UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU
I INFORMATIKU

Katarina Vla

OPTIMIZACIJA KREDITNOG PORTFOLIA PRIMENOM CVaR MODELA

- završni rad -

Novi Sad, 2007.

1 Uvod

1.1 Motivacija

Rizik obično povezujemo sa odlukama koje treba da donesemo, a da pri tome ne znamo kakve će biti posledice tih odluka u budućnosti. Ono što znamo jeste da neke od posledica mogu biti nepovoljne ili nepoželjne za nas. Nesigurnost u pogledu toga šta će se tačno desiti predstavlja izvor rizika. Zbog toga nastojimo da predvidimo moguće ishode, onoliko koliko to možemo i da odlučimo tako da se zaštitimo od loših posledica. U savremenom načinu poslovanja postoji velika potreba za upravljanjem rizikom. Kreditni rizik je samo jedan od mnogih koji se javljaju u finansijskom poslovanju. Iz tog razloga, a posebno posle velikih finansijskih kriza, javila se potreba standardizacije bankarskog poslovanja. Jedan vid takve standardizacije ostvaren je osnivanjem Komiteta za superviziju banaka u Bazelu. Komitet donosi preporuke u cilju upravljanja rizicima sa kojima se suočavaju banke. Prema Bazel regulativi, kreditni rizik portfolia banke čini suma rizika pojedinačnih investicija koje sačinjavaju portfolio. Ovakav metod merenja rizika zanemaruje mogućnost diversifikacije, pa su krajem 1990-tih nastali novi matematički modeli kreditnog rizika koji vode računa o efektu diversifikacije.

Pored slične matematičke strukture, ono što je zajedničko za ove modele jeste da ne postoji univerzalan, najbolji model. Takođe, zbog izdužene raspodele kreditnih gubitaka, u većini modela se za meru rizika uzima VaR (*Value at Risk*). VaR odgovara na pitanje koliki je maksimalni gubitak na određenom nivou poverenja β. Međutim, na osnovu vrednosti VaR-a nemamo nikakve informacije o mogućim gubicima većim od VaR-a. CVaR (*Conditional Value at Risk*) kao mera rizika predstavlja produženje VaR modela. CVaR je (uslovna) očekivana vrednost $(1-\beta)\cdot 100\%$ najvećih gubitaka. Pored toga što CVaR ima neke osobine koje mu daju prednost nad VaR-om, ova mera rizika je i koherentna. Koherentna mera rizika ima određene osobine karakteristične za finansijske modele, a ovakav način merenja rizika olakšava optimizaciju zbog toga što ostaju očuvane "lepe"osobine kao što su konveksnost, neosetljivost na skaliranje, i sl.

U ovom radu predstavljen je CVaR model za optimizaciju kreditnog portfolia. U prvom delu dat je pregled osnovnih teorema, definicija i oznaka korišćenih u radu. U drugom delu predstavljena je osnovna interpretacija kreditnog rizika i dat je kraći pregled kreditnih modela. U trećem poglavlju uveden je pojam koherentne mere rizika, CVaR-a i pokazane su neke njegove osobine, dok je u četvrtom delu predstavljen OVO model. Na kraju, dat je ilustrativan primer i izvedeni neki osnovni zaključi.

1.2 Pregled teorema, definicija i oznaka

Posmatrajmo problem optimizacije od n determinističkih promenljivih

$$\begin{aligned} &min\ f_0(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad &f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{1}$$

gde je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid f_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m\}$ i $f_0(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f_i(\mathbf{x}) : S \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$. Ako želimo da uvedemo slučajnost u ovaj model, dati problem moramo transformisati. Uvodimo slučajnu promenljivu, $\omega \in \Omega$, gde skup Ω predstavlja skup svih mogućih ishoda. Funkcija $f_i(\mathbf{x})$ sada postaje $f_i(\mathbf{x}, \omega)$, $i = 0, \ldots, m$. Na ovaj način, za svako $\mathbf{x} \in S$ ne dobijamo vrednosti $f_i(\mathbf{x})$ već funkcije na Ω

$$\underline{f_i}(\mathbf{x}) : \omega \mapsto f_i(\mathbf{x}, \omega) \quad i = 0, 1, \ldots, m \tag{2}$$

Postavlja se pitanje koja je interpretacija funkcije cilja u ovom slučaju, kako modifikovati ograničenja i kako uzeti u obzir rizik? Navedimo prvo neke osnovne definicije i oznake.

Oznake

- Za skup A, sa $\mathcal{P}(A)$ označavaćemo partitativni skup skupa A, a sa A^C komplement skupa A.
- $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ i $\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$.
- Sa $[x]^+$ označavaćemo $\max\{0, x\}$.

Definicija 1.1 ($\sigma-$polje) *Neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, gde Ω predstavlja skup svih mogućih ishoda. Ako važi*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^C \in \mathcal{F}$,

iii) $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$, *onda $\mathcal{F}$ zovemo $\sigma-$polje ($\sigma-$algebra) nad Ω.*

Definicija 1.2 (Borelovo $\sigma-$polje) *Najmanje $\sigma-$polje koje sadrži sve otvorene podskupove od $\mathbb{R}^n$ zove se Borelovo $\sigma-$polje nad $\mathbb{R}^n$ i označava sa $\mathcal{B}^n$.*

Definicija 1.3 (Verovatnoća) *Neka je $\mathcal{F}$ $\sigma-$polje nad Ω. Preslikavanje $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ za koje važi*

i) $P(\Omega) = 1$,

ii) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} P(A_n)$, *gde* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}$ *i* $A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j$,

zove se verovatnoća na $\mathcal{F}$. Trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zovemo prostor verovatnoća.

Definicija 1.4 (Slučajna promenljiva) *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća. Preslikavanje $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ za koje važi*

$$\mathbf{X}^{-1}(\mathbf{B}) \in \mathcal{F}, \qquad \text{za svako} \quad \mathbf{B} \in \mathcal{B}^n,$$

zove se slučajna promenljiva. Ekvivalentno, $\mathbf{X}$ je $\mathcal{F}-$merljivo.

Prema prethodnoj definiciji, funkcije $\underline{f_i}(\mathbf{x})$ predstavljaju slučajne promenljive.

Definicija 1.5 *Funkcija raspodele slučajne promenljive $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ je $\mathbf{F_X}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ definisana sa $\mathbf{F_X}(\mathbf{x}) = P(\{X_1 < x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n < x_n\})$.*

Definicija 1.6

- *Slučajna promenljiva $\mathbf{X}$ je diskretnog tipa ako postoji prebrojiv skup u $\mathbb{R}^n$, $R_{\mathbf{X}}$, takav da je $P(\{\mathbf{X} \in R_{\mathbf{X}}^C\}) = 0$.*
- *Slučajna promenljiva $\mathbf{X}$ je apsolutno neprekidnog tipa ako postoji integrabilna funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \geq 0$ takva da je za svaki Borelov skup $\mathbf{B} \in \mathcal{B}^n$ $P(\{\mathbf{X} \in \mathbf{B}\}) = \int_{\mathbf{B}} \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Funkcija $\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ se naziva gustina slučajne promenljive $\mathbf{X}$.*

Definicija 1.7 *Matematičko očekivanje slučajne promenljive X, $E[X]$, koje još označavamo i $\mu(X)$, definišemo kao*

- *$E[X] := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$, gde je $p(x_i) = P(\{X = i\})$, ukoliko je X diskretna slučajna promenljiva,*

- $E[X] := \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})dx$, *ukoliko je* X *apsolutno neprekidna slučajna promenljiva.*

Matematičko očekovanje za slučajnu promenljivu X *postoji ukoliko dati red/integral apsolutno konvergira.*

Definicija 1.8

- *Momenat reda* n, $n = 1, 2, \ldots$, *slučajne promenljive* X *je* $E[X^n]$.
- *Centralni momenat reda* n, $n = 1, 2, \ldots$, *slučajne promenljive* X *je* $E[(X - E[X])^n]$.

Definicija 1.9 *Centralni momenat reda 2 slučajne promenljive* X *zove se varijansa ili disperzija slučajne promenljive* X *i označava sa* $var(X)$.

Može se pokazati da je $var(X) = E[X^2] - (E[X])^2$. Kvadratni koren varijanse slučajne promenljive X naziva se standardna devijacija slučajne promenljive X i označava sa $\sigma(X)$. Slučajne promenljive za koje postoji konačno $E[X^2]$ pripadaju prostoru linearnih funkcija $\mathcal{L}^2$. Norma na $\mathcal{L}^2$ data je sa

$$\|X\|_2 = (E[X^2])^{\frac{1}{2}} = (\mu^2(X) + \sigma^2(X))^{\frac{1}{2}}$$

Definicija 1.10 *Niz slučajnih promenljivih* X^k *konvergira ka slučajnoj promenljivoj* X *u odnosu na gore definisanu normu ako* $\|X^k - X\|_2 \to 0$ *kada* $k \to \infty$, *ili ekvivalentno, ako i* $\mu(X^k - X) \to 0$ *i* $\sigma(X^k - X) \to 0$ *kada* $k \to \infty$.

Označićemo sa C konstantu iz $\mathbb{R}$ ili slučajnu promenljivu $X \equiv C$ iz $\mathcal{L}^2$. Kada kažemo da je $X \leq Y$, to u stvari znači da je $X(\omega) \leq Y(\omega)$ sa verovatnoćom 1. Preformulišimo sada problem (1) u ekvivalentni

$$\begin{aligned} &\min_{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})} x_{n+1} \\ &s.t. \quad f_0(\mathbf{x}) - x_{n+1} \leq 0 \\ &f_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{3}$$

gde $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in S \times \mathbb{R}$. Jedan od načina da uzmemo u obzir rizik jeste da rešavamo sledeći problem:

$$\min_{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})} x_{n+1}$$

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & P\{\underline{f_0}(\mathbf{x}) \leq x_{n+1}\} \geq \alpha_0 \\
& P\{\underline{f_i}(\mathbf{x}) \leq 0\} \geq \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m
\end{aligned} \tag{4}
$$

gde $\alpha_i \in [0,1]$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Definicija 1.11 *Neka je $\alpha \in (0,1)$ i X slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Definišemo $\inf \emptyset = \infty$. Tada vrednost*

$$q_\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, P\{X \leq x\} \geq \alpha\}$$

zovemo $\alpha-$kvantil za X.

Definicija 1.12 *Funkcija $f : X \to Y$ je sublinearna ako važi*

1. $f(x+y) \leq f(x) + f(y), \quad \text{za } x, y \in X,$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \text{za } x \in X,\ \lambda > 0.$

Definicija 1.13 *Prodajna/kupovna (put/call) opcija je hartija od vrednosti koja svom imaocu daje pravo ali ne i obavezu da proda/kupi određenu hartiju od vrednosti na koju se opcija odnosi (podlogu opcije) po dogovorenoj ceni (strajk ceni) na datum doseća ili do datuma dospeća opcije.*

Ulaganje negativnog kapitala nazivamo kratkim operacijama.

2 Kreditni rizik

Kredit predstavlja vrstu dužničko - poverilačkog odnosa u kome davalac kredita (poverilac) pozajmljuje određenu svotu novca (iznos kredita) korisniku kredita (dužniku) koji ima obavezu da kredit vrati u dogovorenom roku uz dogovorenu kamatu. Kamata predstavlja cenu kredita. Kreditom se može smatrati svaka vrsta odloženog plaćanja.

Kreditni rizik se može definisati kao rizik od finansijskog gubitka usled nemogućnosti jedne ugovorne strane da ispuni svoje obaveze. Postoje dva osnovna faktora rizika:

1. ***Rizik neispunjenja obaveze - rizik neplaćanaja*** predstavlja verovatnoću da dužnik neće ispuniti svoju obavezu (*default probability*) pomnoženu sa stopom gubitka (*loss given default*)

2. ***Tržišni rizik*** predstavlja tržišnu vrednost obaveze, to jest vrednost kredita (*credit exposure*), iznos pod rizikom nastao usled nepovoljnih kretanja tržišta.

