi_{XY} > 0$ kažemo da su pozitivno korelisane.

Definicija 1.13 *(**Stohastički proces**) Neka je S skup elementarnih događaja nekog eksperimenta E i neka se svakom elementu tog skupa, $s \in S$, pridruži funkcija $X(t,s)$, pri čemu t pripada skupu $T \in R$. Skup $\{X(t,s), t \in T\}$ naziva se stohastički (slučajni) proces* [10].

Funkcija $X(t,s)$ je slučajna promenljiva za bilo koju vrednost t.

Definicija 1.14 *(i) Ukoliko je T beskonačan prebrojiv skup, skup $\{X(t,s), t \in T\}$ naziva se diskretni stohastički proces.*
(ii) Ukoliko je T interval (ili skup intervala), skup $\{X(t,s)\ t \in T\}$ naziva se neprekidni stohastički proces.

Uobičajeno je da se za stohastički proces $\{X(t,s), t \in T\}$ koristi oznaka $\{X(t), t \in T\}$ ili $\{X_t \in T\}$.

Definicija 1.15 *Skup vrednosti $S_X(t)$ koje mogu uzeti slučajne promenljive $X(t)$ se naziva skup stanja stohastičkog procesa $\{X(t), t \in T\}$.*
U zavisnosti od toga da li je $S_X(t)$ konačan (ili beskonačan prebrojiv skup) ili beskonačan neprebrojiv skup, stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ je diskretan ili neprekidan, respektivno.

Definicija 1.16 *Ukoliko su slučajne promenljive $X(t_4) - X(t_3)$ i $X(t_2) - X(t_1)$ nezavisne za svako $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$, kažemo da je stohastički proces $\{X(t), t \in T\}$ proces sa nezavisnim priraštajima.*

Definicija 1.17 *(**Očekivanje slučajnog procesa**) Očekivanje (srednja vrednost) stohastičkog procesa $X(t), t \in T$ je data sa:*

$$\mu_X(t) = \mu(t) = E(X(t)), t \in T.$$

Primetimo da je $\mu_X(t)$ funkcija od t.

Definicija 1.18 *(**Disperzija stohastičkog procesa**) Disperzija stohastičkog procesa $X(t), t \in T$ data je sa:*

$$\sigma_X^2(t) = E((X_t - \mu_(t))^2) = E(X_t^2) - E^2(X_t),\ t \in T.$$

Definicija 1.19 *(**Autokovarijansna funkcija stohastičkog procesa**) Autokovarijansna funkcija stohastičkog procesa $X(t), t \in T$ data je sa:*

$$K_X(t,s) = K(t,s) = E(X_t X_s) - E(X_t)E(X_s) = E((X_t - \mu(t))(X_s - \mu(s))), t, s \in T.$$

Definicija 1.20 *(**Vremenska serija**) Vremenska serija je jedna realizacija stohastičkog procesa.*

Najbitnija statistička osobina vremenskih serija jeste njihova stacionarnost. Za stacionarne vremenske serije mogu se naći ocene njihovih prvih i drugih momenata kao i autokovarijansna funkcija jer ne zavise od t.

Podaci sa kojima radimo u ovom radu u vezi sa prinosima investicionog fonda na dnevnom nivou, pa ćemo vremenske serije koje taj prinos opisuje posmatrati kao niz slučajnih promenljivih uređenih u odnosu na skup prirodnih brojeva $N = \{1, 2, \ldots\}$. Skup N predstavlja skup dana za koje su nam date vrednosti prinosa.
Neka je data vremenska serija $x(t), t = 1, \ldots, N$ kao realizacija stacionarnog stohastičkog procesa. Svako $x(t), t = 1, \ldots, N$ predstavlja realizaciju slučajne promenljive $X(t), t = 1, \ldots, N$. Ako je stohastički proces stacionaran, tj. ako ima konstantno očekivanje i varijansu, vremensku seriju možemo posmatrati kao uzorak. Elemente vremenske serije posmatramo kao realizacije jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih. Ocene glavnih numeričkih karakteristika vremenske serije (stohastičkog procesa) date su sledećim formulama [25]:

- Očekivanje:
$$\hat{\mu}_X = \hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} x(t)$$
- Disperzija:
$$\hat{\sigma}_X^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(x(t) - \hat{\mu}_X)^2$$
- Korelacija:
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(x(t) - \hat{\mu}_X)(y(t) - \hat{\mu}_Y)$$

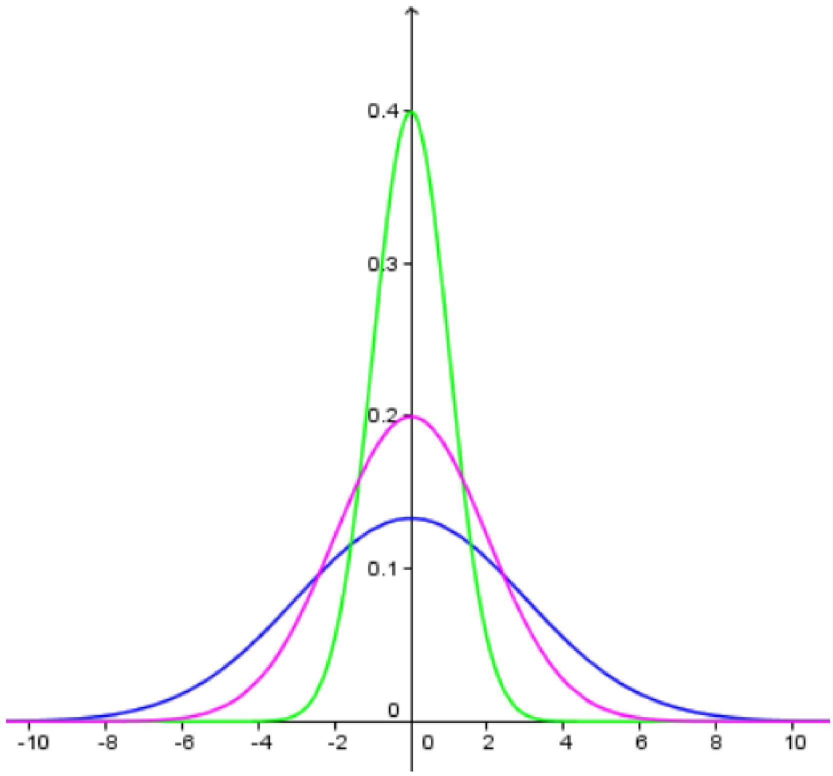
1.2 Normalna raspodela

Slučajna promenljiva x ima normalnu raspodelu, pišemo $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gde $\mu \in \mathbb{R}$, a $\sigma > 0$. U slučaju kada su parametri $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, dobija se $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodela, koja se još naziva i standardizovana normalna raspodela. Ova raspodela često se koristi u teoriji verovatnoće i statistici zbog svojih lepih osobina.

Funkcija gustina normalne raspodele je data sa:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Može se pokazati da je μ matematičko očekivanje, a σ standardno odstupanje slučajne promenljive X. Na grafiku *1.1* je prikazana normalna raspodela sa $\mu = 0$ i različitim vrednostima za σ.



Grafik 1.1: Normalna raspodela sa parametrima $\mu = 0$ *i* $\sigma \in \{1, 2, 3\}$

Funkcija raspodele promenljive X sa normalnom $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ raspodelom je data sa:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, x \in \mathbb{R}.$$

1.3 Geometrijsko Braunovo kretanje

Geometrijsko Braunovo kretanje [10] je neprekidan stohastički proces koji je često korišćen kao razumna aproksimacija dinamike cena akcija. Iako su cene akcija stohastički procesi u diskretnom vremenu, aproksimacija pomoću geometrijskog Braunovog kretanja najčešće se koristi za predviđanje cena u bliskoj budućnosti. Formalno, stohastički proces $\{Y_t\}_t$ prati geometrijsko Braunovo kretanje ukoliko zadovoljava sledeću stohastičku diferencijalnu jednačinu:

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t dW_t,$$

pri čemu je W_t *Wiener-ov proces*.

Za parametre μ (drift) i σ (volatilnost) važi da su konstantni. Jednačina ima sledeće analitičko rešenje, pri čemu je Y_0 inicijalna vrednost procesa u $t = 0$:

$$Y_t = Y_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}.$$

Nedostatak modela je taj što u datoj formi nije moguće predvideti fenomene na fiinansijskom tržistu poput ekstremnih događaja i grupisanja volatilnosti.

Poznato je da je Wiener-ov proces moguće simulirati kao $\sqrt{t} Z_t$ gde je Z_t slučajna promenljiva sa standardnom normalnom raspodelom. Stoga se geometrijsko Braunovo kretanje može koristiti za generisanje mogućih ishoda (scenarija) za Y_t uzorkovanjem iz standardne normalne distribucije.

1.4 Lanci Markova

Markovski procesi su dobili ime po ruskom matematičaru Andrey Markov-u koji se bavio proučavanjem teorije stohastičkih procesa. Posedovati osobinu Markova znači da je proces bez pamćenja. Drugim rečima, buduće stanje zavisi samo od sadašnjeg stanja i stoga je nezavisno od prošlosti. Dakle, osnovni pristup koji leži u procesima Markova jeste: budućnost je nezavisna od prošlosti kada znamo sadašnjost. Intuitivno, Markovska osobina kaže sledeće: ako je poznato stanje sistema u nekom vremenskom trenutku s (sadašnjost), tada dodatne informacije koje se odnose na ponašanje sistema u trenucima $t < s$ (prošlost) ne utiču na naše poznavanje razvoja sistema za $t > s$ (budućnost). Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoće i $X_k, k \in \mathbb{N}$ niz slučajnih promenljivih sa konačnim skupom stanja S_X.

Definicija 1.21 *(Lanac Markova). Stohastički proces $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se zove lanac Markova ako je ispunjena osobina Markova:*

$$P(X_{k+1} = x_{k+1}|X_k = x_k, ..., X_0 = x_0) = P(X_{k+1} = x_{k+1}|X_k = x_k), \tag{1.1}$$

$$za\ svako\ k \geq 1,\ x_k \in S_X.$$

Lanac Markova karakteriše njegova matrica prelaza Π. Uopšteno, elemenat π_{ij} matrice prelaza Π označava verovatnoću da lanac Markova pređe iz stanja i u stanje j:

$$\pi_{ij} = P(X_{k+1} = j|X_k = i), \tag{1.2}$$

gde su $i, j \in S_X$.

Za lanac Markova se kaže da je homogen ako verovatnoće prelaza ne zavise od vremena k. U ovom radu radićemo samo sa homogenim lancima. U tom slučaju, verovatnoće prelaza u l koraka se mogu izračunati stepenovanjem matrice Π na stepen l. To jest, $P(X_k = j|X_{k-i} = i) = \pi_{ij}^{(l)}$, gde je $\pi_{ij}^{(l)} = (\Pi^l)_{ij}(i, j)$ elemenat matrice verovatnoće prelaza u l koraka. Ako se setimo da je skup S_X konačan, sledi da je moguće predstaviti lanac Markova preko kanoničke baze $e_1, ..., e_N$ prostora $\mathbb{R}^N$, gde je $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ...0)^T$, a T označava transponovanje. Sa originalnim skupom stanja S_X, kada je $s_k = i$ lanac Markova je predstavljen sa e_i, jediničnim vektorom sa jedinicom na $i-$toj poziciji i svim ostalim nulama. Uslovno očekivanje promenljive X_k je tada dato $i-$tom kolonom matrice prelaza Π, odnosno:

$$E(X_k|X_{k-1} = e_i) = \begin{bmatrix} \pi_{i1} \\ \pi_{i2} \\ \vdots \\ \pi_{iN} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Stoga, imamo:

$$E(X_k|X_{k-1}) = \Pi X_{k-1}. \tag{1.4}$$

Imajući u vidu sve prethodno napisano, vidimo da se lanac Markova, predstavljen u formi jediničnih vektora, može zapisati na sledeći način: $X_{k+1} = \Pi X_{k-1} + V_{k+1}$, gde je V_{k+1} priraštaj martingala koji nije moguće predvideti na osnovu prethodnih stanja. Iz prethodne jednačine imamo: $E(X_{k+1}|X_{k-l}) = \Pi^l X_{k-l}$.

1.4.1 Skriveni lanci Markova

Lanci Markova opisani u prethodnom odeljku imaju ograničenu moć primene. Stoga je ideja da se uvedu skriveni lanaci Markova, čime bi se mogućnost praktične primene značajno uvećala. U skrivenim Markovskim modelima, ne znamo ništa o generatorima niza opažanja. Takođe, broj stanja, verovatnoće prelaza i stanja iz kojih se generišu opažanja su nepoznati. Ovaj statistički metod uveli su kasnih šezdesetih godina prošlog veka Baum i Petrie [9].

Definicija 1.22 *(Skriveni lanac Markova). Uređeni par stohastičkih procesa $\{X, Y\}$ gde je $X = \{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $Y = \{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ zove se skriveni lanac Markova ako je X lanac Markova koji se ne može direktno opažati, a $Y_k = f(X_k, \omega_k)$, gde je f Borelova funkcija i $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih koje su nezavisne i od X. Proces Y se zove proces opažanja.*

Generalno, forma skrivenih Markovskih modela ima sledeća obeležja:

1. $\{X\} = \{X_1, X_2, ...\}$ je lanac Markova koji ne možemo direktno opažati, takozvani niz signala;
2. $\{Y\} = \{Y_1, Y_2, ...\}$ je niz opažanja;
3. N je dimenzija skupa stanja lanca Markova;
4. M je dimenzija skupa stanja niza opažanja;
5. $S_X = \{s_1, ..., s_N\}$ je skup stanja lanca Markova;
6. $O_Y = \{o_1, ..., o_M\}$ je skup stanja niza opažanja;
7. Matrica verovatnoće prelaza $\Pi = [\pi_{ij}]_{i,j=1,...,N}$ je definisana sa:

$$\pi_{ij} = P(X_{k+1} = s_j|X_k = s_i), i, j = 1, ..., N.$$

8. Uslovna raspodela verovatnoća simbola opažanja $B_{M\times N} = [b_{ij}]_{i=1,\dots,N,j=1,\dots,M}$. Funkcija verovatnoće za svako stanje i je data sa:

$$b_{ij} = P(Y_k = o_j | X_k = s_i).$$

9. Raspodela početnog stanja: $A_{N\times 1} = a_i, i = 1, \dots, N$.

U prethodnom odeljku, predstavili smo lanac Markova u sledećoj formi:

$$X_{k+1} = \Pi X_k + V_{k+1}.$$

Slično, proces opažanja Y_k može pratiti različite dinamike, ali u ovom radu fokusiramo se na sledeću:

$$Y_{k+1} = \langle \alpha, X_k \rangle + \langle \beta, X_k \rangle z_{k+1},$$

gde su $z_{k+1}, k \in \mathbb{N}$ nezavisne normalne slučajne promenljive, a α i β realni vektori odgovarajućih dimenzija.