Primer 1 *Pretpostavimo da smo kupili obveznice kompanije **X** u vrednosti od \$1.000.000 koje dospevaju za godinu dana. Neka je verovatnoća da kompanija **X** neće izvršiti svoju obavezu na datum dospeća* 5%. *Najčeš¸e stopa pokrića (*recovery rate) *za obveznice iznosi* 45%, *to jest stopa gubitka* (loss given default) *je* 55%. *Kreditni rizik ove investicije je*

$$C_r = \$1000000 * 0.05 * 0.55 = \$27500$$

2.1 Verovatnoće neplaćanja i stopa gubitka

Jedna od najosetljivijih stvari u modeliranju kreditnog rizika jeste procena verovatnoća neplaćanja . Postoji više modela, ali se najčešće koriste aktuarski modeli ili modeli tržišnih cena. U aktuarskim modelima procena verovatnoća se vrši na osnovu istorijskih podataka o nesolventnosti. Agencije za kreditni rejting rangiraju emitente (kompanije) prema tim procenjenim verovatnoćama. Jedan primer kreditnog rejtinga formiran od agencije *Standard and Poors* dat je u *Tabeli 1.*

	Godina				
Rejting	1	2	3	4	5
AAA	0.00	0.00	0.05	0.11	0.17
AA	0.00	0.02	0.07	0.15	0.27
A	0.04	0.12	0.21	0.36	0.56
BBB	0.24	0.54	0.85	1.52	2.19
BB	1.01	3.40	6.32	9.38	12.38
B	5.45	12.36	19.03	24.28	28.38
CCC	23.39	33.52	41.13	47.43	54.25

Tabela 1: S&P kumulativne verovatnoće neplaćanja (%)

Tabela 1 prikazuje kumulativne verovatnoće neplaćanja. Označimo ih sa p_n. Ova verovatnoća predstavlja verovatnoću da je došlo do neplaćanja bilo kad od danas do godine n. Odavde možemo izračunati marginalne ili godišnje bankrot verovatnoće, g_i, to jest verovatnoće da dođe do neplaćanja tačno u godini i. Naime, da bi kompanija "doživela" godinu n (da bi poslovala do godine n, da ne bi bankrotirala), mora da opstane do godine $n-1$ i da bude solventna u godini n. To možemo zapisati kao:

$$1 - p_n = (1 - p_{n-1})(1 - g_n) = \prod_{i=1}^{n}(1 - g_i)$$

i rešiti rekurzivno po g_i. Odavde takođe možemo izračunati i verovatnoću da dođe do nepla'canja tačno u godini i, počevši od danas:

$$d_i = (1 - p_{i-1})g_i$$

Druga komponenta *rizika neplaćanja* je stopa pokrića, r. Ona se takođe može odrediti iz istorijskih podataka a zavisi od toga da li je kredit osiguran ili ne, od statusa kreditora u slučaju nesolventnosti, i slično. Prioritet u naplati dugova u slučaju nesolventnosti kompanije (emitenta) dat je, najčešće, na sledeći način:

1. država (porezi)	4. obveznice
2. zaposleni	5. prioritetne akcije
3. bankarski i drugi dugovi	6. obične akcije

Iz stečajne mase kompanije isplaćuju se dugovi poveriocima po navedenom prioritetu. Stopa pokrića predstavlja deo duga koji se prosečno naplati. Tipična stopa pokrića u SAD za osigurane bankarske zajmove je 70%, za obveznice je 50%, dok je za akcije svega 10%. U nekim modelima kreditnog rizika ova stopa pokrića se posmatra kao konstanta, dok se u drugim modelima posmatra kao slučajna promenljiva ali nezavisna od verovatnoće neplaćanja. Međutim, skorija iskustva pokazala su da stope pokrića dugova mogu biti veoma promenljive i da opadaju sa povećanjem broja nesolventnih kompanija tokom ekonomskih kriza. Zato je pravilna ocena ovih stopa još jedno osetljivo mesto u modeliranju kreditnog rizika.

Drugi pristup oceni *rizika neplaćanja* jeste model tržisnih cena. U ovom modelu rizik se procenjuje na osnovu prinosa do dospeća obveznice emitenta. U momentu dospeća obveznica može biti u dva stanja: došlo je do *neplaćanja* ili nije došlo do *neplaćanja*. Označimo nominalnu vrednost obveznce sa F i posmatrajmo obveznicu bez kupona. Ako je došlo do neplaćanja, vrednost obveznice je $r * F$, a F inače. Ako u cenu obveznice nije uključena i premija za rizik, trenutna cena obveznice P treba da bude matematičko očekivanje diskontovanih vrednosti obveznice u oba stanja. Neka su λ i λ^* prinosi rizične i nerizične obveznice, neka je dalje verovatnoća da se desi neplaćanje do datuma dospeća p, a stopa pokrića r. Tada je

$$P = \frac{F}{1+\lambda} = \frac{F}{1+\lambda^*} * (1-p) + \frac{r * F}{1+\lambda^*} * p$$

Diskontovali smo sa stopom bez rizika λ^* jer smo pretpostavili da nema premije na rizik. Sređujući gornji izraz dobijamo

$$1+\lambda^* = (1+\lambda)[1-p(1-r)]$$

to jest

$$\lambda \approx \lambda^* + p(1-r)$$

Koristeći podatke o prinosima, iz razlike $\lambda - \lambda^*$ (koja se još naziva i kredit spred (*credit spread*)) možemo dobiti faktor *rizika neplaćanja*. Ukoliko investirori zahtevaju i dodatnu kompenzaciju za preuzimanje kreditnog rizika, kredit spred će uključiti i premiju za rizik. Ovaj metod ocene *rizika nepla'canja* je koristan samo ako je emitent izdao obveznice kojima se javno trguje i za koje postoji odgovarajuća tržišna vrednost.

Alternativni pristup jeste da se rizik neplaćanja modelira na osnovu cene akcija zbog toga što se akcijama aktivnije trguje nego korporacijskim obveznicama. Jedan takav model razvio je Merton (1974). U njegovom modelu proces nesolventnosti kompanije je određen vrednošću aktive kompanije i rizik od neplaćanja je eksplicitno povezan sa promenom vrednosti aktive. Naime, do nesolventnosti kompanije dolazi kad je vrednost aktive kompanije A (to jest tržišna vrednost kompanije) manja od njenih obaveza L. Isplata poveriocima na datum dospeća duga je tada $min(A, L)$. Pretpostavimo da su obaveze (dug) kompanije predstavljene obveznicom bez kupona. Ako je tržišna vrednost kompanije na datum dospeća veća od nominalne vrednosti obveznice, tada imaoci obveznice dobijaju njenu nominalnu vrednost. Međutim, u slučaju da je vrednost kompanije manja od nominalne vrednosti obveznice, vlasnici akcija ne dobijaju ništa, a imaoci obveznice dobijaju tržišnu vrednost kompanije. Isplata na datum dospeća imaocima obveznice je tada nominalna vrednost obveznice minus prodajna opcija na tržišnu vrednost kompanije sa strajk cenom i datumom dospeća jednakim nominalnoj vrednosti i datumu dospeća obveznice. Zbog toga trenutna cena akcije odražava predviđenu verovatnoću da dođe do neplaćanja.

2.2 Iznos pod rizikom

Iznos pod rizikom (*credit exposure*) se može definisati kao vrednost aktive kompanije (dužnika) na datum dospeća, ukoliko je ta vrednost pozitivna. Zapravo, to je tržišna vrednost kompanije. *Očekivani iznos pod rizikom* predstavlja očekivanu vrednost aktive A, ukoliko je pozitivna, na datum dospeća (duga):

$$E[A] = \int_{-\infty}^{+\infty} max(A, 0)\varphi(A)dA$$

gde je $\varphi(A)$ funkcija gustine za A.

Najveći iznos pod rizikom predstavlja najveću (najgoru) vrednost izloženu riziku na određenom nivou poverenja β. Drugim rečima, to je vrednost α za koju važi:

$$1 - \beta = \int_{\alpha}^{\infty} \varphi(A)dA.$$

Ako posmatramo obveznice ili klasične zajmove, pretpostavljamo da su promene u tržišnoj vrednosti male u odnosu na nominalnu vrednost (glavnicu), pa je očekivani iznos pod rizikom jednak glavnici

$$E[A] = F.$$

Ovo takođe važi za potraživanja, trgovinske kredite i kreditna pisma. Ako posmatramo opcije, na datum dospeća (ili do datuma dospeća) opcija se može i ne mora izvršiti, pa je tako vrednost ugovora ili nula ili je jednaka vrednosti obaveze. U slučaju kratke pozicije na opcijama, za koju je premija već plaćena, nema izloženosti riziku druge ugovorne strane, pa je

$$E[A] = 0.$$

U slučaju duge pozicije na opcijama, iznos pod rizikom jednak je vrednosti opcije.

Generalno, u modeliranju izloženosti kreditnom riziku treba da se vodi računa o načinima za modifikovanje iznosa pod rizikom tako da se taj iznos smanji u odnosu na određenu ugovornu stranu (na primer određenu kompaniju). Jedan od načina bi mogao biti plaćanje preko kupona (*recouponing*), gde se kuponskim plaćanjem vrednost ugovora svodi na nulu. Takođe, definisanjem gornjeg limita iznosa pod rizikom (*exposure limit*) koji kada se dostigne zahteva dodatno plaćanje od dužnika, postiže se smanjenje izloženosti kreditnom riziku. Isto važi i za dodatna obezbeđenja kredita (*collateral*). Konačno, izloženost kreditnom riziku se može redukovati i dnevnim poravnanjem prema tržištu (*daily marking - to - market*). U tom slučaju iznos pod rizikom je pod uticajem dnevne volatilnosti, što sa druge strane, stvara nove izvore rizika, kao što su rizik likvidnosti ili operacioni rizik, jer se novčani tokovi moraju usklađivati dnevno.

2.2.1 Poravnaje dugova (*netting arrangements*)

Još jedan od metoda kontrole izloženosti kteditnom riziku, to jest iznosa pod rizikom, jeste poravnanje dugova. Cilj poravnanja jeste izjednačavanje transakcija između dve ugovorne strane, to jest prebijanje novčanih tokova za sve ugovore koji su pokriveni sporazumom o poravnanju. Poravnanje smanjuje kreditni rizik tako što smanjuje iznos pod rizikom. Sporazum o poravnanju čini N ugovora vrednosti $V_i,\ i = 1 \ldots N$, između dve strane. U slučaju nesolventnosti, jedna ugovorna strana ne može prekinuti plaćanja, to jest obaveze za ugovore sa negativnom vrednošću, dokle god poseduje potraživanja, to jest obaveze (prava) za ugovore s pozitivnom vrednošću. Na osnovu ovih sporazuma o poravnanju može se zaključiti da je neto gubitak, NG, u slučaju nesolventnosti jednak pozitivnoj sumi vrednosti svih ugovora u sporazumu:

$$\mathrm{NG} = max(V, 0) = max(\sum_{i=1}^{N} V_i, 0).$$

U slučaju da ne postoji poravnanje dugova, potencijalni gubitak, G, bi bio jedank sumi pozitivnih vrednosti ugovora:

$$\mathrm{G} = \sum_{i=1}^{N} max(V_i, 0).$$

Potencijalni gubitak bez sporazuma o poravnanju je uvek veći od potencijalnog gubitka u slučaju da poravnanje postoji, osim kada su sve isplate savršeno korelisane. Korist od poravnaja dugova zavisi od broja ugovora u sporazumu N i od korelacije vrednosti ugovora. Što je veće N i što je manja korelacija, korist je veća. Da bismo pokazali efekte poravnanja, definisaćemo sledeće pojmove:

- *Bruto gubitak (gross replacment value)* GRV, predstavlja sumu gubitaka G_j prema svim dužnicima K

$$\text{GRV} = \sum_{j=1}^{K} G_j = \sum_{j=1}^{K} \left[\sum_{i=1}^{N_j} max(V_i, 0) \right]$$

- *Neto gubitak (net replacment value)* NRV, predstavlja ukupni gubitak prema svim dužnicima K u slučaju da postoji poravnanje. Ukoliko postoji i dodatno osiguranje duga C_l (*collateral*), tada je

$$\text{NRV} = \sum_{j=1}^{K} NG_j = \sum_{j=1}^{K} \left[max \left(\sum_{i=1}^{N_j} V_i, 0 \right) - C_{l_j} \right]$$

Zbog toga što ukupni iznos pod rizikom jednog portfolia može biti veoma velik i ne reprezentuje stvarni kreditni rizik, *neto gubitak* je prikladnija mera izloženosti kreditnom riziku. Recimo, za Bank America, vrednost portfolia iznosi $\$4,285$ biliona, što je veoma veliko u poređenju sa kapitalom banke od $\$57.1$ bilion. Međutim GRV banke je $\$16.5$ biliona, dok je NRV još manja - $\$15.2$ biliona, to jest svega 0.4% ukupne vrednosti portfolia. U proseku NRV iznosi oko 0.5% ukupne vrednosti portfolia. Iako se ova mera rizika odnosi na "najgore" slučajeve (slučaj da svi dužnici postanu nesolventni), ona ipak ne obuhvata kreditni rizik u potpunosti jer ignoriše verovatnoću neplaćanja, potencijalnu buduću izloženost riziku, kao i efekte diversifikacije. U sledećem odeljku biće predstavljeno kako se kombinuju tržišni i rizik neplaćanja.

2.3 Merenje i upravljanje kreditnim rizikom

Da bismo odredili očekivani i neočekivani kreditni gubitak, potrebno je kombinovati tržišni i rizik neplaćanja i podeliti vremenski period za koji se određuje kreditni rizik na vremenske intervale. Obično se uzima interval od 1 godine.