2 Tradicionalne mere performansi portfolija korigovane rizikom

Kada se priča o performansama i uspešnosti investicije, nebino da li je u pitanju jedna ili porfolio više rizičnih aktiva, dobro je posmarati više pokazatelja ove osobine. Investitor se može odlučti za objektivan ili subjektivan prilaz problemu. Ovde će biti prikazane dve objektivne mere (Sharpe-ov i Calmar-ov kličnik) i jedna subjektivne prirode (funkcija korisnosti).

2.1 Sharpe-ov količnik

Sharpeov količnik je razvijen je od strane američkog ekonomiste i nobelovca William F. Sharpe-a [13] , a čije ime nosi i sam količnik. Ovaj količnik spada u grupu pokazatelja mere uspešnosti aktiva ili portfolija koja objedinjuje prinos i rizik (engl. *risk - adjusted return*), i postao je industrijski standard za proračune ove vrste. Danas predstavlja jednu od najčešće korišćenih mera uspešnosti u finansijskom svetu, uglavnom prilikom rangiranja aktiva, portfolia i investicionih fondova, a veliki deo popularnosti duguje svojoj jednostavnosti.

Neka je data aktiva ili strategija A opisana svojim prinosom $R(t), t \in \mathbb{N}$. Očekivanje i varijansa aktive ovde predstavlja očekivanje i varijansu prinosa te aktive kao stohastičkog procesa, tj. vremenske serije. Neka je poznata bezrizična stopa prinosa $r_f \geq 0$, a s obzirom na nizak rizik, takva stopa prinosa je izuzetno mala. U realnom svetu ne postoji investicija čiji je rizik jednak nuli, ali postoje investicije čiji je rizik zanemarljiv i njih nazivamo bezrizičnim, a to su uglavnom državne obveznice zemalja cija je ekonomija stabilna, kao što su državne obveznice Sjedinjenih Američkih Država. Tada Sharpe-ov količnik predstavlja meru koliko se očekuje da će ostvareni prinos premašiti prinos bezrizične aktive po jedinici volatilnosti ili ukupnog rizika samog prinosa, a definiše se na sledeći način:

$$Sharpe_A(t) = \frac{E(R(t) - r_f)}{\sqrt{Var(R(t) - r_f)}}. \tag{2.1}$$

S obzirom na to da varijansa nije osetljiva na dodavanje konstante (r_f) važi da je $Var(R(t)-r_f) = Var(R(t))$, pa se Sharpeov količnik zapravo zapisuje:

$$Sharpe_A(t) = \frac{E(R(t) - r_f)}{\sqrt{Var(R(t))}}. \tag{2.2}$$

U daljem radu ćemo radi jednostavnosti, a bez umanjenja opštosti, pretpostavljati da je $r_f = 0$. Ukoliko je $R(t), t \in \mathbb{N}$ stacionaran stohastički proces, Sharpe-ov količnik ne zavisi od t . Iz formulacije se vidi da više vrednosti Sharpe-ovog količnika odgovaraju aktivama sa višim očekivanim prinosom i nižom varijansom. Tada, očigledno je da će vrednost Sharpe-ovog količnika za bezrizičnu aktivu biti jednaka nuli. Dakle, što je vrednost Sharpe-ovog količnika aktive veća, to je ona investitoru atraktivnija za ulaganje.

Sharpe koristi standardnu devijaciju prinosa aktive ili portfolija deliocu kao pokazatelj ukupnog rizika, gde je pretpostavljeno da prinosi prate normalnu raspodelu. Praksa i iskustvo pokazali su da raspodela prinosa akcije može da odstupa od normalne raspodele i to može da utiče na pravilnu interpretaciju vrednosti Sharpe-ovog količnika, tako da treba biti obazriv. U numeričkoj simulaciji, prinosi strategija provereno prate normalnu raspodelu, tako da ne bi trebalo da dodje do problema ove vrste.

2.2 Calmar-ov količnik

Calmar-ov količnik razvijen je od strane Terry Young-a [12]. Ime je skraćenica od CALifornia Managed Accounts Reports . Pre same definicije količnika, bitno je definisati i objasniti pojavu najvećeg pada u prinosu (engl. *worst drawdown*) koji se oznacava sa WDD. Najveći pad (WDD) u trenutku T se definiše kao pad sa najvišeg vrha u najnižu "dolinu" u vremenskom intervalu $[0, T]$. Definicija za WDD u prinosu aktive A u vremenskom trenutku T je:

$$WDD_A(T) = \max_{t\in[0,T]} (\max_{\tau\in[o,t]} c(\tau) - c(t)). \tag{2.3}$$

Calmar-ov kolićnik predstavlja meru koliko se očekuje da će ostvareni prinos premašiti prinos bezrizične aktive (r_f) po jedinici očekivanog najvećeg pada, odnosno očekivanog WDD-a, a definiše se kao:

$$Calmar_A(t) = \frac{E(R(t) - r_f))}{E(WDD_A(t))}. \tag{2.4}$$

Ukoliko je $R(t), t \in \mathbb{N}$ stacionaran stohastički proces, Calmar-ov količnik ne zavisi od t. Iz definicije se vidi da više vrednosti Calmar-ovog količnika odgovaraju aktivama sa višim očekivanim prinosom i nižom varijansom i što je vrednost količnika veća to su aktiva ili portfolio atraktivniji za ulaganje. Ono što WDD čini primamljivijom merom za rizik u odnosu na varijansu koja se koristi kod Sharpe-a jeste to što najveći pad kažnjava isključivo pad u kumulativnom prinosu, ali nikako rast, koji se smatra poželjnim.

2.3 Funkcija korisnosti

Definicija 2.1 *Funkcija $u : X \to \mathbb{R}$ naziva se funkcija korisnosti ako važi*

$$x \geq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y) \tag{2.5}$$

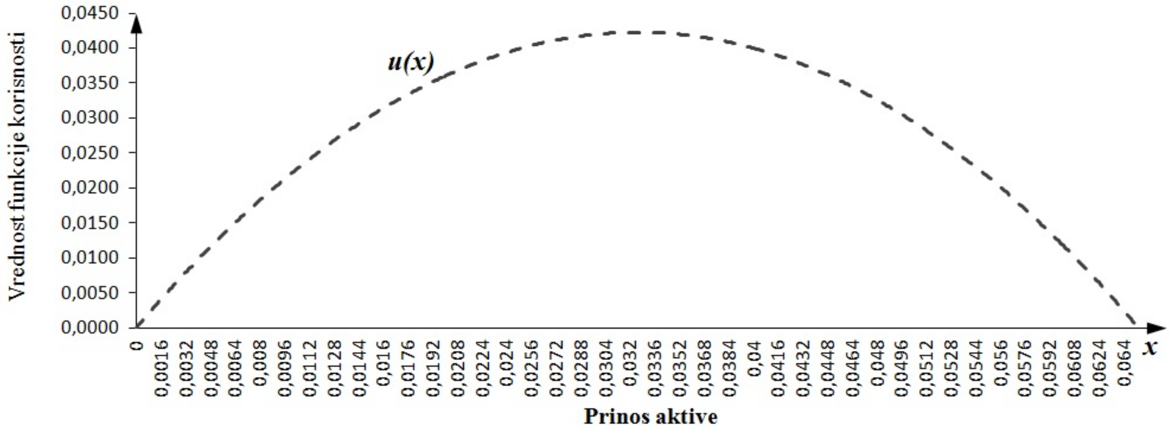
gde je $\geq$ relacija preferencije na skupu X.

Funkcija korisnosti opisuje lični način vrednovanja kapitala pojedinca i može se smatrati njegovom ličnom karakteristikom [16]. Subjekti mogu imati različite funkcije korisnosti u zavisnosti od toga šta je za njih i njihovo poslovanje više ili manje vredno i kakva je njihova tolerancija prema riziku.

Funkcije korisnosti su uvek: dva puta diferencijabilne funkcije, monotone i konkavne. Najčešće su ovo monotono rastuće funkcije, međutim neke od njih sadrže i tačke prevoja, a takve funkcije korisnosti se posmatraju i analiziraju samo po svojim specijalnim segmentima, uglavnom u delovima gde su baš rastuće. Funkcije korisnosti mogu biti različitog oblika: linearne, kvadratne, eksponencijalne, logaritamske i druge. Kako će se u ovom radu koristiti isključivo kvadratna funkcija korisnosti, ona će biti malo detaljnije predstavljena.

2.3.1 Kvadratna funkcija korisnosti

Ova funkcija je oblika $u(x) = ax - 1/2bx^2$, gde je $b > 0$ i definisana je za vrednosti $x < \frac{a}{b}$ Na slici se vidi grafik ove funkcije za $a = 2.6$ i $b = 80$.



Grafik 2.1: Kriva kvadratne funkcije korisnosti

Averzija prema riziku

Stepen rizik-averzije se za različite funkcije korisnosti može meriti tzv. magnitudama njihovih lukova, jer što je "oštriji" luk, to je averzija prema riziku veća. Jasno, najznačajniji kriterijum za merenje averzije predstavlja drugi izvod funkcije.

Stepen averzije prema riziku meri se Arrow-Pratt koeficijentom apsolutne rizik-averzije koji se izračunava po formuli:

$$A(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}.$$

Prvi izvod u ovoj formuli služi za tzv. normalizaciju, odnosno da bi ekvivalentne funkcije korisnosti imale isti koeficijent. U osnovi, Arrow-Pratt koeficijent pokazuje kako se stepen averzije prema riziku menja sa porastom bogatstva. Jasno, u velikom broju slučajeva sklonost riziku raste sa porastom bogatstva, odnosno i pojedinci i kompanije su više spremne za rizik ukoliko su finansijski sigurni. Pokušajmo izračunati Arrow-Pratt koeficijente za neke specifične funkcije korisnosti.
Za kvadratnu funkciju $u(x) = ax - \frac{1}{2}bx^2, a > 0, b > 0$ važi da je:

$$u'(x) = a - bx,$$

$$u''(x) = -b,$$

pa je odatle $A(x) = -\frac{b}{a-bx}$ i kada je $x < \frac{a}{b}$ vrednost Arrow-Pratt koeficijenta je negativna, odnosno odražava averziju prema riziku investitora koji poseduje kvadratnu funkciju korisnosti. Baš u ovom primeru se oslikava ranije pomenuta osobina smanjenja averzije sa porastom sigurnosti.

Za linearnu funkciju korisnosti datu sa $u(x) = ax + b$ važi da je $A(x) = 0$, što dovodi do zaključka da su subjekti koji imaju ovakvu funkciju korisnosti indiferentni u odnosu na rizik.
Pored Arrow–Pratt koeficijenta apsolutne rizik-averzije, postoji i $R(x)$ Arrow–Pratt koeficijent relativne rizik-averzije koji se računa na sledeći način:

$$A(x) = -\frac{xu''(x)}{u'(x)} = x \cdot A(x).$$

Specijalne klase funkcija korisnosti su CRRA (engl. *constant relative risk aversion*) funkcije, gde je $R(x)$ konstantno, i CARA (engl. *constant absolute risk aversion*) funkcije, gde je $A(x)$ konstantno. Ove funkcije se često koriste u ekonomiji radi pojednostavljenja problema.

3 Matematički modeli za rešavanje problema optimizacije

Rešenje problema optimizacije može biti egzaktno ili približno. Pod egzaktnim rešavanjem problema optimizacije smatra se pronalaženje tačnog rešenja problema. Do ovakvog rešenja može se doći direktno ili iterativno. Kada funkcija cilja ima poželjne osobine kao sto su konveksnost ili diferencijabilnost moguće je direktno rešiti problem, ali to se dešava u malom broju slučajeva.

Češće primenjivan i rasprostranjeniji način rešavanja ovih problema u stvarnosti jeste iterativnim postupkom. Iterativno rešavanje problema optimizacije podrazumeva pronalaženje algoritma pomoću kojeg se u konačnom broju koraka dolazi do približnog ili tačnog rešenja problema. Približno rešenje problema optimizacije podrazumeva pronalaženje rešenja koje približno zadovoljava uslove optimalnosti. Algoritam predstavlja pravilo, A, koje nas od tačke x_k dovodi do tačke x_{k+1} tako da niz $x_1, x_2, x_3, ...$ konvergira ka tačnom rešenju problema optimizacije.

3.1 Markowitz-ov model

Markowitz-ov model razmatra konstrukciju optimalnog portfolija u smislu minimizacije rizika za datu očekivanu stopu prinosa [1]. Neka je dato n aktiva S_i sa očekivanjima μ_i, standardnim odstupanjima σ_i i kovarijansama σ_{ij} , $i, j = 1, ..., n$. Da bi odredili skup minimalne varijanse fiksiramo očekivanje za stopu prinosa μ i tražimo dopustivi portfolio. Drugim rečima rešavamo problem minimizacije sa ograničenjima. Dakle, neophodno je u ograničenjima modela definisati željeni prinos koji bi optimalan portfolio trebalo da ostvari. Od ostalih ograničenja javlja se još budžetska jednakost koja govori da je suma težinskih koeficijenata jednaka jedan. Ovo ograničenje obezbeđuje trošenje sredstava koje posedujemo u celosti. Poslednje ograničenje predstavlja intervalno ograničenje težinskih koeficijenata.