Očekivani kreditni gubitak, OKG, u bilo kom vremenskom trenutku t jednak je

$$\text{OKG}_t = E[A_t] \times d_t \times (1 - r)$$

gde su $E[A_t]$ očekivani iznos pod rizikom u godini t, d_t verovatnoća neplaćanja u godini t, a r stopa pokrića definisani kao i ranije. Ovaj očekivani kreditni gubitak služi kao osnova za izračunavanje cene kredita.

Neočekivani kreditni gubitak, NKG, u bilo kom vremenskom trenutku t jednak je

$$\text{NKG}_t = \alpha_t \times d_t \times (1 - r)$$

gde je α_t najveći iznos pod rizikom u godini t. U stvari, neočekivani kreditni gubitak predstavlja maksimalni gubitak u slučaju neplaćanja na određenom nivou poverenja. Ovaj podatak se može iskoristiti da bi se odredila količina kapitala koju treba rezervisati da bi se pokrio dati neočekivani gubitak. Ako imamo portfolio kredita, raspodelu gubitaka usled kreditnog rizika dobijamo na osnovu formule

$$\Pi = \sum_{i=1}^{N} A_i \times (1 - r_i) \times x_i$$

gde je x_i slučajna promenljiva koja uzima vrednosti 0 ako nije došlo do *neplaćanja*, a 1 inače, sa verovatnoćom p_i. Koristeći datu formulu možemo izračunati očekivani i neočekivani kreditni gubitak za ceo portfolio.

Primer 2 *Neka se portfolio sastoji od tri zajma kompanijama X, Y i Z u iznosu od \$60, \$15 i \$25 miliona, sa verovatnoćama neplaćanja 0.0024, 0.2369 i 0.0101 (dobijenih na osnovu kreditnog rejting kompanija) respektivno. Pretpostavimo da je stopa pokrića $r_i = 0,\ i = 1, 2, 3$ i da do nesolventnosti kompanija dolazi nezavisno jedne od drugih. Odredimo* očekivani *i* neočekivani (najgori) kreditni gubitak *portfolia. Kako smo pretpostavili da su kompanije nesolventne nezavisno, imamo ukupno $2^3 = 8$ mogućnosti, pa raspodela mogućih gubitaka za portfolio izgleda*

nesolventnost	*gubitak*(*mil*\$)	*verovatnoća*
-	0	0.753579748
X	60	0.001812942
Y	15	0.233944492
Z	25	0.007688812
X, Y	75	0.000562818
X, Z	85	0.000018495
Y, Z	40	0.002386948
X, Y, Z	100	0.000005742

Očekivani kreditni gubitak portfolia iznosi \$3.95 miliona, dok je neočekivani gubitak na nivou poverenja od 99% oko \$ 25 miliona.

Pri određivanju raspodele gubitaka portfolia sa više elemenata, uzimajući u obzir iznos kredita koji nije konstantan, stope pokrića, verovatnoće neplaćanja kao i korelaciju između nesolventnosti različitih kompanija, potrebno je koristiti neke simulacione metode (kao što je **Monte Carlo** metoda).

Kao što je već rečeno, informacije dobijene o očekivanom i o najgorem gubitku mogu biti iskorišćene da bi se upravljalo kreditnim rizikom:

- sadašnja vrednost očekivanog kreditnog gubitka predstavlja **kreditnu rezervu**, to jest količinu novca koju treba ostaviti sa strane da bi se pokrio predviđeni gubitak
- razlika sadašnje vrednosti neočekivanog (najgoreg) kreditnog gubitka i kreditne rezerve predstavlja **kapitalnu rezervu**, to jest količinu novca koju treba ostaviti sa strane da bi se pokrio nepredviđeni gubitak
- utvrđivanjem očekivanog prinosa portfolia, za svaki kreditni portfolio se može izvršiti poređenje očekivanog profita i ukupnog rizika u cilju pronalaženja najboljeg odnosa rizik-prinos, to jest pronalaženja optimalnog portfolia.

2.4 Različiti modeli kreditnog rizika

Osnovna prednost modela razvijenog u Bazel regulativi je u njegovoj jednostavnosti. Interni bankarski modeli kreditnog rizika portfolia, iako veoma složeni, daju realnije rezultate. Iako se ovi modeli mogu razlikovati u definiciji kreditnog rizika, izvorima rizika, oceni verovatnoća neplaćanja i stopa pokrića i rešenju, svi imaju veoma sličnu osnovnu matematičku strukturu. Neki od najpoznatijih su CreditMetrics™, CreditRisk$^+$ i CreditPortfolioView™.

2.4.1 Bazel regulativa

Komitet za superviziju banaka u Bazelu (*The Basel Committee on Banking Supervision*) osnovan je 1975. godine od strane zemalja Grupe deset (Belgija, Francuska, Holandija, Italija, Japan, Kanada, Nemačka, SAD, Švajcarska, Švedska, Velika Britanija). Osnivanje ovog Komiteta imalo je za cilj standardizaciju bankarskog poslovanja. *Basel Capital Accord* izdat 1988. godine i *New Basel Capital Accord* izdat 2001 od strane Komiteta, donose preporuke i standarde vezane za merenje i upravljanje rizikom u bankarskom poslovanju. Najvažnija preporuka odnosila se na kreditni rizik (koji zapravo čini najveći deo ukupnog rizika bankarskog poslovanja) kao i na minimum kapitala potrebnog da bi se osiguralo od ovog rizika. Taj minimum kapitala iznosi 8%, to jest odnos ukupnog kapitala banke i iznosa pod rizikom ne sme biti manji od 8%. Iznos pod rizikom kreditnog portfolia čini zbir pojedinačnih iznosa pod rizikom pomnoženih sa specifičnim težinama koje zavise od vrste ugovora (od toga da li su u pitanju državne ili korporacijske obveznice, osigurani ili neosigurani zajmovi, finansijski derivati, i slično). Preko ovih specifičnih težina se indirektno uračunava rizik od *neplaćanja*. Prema Bazel regulativi kreditni rizik se procenjuje na bazi pojedinačnih transakcija (*transaction-by-transaction basis*) i ukupni rizik je suma pojedinačnih rizika. To je ujedno i najveća mana ovog pristupa, jer ignoriše mogućnost diversifikacije.

2.4.2 CreditMetrics™

CreditMetrics™ predstavljen je 1997. godine od strane *J.M.Morgan*-a ([2]). Za definiciju kreditnog rizika u ovom modelu uzima se tržišna vrednost dobra, izvor rizika je promena u vrednosti dobra (i to ne samo zbog mogućnosti neplaćanja već i zbog promena u kreditnom rejtingu), stope pokrića su slučajne promenljive a rešenje može biti analitičko ili simulaciono. Migracije u kreditnom rejtingu i verovatnoće neplaćanja aproksimirane su iz istorijskih podataka za svaku rejting klasu i predstavljene su tzv. migracionom matricom. Formiranje ovih matrica (koje su ulazni parametri modela) predstavlja najveću manu modela jer u velikoj meri zahteva tržišne podatke koji uglavnom nisu dostupni. Takođe, ovaj model je kritikovan i zbog toga što se suviše oslanja na istorijske podatke jer na taj način ne uzima u obzir trenutne makroekonomske uslove, niti pravi razliku između dužnika istog kreditnog rejtinga koji se bave različitim delatnostima.

2.4.3 CreditRisk$^+$

Za razliku od CreditMetrics™-a, ovaj model je zasnovan na aktuarskim metodama. Objavljen je takođe 1997. godine od strane *Credit Suisse Financial Products* ([3]). Rizik u ovom modelu predstavljaju gubici usled neplaćanja i nesolventnost, to jest verovatnoće neplaćanja su jedini izvor rizika, stope pokrića se posmatraju kao konstante a rešenje je analitičko. Međitim, kako konstantne stope pokrića ne odgovaraju realnosti, samo uz ovu modifikaciju više nije moguće pronaći analitičko rešenje. Takođe, ovaj model kao ulazne podatke koristi korelaciju između različitih nesolventnosti. Ta korelacija je aproksimirana iz veze dužnika i različitih privrednih sektora kao i volatilnosti nesolventnosti unutar sektora. Zbog toga svaki sektor predstavlja jedan faktor rizika i podrazumeva se da su sektori međusobno nezavisni (što takođe ne mora da odgovara realnosti).

2.4.4 CreditPortfolioView™

Koncept CreditPortfolioView™-a ([4],[5]) je negde između CreditMetrics™-a i CreditRisk$^+$-a. Njegovi tvorci su *Wilson* i *McKinsey*. Ovaj model je ekonometrijski model. Rizik se definiše kao tržišna vrednost dobra, izvor rizika su makroekonomski faktori, stope pokrića se posmatraju kao slučajne promenljive a rešenje je simulaciono. Zbog složenog ekonometrijskog pristupa, mana i ovog modela jeste potreba za velikom količinom istorijskih podataka. Takođe, identifikovanje relevantnih makro faktora oslanja se na ekonomsku intuiciju korisnika modela.

Ono što je zajedničko za sve modele kreditnog rizika jeste da ne postoji najbolji, univerzalan model, već izbor konkretnog modela zavisi od potreba korisnika, njegovih mogućnosti kao i od raspoloživosti podataka.

3 CVaR model

Kada govorimo o merenju rizika od gubitka, smatramo da slučajna promenljiva $X(\omega)$ predstavlja troškove. Zbog toga što su u klasičnim problemima optimizacije ograničenja tipa ≤ 0, smatraćemo da su pozitivne vrednosti $X(\omega)$ nepoželjne. Takođe, zbog toga što slučajna promenljiva ne predstavlja pojedinačnu vrednost, da bismo rešili problem optimizacije, moramo kvantifikovati rizik. U tom smislu, svakoj slučajnoj promenljivoj iz $\mathcal{L}^2$ pridružujemo vrednost $\mathcal{R}(X)$, gde $\mathcal{R}(X)$ predstavlja meru rizika i može uzeti vrednosti iz intervala $(-\infty, \infty]$. Tada problem optimizacije možemo rešiti tako što slučajne promenljive $\underline{f_i}(\mathbf{x})$ zamenimo funkcijama $\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_i(\underline{f_i}(\mathbf{x}))$, $i = 0, 1, \ldots, m$ i zatim minimizujemo $\tilde{f}_0(\mathbf{x})$ po svim $\mathbf{x} \in S$, uz ograničenja $\tilde{f}_i(\mathbf{x}) \leq 0$, $i = 1, \ldots, m$.

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in S} \quad \tilde{f}_0(\mathbf{x}) \\ &s.t. \quad \tilde{f}_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned} \tag{5}$$

3.1 Koherentna mera rizika

Definicija 3.1 *Operator $\mathcal{R} : \mathcal{L}^2 \to (-\infty, \infty]$ se naziva koherentna mera rizika u širem smislu ako važi*

(R1) $\mathcal{R}(C) = C$, *za svaku konstantu* C,

(R2) $\mathcal{R}((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda)\mathcal{R}(X) + \lambda\mathcal{R}(Y), \quad \lambda \in (0,1)$,

(R3) $\mathcal{R}(X) \leq \mathcal{R}(Y)$ *za* $X \leq Y$,

(R4) $\mathcal{R}(X) \leq 0$ *ako* $\|X^k - X\|_2 \to 0$ *za* $\mathcal{R}(X^k) \leq 0$.

Operator $\mathcal{R}$ se naziva koherentna mera rizika u užem smislu ako važi dodatno

(R5) $\mathcal{R}(\lambda X) = \lambda\mathcal{R}(X)$, *za* $\lambda > 0$.

Kombinujući osobine ($R2$) - konveksnost i ($R5$) - pozitivnu homogenost, dobijamo još jedno svojstvo - subaditivnost, to jest

$$\mathcal{R}(X+Y) \leq \mathcal{R}(X) + \mathcal{R}(Y) \tag{6}$$

Ovo svojstvo ima važnu finansijsku interpretaciju. Naime, ako slučajne promenljive X i Y posmatramo kao gubitke dve različite investicije, tada se, prema svojstvu (6), rizik od gubitka kada se investicije kombinuju smanjuje ili, u krajnjem slučaju, ostaje jednak ukupnom riziku pojedinačnih investicija, to jest postiže se efekat diversifikacije. Isto važi i za osobinu ($R2$): konveksna kombinacija dva portfolia (dve investicije) smanjuje ukupni rizik. Takođe, ako znamo da za neko buduće stanje ω važi $X(\omega) \leq Y(\omega)$ skoro sigurno, tada rizik od gubitka povezan sa X ne bi trebao biti veći od gubitka povezanog sa Y, na osnovu ($R3$). Stavljajući $Y = \sup X$, kada je X ograničena sa gornje strane, kombinujući ($R3$) i ($R1$) dobijamo

$$\mathcal{R}(X) \leq \sup X, \quad \text{za svako } X,$$

a uzimajući $Y = 0$ imamo

$$\mathcal{R}(X) \leq 0, \quad \text{za } X \leq 0.$$

Možemo smatrati da je slučajna promenljiva prihvatljiva (rizik za slučajnu promenljivu je prihvatljiv) kada je $\mathcal{R}(X) \leq 0$. U tom smislu, osobina ($R4$) govori da ako je X aproksimirana slučajnim promenljivama X^k koje su prihvatljive, tada je i X prihvatljiva.

Teorema 3.1 *[8]. Neka su u problemu (5)* $\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_i(\underline{f_i}(\mathbf{x}))$, $i = 0, 1, \ldots, m$, *gde je* $\mathcal{R}_i$ *koherentna mera rizika u širem smislu,* $i = \overline{0}, 1, \ldots, m$.

1) *(očuvanje konveksnosti) Ako je* $\underline{f_i}(\mathbf{x}, \omega)$ *konveksna u odnosu na* $\mathbf{x}$ *za svako* ω, *tada je i funkcija* $\tilde{f}_i(\mathbf{x})$ *takođe konveksna.*

2) *(očuvanje izvesnosti) Ako je* $\tilde{f}_i(\mathbf{x})$ *konstantna slučajna promenljiva za svako* $\mathbf{x}$, *to jest* $\underline{f_i}(\mathbf{x}, \omega) = f_i(\mathbf{x})$, *tada je i* $\tilde{f}_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$.

3) *(neosetljivost na skaliranje) Ako je* $\mathcal{R}_i$ *koherentna mera rizika u užem smislu, tada problem (5) ostaje isti i kada se jedinice u kojima su izražene vrednosti* $\underline{f_i}(\mathbf{x}, \omega)$ *skaliraju ili preimenuju.*

Dokaz:

(1) Kako je $\mathcal{R}_i(\cdot)$ neopadajuća i konveksna funkcija (na osnovu $(R3)$ i $(R2)$), a $\underline{f_i}(\mathbf{x})$ konveksna, tada je i $\tilde{f}_i(\mathbf{x})$ takođe konveksna kao njihova kompozicija.

(2) Neka je $\underline{f_i}(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}) = C$. Tada je $\mathcal{R}_i(\underline{f_i}(\mathbf{x})) = \mathcal{R}_i(C) = C$, na osnovu $(R1)$, to jest i $\tilde{f}_i(\mathbf{x})$ je konstantna.

(3) Sledi direktno na osnovu $(R5)$

$\square$.

Posmatrajmo sada problem (4)

$$\min_{(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})} x_{n+1}$$

$$s.t. \quad P\{\underline{f_0}(\mathbf{x}) \leq x_{n+1}\} \geq \alpha_0$$

$$P\{\underline{f_i}(\mathbf{x}) \leq 0\} \geq \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

Mera rizika u ovom problemu je α_i-ti kvantil raspodele za $\underline{f_i}(\mathbf{x})$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Imamo

$$\mathcal{R}_i(X) = \mathcal{R}_i(\underline{f_i}(\mathbf{x})) = q_{\alpha_i} \quad \alpha_i \in (0,1)$$

Međutim ova mera rizika nije koherentna! Narušena je osobina konveksnosti $(R2)$. Ova osobina se može dobiti iz pozitivne homogenosti i subaditivnosti. Iako $(R5)$ važi za q_{α_i}, subaditivnost je narušena. U merenju rizika važno je imati koherentnu meru, jer je u tom slučaju lakše optimizovati zbog očuvanja "lepih" osobina, što pokazuje Teorema 3.1.

3.2 CVaR kao koherentna mera rizika

Neka je $f(x,y) : S \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija gubitka, gde je $x \in S \subset \mathbb{R}^n$ vektor odluka (portfolio), a $y \in Y \subset \mathbb{R}^m$ vektor budućih stanja slučajne promenljive sa raspodelom $p(y) : Y \to \mathbb{R}$ (koje je nezavisna od vektora x). Tada je i $f(x,y)$ slučajna promenljiva sa svojom raspodelom. Za svako $x \in S$, označimo sa $\Psi(x,\cdot)$ datu funkciju raspodele

$$\Psi(x,\alpha) = P\{y | f(x,y) \leq \alpha\}.$$

Neka je dalje $f(x,y)$ neprekidna u x i merljiva u y i neka je $E[|f(x,y)|] < \infty$ za svako $x \in S$. Označimo sa $\Psi(x,\alpha^-)$ levu granicu $\Psi(x,\cdot)$ u α, odnosno

$$\Psi(x,\alpha^-) = P\{y|f(x,y) < \alpha\}.$$

Ako je razlika

$$\Psi(x,\alpha) - \Psi(x,\alpha^-) = P\{y|f(x,y) = \alpha\}$$

pozitivna, to jest ako $\Psi(x,\cdot)$ ima skok u α, kažemo da postoji atom verovatnoće u α. Označimo sa $\beta \in (0,1)$ nivo poverenja (na primer $\beta = 0.95$).

Definicija 3.2 (VaR) *β-VaR gubitka povezanog sa odlukom x je vrednost*

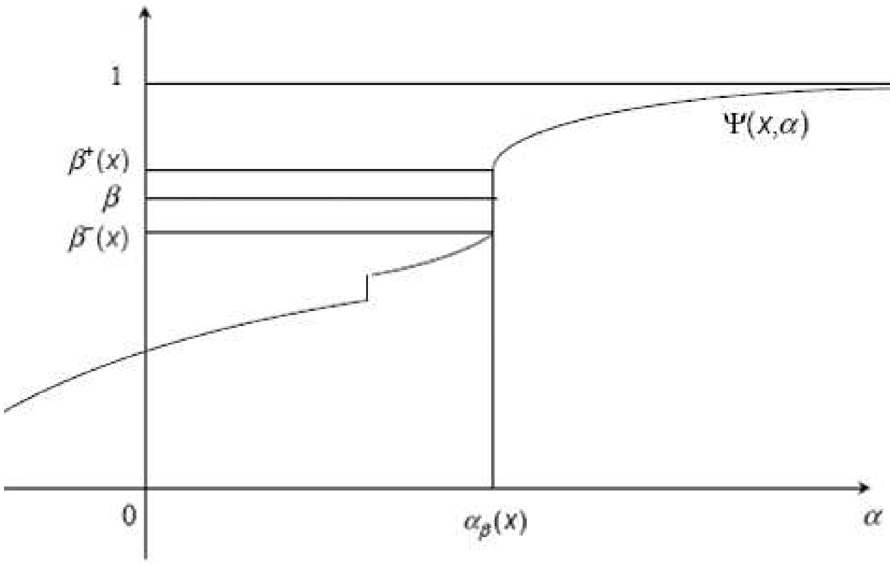
$$\alpha_\beta(x) = min\{\alpha|\Psi(x,\alpha) \geq \beta\}. \tag{7}$$

Minimum u (7) se dostiže zato što je $\Psi(x,\alpha)$ neopadajuća i neprekidna sa desne strane u α. Kada je $\Psi(x,\alpha)$ strogo rastuća, postoji jedinstveno α koje je rešenje problema $\Psi(x,\alpha) = \beta$. Ako to nije slučaj, ova jednačina može imati više rešenja ili biti bez rešenja.
Slika 1 prikazuje slučaj kad jednačina $\Psi(x,\alpha) = \beta$ nema rešenja. β se nalazi u intervalu $[\beta^-(x) = \Psi(x,\alpha_\beta(x)^-),\ \beta^+(x) = \Psi(x,\alpha_\beta(x))]$.

Definicija 3.3 (VaR$^+$) *$\beta -$ VaR$^+$ gubitka povezanog sa odlukom x je vrednost*

$$\alpha_\beta^+(x) = \inf\{\alpha|\Psi(x,\alpha) > \beta\}. \tag{8}$$

Na Slici 2 prikazan je slučaj kada jednačina $\Psi(x,\alpha) = \beta$ ima više rešenja, to jest rešenje je ceo interval. Kako je $\alpha_\beta(x) \leq \alpha_\beta^+(x)$, rešenje leži ili u intervalu $[\alpha_\beta(x),\ \alpha_\beta^+(x))$ ili u $[\alpha_\beta(x),\ \alpha_\beta^+(x)]$, u zavisnosti od toga da li $\Psi(x,\cdot)$ ima skok u $\alpha_\beta^+(x)$ ili ne.
Ova dva slučaja pokazuju da uzimanje β-VaR-a za meru rizika može otežati optimizaciju, posebno u slučaju kad je $p(y)$ diskretna (tada je $\Psi(x,\cdot)$ step funkcija - konstantna između skokova). Takođe, zahtevanje većeg nivoa poverenja β, dovodi do nestabilnosti VaR-a (skok će se skoro sigurno dogoditi). Ovi problemi naveli su na usavršavanje VaR modela i konstruisanje nove mere rizika koja će te probleme prevazići.

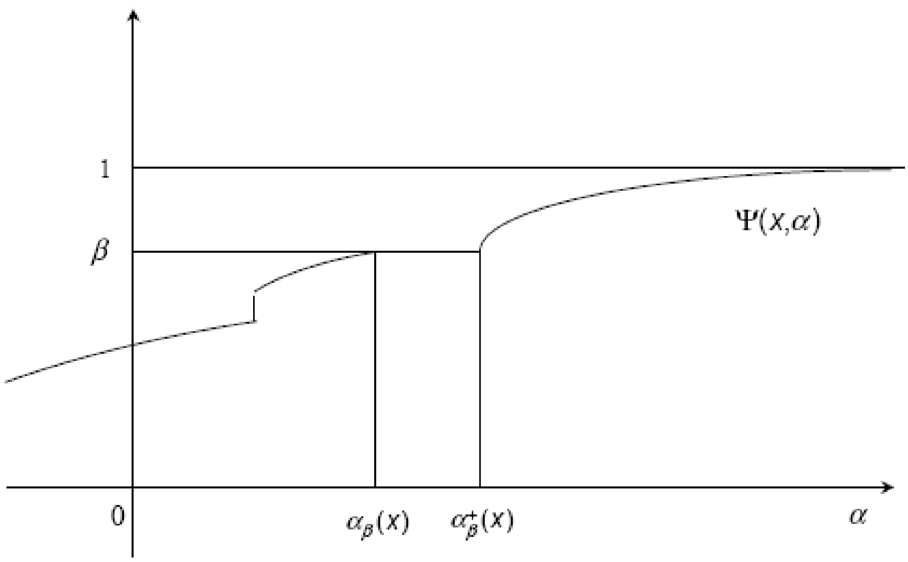


Slika 1: $\Psi(x, \alpha) = \beta$ nema rešenja u α

Definicija 3.4 (CVaR) *β-CVaR gubitka povezanog sa odlukom x je vrednost $\Phi_\beta(x)$, koja predstavlja očekivanje za $f(x, y)$ uz uslovnu raspodelu $\Psi_\beta(x, \cdot)$ (β-rep raspodelu), gde je $\Psi_\beta(x, \cdot)$ dato sa*

$$\Psi_\beta(x, \alpha) = \begin{cases} 0, & za\ \alpha < \alpha_\beta(x) \\ (\Psi(x, \alpha) - \beta)\frac{1}{1-\beta}, & za\ \alpha \geq \alpha_\beta(x) \end{cases} \tag{9}$$

Vrednost $\Phi_\beta(x)$ definisana je preko β-rep raspodele zbog toga što funkcija raspodele $\Psi(x, \cdot)$ može imati skok (atom verovatnoće) u $\alpha_\beta(x)$. U tom slučaju verovatnoća da $\alpha \in [\alpha_\beta(x), \infty)$ može biti veća od $1 - \beta$ pošto je $\Psi(x, \alpha_\beta(x)^-) < \beta \leq \Psi(x, \alpha_\beta(x))$ kada $\Psi(x, \alpha_\beta(x)^-) < \Psi(x, \alpha_\beta(x))$. U tom smislu β-rep raspodela predstavlja "gornji $1 - \beta$" deo cele raspodele. $\Psi_\beta(x, \alpha)$ je u stvari, skalirana raspodela između $1 - \beta$ i 1 (umesto između 0 i 1). Kako je $\Psi_\beta(x, \cdot)$ takođe neopadajuća i neprekidna sa desne strane i važi $\Psi_\beta(x, \alpha) \to 1$ kad $\alpha \to \infty$, ova funkcija raspodele je dobro definisana.