Pretpostavka Markowitzovog modela je da investitori preferiraju nizak rizik i fiksiran nivo očekivanog prinosa. Model [18] se zapisuje na sledeči način:

$$
\begin{aligned}
\min_{\omega_i, i=1,2,\dots,n} \quad & \sigma_\pi^2 \\
t.d. \quad & \mu_\pi = \mu \\
& \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\
& lb < \omega_i < ub, \; i = 1, 2, ..., n
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

gde μ označava željeni prinos investitora.

Vrednost μ_π označava prinos portfolija, tj. $\pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i S_i$, pa se model može zapisati i na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\min_{\omega_i, i=1,2,\ldots,n} \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\
t.d. \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i = \mu \\
& \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\
& lb < \omega_i < ub, \ i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Navedeni problem je ustvari problem optimizacije nelinearne, kvadratne funkcije sa ograničenjima od n promenljivih. Rešavanjem ovog problema iterativnim postupkom, dolazi se do vrednosti težinskih koeficijenata $\omega_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, n$ koji mogu primiti bilo koju vrednost realnog broja.

Na zadatom problemu se mogu raditi razne modifikacije, a jedna od njih je izmena ograničenja. Jedno od ograničenja koje će se na dalje u radu pokazati kao korisno jeste zabrana kratke pozicije, odnosno za težinske koeficijente je dozvoljeno da primaju realne vrednosti iz intervala $[0, +\infty) \in \mathbb{R}$. Ovaj problem je sličan prethodnom, ali se zapisuje na sledeći način:

$$
\begin{aligned}
\min_{\omega_i, i=1,2,\ldots,n} \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \\
t.d. \quad & \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i = \mu \\
& \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\
& \omega_i \geq 0, \ \forall \, i = 1, 2, \ldots, n \\
& lb < \omega_i < ub, \ i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

3.2 Maksimizacija očekivane funkcije korisnosti

Kao što je ranije predstavljeno, funkcija korisnosti predstavlja preferencije određenog subjekta na tržištu, konkretno finansijskom. U zavinosti od osobina funkcije korisnosti subjekta, moguće je konstruisati optimalan portfolio tako da subjekt bude maksimalno zadovoljan, odnosno da njegova funkcija korisnosti bude najveća za dati portfolio [16].
Ovaj model razmatra konstrukciju optimalnog portfolija u smislu maksimizacije očekivane funkcije korisnosti investitora za datu funkciju korisnosti i uslov budžetskog ograničenja. Neka je dato n aktiva $S_i, \ i = 1, 2, \ldots, n$.
Do težinskih koeficijenata optimalnog portfolija na osnovu funkcije korisnosti dolazi se maksi-

mizacijom očekivane funkcije korisnosti, a problem se zapisuje na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&\max_{\omega_{ij}} E[u(\pi)] \\
&t.d. \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} = 1 \\
&\quad 0 < \omega_{ij} < 1, \ \forall i = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{3.4}$$

gde π predstavlja portfolio sastavljen od linearne kombinacije n aktiva S, tj. $\pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i S_i$, a $E[u(\pi)]$ očekivanu funkciju korisnosti.

U slučaju kvadratne funkcije korisnosti, očekivana funkcija korisnosti računa se na sledeći način:

$$\begin{aligned}
E[u(\pi)] &= E[a\pi - \frac{1}{2}b\pi^2] = aE(\pi) - \frac{1}{2}bE(\pi^2) \\
&= aE(\pi) - \frac{1}{2}b(Var(\pi) + E^2(\pi)) \\
&= a\mu_\pi - \frac{1}{2}b(\sigma_\pi + \mu_\pi^2)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

i problem (3.5) se svodi na:

$$\begin{aligned}
&\max_{\omega_{ij}} \left[a\mu_\pi - \frac{1}{2}b(\sigma_\pi^2 + \mu_\pi^2)\right] \\
&t.d. \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} = 1 \\
&\quad 0 < \omega_{ij} < 1, \ \forall i = 1, ..., n
\end{aligned} \tag{3.6}$$

za portfolio $\pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i S_i$.

3.2.1 Problem nelinearnog programiranja

Posmatrajmo problem:

$$\begin{aligned} &\min_{x \in S} f(x) \\ &t.d.\ f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ &S \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.7}$$

Umesto minimizacije, moguće je imati i problem maksimizacije, koji bi se zapisivao na sledeći način:

$$\begin{aligned} &\max_{x \in S} f(x) \\ &t.d.\ f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} \\ &S \subseteq \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.8}$$

Problem 3.8 je moguće svesti na problem 3.7 tako što se samo promeni znak funkciji cilja:

$$f(x) \longmapsto -f(x),$$

tako da ćemo na dalje, bez umanjenja opštosti govoriti samo o rešavanju problema minimizacije [20].

Skup S nazivamo dopustiv skup, a problem 3.7 je opšta forma problema nelinearnog programiranja. Ovaj problem može imati dve vrste rešenja.

Definicija 3.1 *(**Lokalni minimizator**) Tačka $x^* \in S$ je lokalni minimizator funkcije f na dopustivom skupu S ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$ tako da je $f(x) \geq f(x^*)$ za sve $x \in S$ za koje je $||x - x^*|| < \varepsilon$. Ako je $f(x) > f(x^*)$ za sve $x \in S$ za koje je $x \neq x^*$ i $||x - x^*|| < \varepsilon||$ onda kažemo da je x^* striktni lokalni minimizator.*

Definicija 3.2 *(**Globalni minimizator**) Tačka $x^* \in S$ je globalni minimizator funkcije f na S ako i samo ako je $f(x) \geq f(x^*)$ za sve $x \in S$. Ako je $f(x) > f(x^*)$ za sve $x \in S$ za koje je $x \neq x^*$ tada kažemo da se radi o striktnom globalnom minimizatoru funkcije f na skupu S.*

Analogno se definišu i lokalni i globalni maksimizatori.

Problem minimizacije bez ograničenja

U slučaju kada je dopustivi skup $S = \mathbb{R}^n$. Tada je problem (3.7) problem nelinearnog programiranja bez ograničenja.

Definicija 3.3 *Neka je $x = [x_1, ..., x_n]^T$ i neka je $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Tada je*

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

***gradijent** funkcije $f(x)$.*

Teorema 3.1 [20] *(**Potrebni uslovi prvog reda**) Neka je* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^1$. *Ako je* x^* *lokalni minimizator funkcije* f *na* $\mathbb{R}^n$ *onda je:*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Potrebni uslovi da tačka x^* bude lokalni minimum funkcije f dati su sledećom teoremom.

Teorema 3.2 [20] *(**Potrebni uslovi drugog reda**) Neka je* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^2$. *Ako je* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *lokalni minimizator funkcije* f *na* $\mathbb{R}^n$ *onda je:*

1. $\nabla f(x^*) = 0$,

2. $\nabla^2 f(x^*) = 0$ *je pozitivno semidefinitna matrica.*

Teorema 3.3 [20] *(**Dovoljni uslovi drugog reda**) Neka je* $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^2$. *Ako je* $x^* \in \mathbb{R}^n$, $\nabla f(x^*) = 0$ *i* $\nabla^2 f(x^*) = 0$ *je pozitivno definitna, onda je* x^* *striktni lokalni minimizator funkcije* f *na* $\mathbb{R}^n$.

Problem nelinearnog programiranja sa ograničenjima

Prilikom optimizacije portfolija uvek imamo bar jedno ograničenje, makar na težinskim koeficijentima u vidu budžetske jednakosti. Stoga, na dalje ćemo se baviti problemom minimizacije sa ograničenjima.
Ovaj problem može se podeliti u tri slučaja, u zavisnosti od vrste ograničenja. Problem može imati ograničenja tipa jednakosti ili nejednakosti ili može zajedno imati i jednu i drugu vrstu ograničenja.

Ograničenja tipa jednakosti

Može se reći da je ovo najednostavniji problem optimizacije sa ograničenjima [20], a predstavlja se na sledeći način:

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \\ &t.d.\ h(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Posmatrajmo skup ograničenja $h_1(x) = 0, h_2(x) = 0, \ldots, h_m(x) = 0$. Ovaj skup ograničenja daje hiperpovrš koja je, ukoliko su ograničenja regularna (definisana u narednom delu teksta), dimenzija $n - m$. Ako, kao što i mi pretpostavljamo u ovom radu, važi da $h_i \in C^1$, $i = 1, 2, \ldots, m$, onda se za površ definisanu ovim funkcijama kaže da je *glatka*.
Tangentna ravan u tački x^* je definisana kao kolekcija izvoda u x^* svih diferencijabilnih krivih koje prolaze kroz tačku x^*. Tangentna ravan je potprostor od $\mathbb{R}^n$.

Definicija 3.4 *Tačka x^* koja zadovoljava ograničenje $h(x^*) = 0$ je regularna tačka ograničenja ako su gradijenti $\nabla h_1(x^*), h_2(x^*), ..., h_m(x^*)$ linearno nezavisini.*

Napomena: Primetimo da ako je $h(x) = Ax + b$, onda je pojam regularnosti ekvivalentan pojmu da matrica A ima rang jednak m i ovaj uslov je nezavisan od x. Generalno, u regularnim tačkama je moguće definisati tangentnu ravan karakterisanu gradijentima funkcija ograničenja.

Teorema 3.4 [20] *Tangentna ravan u regularnoj tački x^* hiperpovrši, definisanoj sa $h(x) = 0$, definiše se kao:*

$$M = \{y : \nabla(x^*)y = 0\}.$$

Potrebni uslovi prvog reda (ograničenja tipa jednakosti)

Lema 3.1 [20] *Neka je x^* regularna tačka ograničenja $h(x) = 0$ i lokalna ekstremna tačka (minimum ili maksimum) funkcije f za ova ograničenja. Tada za sve $y \in \mathbb{R}^n$ za koje važi*

$$\nabla h(x^*)y = 0,$$

mora da važi

$$\nabla f(x^*)y = 0.$$

Lema 3.1 kaže da je $\nabla f(x^*)y$ ortogonalno na tangentnu ravan. Nakon toga se zaključuje da je $\nabla f(x^*)y$ linearna kombinacija gradijenata od h u tački x^*, relacija koja vodi do ideje o uvođenju Lagranžovih množitelja.

Teorema 3.5 [20] *Neka je x^* lokalna ekstremna tačka (minimum ili maksimum) funkcije f koja zadovoljava ograničenja data sa $h(x) = 0$ i neka je x^* regularna tačka ovih ograničenja. Tada postoji $\lambda \in\in \mathbb{R}^m$ takva da*

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0. \tag{3.11}$$

Treba primetiti da uslovi (3.11) zajedno sa ograničenjima $h(x^*) = 0$ daju ukupno m + n (nelinearnih) jednačina sa m + n promenljivih koje x^* i λ treda da zadovoljavaju. Na ovaj način je moguće (makar lokalno) doći do jedinstvenog rešenja.

Potrebni i dovoljni uslovi drugog reda (ograničenja tipa jednakosti)

Pretpostavimo da su na dalje $f, h \in C^2$.

Teorema 3.6 [20] *(**Potreban uslov drugog reda**) Pretpostavimo da je x^* lokalni minimum funkcije f koji zadovoljava ograničenja **h(x) = 0** i da je x^* regularna tačka za ova ograničenja. Tada postoji $\lambda \in\in \mathbb{R}^m$ takva da*

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0. \tag{3.12}$$

Ako sa M označimo tangentnu ravan $M = \{y : \nabla h(x^*)y = 0\}$, onda je matrica

$$\boldsymbol{L}(x^*) = \boldsymbol{F}(x^*) + \lambda^T \boldsymbol{H}(x^*)$$

pozitivno semidefinitna nad skupom M, odnosno, $y^T \boldsymbol{L}(x^*)y \geq 0$ za sve $y \in M$.

gde je

$$\lambda^T H(X) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2 h_i(x).$$

Teorema 3.7 [20] *(**Dovoljan uslov drugog reda**) Pretpostavimo da postoji tačka x^* koja zadovoljava $h(x^*) = 0$, i $\lambda \in \mathcal{R}^m$ takvo da*

$$\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) = 0.$$

Pretpostavimo takođe da je matrica $\boldsymbol{L}(x^*) = \boldsymbol{F}(x^*) + \lambda^T \boldsymbol{H}(x^*)$ pozitivno definitna nad skupom $M = \{y : \nabla(x^*)y = 0\}$, odnosno, za $y \in M, y \neq 0$ važi da je $y^T \boldsymbol{L}(x^*)y > 0$. Tada je x^* striktni lokalni minimum funkcije f koji zadovoljava ograničenje $h(x) = 0$.

Ograničenja tipa nejednakosti

Posmatrajmo problem :

$$\begin{aligned} &\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \\ &t.d.\ Ax \leq b \end{aligned} \tag{3.13}$$

gde je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ [19].
Neka je $ai = (a_{i1}, ..., a_{in})$ i-ta vrsta matrice A. Dopustiv skup je onda definisan na sledeći način:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i x \leq b_i, i = 1, ..., m\}.$$

Za tačku $x \in S$ treba da odredimo dopustive pravce, tj. pravce po kojima se možemo kretati od tačke x tako da ostanemo u skupu S.

Definicija 3.5 *Za vektor $d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0$ kažemo da je vektor dopustivog pravca u tački $x \in S$, ako i samo ako postoji $\overline{\alpha} > 0$ tako da $x + \alpha d \in S$ za sve $\alpha \in [0, \overline{\alpha}]$.*

Svakom elementu dopustivog skupa možemo dodeliti vrednost $r(x), 0 \leq r(x) \leq m$, koja predstavlja broj restrikcija za koje je ispunjeno $a_i x = b_i$. Za restrikcije za koje važi da je $r(x) > 0$ kažemo da su aktivne u tački x. Neka je $x \in S$ takva da je $r(x) = p$ *za* $0 < p \leq m$. Neka $I(x)$ predstavlja skup indeksa aktivnih ograničenja, odnosno:

$$I(x) = j \in M : a_j x = b_j.$$

$I(x)$ predstavlja skup indeksa aktivnih ograničenja. Znamo da za $d \in \mathbb{R}^n$ i konstantu (dužinu koraka) $\alpha > 0$ imamo da je $x + \alpha d \in S$ ako i samo ako je $A(x + \alpha d) \leq b$ tj. ako je $a_j(x + \alpha d) \leq b_j$, za svako $j \in M$. Kao posledica detaljnijeg raspisivanja ovog problema, dolazi se do sledećih zaključaka, odnosno potrebnih i dovoljnih uslova za postojanje rešenja problema. Ako je $r(x) = 0$ onda se tačka nalazi u unutrašnjosti dopustivog skupa i potrebni uslovi za minimum su isti kao i za problem bez ograničenja.
U slučaju kada je $r(x) \geq 1$, potrebni i dovoljni uslovi optimalnosti definisani su narednim tvrđenjima.