Slika 2: $\Psi(x, \alpha) = \beta$ ima više rešenja u α

Definicija 3.5 (CVaR$^+$ i CVaR$^-$) *$\beta - CVaR^+$ gubitka povezanog sa odlukom x je vrednost*

$$\Phi_\beta^+(x) = E[f(x,y)|f(x,y) > \alpha_\beta(x)] \qquad * \tag{10}$$

$\beta - CVaR^-$ gubitka povezanog sa odlukom x je vrednost

$$\Phi_\beta^-(x) = E[f(x,y)|f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)]. \tag{11}$$

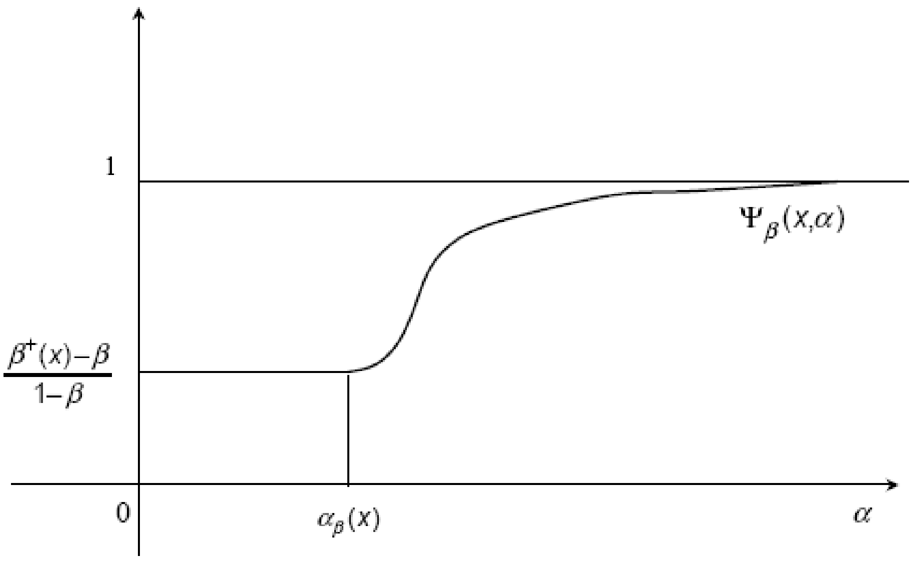
* Napomena: Uslovno očekivanje (10) je dobro definisano samo u slučaju da je $P\{f(x,y)|f(x,y) > \alpha_\beta(x)\} > 0$, odnosno $\Psi(x, \alpha_\beta(x)) < 1$, što ne mora da važi iako je $\beta \in (0,1)$ (jer može postojati skok u $\alpha_\beta(x)$).

$\square$.

Navešćemo sada neke osnovne relacije za CVaR, CVaR$^+$ i CVaR$^-$.

Teorema 3.2 *[10]. Ako ne postoji atom verovatnoće $\alpha_\beta(x)$, tada je*

$$\Phi_\beta^-(x) = \Phi_\beta(x) = \Phi_\beta^+(x) \tag{12}$$



Slika 3: $\Psi_\beta(x, \alpha)$

Ako postoji atom verovatnoće $\alpha_\beta(x)$, *tada*

$$\Phi_\beta^-(x) < \Phi_\beta(x) = \Phi_\beta^+(x) \quad za \quad \beta = \Psi(x, \alpha_\beta(x)) \tag{13}$$

Ako je $\beta < \Psi(x, \alpha_\beta(x))$ *i atom verovatnoće* $\alpha_\beta(x)$ *postoji, tada*

$$\Phi_\beta^-(x) < \Phi_\beta(x) \quad za \quad \Psi(x, \alpha_\beta(x)) = 1 \tag{14}$$

(u tom slučaju Φ_β^+ *nije dobro definisano). U svim ostalim slučajevima za koje je*

$$\Psi(x, \alpha_\beta(x)^-) < \beta < \Psi(x, \alpha_\beta(x)) < 1$$

važi stroga nejednakost

$$\Phi_\beta^-(x) < \Phi_\beta(x) < \Phi_\beta^+(x). \tag{15}$$

Dokaz:

Prema (10), $\Phi^+_\beta(x)$ se može definisati (slično $\Phi_\beta(x)$) kao očekivana vrednost gubitka pri raspodeli

$$\Psi^+_\beta(x,\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{za } \alpha < \alpha_\beta(x) \\ (\Psi(x,\alpha) - \beta^+(x))\frac{1}{1-\beta^+(x)}, & \text{za } \alpha \geq \alpha_\beta(x) \end{cases} \tag{16}$$

Isto tako je i $\Phi^-_\beta(x)$ očekivana vrednost gubitka pri raspodeli

$$\Psi^-_\beta(x,\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{za } \alpha < \alpha_\beta(x) \\ (\Psi(x,\alpha) - \beta^-(x))\frac{1}{1-\beta^-(x)}, & \text{za } \alpha \geq \alpha_\beta(x) \end{cases} \tag{17}$$

gde su $\beta^-(x)$ i $\beta^+(x)$ početak i kraj vertikalnog skoka funkcije rapodele $\Psi(x,\cdot)$ u $\alpha_\beta(x)$. Ako ne postoji atom verovatnoće u $\alpha_\beta(x)$, onda je $\beta^-(x) = \beta^+(x) = \beta \in (0,1)$. Tada su i funkcije raspodele (16), (17) i (9) identične, pa važi (12). Dalje, ako postoji skok u $\alpha_\beta(x)$ i $\beta = \beta^+(x)$, tada je $\beta^-(x) < \beta^+(x) < 1$, pa je ispunjeno (13). Ako je, sa druge strane, $\beta^+ = 1$, tada koristeći da je $\Psi(x,\alpha_\beta(x)^-) < \beta \leq \Psi(x,\alpha_\beta(x))$ kada je $\Psi(x,\alpha_\beta(x)^-) < \Psi(x,\alpha_\beta(x))$, dobijamo da važi (14). Na kraju, ako je ispunjeno $\Psi(x,\alpha_\beta(x)^-) < \beta < \Psi(x,\alpha_\beta(x)) < 1$, iz definicija (16), (17) i (9) i koristeći da je $\Psi_\beta(x)$ neopadajuća, dobijamo da važe stroge nejednakosti u (15)

$\square$.

Teorema 3.3 *[10]. Neka je $\xi_\beta(x)$ verovatnoća*

$$\xi_\beta(x) = (\Psi(x,\alpha_\beta(x)) - \beta)\frac{1}{1-\beta}$$

Ako je $\Psi(x,\alpha_\beta(x)) < 1$, to jest postoji šansa da nastane gubitak veći od $\alpha_\beta(x)$, tada je

$$\Phi_\beta(x) = \xi_\beta(x)\alpha_\beta(x) + (1-\xi_\beta(x))\Phi^+_\beta(x)$$

Ako je $\Psi(x,\alpha_\beta(x)) = 1$, to jest najveći gubitak koji može da nastane je $\alpha_\beta(x)$, tada je

$$\Phi_\beta(x) = \alpha_\beta(x).$$

Dokaz:

Po definiciji, $\beta \leq \Psi(x, \alpha_\beta(x))$. U slučaju da postoji mogućnost da gubitak bude veći od $\alpha_\beta(x)$, tada je

$$\beta \leq \Psi(x, \alpha_\beta(x)) < 1$$

(pa je i $\xi_\beta(x) < 1$). Kako je $\Phi_\beta(x)$ očekivana vrednost gubitka, a $\Phi_\beta^+(x)$ očekivani gubitak u slučaju da je $f(x, y) > \alpha_\beta(x)$, tada je (po definiciji)

$$\Phi_\beta(x) = \xi_\beta(x)\alpha_\beta(x) + (1 - \xi_\beta(x))\Phi_\beta^+(x).$$

Sa druge strane, ako je $\Psi(x, \alpha_\beta(x)) = 1$, (najveći mogući gubitak je $\alpha_\beta(x)$), tada je i $\xi_\beta(x) = 1$, pa je

$$\Phi_\beta(x) = 1 \cdot \alpha_\beta(x) + (1 - 1) \cdot \Phi_\beta^+(x)$$

$$\Phi_\beta(x) = \alpha_\beta(x)$$

$\square$.

Posledica 3.1 *[10]. β-CVaR definisan u (9) je veći ili jednak sa β-VaR-om, datim sa (7), to jest važi*

$$\Phi_\beta(x) \geq \alpha_\beta(x).$$

Dokaz:

Na osnovu Teoreme 3.3 važi da je

$$\Phi_\beta(x) = \xi_\beta(x)\alpha_\beta(x) + (1 - \xi_\beta(x))\Phi_\beta^+(x)$$

što je strogo veće od $\alpha_\beta(x)$ (za $\xi_\beta(x) < 1$) jer je po definiciji $\Phi_\beta^+(x) > \alpha_\beta(x)$. Kada je $\xi_\beta(x) = 1$ opet na osnovu Teoreme 3.3 važi

$$\Phi_\beta(x) = \alpha_\beta(x),$$

čime je dokazano tvrđenje.

$\square$.

Iz prethodne posledice se vidi da portfolio sa malim CVaR-om takođe ima i mali VaR.

Teorema 3.4 (CVaR za konačne ishode) *[10]. Pretpostavimo da postoji konačno mnogo ishoda $y_i \in Y$, $i = 1 \ldots, N$, tako da je za svako $x \in S$ raspodela gubitaka $f(x, y)$ data u konačno mnogo tačaka, odnosno $\Psi(x, \cdot)$ je step funkcija sa skokovima u tim tačkama. Za fiksirano $x \in S$ poređajmo odgovarajuće gubitke u rastući niz $f(x, y_1) < f(x, y_2) < \ldots$ $\ldots < f(x, y_N)$, pri čemu je verovatnoća p_i da se desi $f(x, y_i)$ pozitivna za $i = 1, \ldots, N$. Neka je k indeks takav da je*

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i < \beta \leq \sum_{i=1}^{k} p_i$$

Tada je β-VaR dat sa

$$\alpha_\beta(x) = f(x, y_k),$$

a odgovarajući β-CVaR je

$$\Phi_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \left[\left(\sum_{i=1}^{k} p_i - \beta \right) f(x, y_k) + \sum_{i=k+1}^{N} p_i f(x, y_i) \right].$$

U ovom slučaju važi i

$$\xi_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta} \left(\sum_{i=1}^{k} p_i - \beta \right) \leq \frac{p_k}{p_k + \ldots + p_N}.$$

Dokaz:

Kako je po pretpostavci

$$\sum_{i=1}^{k-1} p_i < \beta \leq \sum_{i=1}^{k} p_i$$

sledi da je

$$\Psi(x, \alpha_\beta(x)) = \sum_{i=1}^{k} p_i, \quad \Psi(x, \alpha_\beta(x)^-) = \sum_{i=1}^{k-1} p_i \quad \text{i}$$

$$\Psi(x, \alpha_\beta(x)) - \Psi(x, \alpha_\beta(x)^-) = p_k.$$

Koristeći definiciju za $\Psi_\beta(x,\cdot)$ i Teoremu 3.3 dobijamo da važi tvrđenje, osim za gornju granicu za $\xi_\beta(x)$. Ako opet iskoristimo gornju pretpostavku, imamo da je

$$\xi_\beta(x) = \frac{1}{1-\beta}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i - \beta\right) \leq \frac{1}{1-\sum_{i=1}^{k-1} p_i}\left(\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k-1} p_i\right) = \frac{p_k}{\sum_{i=k}^{N} p_i},$$

čime je dokazano celo tvrđenje.

$\square$.

Posledica ovog tvrđenja je da ako najveći gubitak $f(x,y_N)$ ima verovatnoću $p_N > 1-\beta$, onda je u stvari $\Phi_\beta(x) = \alpha_\beta(x) = f(x,y_N)$.

Da bismo pokazali da je CVaR koherentna mera rizika, definišimo prvo sledeću funkciju:

$$F_\beta(x,\alpha) = \alpha + \frac{1}{1-\beta} E\left[\max\{0, f(x,y)-\alpha\}\right] \tag{18}$$

Pokazaćemo da je $\Phi_\beta(x) = \min_\alpha F_\beta(x,\alpha) = F_\beta(x,\alpha_\beta(x))$.

Lema 3.1 *[11]. Neka je X slučajna promenljiva sa raspodelom $F_X(x) = P\{X \leq x\}$. Neka za neko $b \in \mathbb{R}$ važi $F_X(b) \geq \beta$ i $F_X(b^-) = P\{X < b\} \leq \beta$. Tada je*

$$b + \frac{1}{1-\beta} E\left[\max\{0, X-b\}\right] \leq a + \frac{1}{1-\beta} E\left[\max\{0, X-a\}\right],$$

za svako a.

Dokaz:

1° slučaj $b \leq a$. Tada imamo

$$E\left[X|b<X\right] - E\left[X|a<X\right] = E\left[X|b<X\leq a\right] \leq$$

$$\leq a\left(F_X(a) - F_X(b)\right) \leq a\left(F_X(a)-\beta\right) - b\left(F_X(b)-\beta\right)$$

Ako sada desnoj strani dodamo $\pm a$ i $\pm b$ i sredimo izraz, dobijamo sledeću nejednakost

$$b(1-\beta)-b(1-F_X(b))+E\left[X|b<X\right] \leq a(1-\beta)-a(1-F_X(a))+E\left[X|a<X\right]$$
$$b(1-\beta)+E\left[X-b|b<X\right] \leq a(1-\beta)+E\left[X-a|a<X\right]$$
$$b+\frac{1}{1-\beta}E\left[X-b|b<X\right] \leq a+\frac{1}{1-\beta}E\left[X-a|a<X\right]$$

2° slučaj $a \leq b$. Tada je

$$E\left[X|a<X\right]-E\left[X|b\leq X\right]=E\left[X|a<X<b\right] \geq$$
$$\geq a\left(F_X(b^-)-F_X(a)\right) \geq b\left(F_X(b^-)-\beta\right)-a\left(F_X(a)-\beta\right)$$

Opet sredimo izraze i dobijamo

$$a(1-\beta)-a(1-F_X(a))+E\left[X|a<X\right] \geq b(1-\beta)-b(1-F_X(b^-))+E\left[X|b\leq X\right]$$
$$a(1-\beta)+E\left[X-a|a<X\right] \geq b(1-\beta)+E\left[X-b|b\leq X\right]-b(1-F_X(b^-))$$
$$b+\frac{1}{1-\beta}+E\left[X-b|b<X\right] \leq a+\frac{1}{1-\beta}+E\left[X-a|a<X\right]$$

$\square$.

Na osnovu ove leme važi da ako je $F_X(x)=\beta$ za neko $x \in [a,b)$, tada je

$$[a,b]=\text{argmin}\left\{a+\frac{1}{1-\beta}E\left[\max\{0,X-a\}\right] : a \in \mathbb{R}\right\}$$

U specijalnom slučaju, imamo da je

$$[\alpha_\beta(x),\alpha_\beta^+(x)]=\text{argmin}_\alpha F_\beta(x,\alpha),$$

gde $\text{argmin}_\alpha F_\beta(x,\alpha)$ predstavlja skup svih $\alpha \in \mathbb{R}$ za koje se dostiže minimum funkcije $F_\beta(x,\alpha)$.

Teorema 3.5 *[10]. Funkcija $F_\beta(x,\alpha)$ data sa (18) je neprekidna po α i važi*

$$\Phi_\beta(x)=\min_\alpha F_\beta(x,\alpha) \tag{19}$$

kao i

$$[\alpha_\beta(x),\alpha_\beta^+(x)]=\text{argmin}_\alpha F_\beta(x,\alpha). \tag{20}$$

U svakom slučaju važi da je

$$\alpha_\beta(x) \in \text{argmin}_\alpha F_\beta(x,\alpha), \quad \Phi_\beta(x)=F_\beta(x,\alpha_\beta(x)).$$

Dokaz:

Za fiksirano $x \in S$, funkcija $F_\beta(x,\alpha)$ je konveksna po α jer je $[f(x,y)-\alpha]^+$ konveksno po α. Kako smo pretpostavili da je $E[|f(x,y)|] < \infty$ za svako $x \in S$, i funkcija $F_\beta(x,\cdot)$ uzima samo konačne vrednosti, a kako je i konveksna po α, sledi da je i neprekidna (po α). Dalje, kako α za koje je $\Psi(x,\alpha) = \beta$ leži unutar intervala $[\alpha_\beta(x), \alpha_\beta^+(x)]$, tvrđenje (20) je samo specijalan slučaj Leme 3.1. Ostaje još da pokažemo da je $\Phi_\beta(x)$ zaista minimalna vrednost funkcije $F_\beta(x,\alpha)$. Naime, kako je funkcija $F_\beta(x,\cdot)$ konveksna i uzima samo konačne vrednosti, sledi da ima konačni levi i desni izvod za svako α. Znamo da je

$$\frac{F_\beta(x,\alpha_0) - F_\beta(x,\alpha)}{\alpha_0 - \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta} E\left[\frac{[f(x,y)-\alpha_0]^+ - [f(x,y)-\alpha]^+}{\alpha_0 - \alpha}\right]$$

1° slučaj $\alpha_0 > \alpha$. Tada

$$\frac{[f(x,y)-\alpha_0]^+ - [f(x,y)-\alpha]^+}{\alpha_0 - \alpha} = \begin{cases} -1, & \text{ako } f(x,y) \geq \alpha_0 \\ 0, & \text{ako } f(x,y) \leq \alpha \\ q \in (0,1), & \text{ako } \alpha < f(x,y) < \alpha_0 \end{cases}$$

Kako je $P\{y | f(x,y) > \alpha_0\} = 1 - \Psi(x,\alpha_0)$ i $P\{y | \alpha < f(x,y) < \alpha_0\} = \Psi(x,\alpha_0) - \Psi(x,\alpha)$, pri čemu $\Psi(x,\alpha_0) \to \Psi(x,\alpha)$ kad $\alpha_0 \to \alpha$, dobijamo da je

$$\lim_{\alpha_0 \to \alpha} E\left[\frac{[f(x,y)-\alpha_0]^+ - [f(x,y)-\alpha]^+}{\alpha_0 - \alpha}\right] = \Psi(x,\alpha) - 1.$$

Odavde imamo da je

$$\lim_{\alpha_0 \to \alpha} \frac{F_\beta(x,\alpha_0) - F_\beta(x,\alpha)}{\alpha_0 - \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta}(\Psi(x,\alpha) - 1) = \frac{\Psi(x,\alpha) - \beta}{1-\beta}.$$

2° slučaj $\alpha_0 < \alpha$. Tada

$$\frac{[f(x,y)-\alpha_0]^+ - [f(x,y)-\alpha]^+}{\alpha_0 - \alpha} = \begin{cases} -1, & \text{ako } f(x,y) \geq \alpha \\ 0, & \text{ako } f(x,y) \leq \alpha_0 \\ q \in (0,1), & \text{ako } \alpha_0 < f(x,y) < \alpha \end{cases}$$

Slično, imamo da je $P\{y|f(x,y) \geq \alpha\} = 1 - \Psi(x, \alpha^-)$ i $P\{y|\alpha_0 < f(x,y) < \alpha\} = \Psi(x, \alpha^-) - \Psi(x, \alpha_0)$, pri čemu $\Psi(x, \alpha_0) \to \Psi(x, \alpha^-)$ kad $\alpha_0 \to \alpha$, pa sledi

$$\lim_{\alpha_0 \to \alpha} E\left[\frac{[f(x,y) - \alpha_0]^+ - [f(x,y) - \alpha]^+}{\alpha_0 - \alpha}\right] = \Psi(x, \alpha^-) - 1.$$

Sada je

$$\lim_{\alpha_0 \to \alpha} \frac{F_\beta(x, \alpha_0) - F_\beta(x, \alpha)}{\alpha_0 - \alpha} = 1 + \frac{1}{1-\beta}(\Psi(x, \alpha^-) - 1) = \frac{\Psi(x, \alpha^-) - \beta}{1 - \beta}.$$

Znači iz 1° i 2° smo dobili da je

$$\frac{\partial^+ F_\beta}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{\Psi(x, \alpha_\beta(x)) - \beta}{1 - \beta}, \quad \frac{\partial^- F_\beta}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{\Psi(x, \alpha_\beta(x)^-) - \beta}{1 - \beta} \tag{21}$$

Kako je funkcija F_β konveksna, ovi jednostrani izvodi su neopadajući po α i imamo da je

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{\partial^+ F_\beta}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{\partial^- F_\beta}{\partial \alpha}(x, \alpha) = 1,$$

kao i

$$\lim_{\alpha \to -\infty} \frac{\partial^+ F_\beta}{\partial \alpha}(x, \alpha) = \frac{\partial^- F_\beta}{\partial \alpha}(x, \alpha) = -\frac{\beta}{1 - \beta}.$$

Na osnovu ovih graničnih vrednosti znamo da je nivo skup za $F_\beta(x, \cdot)$ ograničen, pa je minimum (19) dostignut. Kako smo pokazali da važi i (20), odatle sledi da je $\Phi_\beta(x) = F_\beta(x, \alpha_\beta(x))$, čime je u potpunosti dokazano tvrđenje.

$\square$.

Teorema 3.6 (Konveksnost CVaR-a) *[10]. Ako je funkcija $f(x,y)$ konveksna u odnosu na x, tada je i $\Phi_\beta(x)$ takođe konveksna. U tom slučaju je $F_\beta(x, \alpha)$ konveksna u odnosu na obe promenljive.*
Isto tako, ako je $f(x,y)$ sublinearna u odnosu na x, tada je i $\Phi_\beta(x)$ sublinearna (u odnosu na x), a $F_\beta(x, \alpha)$ je sublinearna po obe promenljive.

Dokaz:

Kako je $[f(x,y)-\alpha]^+$ konveksna i po α i po x, kad je $f(x,y)$ konveksna po x, sledi da je i $F_\beta(x,\alpha)$ definisana sa (18) konveksana po obe promenljive. A kako je $\Phi_\beta(x) = \min_\alpha F_\beta(x,\alpha)$, sledi da je i $\Phi_\beta(x)$ konveksna. Analogno, ako je $f(x,y)$ sublinearna po x, znamo da važi $f(\lambda x, y) = \lambda f(x,y)$, $\lambda > 0$, pa imamo da je

$$F_\beta(\lambda x, \lambda\alpha) = \lambda\alpha + \frac{1}{1-\beta} E\left[[f(\lambda x, y) - \lambda\alpha]^+\right] =$$

$$\lambda\alpha + \frac{1}{1-\beta} E\left[[\lambda f(x,y) - \lambda\alpha]^+\right] =$$

$$\lambda\alpha + \frac{\lambda}{1-\beta} E\left[[f(x,y) - \alpha]^+\right] = \lambda F_\beta(x,\alpha),$$

to jest $F_\beta(x,\alpha)$ je pozitivno homogena po obe promenljive. Sad iz konveksnosti i pozitivne homogenosti funkcije $F_\beta(x,\alpha)$ sledi i njena sublinearnost po (x,α), a odatle i sublinearnost $\Phi_\beta(x)$.

$\square$.

Teorema 3.7 (Koherentnost CVaR-a) *[10]. β-CVaR je koherentna mera rizika u užem smislu.*

Dokaz:

(R1) Ako je $f(x,y) \equiv C$, tada je i (prema definicijama) $\alpha_\beta(x) = C$ i $\Psi(x, \alpha_\beta(x)) = 1$, pa je po Teoremi 3.3

$$\Phi_\beta = \alpha_\beta(x) = C.$$

(R2) Sledi na osnovu prethodne teoreme.

(R3) Ako je $f(x,y) \leq f(x',y)$, tada je i $F_\beta(x,\alpha) \leq F_\beta(x',\alpha)$, pa je samim tim i $\Phi_\beta(x) \leq \Phi_\beta(x')$.

(R4) Neka je $\Phi_\beta(x^k) \leq 0$ i neka $\|f(x^k,y) - f(x,y)\|_2 \to 0$. Tada je po definiciji norme,

$$\lim_{k\to\infty} E[f(x^k,y) - f(x,y)] = 0,$$

$$\lim_{k\to\infty} (E[f(x^k,y)] - E[f(x,y)]) = 0,$$

odnosno,

$$\lim_{k\to\infty} E[f(x^k, y)] = E[f(x, y)].$$

Tada i $\lim_{k\to\infty} F_\beta(x^k, \alpha) = F_\beta(x, \alpha) \leq 0$, pa je i $\Phi_\beta(x) \leq 0$.

(R5) Pokazano u prethodnoj teoremi.

Kako važe osobine (R1)-(R5), sledi da je $\beta-$CVaR koherentna mera rizika.

$\square$.

Teorema 3.8 (Stabilnost CVaR-a) *[10]. Funkcija $\Phi_\beta(x)$ data sa $\Phi_\beta(x) = \min_\alpha F_\beta(x, \alpha) = F_\beta(x, \alpha_\beta(x))$ je neprekidna (neprekidno zavisi) u odnosu na izbor $\beta \in (0, 1)$ i ima levi i desni izvod date sa*

$$\frac{\partial^-}{\partial\beta^-}\Phi_\beta(x) = \frac{1}{(1-\beta)^2} E\left[[f(x, y) - \alpha_\beta(x)]^+\right],$$

$$\frac{\partial^+}{\partial\beta^+}\Phi_\beta(x) = \frac{1}{(1-\beta)^2} E\left[[f(x, y) - \alpha_\beta^+(x)]^+\right].$$

Dokaz:

Fiksirajmo x i za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ posmatrajmo funkciju

$$\varphi_\alpha(z) = \alpha + zE\left[[f(x, y) - \alpha]^+\right], \quad z \in \mathbb{R} \tag{22}$$

Neka je $\varphi(z) = \min_{\alpha\in\mathbb{R}} \varphi_\alpha(z)$. Tada je na osnovu Teoreme 3.5

$$\Phi_\beta(x) = \varphi(\frac{1}{1-\beta}), \tag{23}$$

a minimum u (22) se dostiže za $\alpha \in [\alpha_\beta(x), \alpha_\beta^+(x)]$. Kako je funkcija $\varphi(z)$ konkavna i uzima samo konačne vrednosti, to je i neprekidna na $\mathbb{R}$ i ima levi i desni izvod u svakoj tački. Kako su funkcije $\varphi_\alpha(z)$ linearne po z, desni izvod je u stvari najmanji nagib funkcije $\varphi_\alpha(z)$ za koji se dostiže minimum, dok je levi izvod najveći nagib. Nagib ove funkcije je $E\left[[f(x, y) - \alpha]^+\right]$ i on je opadajući po α. Zbog toga, za $z = \frac{1}{1-\beta}$, najveći nagib dobijamo uzimajući $\alpha = \alpha_\beta(x)$, a najmanji kad je $\alpha = \alpha_\beta^+(x)$, to jest levi i desni izvod od φ su dati sa $E\left[[f(x, y) - \alpha_\beta(x)]^+\right]$ i $E\left[[f(x, y) - \alpha_\beta^+(x)]^+\right]$ respektivno. Uzimajući da je $z = \frac{1}{1-\beta}$, to jest koristeći (23), i primenjujući pravilo izvoda za složenu funkciju ($\Phi_\beta(x)$ je kompozicija φ i $\beta \mapsto \frac{1}{1-\beta}$) dobijamo tvrđenje.