Teorema 3.8 [20] *Dat je problem:*

$$\begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &t.d. Ax \leq b \end{aligned} \tag{3.14}$$

gde je $f \in C_1$ *i* $x^* \in S$ *takvo da je* $1 \leq r(x^*) \leq m$. *Neka je* $I(x^*) \subset M, I(x^*) = I = \{i_1, i_2, ..., i_{r(x^*)}\}$ *skup aktivnih ograničenja tj. neka važi:*

$$a_j x^* = b_j, \ j \in I(x^*).$$

Neka je dalje $A_I \in \mathbb{R}^{r(x^*) \times n}$ *podmatrica matrice A čije su vrste one koje imaju indekse u skupu I. Pored toga, neka je* $b_I \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ *deo vektora b čije su vrste, takođe one koje imaju indekse u skupu I i neka je* $r(A_I) = r(x^*)$.
Ako je x^* *lokalni minimizator posmatranog problema, onda postoji* $\lambda \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ *takvo da je:*

$$\nabla f(x^*) = \sum_{k=1}^{r(x^*)} \lambda_k a_{i_k},$$

gde je $\lambda_k \leq 0$ *i* $1 \leq k \leq r(x^*)$.

Teorema 3.9 [20] *Neka je* $f \in C^2$, *a* x^* *lokalni minimizator problema 3.14. Tada važi:*

1. *Postoji* $\lambda \in \mathbb{R}^{r(x^*)}$ *takvo da je:*
$$\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda,$$
gde je $\lambda \leq 0, i \in \{1, 2, ..., r(x^*)\}$.
2. *Za sve* $y \in N(A_I)$ *važi:*
$$y^T \nabla^2 f(x^*) y \geq 0.$$

Teorema 3.10 [20] *Neka je* $f \in C^2$ *i* $x^* \in S$. *Ako je:* $\nabla f(x^*) = A_I^T \lambda$, *za* $\lambda_i \leq 0, i \in \{1, 2, ..., r(x^*)\}$ *i* $y^t \nabla^2 f(x^*) y > 0$ *za sve* $y \in A_J, y \neq 0$, *gde je* $J = \{i \in \{1, 2, ..., r(x^*)\} : \lambda_i < 0\}$, *onda je* x^* *lokalni minimizator problema 3.14.*

Jedan od specijalnih slučajeva nelinearnog programiranja jeste kvadratno programiranje, koje će se koristiti na dalje u radu. Kod njega je funkcija cilja kvadratna, a ograničenja linearna.

4 Opis problema i pristup rešenju

Pretpostavimo da nam je dato n strategija ulaganja, S_1, S_2, S_3, ..., S_n, koje možemo koristiti za formiraje nove, “master”, strategije koja će ustvari predstavljati posebno kreiran portfolio sastavljen od pomenutih n strategija.
Svaka strategija S_i je opisana samo svojim prinosom, $r_i(t), i = 1, 2, 3, \ldots, n, t \geq 0$ koji posmatramo kao slučajan proces i nemamo nikakve dodatne informacije niti o sastavu, niti o specifičnim osobinama pojedinačne strategije. Želimo da formiramo novu strategiju koja će kao portfolio preostalih strategija biti optimalna, tj. da pronađemo najbolju kombinaciju raspoloživih strategija. Cilj je odlučiti koliko sredstava treba uložiti u koju aktivu kako bi se postigao optimalan rezultat. Drugim rečima, želimo svakoj od aktiva da pridružimo težinski koeficijent $\omega_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$, koji označava udeo sredstava koji se ulaže u odgovarajuću aktivu.
Vrsta optimalnosti igra ključnu ulogu u problemu sa kojim radimo. Optimalnost se posmatra kroz odabir funkcije cilja koju optimiziramo, te je sva težina stavljena upravo na taj odabir. Kako smo ranije rekli, portfolio posmatramo kao kombinaciju aktiva S_1, S_2, S_3, ..., S_n pri čemu je svakoj aktivi pridružen težinski koeficijent $\omega_i, i = 1, 2, 3, \ldots, n$, pa s obzirom na to, proizvoljan portfolio ima sledeći oblik:

$$Portfolio\ \pi = \sum_{i=1}^{n} \omega_i S_i.$$

Glavnu ulogu u izgradnji portfolija imaju težinski koeficijenti, koje odlikuju različite osobine. Postoje tri moguča stanja koeficijenata,a to su:

- $\omega_i \geq 0$ Kada je težinski koeficijent uz odgovarajuću aktivu pozitivan nazivamo duga pozicija. U dugoj poziciji investitor kupuje aktivu i priželjkuje rast u ceni aktive kako bi njenom prodajom zaradio na razlici u kupovnoj i prodajnoj ceni. Ukoliko cena aktive uprkos njegovim očekivanjima padne, investitor će ostvariti gubitak. Bitno je napomenuti da je gubitak pri dugoj poziciji ograničen, jer cena aktive ne može pasti ispod nule.

- $\omega_i = 0$ Ukoliko je težinski koeficijent uz datu aktivu jednak nuli, investitor ne ulaže ništa u datu aktivu.

- $\omega_i < 0$ Ukoliko su težinski koeficijenti negativni, tada se kaže da su u kratkoj poziciji. Kratka pozicija predstavlja situaciju u kojoj investitor ne kupuje aktivu, tj. ne stavlja je u svoj posed, već je pozajmljuje od brokera i prodaje u nadi da ce moći da je otkupi po nižoj ceni, vrati brokeru i zaradi na razlici u cenama. Ukoliko cena aktive poraste, investitor ostvaruje gubitak. Za razliku od duge pozicije u kojoj se investitor nada rastu u ceni, kod kratke pozicije on se nada padu. Kratka pozicija smatra se opasnim potezom i savetuje se isključivo iskusnim trgovcima. Razlog za to jeste što je rast cene neograničen sa gornje strane, pa je samim tim neograničen i gubitak investitora koji se nalazi u kratkoj poziciji.

Ograničenje na težinskim koeficijentima koje će se nalaziti u svakom modelu koji se razmatra u ovom radu predstavljeno je budžetskom jednačinom koja ima sledeći oblik:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1.$$

Druga vrsta ograničenja na težinskim koeficijentima u vezi je sa intervalom u kojem želimo da se optimalni težinski koeficijenti nađu. Ovakvom vrstom ograničenja sprečavamo preveliko ulaganje u pojedinačne aktive, a sam odabir granica zavisi od karakteristika instrumenata u koje ulažemo novac kao i od naših preferencija. U ovom radu svi težinski koeficijenti imaju isto intervalno ograničenje tj. ovakvo ograničenje, možemo zapisati kao:

$$lb \leq \omega_i \leq ub, \ i = 1, 2, ..., n,$$

gde $lb, ub \in \mathbb{R}$ predstavljaju donju (engl. $lowerbound - lb$) i gornju (engl. $upperbound - ub$) granicu težinskih koeficijenata respektivno.
Za početak, prilikom formiranja modela za rešavanje problema optimizacije portfolija bitne su dve numeričke karakteristike prinosa portfolija: očekivani prinos i varijansa. Prinos portfolija može se prikazati kao:

$$r_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i(t).$$

Neka su $\mu_i(t), i = 1, 2, 3, ..., n$, očekivani prinosi aktiva $\mu_i(t) = E(r_i(t)), i = 1, 2, 3, ..., n$. Tada je očekivani prinos portfolija:

$$\begin{aligned} \mu_\pi(t) = E(r_\pi(t)) &= \sum_{i=1}^{n} E(\omega_i r_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i E(r_i(t)) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mu_i(t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ako sa σ_{ij} označimo kovarijansu prinosa i-te i j-te aktive tj. $\sigma_{ij}(t) = E((r_i(t) - \mu_i(t))(r_j(t) - \mu_j(t)))$, tada imamo da je varijansa prinosa portfolija:

$$\begin{aligned} \sigma_\pi^2(t) = Var(\sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i(t)) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \omega_i^2 \sigma_i(t)^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j<i} \omega_i \omega_j \sigma_{ij}(t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.1 Varijacije Markowitz-ovog modela

Uopšteni Markowitz-ov model je već predstavljen ranije, ali da bi model odgovarao iznetom problemu neophodno je pozabaviti se modifikacijama modela i izmenom njegovih ograničenja. Iako su naredne modifikacije zapravo isti Markowitz-ov model imenovaćemo ih kao “Model 1”, “Model 2”, “Model 3” i “Model 4”, radi lakšeg referenciranja u nastavku rada.
Pretpostavimo da imamo istorijske podatke o prinosima pojedinačnih strategija za $m_1 \in \mathbb{N}$ dana i da želimo da odredimo optimalnu portfolio strategiju ulaganja za narednih $m_2 \in \mathbb{N}$ dana.

Model 1

Računanje težinskih koeficijenata na osnovu minimizacije varijanse vrši se samo jednom, koristeći sve dostupne istorijske podatke o prinosima strategija u koje se ulaže. Nakon određivanja koeficijenata za portfolio strategiju, ista ta strategija se koristi kao strategija ulaganja za period od m dana, bez realokacije kapitala u međuvremenu. Problem koji se rešava da bi se odredili težinski koeficijenti isti je kao problem 4.2 na strani 19.

Model 2

Računanje težinskih koeficijenata za ulaganje vrši se na osnovu Markowitz-ovog modela i postojećih istorijskih podataka o prinosu pojedinačnih strategija. Nakon određivanja koeficijenata za portfolio strategiju, ona se koristi kao strategija ulaganja za kraći vremenski period, odnosno period od $m_1 \in \mathbb{N}$ dana, gde je $m_1 << m$. Nakon određenog broja dana i proširivanja skupa istorijskih podataka o prinosu za m_1 dana, ponovo se na osnovu Markowitz-ovog modela vrši računanje težinskih koeficijenata za ulaganje i radi se realokacija kapitala uz određene troškove svake transakcije. Ovaj postupak se ponavlja na svakih m_1 dana do kraja perioda od m dana. Problem koji se rešava da bi se odredili težinski koeficijenti isti je kao problem 4.2 na strani 19.

Model 3

Ovaj model je ima identičnu logiku kao Model 1 sa jednom razlikom, a to je da se prilikom određivanja težinskih koeficijenata zabranjuje kratka pozicija, odnosno mora da bude zadovoljeno da je $\omega_i < 0$ za sve $i = 1, 2, ..., n$. Dakle, problem koji je potrebno rešit definiše se na sledeći način:

$$\begin{aligned}
\min_{\omega_i, i=1,2,\ldots,n} \quad & sigma_\pi^2 \\
t.d. \quad & \mu_\pi = \mu \\
& \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1 \\
& \omega_i \geq 0, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, n \\
& lb < \omega_i < ub, \ i = 1, 2, \ldots, n
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Model 4

Ovaj model je ima identičnu logiku kao Model 2 sa jednom razlikom, a to je da se prilikom određivanja težinskih koeficijenata zabranjuje kratka pozicija, odnosno mora da bude zadovoljeno da je $\omega_i < 0$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$. Dakle, problem koji je potrebno rešiti definiše se isto kao problem 4.3 uz periodičnu realokaciju kapitala.

4.2 Maksimizacija očekivane funkcije korisnosti na osnovu predviđenih stanja sveta

Suština rada se nalazi u sledećem modelu koji ćemo imenovati kao "Model 5" i on se zasniva na modelu maksimizacije funkcije korisnosti koji daje određene težinske koeficijente u zavisnosti od određenih stanja sveta za istorijske podatake i predviđenih stanja sveta na osnovu generacije stabla scenarija.

Scenario je jedna moguća realizacija svih nepoznatih parametara. To jest, scenariji opisuju moguće vrednosti slučajnih promenljivih koje predstavljaju nepoznate parametre modela, u nekom budućem vremenskom trenutku. Prilikom generacije scenarija konstruišu se scenariji koji reprezentuju prihvatiljive ishode, i pesimistične i optimistične. Svaki scenario je ponderisan svojom verovatnoćom dešavanja.

Generacija scenarija budućih prinosa vremenskih serija blisko je povezana sa modeliranjem finansijskih vremenskih serija. Ipak, metodi generacije scenarija zasnovani na klasičnim modelima finansijskih vremenskih serija često ne uspevaju da objasne ekstremna kretanja cena.

U ovom poglavlju, predstavljen je koncept generatora scenarija zasnovan na skrivenim modelima Markova. Skriveni modeli Markova predstavljaju poseban model sa promenljivim stanjima, u kom razmatramo dva stohastička procesa: jedan koji je u vezi sa vremenskom serijom od interesa, i drugi, osnovni stohastički proces koji opisuje stanja sistema. Drugi stohastički proces se ne može direktno opažati, tj. skriven je. Naš cilj jeste da modeliramo finansijske vremenske serije koristeći skrivene modele Markova kako bismo generisali scenarije koji se potom mogu integrisati u probleme finansijskog odlučivanja.

Skriveni modeli Markova kao metoda za generaciju scenarija

Sa pristupom zasnovanim na skrivenim Markovskim procesima, razlikujemo dva uključena stohastička procesa (oba u diskretnom vremenu): prvi je proces od interesa (na primer, cena akcije), koji je opažljiv, i drugi, kao dodatak procesu od interesa, koji opisuje stanje sistema, a ne možemo ga direktno opažati. Osnovni, skriveni stohastički proces koji opisuje stanje sistema je lanac Markova, odnosno, stanje sistema u nekom vremenskom trenutku zavisi samo od stanja sistema u prethodnom vremenskom trenutku, a ne i od cele istorije. U svakom vremenskom trenutku, sistem je u jednom od N mogućih stanja i može da prelazi iz trenutnog stanja u bilo koje drugo (kao i da ostane u istom) prema verovatnoćama prelaza koje nisu vremenski zavisne. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ prostor verovatnoća i Sk niz cena podloge. Predlažemo da logaritam procesa prinosa

$$y_k = \ln \frac{S_k}{S_{k-1}}, \tag{4.4}$$

ima sledeću dinamiku u diskretnom vremenu

$$y_{k+1} = M_k + \Sigma_k z_{k+1}, \tag{4.5}$$

gde su z_k nezavisne slučajne promenljive sa $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom, proces M_k predstavlja proces drifta, dok proces Σ_k proces volatilnosti.

Postavka modela je zasnovana na diskretnom geometrijskom Braunovom kretanju, ali tako da su sada drift M_k i volatilnost Σ_k stohastičke veličine, što nam je i bio cilj. Odmah napominjemo da u ovom modelu smatramo da postoji jednodnevno kašnjenje u širenju informacija. Prisetimo se da je ovo u suprotnosti sa hipotezom o efikasnom tržištu koja tvrdi da trenutna cena reflektuje sve informacije. Današnji drift M_k i volatilnost Σ_k zavise od informacija prethodnog dana trgovanja M_{k-1} i Σ_{k-1}, a to je rezultat kašnjenja u prostiranju informacija. Stoga, mi modeliramo par M_k, Σ_k tako da se razvija kao Markovski lanac prvog reda. Pošto je ovaj proces skriven, model pripada familiji skrivenih Markovskih modela. U našem pristupu, svako stanje u lancu Markova ima različite parametre geometrijskog Braunovog kretanja, čime se mogu prevazići nedostaci opisanih scenario generatora.

Pretpostavljamo da lanac (M_k, Σ_k) ima N-dimenzionalni skup stanja $S = (\mu_1, \sigma_1), ..., (\mu_N, \sigma_N)$ i matricu prelaza $\Pi = [\pi_{ij}], \ \ i, j = 1, ..., N$, gde su

$$\pi_{ij} = \mathcal{P}((M_{k+1}, \Sigma_{k+1}) = (\mu_j, \sigma_j)|(M_k, \Sigma_k) = (\mu_i, \sigma_i)), \tag{4.6}$$

stacionarne verovatnoće prelaza.

U cilju korišćenja ovog modela za donošenje investicione odluke, moramo oceniti specifikacije skrivenog lanca Markova koji se provlači kroz proces prinosa. Drugim rečima, moramo oceniti sledeće parametre:

- broj stanja lanca N,
- skup stanja lanca S,
- i verovatnoće prelaza $\pi_{ij}, \quad i, j = 1, ..., N$.

Dok se optimalne vrednosti za skup stanja i elemente matrice prelaza mogu izvesti rekurzivno, pretpostavljamo da je broj stanja unapred određen. Prva prepreka na koju nailazimo jeste da je ovaj model komplikovan za rukovođenje zbog forme skupa stanja, čiji su elementi uređeni parovi. Iz tog razloga, predlažemo transformaciju modela pomoću injektivnog preslikavanja u model čiji je skup stanja kanonička baza prostora $\mathbb{R}^N$, tj. $(e_1, ..., e_N)$, gde je e_i vektor dimenzije $N \times 1$, sa jedinicom na i-tom mestu i nulama na svim ostalim, $i = 1, ..., N$.
Predlažemo sledeću transformaciju pomoću injekcije $f : S \rightarrow e_1, ..., e_N$ definisane sa $f((\mu_i, \sigma_i)) = e_i, \; i = 1, ..., N$.
Egzistencija preslikavanja f je obezbeđena jer $dim(S) = dim(e_1, ..., e_N)$. Za naš model forma funkcije f nije od presudnog značaja i ne moramo da brinemo o njenom obliku. Sada, definišemo proces X_k:

$$X_k = f((M_k, \Sigma_k)).$$

Posmatrajmo

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}|X_k, X_{k-1}, ..., X_0) &= P(f((M_{k+1}, \Sigma_{k+1}))|f((M_k, \Sigma_k)), ..., f((M_0, \Sigma_0))) \\ &= P((M_{k+1}, \Sigma_{k+1})|(M_k, \Sigma_k), ..., (M_0, \Sigma_0)) \\ &= P((M_{k+1}, \Sigma_{k+1})|(M_k, \Sigma_k)) \\ &= P(f((M_{k+1}, \Sigma_{k+1}))|f((M_k, \Sigma_k))) \\ &= P(X_{k+1}|X_k). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Dakle, proces X_k ima osobinu Markova.
Naime, kako je $(M_k, \Sigma_k) \in S$ i $f : S \rightarrow \{e_1, ..., e_N\}$ sledi da je $X_k = f((M_k, \Sigma_k)) \in e_1, ..., e_N$. Drugim rečima, proces X_k je lanac Markova sa skupom stanja S.
Posmatrajmo dalje,

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = e_j|X_k = e_i) &= P(f((M_{k+1}, \Sigma_{k+1})) = f((\mu_j, \sigma_j))|f((M_k, \Sigma_k)) = f((\mu_i, \sigma_i))) \\ &= P((M_{k+1}, \Sigma_{k+1}) = (\mu_j, \sigma_j)|(M_k, \Sigma_k) = (\mu_i, \sigma_i)) \\ &= \pi_{ij}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Pokazali smo da lanci Markova $\{(M_k, \Sigma_k)\}$ i $\{X_k\}$ imaju iste verovatnoće prelaza.
U cilju formalizacije modela uvodimo oznake za filtracije:

$$\{\mathcal{F}_k\} = \sigma(X_0, X_1 ..., X_k),$$

$$\{\mathcal{Y}_k\} = \sigma(y_0, y_1, ..., y_k),$$

i

$$\{\mathcal{G}_k\} = \mathcal{F}_k \vee \mathcal{Y}_k = \sigma(X_0, X_1, ..., X_k, y_0, y_1, ..., y_k).$$

Neka je

$$\mu = [\mu_1, ..., \mu_N],$$

i

$$\sigma = [\sigma_1, ..., \sigma_N].$$

Tada je:

$$(\mu_i, \sigma_i) = (\langle \mu, e_i \rangle, \langle \sigma, e_i \rangle), \ i = 1, ..., N.$$

Dobijamo sledeću transformaciju modela

$$y_{k+1} = \langle \mu, X_k \rangle + \langle \sigma, X_k \rangle z_{k+1},$$

$$X_{k+1} = \Pi X_k + V_{k+1},$$

gde je V_{k+1} je niz priraštaja martingala uzimajući u obzir filtraciju $\mathcal{F}_k$.

Rekurzivni filteri

Teorema 4.1 ***(Uslovna Bajesova teorema).*** [3] *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ pod σ - algebra. Pretpostavimo dalje da je $\tilde{P}$ druga mera verovatnoća, apsolutno neprekidna sa obzirom na P i na Radon-Nikodym izvod $\frac{d\tilde{P}}{dP} = \Lambda$.*
Tada, ako je R bilo koja $\tilde{P}$ integrabilna slučajna promenljiva važi

$$\overline{E}(R|\mathcal{G}) = \psi,$$

gde je:

$$\psi = \begin{cases} \frac{E(\Lambda\mathcal{R}|\mathcal{G})}{E(\Lambda|\mathcal{G})} & \text{, ako je } E(\Lambda|\mathcal{G}) > 0 \\ 0 & \text{, inače} \end{cases}$$

Pretpostavimo da je $\{R_k\}$ skalarni niz, sa $R_{k+1} = R_{k+1} - R_k$.

Teorema 4.2 [3] *Neka je R_k skalarni $\mathcal{G}$-prilagođen proces sledeće forme*

$$R_{k+1} = R_k + \alpha_{k+1} + \langle \beta_{k+1}, V_{k+1} \rangle + \delta_{k+1} f(y_{k+1}),$$

gde je

$$V_{k+1} = X_{k+1} - \Pi X_{k+1},$$

f skalarna funckija, a α, β, δ i $\mathcal{G}$ predvidivi procesi (α, δ su skalari, a β vektor dimenzije $N \times 1$). Tada važi

$$\begin{aligned}\gamma_{k+1}(R_{k+1}X_{k+1}) = &\sum_{i=1}^{N}\langle\gamma_k(R_kX_k), e_i\rangle\Gamma^i(y_{k+1})\pi_i \\ &+ \gamma_k(\alpha_{k+1}\langle X_{k+1}, e_i\rangle)\Gamma^i(y_{k+1})\pi_i \\ &+ \gamma_{k+1}(\delta_{k+1}\langle X_k, e_i\rangle)\Gamma^i(y_{k+1})f(y_{k+1})\pi_i \\ &+ (diag(\pi_i) - \pi_i\pi_i^T)\gamma_k(\beta_{k+1}\langle X_{k+1}, e_i\rangle)\Gamma^i(y_{k+1}),\end{aligned} \tag{4.9}$$

gde je $\pi_i = \Pi e_i$.

Ukoliko u teoremi 4.2 stavimo $R_k = R_0 = 1$, $\alpha_k = 0$, $\beta_k = (0, ..., 0)^T$, $\delta_0 = 0$, dobijamo

$$\gamma_{k+1}(X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{N}\langle\gamma_k(X_k), e_i\rangle\Gamma^i(y_{k+1})\pi_i.$$

Algoritam za generaciju scenarija pomoću metoda skrivenih lanaca Markova

Na samom kraju teorijskog dela o modelu zasnovanom na skrivenim lancima Markova ostaje da se objasni kako se pomenuti model koristi za generaciju scenarija. Kada se ocene parametri, ovaj metod se može koristiti za generaciju scenarija prinosa budućih cena, nakon što je ocenjen lanac Markova za sledeći period.
Osnovni koraci u proceduri generisanja scenarija su:

- ocenjivanje skupa parametara skrivenog lanca Markova za dati niz opažanja
- generisanje trajektorije podataka prema modelu korišćenjem aproksimacije statističkih osobina.

Prvo predstavljamo algoritam za dobijanje optimalnih ocena :

1. Odaberemo početne vrednosti za vektor drifta $\mu^0 = [\mu_1^0, ..., \mu_N^0]$ prema očekivanoj vrednosti modelirane vremenske serije, za vektor volatilnosti $\sigma_0 = [\sigma_1^0, ..., \sigma_N^0]$ uzimajući u obzir standardnu devijaciju serije i za verovatnoće prelaza $\Pi^0 = \pi_{ij}^0$, $i, j = 1, ..., N$ za koje pretpostavljamo da su identično raspodeljene.
2. Sledeći korak je da postavimo početne vrednosti za procese $\gamma_0(\mathcal{J}_0^{rs}X_0), \gamma_0(O_0^rX_0)$ i $\gamma_0(\mathcal{T}_0^r(h)X_0)$. Uzimamo da su početne vrednosti nula vektori za sve procese.
3. Određujemo dužinu staze i u zavisnosti od dužine vremenske serije koju posmatramo, menja se i broj obnavljanja pokretanja algoritma.

4. Računamo Radon-Nikodym izvode $\Gamma_i(y_k), i = 1, ..., N$.

5. Računamo ocenjivač stanja $\gamma_k(X_k)$ kao i rekurzivne filtere za skokove, vreme zadržavanja i pomoćni proces.

6. Nakon što se odrede filteri za trenutnu stazu, određujemo ocene parametara koje se uzimaju kao početne vrednosti za sledeću iteraciju.

7. Dva poslednja koraka se ponavljaju sve dok se algoritam ne obnovi odabrani broj puta.

8. Dobijene ocene se koriste za generaciju scenarija prinosa finansijskih vremenskih serija.

Kada smo dobili ocene, koristimo sledeći algoritam za generaciju scenarija pomoću dobijenih optimalnih ocena parametara:

- Prvi korak jeste da generišemo standarizovane normalne slučajne promenljive uz pomoć simulacije $\sqrt{k}\mathcal{N}(0, 1)$.

- Potom generišemo scenarije za sledeći vremenski period $k + 1$:

  Računamo uslovno očekivanje lanca Markova u trenutku $k + 1$, to jest $E(X_{k+1}|Y_k)$.

  Računamo parametre: $\mu_{scen} = \langle \mu, E(X_{k+1}|Y_k) \rangle$ i $\sigma_{scen} = \langle \sigma, E(X_{k+1}|Y_k) \rangle$.

- Kreiramo scenarije za prinose: $S_{scen} = C(k)e^{(\mu_{scen} - \frac{\sigma^2_{scen}}{2})k + \sigma_{scen} z_{scen}}$, gde je sa $C(k)$ označen poslednji stvarni podatak u procesu opažanja, a z_{scen} su nezavisne standardizovane normalne slučajne promenljive nezavisne i od lanca Markova.

- Na kraju, pomoću ocenjenih cena računamo željene prinose date serije za različite scenarije.

Gore objašnjen algoritam se koristi u modelu da bi se generisala stanja sveta za istorijske podatke, a zatim predvidela stanja sveta za naredni period koristeći stablo scenarija.

Generisanje stabla scenarija

Velika klasa problema odlučivanja uključuje etape odlučivanja i slučajnost. Primeri su problemi portfolio optimizacije sa više perioda, modeli u energetici, telekomunikacijama, transportu, lancima nabavke itd. Zajednička karakteristika pomenutih modela jeste činjenica da stohastički procesi koji opisuju slučajnost (cene aktiva, tražnja za energijom, itd.) predstavljaju najvažniji deo ulaznih podataka. Tipično su ti stohastički procesi ocenjeni na osnovu istorijskih podataka i kalibrisani uz pomoć određenih informacija. Za modele odlučivanja sa više etapa, potrebne su numeričke aproksimacije koje su dovoljno male da omogućavaju računanje u razumnom vremenskom periodu, ali i dovoljno velike da zadrže najvažnije karakteristike problema.