$\square$.

4 OVO problem

Pretpostavimo da postoji konačno mnogo scenarija $y_i \in Y$ i neka je $f_i(x) = f(x, y_i)$, $i = 1, \ldots, N$.

Definicija 4.1 (p-OVO) *Neka je dato N neprekidnih funkcija f_i definisanih na $S \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, N$ i ceo broj $p \in \{1, \ldots, N\}$. p-Order-Value (OVO) fukcija $F_p(x)$ je data sa*

$$F_p(x) := f_{i_p(x)}(x) \tag{24}$$

za svako $x \in S$, gde je $\{i_1(x), \ldots, i_N(x)\} = \{1, \ldots, N\}$ i važi

$$f_{i_1(x)}(x) \leq f_{i_2(x)}(x) \leq \ldots \leq f_{i_p(x)}(x) \leq \ldots \leq f_{i_N(x)}(x).$$

Funkcija $F_p(x)$ je dobro definisana iako skup indikatora $\{i_1(x), \ldots, i_N(x)\}$ nije jednoznačno određen. Ako je $p = 1$, tada je $F_1(x) = min\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}$, a kada je $p = N$, onda je $F_N(x) = max\{f_1(x), \ldots, f_N(x)\}$. OVO problem se sastoji od minimizacije Order-Value funkcije $F_p(x)$

$$\begin{aligned} &\min F_p(x) \\ &\text{s.t.} \quad x \in S \end{aligned} \tag{25}$$

U našem slučaju, zbog toga što $f_i(x)$ predstavlja kreditni gubitak portfolia x (generalno, odluke x) u slučaju ishoda i, vrednost $F_p(x)$ je u stvari $\beta-$VaR za nivo poverenja $\beta = \frac{p}{N}$. Definišimo novu funkciju

$$S^p(x) = \sum_{j=N-p+1}^{N} f_{i_j(x)}(x)$$

Za svako $x \in S$ vrednost $\frac{N}{p}S^p(x)$ predstavlja $\beta-$CVaR za $\beta = \frac{N-p}{N}$. Problem

$$\begin{aligned} &\min S^p(x) \\ &\text{s.t.} \quad x \in S \end{aligned} \tag{26}$$

se naziva *High-Order-Value Optimization* (HOVO) problem. Optimizacija VaR-a i CVaR-a OVO metodom predstavlja jednu od njegovih najvažnijih primena. Pokažimo da je OVO funkcija neprekidna.

Pretpostavićemo nadalje da je skup vektora odluka S zatvoren i konveksan i da funkcije $f_j(x)$, $j = 1, \dots, N$ imaju neprekidne parcijalne izvode u otvorenom skupu koji sadrži S. Neka je $\nabla f_j(x)$ gradijent funkcije $f_j(x)$. Za sve $x, z \in S$ i $j = 1, \dots, N$ pretpostavljamo da važi

$$\|\nabla f_j(x)\|_\infty \leq C,$$

$$\|\nabla f_j(z) - \nabla f_j(x)\|_\infty \leq L\|z - x\|_\infty.$$

Kao posledica toga za sve $x, z \in S$ i $j = 1, \dots, N$ važi i

$$|f_j(z) - f_j(x)| \leq C\|z - x\|_\infty, \tag{27}$$

$$f_j(z) \leq f_j(x) + \nabla f_j(x)^T(z - x) + \frac{L}{2}\|z - x\|_\infty^2. \tag{28}$$

Definicija 4.2 *Za dato $\varepsilon > 0$ i $x \in S$ definišemo*

$$I_\varepsilon(x) = \{j \in \{1, \dots, N\} | F_p(x) - \varepsilon \leq f_j(x) \leq F_p(x) + \varepsilon\}$$

Teorema 4.1 *[13]. OVO funkcija $F_p(x)$ je neprekidna.*

Dokaz:

Pretpostavimo da niz $x^k \to x$ kad $k \to \infty$ i da postoji podniz za koji važi da za svako k postoji $\delta > 0$ tako da je

$$|F_p(x^k) - F_p(x)| \geq \delta > 0. \tag{29}$$

Za taj podniz postoji indeks $j \in \{1, \dots, N\}$ tako da je

$$F_p(x^k) = f_j(x^k)$$

beskonačno mnogo puta. Zbog toga za najmanje p indeksa $l \in \{1, \dots, N\}$ važi da je

$$f_j(x^k) \geq f_l(x^k).$$

Takođe, za najmanje $N - p + 1$ indeks $l \in \{1, \dots, N\}$ važi

$$f_j(x^k) \leq f_l(x^k).$$

Pošto je broj podskupova od $\{1, \dots, N\}$ konačan, skup indeksa l koji zadovoljavaju prvu nejednakost se ponavlja beskonačno mnogo puta, kao i skup indeksa koji zadovoljavaju drugu nejednakost. Kada pustimo da $k \to \infty$, dobijamo

$$f_j(x) \geq f_l(x)$$

za najmanje p indeksa iz $\{1, \ldots, N\}$, kao i

$$f_j(x) \leq f_l(x)$$

za najmanje $N - p + 1$ indeks iz $\{1, \ldots, N\}$. Zbog toga je

$$F_p(x) = f_j(x).$$

Ali pošto su funkcije $f_j(x)$ neprekidne pa važi $f_j(x^k) \to f_j(x)$, $k \to \infty$, dolazimo u kontradikciju sa (29). Znači, $F_p(x)$ je neprekidna.

$\square$.

Pre nego što predstavimo glavni algoritam, definišimo potrebne uslove optimalnosti.

Definicija 4.3 *Za $x \in S$ kažemo da je $\varepsilon-$ optimalna tačka ako važi da je*

$$\mathbb{D} \equiv \{d \in \mathbb{R}^n | x + d \in S \text{ i } \nabla f_j(x)^T d < 0 \ \forall j \in I_\varepsilon(x)\} = \emptyset.$$

Teorema 4.2 *[13]. Ako je $x_* \in S$ rešenje problema (25) i $\varepsilon \geq 0$, tada je x_* $\varepsilon-$ optimalna tačka.*

Dokaz:

Pretpostavimo suprotno, da skup $\mathbb{D}$ nije prazan. Tada postoji $d \in \mathbb{R}^n$ i $\overline{\gamma} > 0$ tako da je $x_* + d \in S$ i

$$f_j(x_* + \gamma d) < f_j(x_*) \quad \text{za } \gamma \in (0, \overline{\gamma}] \text{ i } j \in I_\varepsilon(x_*) \tag{30}$$

Zanči, za sve $j \in \{1, \ldots, N\}$ za koje je $f_j(x_*) = F_p(x_*)$ imamo da $j \in I_\varepsilon(x)$ i da važi (30). Definišimo sada

$$\varepsilon_1 = \min_{f_j(x_*) < F_p(x_*)} \{f(x_* - f_j(x_*)\},$$

$$\varepsilon_2 = \min_{F_p(x_*) < f_j(x_*)} \{f_j(x_* - F_p(x_*)\}$$

i neka je $\breve{\gamma} \leq \overline{\gamma}$ takvo da za sve $j \in \{1, \ldots, N\}$ i $\gamma \in (0, \breve{\gamma}]$ važi

$$|f_j(x_* + \gamma d) - f_j(x_*)| < \frac{\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}}{2}$$

Zbog toga, za sve $\gamma \in (0, \check{\gamma}]$ indeks j za koji je

$$F_p(x_* + \gamma d) = f_j(x_* + \gamma d)$$

je onaj indeks j za koji je $F_p(x_*) = f_j(x_*)$, odnosno $j \in I_0(x_*) \subset I_\varepsilon(x_*)$. Ali, prema (30) imamo da je

$$f_j(x_* + \gamma d) < f_j(x_*)$$

za sve $\gamma \in (0, \check{\gamma})$, pa sledi da x_* nije lokalni minimum, što je u kontradikciji sa pretpostavkom teoreme. Dakle, x_* jeste $\varepsilon-$ optimalna tačka.

$\square$.

U nastavku ćemo dati algoritam za pronalaženje lokalnog minimuma. Algoritam pronalazi opadajući niz vrednosti funkcije koristeći pravac pretraživanja koji se dobija rešavanjem potproblema konveksnog programiranja.

Lokalni algoritam

Neka je $x_0 \in S$ proizvoljni početni vektor i postavimo $\theta \in (0,1)$, $\Delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $0 < \sigma_{min} < \sigma_{max} < 1$, $\eta \in (0,1]$. Za dato $x_k \in S$ koraci za $k-$tu iteraciju su

- **Korak 1** Definišimo

$$M_k(d) = \max_{j \in I_\varepsilon(x_k)} \nabla f_j(x_k)^T d$$

posmatrajmo potproblem

$$\begin{aligned} &\min M_k(d) \\ \text{s.t.} \quad &x_k + d \in S,\ \|d\|_\infty \le \Delta \end{aligned} \tag{31}$$

Neka je $\overline{d}_k$ rešenje problema (31) i neka je d_k takvo da je $x_k + d_k \in S$, $\|d_k\|_\infty \le \Delta$ i

$$M_k(d_k) \le \eta M_k(\overline{d}_k) \tag{32}$$

Ako je $M_k(d_k) = 0$, **STOP.**

- **Korak 2** Postavi $\gamma \leftarrow 1$. Ako je

$$F_p(x_k + \gamma d_k) \le F_p(x_k) + \theta\gamma M_k(d_k) \tag{33}$$

postavi $\gamma_k = \gamma$, $x_{k+1} = x_k + \gamma_k d_k$ i završi iteraciju. Inače, izaberi $\gamma_{new} \in [\sigma_{min}, \sigma_{max}]$, postavi $\gamma \leftarrow \gamma_{new}$ i ponovi test (33).

$\square$.

U nastavku ćemo pokazati konvergenciju algoritma. Dokažimo prvo pomoćnu lemu.

Lema 4.1 *[13]. Neka su $a_1, \ldots, a_r$ realni brojevi takvi da je*

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_q \leq \ldots \leq a_r.$$

Pretpostavimo dalje da je $\nu > 0$ i $b_1, \ldots b_r \in \mathbb{R}$ su takvi da je

$$b_j \leq a_j - \nu, \quad j = 1, \ldots, r$$

i

$$b_{i_1} \leq b_{i_2} \leq \ldots \leq b_{i_q} \leq \ldots \leq b_{i_r}.$$

Tada je

$$b_{i_q} \leq a_q - \nu.$$

Dokaz:

Znamo da je $b_{i_q} \leq a_{i_q} - \nu$, kao i

$$b_{i_q} \leq b_{i_{q+1}} \leq a_{i_{q+1}} - \nu, \ldots, b_{i_q} \leq b_{i_r} \leq a_{i_r} - \nu.$$

Zato je

$$b_{i_q} \leq \min\{a_{i_q}, \ldots, a_{i_r}\} - \nu.$$

Ali, pošto je $a_1 \leq \ldots \leq a_q \leq \ldots \leq a_r$, imamo da je

$$min\{a_{i_q}, \ldots, a_{i_r}\} \leq a_q.$$

Zato imamo da je

$$b_{i_q} \leq a_q - \nu,$$

što je i trebalo pokazati.

$\square$.

Teorema 4.3 *[13]. Neka je $x_k \in S$ dobijen u $k-$toj iteraciji* **Lokalnog algoritma**. *Tada*

1) *Algoritam se zaustavlja u x_k ako i samo ako je x_k $\varepsilon-$optimalna tčka.*

2) Ako se algoritam ne zaustavi u x_k, onda je sledeća iteracija dobro definisana i

$$\gamma_k \geq \min\{\frac{2\sigma_{min}\rho_k(1-\theta)}{L\Delta^2}, \frac{\varepsilon\sigma_{min}}{3C\Delta}\}, \tag{34}$$

gde je

$$\rho_k = -\max_{j\in I_\varepsilon(x_k)}\{\nabla f_j(x_k)^T d_k\} > 0.$$

Dokaz:

1) $\Rightarrow$) Pretpostavimo da se algoritam zaustavi u x_k. Tada je $M_k(d_k) = 0$, kao i, na osnovu (33), $M_k(\overline{d}_k) = 0$. Znači, $M_k(d) \geq 0$ za sve $d \in \mathbb{D}$ za koje je $\|d\|_\infty \leq \Delta$. Prema tome, $M_k(d) \geq 0$ za sve $d \in \mathbb{D}$. Odavde sledi da je x_k $\varepsilon-$optimalna tačka.
$\Leftarrow$) Neka je x_k $\varepsilon-$optimalna tačka. Tada moramo imati da je $M_k(\overline{d}_k) = 0$, pa je i $M_k(d) = 0$ i algoritam se zaustavlja u x_k.