Portfolio optimizacija sa više etapa kao primer problema odlučivanja sa više etapa najčešće je bazirana na stohastičkom modelu koji opisuje moguća stanja u kojima se tržište može naći. Postoji bogata literatura o modeliranju i oceni neprekidnih finansijskih procesa u pojedinim stanjima. Međutim, osim ekstremno jednostavnih i nerealnih slučajeva, problemi portfolio optimizacije opisani kontinualnim stohastičkim procesima (tj. neprekidnim slučajnim promenljivama u svakom periodu odlučivanja) mogu biti samo formulisani, ali ne i rešeni. Uobičajen način da se ovi problemi učine rešivim jeste njihova restrikcija tako da ih umesto neprekidnih slučajnih promenljivih u svakoj etapi odlučivanja opisuju diskretne slučajne promenljive u etapama odlučivanja. U ovom slučaju, funkcije odluka se redukuju na vektore odluka velikih dimenzija. Jasno, kvalitet rešenja problema optimizacije u velikoj meri zavisi od kvaliteta modela za diskretizaciju, te se stoga nameće pitanje kako aproksimirati neprekidne procese sa diskretnim scenario procesima u svakom stanju i kako meriti tako napravljenu grešku.

Cilj u modelovanju relevantnog stohastičkog procesa sa stablom scenarija je sledeći.
Neka je dat kontinualni stohastički proces (ili diskretan proces sa ogromnim brojem ishoda) $\{\xi_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$ gde $\xi_0 = x_0$ predstavlja današnju vrednost koja je poznata. Želimo da aproksimiramo scenario staze stablom scenarija.
Raspodela ovog procesa može biti rezultat parametarske ili neparametarske ocene zasnovane na istorijskim podacima. Prostor može biti jednodimenzionalan ili višedimenzionalan. Cilj je pronaći jednostavan stohastički proces $\{\tilde{\xi}_t\}_t$ koji uzima konačno mnogo vrednosti, koji je dovoljno blizu originalnog procesa $\{\xi_t\}_t$ i koji u isto vreme ima strukturu u obliku stabla.
Neka je S_t konačan prostor stanja procesa $\{\tilde{\xi}_t\}$, tj. $P(\tilde{\xi}_t \in S_t) = 1$ i neka je $c(t)$ kardinalni broj S_t. Važi da je $c(0) = 1$. Neka je $b(x,t)$ broj grana koje izlaze iz čvora $x \in S_t$, tj. $b(x,t) \neq \{y : P(\tilde{\xi}_t + 1 = y|\tilde{\xi}_t = x) > 0\}$. Proces $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$ se može predstaviti u formi stabla sa korenom u $(x_0, 0)$ koje još zadovoljava uslov da su čvorovi (x,t) i $(y, t+1)$ povezani granom ukoliko važi uslov da je $P\{\tilde{\xi}_t = x, \tilde{\xi}_t + 1 = y\} > 0$.
Da bi se proces $\{\xi_t\}t = 0, 1, 2, \dots, T$ aproksimirao procesom $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$, potrebno je pre svega odrediti strukturu stabla scenarija. Tipične strukture su:

- Data struktura grananja. Proces $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$ ima strukturu grananja $(b_0, b_1, \dots, b_{T-1})$, pri čemu b_t označava broj grana koje izlaze iz jednog čvora u periodu t. Ukupan broj scenarija procesa $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$ je $\Pi_{t=0}^{T-1} b_t$.

- Dati broj čvorova za svako stanje. Ukupan broj čvorova procesa $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$ po stanju $(l_1, l_2, \dots, l_T)$ je fiksiran, te je ukupno l_T scenarija.

- Slobodna struktura. Struktura grananja i broj čvorova u pojedinim stanjima $(l_1, l_2, \dots, l_T)$ procesa $\{\tilde{\xi}_t\}_{t=0,1,2,\dots,T}$ potpuno su slobodni, sem činjenice da je broj čvorova u krajnjem stanju (tj. broj scenarija) l_T unapred zadat.

Koja će struktura biti korišćena najčešće je određeno modelom koji se koristi za generaciju stabla scenarija. U ovom radu se koristi model koji nameće strukturu gde je dat broj čvorova za svako stanje.

Odabir optimalnog portfolija algoritamskih strategija trgovanja

Nakon što se, na osnovu prethodno navedenih algoritama, generišu moguća stanja sveta i oceni vremenska serija istorijskih podataka dužine n o stanjima sveta, želimo da predvidimo stanja sveta za narednih m dana. Za određivanje prošlih stanja sveta, iz grupe akcija ili strategija koje se koriste za građenje portfolija uzima se ona koja najbolje oslikava ponašanje tržista. Na osnovu prinosa poslednjeg dana istorijskih podataka, ocenjenog drifta, volatilnosti i matrice prelaza, kod generišu scenario staze koje predstavljaju moguće buduće prinose strategije za narednih m dana.

Nakon što se na osnovu istorijskih podataka za svaki predviđeni prinos u svakoj stazi odredi u kojem stanju sveta se nalazi, dobijaju se scenario staze koje prestavljaju moguća stanja sveta u narednih m dana. Za svaki od m dana vrši se određivanje klastera na osnovu unapred zadatog broja čvorova za svaki dan. Na ovaj način se redukuje broj scenario staza i dobijaju se grane stabla scenarija, kao i verovatnoće da se bilo koja od tih grana realizuje u budućnosti. Kao konačna predikcija za stanja sveta u narednih m dana na osnovu koje ćemo donositi odluke, uzima se ishod koji je najverovatniji, odnosno grana stanja sveta sa najvećom verovatnoćom realizacije.

Nakon određivanja stanja sveta koja važe za svih n akcija ili strategija, posmatra se specifično ponašanje svake akcije ili strategije u svakom od navedenih s stanja sveta. Strategije $S_1, S_2, ..., S_n$ u određenom stanju sveta mogu da se ponašaju, reaguju na 3 načina: *loše, dobro* ili *neutralno (da ne odreaguju).* Pragovi za ove osobine mogu se birati proizvoljno, ali u ovo radu pretpostavljeno je da strategija S_i reaguje *loše* u trenutku (danu) t ako je prinos strategije tog dana manji od $-a$, *neutralno*, odnosno ne reaguje, ako je prinos strategije tog dana jednak ili između vrednosti $-a$ i b, a *dobro* ako je prinos veći od b.

Na osnovu učestalosti ponavljanja *lošeg, neutralnog* ili *dobrog* prinosa, formiramo uslovne verovatnoće za određeno ponašanje strategije u svakom od tri stanja sveta:

$$\begin{aligned} &P\{S_i = losa|Stanje = j\},\\ &P\{S_i = neutralna|Stanje = j\},\\ &P\{S_i = dobra|Stanje = j\}, \quad j = 1, 2, ...s. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nakon što ustanovimo da se akcije ili strategije ponašaju drugačije u zavisnosti od stanja sveta, jasno je da odabir optimalnog portfolija strategija treba prilagoditi njima. Odnosno, formulisaćemo master strategije za svako od mogućih s stanja sveta. Na osnovu izračunatih verovatnoća formulisaćemo funkciju očekivane korisnosti od portfolija koji je sastavljen od svih n strategija, na sledeći način:

$$M_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} \cdot S_i, \quad j = 1, 2, ..., s, \tag{4.11}$$

gde ćemo $M_j, j = 1, 2, ..., s$ na dalje nazivati *Master strategija za stanje j* i $\omega_{ij},\ i = 1, 2, ..., n\ j = 1, 2, ..., s$ predstavlja težinski koeficijent strategije ili akcije i za portfolio master strategije u stanju sveta j.

Do težinskih koeficijenata portfolija svake od master strategija dolazimo pomoću ranije opisanog modela maksimizacije funkcije korisnosti.
Funkcija korisnosti je data sa $u(x)$, i kao što je već opisano, odražava investitorov stav prema riziku.
Problem koji se rešava da bi se dobili optimalni težinski koeficijenti sledećeg je oblika:

$$\begin{aligned} &\max_{\omega_{ij}} E[u(Mj)] \\ &\sum_{i=1}^{n} \omega_{ij} = 1 \\ &0 < \omega_{ij} < 1,\ \forall i = 1, ..., n \end{aligned} \quad . \tag{4.12}$$

Nakon što su izračunate vrednosti težinskih koeficijenata odlučuje se o periodu koji definiše na koliko dana će se vršiti realokacija kapitala. To najviše zavisi od predviđenih prelazaka iz jednog stanja sveta u drugo i od troškova svake od transakcija jer oni mogu značajno uticati na smanjenje prinosa od strategije u slučaju previše česte realokacije kapitala.

4.3 Metode testiranja modela

Testiranja modela vrše se sa ciljem da se proveri uspešnost samog modela, a može se vršiti pomoću različitih metoda, Backtesting, Forwardtesting, Out-of-Sample.

Backtesting je metod testiranja na istorijskim podacima. Ovaj metod nam dopušta da testiramo učinkovitost modela, a da pri tom ne moramo da rizikujemo i izgubimo novac.

Out-of-sample testing je metod testiranja modela na podacima koji nisu korišćeni za formiranje modela. Ovaj metod se koristi prilikom testiranja raznih modela optimizacije tako što se istorijski podaci podele na dva dela: prvi, obično obimniji, in-sample deo koji služi za optimizaciju i drugi, out-of-sample koji služi za testiranje rezultata optimizacije. Na taj način se sprečava da podaci utiču na evaluaciju modela.

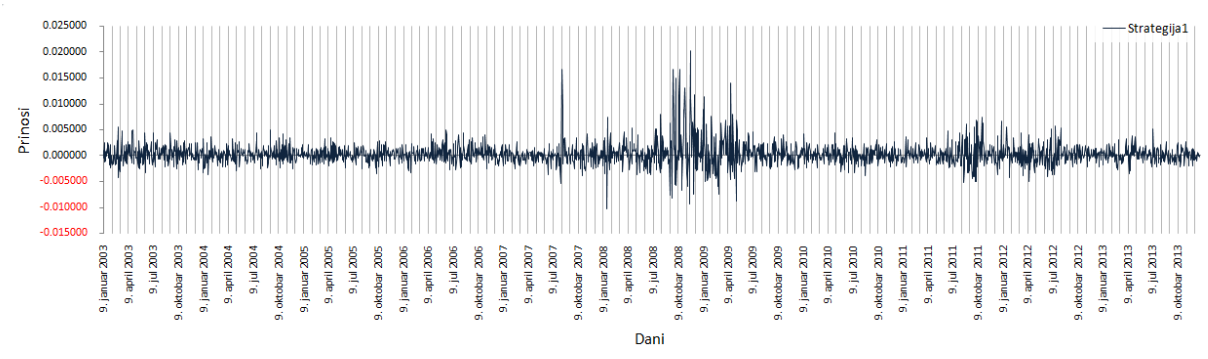
Forward testing je metod testiranja modela koji podrazumeva primenu modela na budućnost, tj. na deo uzorka koji ne posedujemo u trenutku formiranja modela. Glavna karakteristika ovakvog pristupa testiranju jeste da se investitor pretvara da koristi model ili, drugim rečima, model testira na papiru i ne izvršava zapravo ono što mu model sugeriše. U ovom radu koristiće se out-of-sample metod testiranja. Konstrukcija modela se vrši na 80% istorijskih podataka, a zatim se sprovodi optimizacija portfolija i dobijaju se optimalni težinski koeficijenti. Na preostalih 20% se testira uspešnost modela na osnovu različitih pokazatelja uspešnosti investicije.

Grafik 4.1: Out-of-sample testiranje modela

5 Rezultati numeričkog eksperimenta

Realni podaci sa kojima radimo sastoje se od dnevnih prinosa za dvadeset dve BB strategije za period od januara 2003. godine do decembra 2013. godine. Svaka strategija predstavlja tzv. korpu finansijskih instrumenata. Prinosi strategija su svakodnevno praćeni i beleženi za tačno 2864 dana. Prinosi su dati u obliku matrice dimenzije 2864x22, $R = [r_{ij}], i = 1, 2, ..., 2864, j = 1, 2, ..., 22$ pri čemu $r_{ij}, i = 1, 2, ..., 2864, j = 1, 2, ..., 22$ predstavlja prinos j-te strategije na i-ti dan. Pretpostavimo da imamo informacije o dnevnim prinosima gore navedenih strategija za 2292 dana i želimo da uložimo određeni kapital u 22 strategije i da nakon 572 dana ostvarimo profit uz minimalan rizik. Za odabir optimalne strategije ulaganja korišćen je opisani model.

Iako na raspolaganju imamo informacije o prinosima strategija za 2864 dana, za razvoj modela koristićemo prvih 2292 dana, a ostatak podataka, odnosno informacije o preostalih 572 dana biće iskorišćeno za testiranje modela. Strategije će dalje u radu biti označavane sa $S_1, ...S_{22} \in \mathbb{R}^{2864}$. Ilustracije radi, na grafiku *5.1* prikazana je jedna od vremenskih serija koja predstavlja prinose strategije S_1.



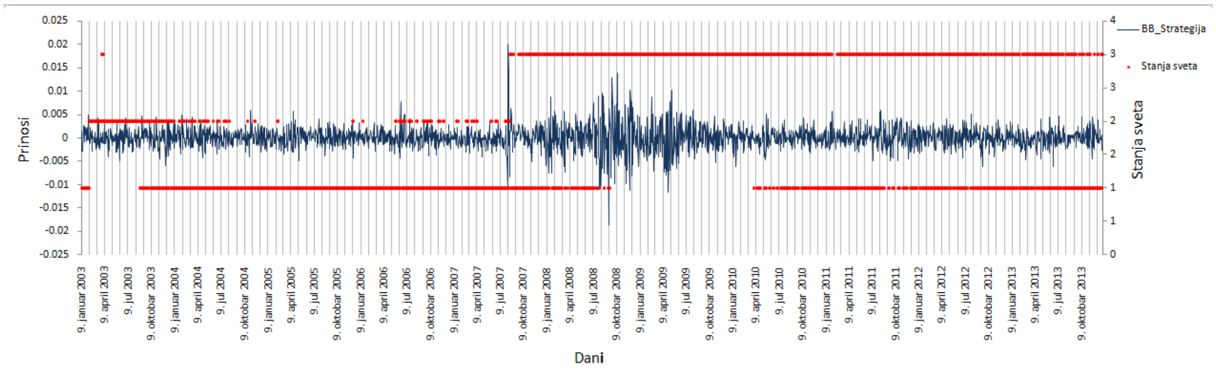
Grafik 5.1: Prinosi BB Strategije u periodu od 10 godina

Prvo što uočavamo jeste da se očekivanje date vremenske serije ne menja puno u odnosu na vreme. Možemo primetiti da disperzija doživljava dva skoka, pri čemu se prvi nalazi između 2008. i 2009. godine, što se vremenski poklapa sa početkom svetske ekonomske krize. Sve strategije sa kojima se susrećemo u ovom radu manifestuju upravo ovakvo ponašanje. Pretpostavimo da je svako ponašanje strategije uzrokovano nekim skrivenim faktorom, kao što su stanja sveta u kojima se strategija nalazi u određenom danu. Da bi se odredila raspodela stanja sveta kroz vreme (u ovom radu 3 stanja), primenjuje se algoritam za generaciju scenarija pomoću skrivenih lanaca Markova radi određivanja stanja sveta u kojima se strategije nalaze u određenom danu.

S obzirom na to da ocene algoritma za generaciju stanja sveta zavise od vremenske serije na osnovu koje se generišu stanja sveta, korišćena je vremenska serija koja predstavlja prosečnu vrednost prinosa 22 strategije u određenom danu. Ova vremenska serija označena je sa SA i definiše se na sledeći način:

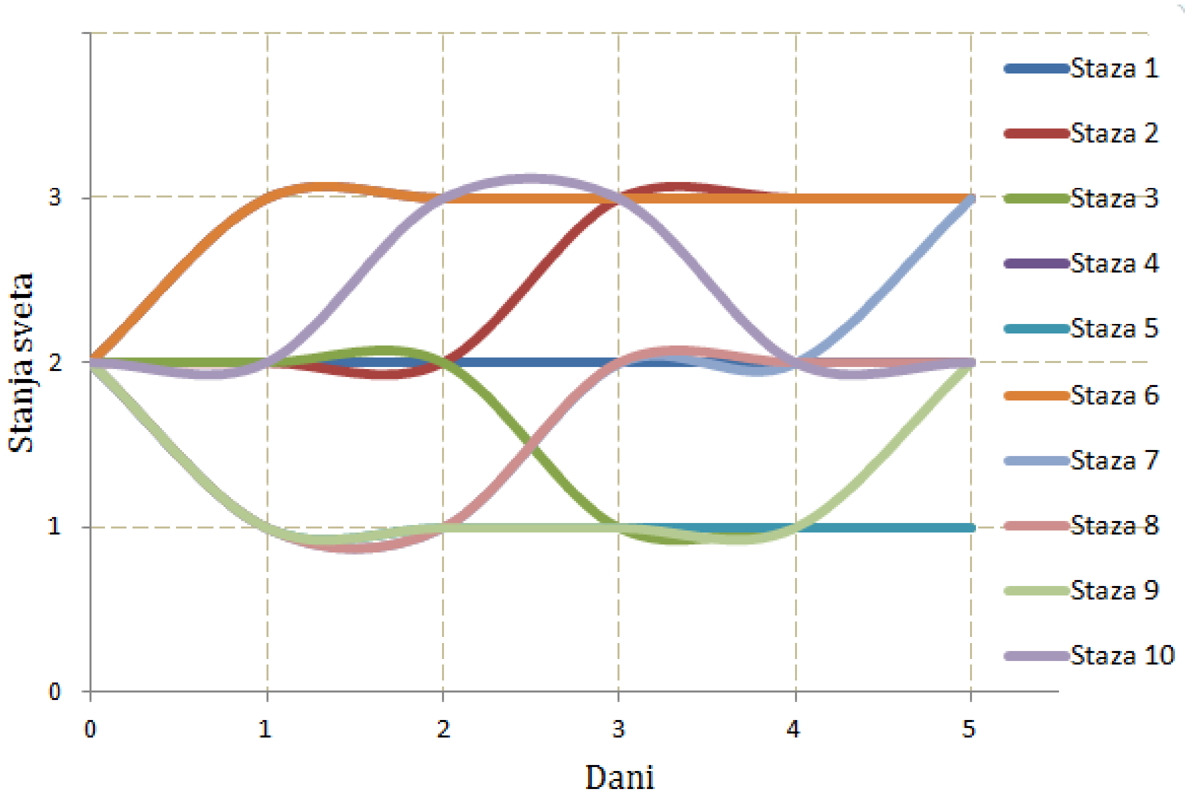
$$SA(t) = \sum_{i=1}^{22} S_i(t), \ t = 1, ..., 2292.$$

MATLAB programski kod za ocenu parametara modela (drift, volatilnost i matrica prelaza skrivenog lanca Markova) prikazan je u *Prilogu*. Na osnovu prethodno navedene vremenske serije SA i početnih vrednosti za očekivanje μ_0 i disperziju σ_0, kao i za matricu prelaza A, dobijene su ocene stanja sveta za istorijske podatke koji obuhvataju 2292 dana. Model je zasnovan na skrivenim lancima Markova. Pretpostavka je da skriveni lanac Markova ima tri moguća stanja koja odgovaraju stanjima visoke, umerene i niske volatilnosti, a u radu su ova stanja obeležena kao stanje1, stanje2 i stanje3, respektivno. Na grafiku *5.2* prikazana je raspodela stanja sveta u zavisnosti od vremena (dana).



Grafik 5.2: Stanja sveta BB strategije u zavisnosti od vremena

Nakon generacije i ocenjivanja stanja sveta na osnovu istorijskih podataka, neophodno je predvideti stanja sveta za narednih 572 dana. Drugi blok naredbi *MATLAB* koda bavi se upravo ovim problemom. Na osnovu prinosa u 2292. danu, ocenjenog drifta, volatilnosti i matrice prelaza, kod generiše 2000 scenario staza koje predstavljaju moguće buduće prinose strategije za narednih 5 dana. Nakon što se na osnovu istorijskih podataka za svaki predviđeni prinos u svakoj od 2000 staza odredi u kojem stanju sveta se nalazi, dobijaju se scenario staze koje prestavljaju moguća stanja sveta u narednih 5 dana, kao i verovatnoće da se bilo koja od tih scenario staza realizuje. Za predikciju stanja sveta u narednih 5 dana na osnovu koje ćemo donositi odluke, uzima se ishod koji je najverovatniji, odnosno staza stanja sveta sa najvećom verovatnoćom realizacije. Na grafiku *5.3* prikazane su moguće staze stanja sveta za 5 dana.



Grafik 5.3: Scenario staze mogućih stanja sveta za narednih 5 dana

Nakon određivanja stanja sveta koja važe za sve strategije, posmatra se specifično ponašanje pojedinačne strategije u svakom od navedena 3 stanja sveta. Strategije $S_1, S_2, \ldots, S_{22}$ u određenom stanju sveta mogu da se ponašaju, reaguju na 3 načina: *loše, dobro* ili *neutralno*. Pragovi za ove osobine mogu se birati proizvoljno, ali u ovo radu pretpostavljeno je da strategija S_i reaguje *loše* u trenutku (danu) t ako je prinos strategije tog dana manji od -0.0006, *neutralno*, odnosno ne reaguje, ako je prinos strategije tog dana jednak ili između vrednosti -0.0006 i 0.001, a *dobro* ako je prinos veći od 0.001.

Na osnovu učestalosti ponavljanja *lošeg, neutralnog* ili *dobrog* prinosa, formiramo uslovne verovatnoće za određeno ponašanje strategije u svakom od tri stanja sveta:

$$\begin{aligned} &P\{S_i = losa|Stanje = j\}, \\ &P\{S_i = neutralna|Stanje = j\}, \\ &P\{S_i = dobra|Stanje = j\}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Želimo da formiramo master strategije M_j na sledeći način:

$$M_j = \sum_{i=1}^{22} \omega_{ij} \cdot S_i, \quad j = 1, 2, 3, \tag{5.2}$$

gde je ω_{ij} težinski koeficijent za ulaganje u strategiju S_i u stanju sveta j.

Pretpostavimo da investitor ima kvadratnu funkciju korisnosti oblika:

$$u(x) = a \cdot x - 1/2 \cdot b \cdot x^2, \quad a, b - const,$$

gde su a i b proizvoljne konstante koje odražavaju investitorov stav prema riziku. U ovoj simulaciji pretpostavlja se da je $a = 2.6$, a $b = 80$. Na osnovu funkcije korisnosti, može se primetiti da investitor ima visoku averziju prema riziku. Do koeficijenata ω_{ij} dolazi se rešavanjem sledećeg problema optimizacije:

$$\begin{aligned} &\max_{\omega_{ij}} E[u(Mj)] \\ &\sum_{i=1}^{22} \omega_{ij} = 1 \qquad . \\ &0 < \omega_{ij} < 1, \ \forall i = 1, ..., 22 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Ovde za samu optimizaciju koristimo ugrađenu MATLAB-ovu funkciju *fmincon*. S obzirom na to da se ova funkcija bavi pronalaženjem minimuma funkcije uzimajući u obzir ograničenja koja mogu biti data u raznim oblicima, kao ulazna funkcija prosleđuje se negativna vrednost funkcije čiji maksimum se traži, odnosno prosleđujemo funkciju:

$$\begin{aligned} -E[u(M_j)] = &- [a \cdot \sum_{i=1}^{22} \omega_i j \cdot E(Si|Stanje = j) \\ &- 1/2 \cdot b \cdot ((\sum_{i=1}^{22} \omega_i j \cdot E(Si|Stanje = j))^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{22} \omega_i j^2 \cdot Var(Si|Stanje = j)], \ j = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{5.4}$$

gde se $E(Si|Stanje = j)$ određuje na osnovu pomenutih uslovnih verovatnoća i prosečnih vrednosti prinosa strategije kada se ponaša na odgovarajući način u određenom stanju sveta.
Kao ulazni parametri funkcije *fmincon* korišćeni su:

- $@funkc\_stanjej = -E[u(Mj)]$;
- $x_0 = [1/22 \ 1/22 \cdots 1/22]^T_{1\times 22}$;
- $Aeq = [1 \ 1 \cdots 1]_{1\times 22}$ i $beq = 1$;
- $A = -1 \cdot eye(22, 22)$ i $b = [0 \ 0 \cdots 0]^T_{1\times 22}$;
- $lb = [0 \ 0 \cdots 0]^T_{1\times 22}$ i $ub = [1 \ 1 \cdots 1]^T_{1\times 22}$.

Funkcija je pokrenuta tri puta da bi se odredili težinski koeficijenti za sva tri stanja sveta. Vektor kolone koje predstavljaju koeficijente za stanje sveta j su:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0.000799326 \\ 0.00078133 \\ 0.00089514 \\ 0.008584155 \\ 0.034708231 \\ 0.000540965 \\ 0.000935878 \\ 0.000968762 \\ 0.001695507 \\ 0.003814516 \\ 0.042776203 \\ 0.389974371 \\ 0.000934487 \\ 0.000675352 \\ 0.001054292 \\ 0.00048488 \\ 0.001302531 \\ 0.001801562 \\ 0.201509216 \\ 0.004045818 \\ 0.126942246 \\ 0.174775232 \end{bmatrix}_{22\times 1} \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0.00039596 \\ 0.000633941 \\ 0.000372382 \\ 0.000248288 \\ 0.000266114 \\ 0.048089875 \\ 0.001220014 \\ 0.000296023 \\ 0.000325169 \\ 0.000263774 \\ 0.000267655 \\ 0.000302003 \\ 0.469295093 \\ 0.00068042 \\ 0.315421739 \\ 0.00123169 \\ 0.067676014 \\ 0.000383763 \\ 0.000395514 \\ 0.000304868 \\ 0.000339939 \\ 0.091589763 \end{bmatrix}_{22\times 1} \quad \omega_3 = \begin{bmatrix} 0.006878522 \\ 0.032218136 \\ 0.001192535 \\ 0.000669627 \\ 0.000949553 \\ 0.057285902 \\ 0.003174192 \\ 0.074367326 \\ 0.000669675 \\ 0.00124659 \\ 0.000716335 \\ 0.000831494 \\ 0.001891011 \\ 0.226429568 \\ 0.124409565 \\ 0.382785364 \\ 0.000390773 \\ 0.080936678 \\ 0.000400484 \\ 0.000327755 \\ 0.000930081 \\ 0.001298835 \end{bmatrix}_{22\times 1}$$

.

Na svakih 5 dana vrši se realokacija kapitala u zavisnosti od predviđenih stanja sveta za narednih 5 dana. Pretpostavljamo da je trošak svake transakcije $3 \cdot 10^{-4}$ po novčanoj jedinici, odnosno ako je vrednost transakcije 10000 novčanih jedinica, neophodno je izdvojiti 3 novčane jedinice da bi se transakcija realizovala.

5.1 Rezultati numeričkog eksperimenta

Dodatno je napravljen *MATLAB* kod pomoću kojeg se za već navedene podatke računaju prinosi za 572 dana u slučaju primene ranije objašnjenih modela. Među ove modele spadaju:

1. Markowitz-ov model (računanje težinskih koeficijenata za ulaganje vrši se samo u 2292. danu, a zatim se po istoj strategiji ulaže narednih 572 dana, bez realokacije kapitala u međuvremenu)

2. Markowitz-ov model sa realokacijom kapitala (računanje težinskih koeficijenata za ulaga-

nje vrši se u 2292. danu, a zatim se isti postupak ponavlja na svakih 5 dana i tada se vrši realokacija kapitala uz navedene troškove svake transakcije)

3. Markowitz-ov model sa pozitivnim težinskim koeficijentima (računanje težinskih koeficijenata za ulaganje vrši se samo u 2292. danu, a zatim se po istoj strategiji ulaže narednih 572 dana, bez realokacije kapitala u međuvremenu)

4. Markowitz-ov model sa realokacijom kapitala sa pozitivnim težinskim koeficijentima (računanje težinskih koeficijenata za ulaganje vrši se u 2292. danu, a zatim se isti postupak ponavlja na svakih 5 dana i tada se vrši realokacija kapitala uz navedene troškove svake transakcije)

Navedeni modeli će na dalje biti označavani kao Model 1, Model 2, Model 3 i Model 4, respektivno, a model koji je objašnjen i razrađen u radu biće nazvan Model 5. Za analizu uspešnosti strategija na osnovu navedenih modela korišeni su ranije prezentovani pokazatelji uspešnosti ulaganja:

- Srednja vrednost
- Varijansa
- Sharpe-ov količnik
- Calmar-ov količnik.

Vrednosti pokazatelja su računate na vremenskim serijama prinosa dužine 572.

Model	Srednja vrednost	Varijansa	Sharpe	Calmar
Model 1	$2.13495 \cdot 10^{-4}$	$2.71839 \cdot 10^{-6}$	$4,94737$	5.38007
Model 2	$1.35388 \cdot 10^{-4}$	$3.59504 \cdot 10^{-6}$	$2,37233$	2.21544
Model 3	$7.93162 \cdot 10^{-5}$	$4.48700 \cdot 10^{-6}$	1.11354	1.35051
Model 4	$1.05523 \cdot 10^{-4}$	$5.01869 \cdot 10^{-6}$	1.32451	1.75595
Model 5	$1.06732 \cdot 10^{-4}$	$1.88278 \cdot 10^{-6}$	3.57103	2.49040

Tabela 5.1: Vrednosti pokazatelja za uspešnost portfolija algoritamskih strategija trgovanja na out-sample uzorku

U tabeli 5.1 su predstavljene vrednosti pokazatelja uspešnosti za svaki model. Kao što se vidi u tabeli, na osnovu različitih pokazatelja može se reći da su neki modeli bolji od drugih.

Model 5, odnosno model maksimizacije funkcije korisnosti u zavisnosti od predviđenih stanja sveta, pokazao se kao najbolji u smislu varijanse koja iznosi $1.88278 \cdot 10^{-6}$, što se moglo i očekivati, s obzirom na to da je taj model karakterističan po mogućnosti kontrole investitorove averzije prema riziku. Na osnovu srednje vrednosti prinosa za period od 572 dana, najprihvatljiviji je Model 1, odnosno Model Markowitz-a gde se alokacija kapitala vrši samo jednom za ceo naredni period. Na osnovu kriterijuma Sharpe-ovog količnika, opet je najbolji Model 1, a isto kaže i kriterijum Calmar-ovog količnika.
Kao što smo videli u postavci problema Modela 5, jedno od ograničenja bilo je zabrana kratke pozicije. Ovo ograničenje je zadato da bi se smanjili troškovi transakcije. Ono što bi se desilo u slučaju dozvole kratke pozicije takođe je testirano i došlo se do zaključka da bi u tom slučaju troškovi transakcije "pojeli" prinos, odnosno portfolio strategija bi zarad smanjenja rizika mogao da daje negativan prosečni prinos.
Ideja realokacije pomoću Markowitz-ovog modela se takođe nije pokazala kao najbolja ideja upravo zbog već pomenutih visokih troškova transakcije.
Važno je naglasiti da je prilikom konstrukcije modela u ovom radu pretpostavljeno da investitor ima kvadratnu funkciju korisnosti i to sa unapred zadatim koeficijentima. Pošto je poznato da funkcija korisnosti varira od investitora do investitora, to znači da će svaki investitor korišćenjem istog modela dobiti različite težinske koeficijente optimalnog portfolija.

5.1.1 Zapažanja korisna za dalja istraživanja

Ono što je na prvi pogled očigledno jeste da je Model 5, koji je predstavljen kao inovacija u ovom radu, moguće izmeniti i prilagoditi na različite načine. Rečeno je da visoki troškovi transakcije mogu da utiču značajno na smanjenje profita u slučaju dozvoljavanja kratke pozicije, ali je sasvim realno očekivati da iz istog razloga previše česta realokacija kapitala dovodi do rasta troškova transakcije i smanjenja profita. Dakle, bilo bi dobro proveriti kakve bi rezultate model davao u slučaju šireg vremenskog intervala u kojem se ne vrši realokacija kapitala.

Bilo bi korisno razmotriti još neke algoritme za generaciju scenarija stanja sveta, kao i načine za predviđanje budućih stanja sveta. Jedna od ideja bila bi konstrukcija stabla scenarija sa manje čvorova, ali za duži vremenski period. Takođe, "ponašanja" odnosno "reakcije" pojedinačnih strategija u određenom stanju sveta je određena na osnovu proizvoljno zadatih pragova. Dodatno, pragovi su određeni na osnovu konkretne vremenske serije i istorijskih podataka, tako da i taj deo modela podleže mogućnostima za prilagođavanje i unapređenje.

Iako u većini modela za analizu performansi portfolija Model 5 nije dao bolje rezultate od Markowitz-ovog modela, verujemo da je ideja za konstrukciju modela sa maksimizacijom funkcije korisnosti u zavisnosti od stanja sveta dobra osnova za izgradnju budućih modela.

Zaključak

Osnovni problem u svetu investicija je optimalan izbor aktiva za datu količinu kapitala. Pri tome pod investicijom podrazumevamo svako ulaganje u cilju ostvarivanja profita, na primer kupovina akcija, nekretnina, ulaganje u profitabilan projekat i slično. Za datu količinu kapitala i skup raspoloživih aktiva, optimalni izbor aktiva podrazumeva formiranje portfolija koji sadrži određeni broj aktiva iz skupa svih raspoloživih. Kretanje cene aktiva nije unapred poznato, pa ono predstavlja slučajnu promenljivu koja ima očekivanu vrednost i u sebi nosi određeni rizik koji merimo varijansom, odnosno standardnim odstupanjem. Optimalnost možemo shvatiti kao maksimizaciju očekivanog prinosa ili minimizaciju rizika ili kombinaciju ova dva kriterijuma.

U ovom radu se pored opšte poznatog modela optimizacije portfolija, Markowitz-ovog modela, koji je zasnovan na varijansi kao meri rizika, izučio novi pristup ovom problemu. Pomenuti pristup je zasnovan na generaciji stanja sveta i funkciji korisnosti kao mere za investitorovu averziju prema riziku. Novi model je konstruisan sa ciljem da se dođe do boljih rezultata od onih koji se dobijaju korišćenjem standardnog Markowitz-ovog modela. Modeli su poređeni na osnovu različitih modela za ocenu performansi portfolija. Iako rezultati nisu u skladu sa očekivanim, od velikog su značaja za buduća istraživanja. Na osnovu varijanse kao pokazatelja uspešnosti, novosmišljeni model se pokazao kao najbolji, dok su po Sharpe-u, Calmar-u i očekivanom prinosu bolje pokazale varijacije Markowitz-ovog modela. Iako model Markowitz-a nikako ne treba potceniti, ima dosta prostora da se novi model unapredi. Jedan od predloga jeste bolji odabir načina za predikciju budućih stanja sveta i bolji odabir perioda za realokaciju kapitala.

Na kraju, treba naglasiti i da se potencijalno bolji model može dobiti drugačijim odabirom funkcije korisnosti. Dakle, ovo se može posmatrati kao početak nekog obimnijeg istraživanja ili kao ideja za novi model.

Literatura

[1] Bodie Z., Kane A., Marcus A., Essentials of Investments. 6. izd. Njujork: McGraw-Hill Higher Education, 2005;

[2] Cappé O., Inference in Hidden Markov Models, Njujork: Springer, 2007;

[3] Elliot R. J, Aggoun L., Moore J. B., Hidden Markov models: estimation and control, Springer, 1995;

[4] Kaufman J. P., Trading Systems and Methods. 5. izd. Nju Džersi: Wiley-Blackwell , 2013;

[5] Peek J, Rosengren ES. The stock market and economic activity. N Engl Econ Rev. Maj 1988; 39-50.

[6] Messina E., Toscani D., Hidden Markov models for scenario generation, IMA Journal of Management Mathematics 19, 2008, 397-401 ;

[7] Tsay, R. S. , Analysis of Financial Time Series. 2. izd. Njujork: A John Wiley and Sons, Inc., 2005;

[8] Vecer, Jan, Maximum Drawdown and Directional Trading, Columbia University, Department of Statistics, New York, USA, 2006;

[9] Baum, L. E., Perrie T., Statistical inference for probabilistic functions of finite state Markov chains, Ann. Math. Stat., 1966;

[10] Karatzas, Ioannis; Shreve, Steven E., Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer, 1997;

[11] Tsay RS. Analysis of Financial Time Series. 2^{th}ed. New Jersey: A John Wiley and Sons; 2005;

[12] Young, Terry W., Calmar Ratio: A Smoother Tool, Futures magazine, page 40, 1991;

[13] Sharpe, William F., Mutual Fund Performance, The Journal of Business, Vol. 39, No. 1, Part 2: Supplement on Security Prices, pages 119-138., 1966;

[14] MacKinnon JG, White H. Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties. J Econometrics. 1985, 305-325;

[15] Eling, Martin, Does the Measure Matter in the Mutual Fund Industry?, Financial Analysis Journal, Vol. 64, No. 3, 2008;

[16] Sims CA. Macroeconomics and reality. Econometrica. Januar 1980, 1-48;

[17] Elliott R., Van der Hoek J., An application of hidden Markov models to asset allocation problems, Finance and Stochastics, vol. 1, 1997;

[18] Markowitz, Harry, Portfolio Selection, The Journal of Finance, Vol. 7, No. 1, pages 77-91, 1952;

[19] Nocedal, Jorge; Wright, Stephen J., Numerical Optimization, Springer, 1999;

[20] Luenberger D. G.,Ye Yinyu, Linear and Nonlinear Programming, 3. izd., Springer, 2008;

[21] Mas-Colell A., Whinston M. D., Green J. R., Microeconomic Theory, Oxford University Press, 1995;

[22] Zhang Y., Prediction of financial time series with Hidden Markov Models, M.Sc Thesis, Simon Fraser University, China, 2004;

[23] Maddala GS. Introduction to Econometrics. 2^{th}ed. New York: Macmillan Publishing Company; 1992;

[24] Rajter-Ćirić, Danijela, Verovatnoća, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematicčki fakultet u Novom Sadu, 2009;

[25] Lozanov-Crvenković, Zagorka, Statistika, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu.

Kratka biografija

Jelena Rodić je rođena 27. novembra 1992. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Prva vojvođanska bringada" završila je u Novom Sadu 2007. godine i dobitnik je "Vukove diplome". Gimnaziju "Svetozar Marković", opšti smer, završila je u Novom Sadu 2011. godine. Sve četiri godine bila je odličan učenik. Nakon toga, upisala je Prirodno-matematički fakultet, smer Primenjena matematika, modul Matematika finansija, gde je 2014. godine završila osnovne studije. Iste godine upisala je i master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija, zaključno sa junskim rokom 2016. godine i ostvarila je prosečnu ocenu 9,33. Tokom školovanja, aktivno se bavila volonterskim radom u oblasti ekologije, a od početka novembra je zaposlena IT Consulting kući "Synechron", gde radi na integraciji i održavanju softvera čiji su deo upravo modeli algoritamskog ulaganja za investicione banke.

Novi Sad, decembar 2016. Jelena Rodić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *master rad*
VR

Autor: *Jelena Rodić*
AU

Mentor: *prof. dr Nataša Krejić*
MN

Naslov rada: *Optimizacija portfolija algoritamskih strategija trgovanja*
NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *s/e*
JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2016.*
GO

Izdavač: *autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada: *5 poglavlja, 45 strana, 14 lit. citata, 1 tabela, 4 grafika*

FO

Naučna oblast: *matematika*

NO

Naučna disciplina: *primenjena matematika*

ND

Ključne reči: *portfolio, algoritamsko trgovanje, stanja sveta, funckija korisnosti, Markowitz, optimizacija*

PO

UDK

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: *Cilj rada je analiza ponašanja stategija algoritamskog trgovanja i prezentovanje modela za optimizaciju portfolija algoritamskih strategija trgovanja. Kao osnova ovog istraživanja, korišćeni su rezultati i modeli za generaciju scenarija pomoću skrivenih lanaca Markova iz drugih radova, a zatim na novodobijenim podacima je građen poseban model zasnovan na maksimizaciji očekivane funkcije korisnosti. Konstrukcija i testiranje modela su rađeni na realnim podacima dobijenim iz jednog investicionog fonda, a zatim je izvršeno poređenje rezultata sa rezultatima često korišćenih modela za optimizaciju portfolija.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *27. septembar 2016.*

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: *dr Danijela Rajter-Ćirić, redovni profesor*
Član: *dr Nataša Krejić, redovni profesor*
Član: *dr Nataša Krklec Jerinkić, docent*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: *monograph type*
DT

Type of record: *printed text*
TR

Contents code: *Master thesis*
CC

Author: *Jelena Rodić*
AU

Mentor: *Prof. Nataša Krejić, PhD*
MN

Title: *Optimal portfolio of BB trading strategies*
XI

Language of text: *Serbian (latin)*
LT

Language of abstract: *s/e*
LA

Country of publication: *Republic of Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodina*
LP

Publication year: *2016.*
PY

Publisher: *author's reprint*
PU

Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP

Physical description: *5 sections, 45 pages, 14 references, 1 table, 4 graphs*

PD

Scientific field: *mathematics*

SF

Scientific discipline: *applied mathematics*

SD

Key words: *portfolio, algorithmic trading, scenarios, utility function, Markowitz, optimization*

UC

Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*

HD

Note:

N

Abstract: *The purpose of this work is to analyze the behavior of algorithmic trading strategies and presentation of the models for the portfolio optimization based on algorithmic strategies. The models for scenario generation, based on hidden Markov chains, were used as a basis of research. The obtained results were used for creating a special model based on maximizing the expected utility function. Construction and testing of the model were conducted on real data obtained from an investment fund. Moreover, the results were compared with that of more often used models for the portfolio optimization.*

AB

Accepted by the Scientific Board on: *27 September 2016*

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: *Prof. Danijela Rajter-Ćirić, PhD*
Member: *Prof. Nataša Krejić, PhD*
Member: *Assist. Prof. Nataša Krklec Jerinkić, PhD*