2) Ako se algoritam ne zaustavi u x_k, tada je $M_k(d_k) < 0$. Zato je

$$-\rho_k = \max_{j\in I_\varepsilon(x_k)}\{\nabla f_j(x_k)^T d_k\} < 0.$$

Pretpostavimo prvo da je

$$\gamma \in [0, \frac{2\rho_k(1-\theta)}{L\Delta^2}].$$

Tada je

$$\frac{\gamma L\Delta^2}{2} \leq \rho_k(1-\theta),$$

pa imamo da je

$$\frac{\gamma L\Delta^2}{2} \leq (\theta-1)\nabla f_j(x_k)^T d_k \quad \text{za } j \in I_\varepsilon(x_k),$$

odnosno,

$$\frac{\gamma L\Delta^2}{2} + \nabla f_j(x_k)^T d_k \leq \theta\nabla f_j(x_k)^T d_k \quad \text{za } j \in I_\varepsilon(x_k).$$

Ako pomnožimo prethodni izraz sa γ i iskoristimo da je $\|\gamma d_k\|_\infty \leq \Delta$, dobijamo

$$\frac{\gamma^2 L\|d_k\|_\infty^2}{2} + \gamma\nabla f_j(x_k)^T d_k \leq \gamma\theta\nabla f_j(x_k)^T d_k \quad \text{za } j \in I_\varepsilon(x_k)$$

Dodamo $f_j(x_k)$ na obe strane,

$$f_j(x_k)+\nabla f_j(x_k)^T(\gamma d_k)+\frac{L}{2}\|\gamma d_k\|_\infty^2 \leq f_j(x_k)+\gamma\theta\nabla f_j(x_k)^T d_k \quad \text{za } j \in I_\varepsilon(x_k)$$

i iskoristimo (28) i dobijamo

$$f_j(x_k+\gamma d_k) \leq f_j(x_k)+\gamma\theta\nabla f_j(x_k)^T d_k \quad \text{za } j \in I_\varepsilon(x_k).$$

Znači, pokazali smo da za $\gamma \in [0, \frac{2\rho_k(1-\theta)}{L\Delta^2}]$ važi da je

$$f_j(x_k+\gamma d_k) \leq f_j(x_k)+\gamma\theta M_k(d_k) \quad \text{za } j \in I_\varepsilon(x_k). \tag{35}$$

Uzmimo sada da je $\gamma \in [0, \frac{\varepsilon}{3C\Delta}]$. Tada imamo

$$\gamma C\Delta \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

$$C\|\gamma d_k\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

pa na osnovu (27) imamo da je

$$|f_j(x_k+\gamma d_k)-f_j(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za } j \in \{1,\dots,N\}. \tag{36}$$

Tada je za sve indekse $l = 1, \dots, p$

$$f_{i_l(x_k)}(x_k+\gamma d_k) \leq f_{i_l(x_k)}(x_k)+\frac{\varepsilon}{3} \leq F_p(x_k)+\frac{\varepsilon}{3}$$

i za sve indekse $l = p, \dots, N$ je

$$f_{i_l(x_k)}(x_k+\gamma d_k) \geq f_{i_l(x_k)}(x_k)-\frac{\varepsilon}{3} \geq F_p(x_k)-\frac{\varepsilon}{3}.$$

Znači da je najmanje p elemenata skupa $\{f_1(x_k+\gamma d_k),\dots,f_N(x-k+\gamma d_k)\}$ manje ili jednako od $F_p(x_k)+\frac{\varepsilon}{3}$, kao i da je najmanje $N-p+1$ element tog skupa veći ili jednak od $F_p(x_k)-\frac{\varepsilon}{3}$. Zato imamo

$$F_p(x_k+\gamma d_k) = f_{i_p(x_k)}(x_k+\gamma d_k) \in [F_p(x_k)-\frac{\varepsilon}{3}, F_p(x_k)+\frac{\varepsilon}{3}] \tag{37}$$

Pretpostavimo da $j \notin I_\varepsilon(x_k)$. Pod tom pretpostavkom ili je $f_j(x_k) < F_p(x_k) - \varepsilon$, ili je $f_j(x_k) > F_p(x_k) + \varepsilon$. U prvom slučaju je, na osnovu (36),

$$f_j(x_k + \gamma d_k) < F_p(x_k) - \frac{2\varepsilon}{3},$$

pa koristeći (37), imamo

$$f_j(x_k + \gamma d_k) < F_p(x_k + \gamma d_k).$$

Slično, ako je $f_j(x_k) > F_p(x_k) + \varepsilon$, tada

$$f_j(x_k + \gamma d_k) > F_p(x_k + \gamma d_k).$$

Zato je za neko $j \in I_\varepsilon(x_k)$

$$F_p(x_k + \gamma d_k) = f_j(x_k + \gamma d_k).$$

Označimo

$$I_\varepsilon(x_k) = \{j_1, \ldots, j_s\} = \{j'_1, \ldots, j'_s\}$$

pri čemu je

$$f_{j_1}(x_k) \leq \ldots \leq f_{j_s}(x_k)$$

i

$$f_{j'_1}(x_k + \gamma d_k) \leq \ldots \leq f_{j'_s}(x_k + \gamma d_k).$$

Jasno, među ovim indeksima postoji $q \in \{1, \ldots, s\}$ takvo da je

$$i_p(x_k) = j_q.$$

Oni indeksi $j \notin I_\varepsilon(x_k)$ za koje je $f_j(x_k) < F_p(x_k)$ su isti oni indeksi $j \notin I_\varepsilon(x_k)$ za koje je $f_j(x_k + \gamma d_k) < F_p(x_k)$, šta više, indeksi $j \notin I_\varepsilon(x_k)$ za koje je $f_j(x_k) > F_p(x_k)$ su isti oni za koje je $f_j(x_k + \gamma d_k) > F_p(x_k)$. Tada je i

$$i_p(x_k + \gamma d_k) = j'_q.$$

Sada iz (35) i Leme 4.1 imamo da za

$$\gamma \in [0, \min\{\frac{2\rho_k(1-\theta)}{L\Delta^2}, \frac{\varepsilon}{3C\Delta}\}] \tag{38}$$

važi

$$f_{j'_q}(x_k + \gamma d_k) \leq f_{j_q}(x_k) + \gamma\theta M_k(d_k).$$

Onda je i

$$f_{i_p(x_k+\gamma d_k)}(x_k + \gamma d_k) \leq f_{i_p(x_k)}(x_k) + \gamma\theta M_k(d_k),$$

pa je

$$F_p(x_k + \gamma d_k) \leq F_p(x_k) + \gamma\theta M_k(d_k).$$

Zbog toga, kada važi (38), test (33) mora biti zadovoljen, iz čega sledi da vrednosti γ koje ne zadovoljavaju test (33) ne mogu biti manje od $\min\{\frac{2\rho_k(1-\theta)}{L\Delta^2}, \frac{\varepsilon}{3C\Delta}\}$, pa prema tome da bi dužina koraka γ bila prihivaćena, mora da važi

$$\gamma_k \geq \min\{\frac{2\sigma_{min}\rho_k(1-\theta)}{L\Delta^2}, \frac{\varepsilon\sigma_{min}}{3C\Delta}\}$$

čime je dokazano tvrđenje.

$\square$.

Lema 4.2 *[13]. Ako je $\{x_k\}$ niz generisan* **Lokalnim aloritmom**, *tada je ili*

$$\lim_{k\to\infty} F_p(x_k) = -\infty \tag{39}$$

ili

$$\lim_{k\to\infty} M_k(d_k) = 0. \tag{40}$$

Dokaz:

Pretpostavimo da ne važi (39). Tada je na osnovu (33)

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k M_k(d_k) = 0,$$

pa na osnovu Teoreme 4.3, odavde sledi da važi (40).

$\square$.

Teorema 4.4 *[13]. Neka je $x_* \in S$ granica niza generisana* **Lokalnim algoritmom**. *Tada je x_* $\varepsilon-$optimalna tačka.*

Dokaz:

Pošto je $F_p(x_{k+1}) \leq F_p(x_k)$ za $k = 0, 1, 2, \ldots$ i x_* je granica niza $\{x_k\}$, tada $F_p(x_k) \to F_p(x_*)$, pa na osnovu Leme 4.2 važi da je $\lim_{k\to\infty} M_k(d_k) = 0$. Neka je K beskonačni niz indeksa za koji je

$$\lim_{k\in K} x_k = x_*$$

i pretpostavimo da x_* nije $\varepsilon-$optimalna tačka. Tada postoji $\rho > 0$ i $d \in \mathbb{R}^n$ tako da je $x_* + d \in S$ i

$$\nabla f_j(x_*)^T d \leq -\rho, \quad \text{za } j \in I_\varepsilon(x_*). \tag{41}$$

Bez umanjenja opštosti, možemo smatrati da je $\|d\|_\infty \leq \frac{\Delta}{2}$. Definišemo

$$\hat{d}_k = d + x_* - x_k$$

pa za dovoljno veliko $k \in K$ imamo da je $\|\hat{d}_k\|_\infty \leq \Delta$, $x_k + \hat{d}_k \in S$ i $\lim_{k\in K} \hat{d}_k = d$. Kako na osnovu (40) imamo da je $\lim_{k\to\infty} M_k(\overline{d}_k) = 0$, tada je $\liminf_{k\to\infty} M_k(\hat{d}_k) \geq 0$. Za sve $k \in K$ postoji indeks $j \in I_\varepsilon(x_k)$ takav da je $\nabla f_j(x_k)^T \hat{d}_k = M_k(\hat{d}_k)$. Kako je skup indeksa $I_\varepsilon(x_k)$ konačan, postoji indeks j za koji ova jednakost važi beskonačno mnogo puta. Zbog toga, za takvo j je

$$\liminf_{k\in K} \nabla f_j(x_k)^T \hat{d}_k = 0.$$

Uzimajući graničnu vrednost, imamo

$$\nabla f_j(x_*)^T d = 0 \tag{42}$$

Ali, pošto je $j \in I_\varepsilon(x_k)$, za beskonačno mnogo indeksa je

$$F_p(x_k) - \varepsilon \leq f_j(x_k) \leq F_p(x_k) + \varepsilon,$$

i kad pustimo $k \to \infty$, imamo

$$F_p(x_*) - \varepsilon \leq f_j(x_*) \leq F_p(x_*) + \varepsilon,$$

odnosno $j \in I_\varepsilon(x_*)$. Zbog toga je $\nabla f_j(x_*)^T d = 0$ u kontradikciji sa (41).

$\square$.

4.1 LOVO problem

Slično HOVO problemu, posmatrajmo sledeći LOVO (*Low Order Value Optimization*) problem

$$\min \quad S_p(x) = \sum_{j=1}^{p} f_{i_j(x)}(x) \tag{43}$$

$$\text{s.t.} \quad x \in S$$

U nastavku ćemo pokazati kako HOVO problem možemo predstaviti kao LOVO i upotrebiti LOVO algoritam za pronalaženje portfolia sa minimalnim $\beta-$CVaR-om. Neka je m broj podskupova skupa $\{1,\ldots,N\}$ kardinalnosti p, to jest $m = \frac{N!}{p!(N-p)!}$ i označimo te podskupove sa $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_m$. Za svako $x \in S$ i $i = 1,\ldots,m$ definišemo funkciju

$$f_{min}(x) = \min\{f^1(x),\ldots,f^m(x)\} \tag{44}$$

gde je

$$f^i(x) = \sum_{j\in\mathcal{P}_i} f_j(x), \quad i = 1,\ldots,m.$$

Može se videti da je $f_{min}(x) = S_p(x)$ i da je problem minimizacije ove funkcije specijalan slučaj problema (43) za $p = 1$ i $f_i(x) = f^i(x)$, $i = 1,\ldots,N$. Odgovarajuća HOVO funkcija bi bila $S^p(x) = f_{max}(x) = \max\{f^1,\ldots,f^m\}$. Za razliku od HOVO i OVO, LOVO nije primenljiv u oceni rizika jer kada $f_j(x)$ predstavljaju predviđeni gubitak usled odluke x, LOVO funkcija odbacuje veće gubitke, ali ne odbacuje one manje. Zato bi odluke dobijene LOVO metodom uvek bile optimistične i rizične. Međutim, ako definišemo funkciju

$$g_j(x) = -f_j(x), \quad \forall x \in S,\ j = 1,\ldots,N$$

tada $g_{min}(x)$ jeste LOVO funkcija, a rešenje problema

$$\min \quad -g_{min}(x)$$

$$s.t. \quad x \in S$$

je ekvivalentno rešenju HOVO problema (26).

4.1.1 Uslovi optimalnosti za LOVO

Slično $I_\varepsilon(x)$, za svako $x \in S$ definišemo sledeći skup indeksa

$$I_{min}(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} | f^i(x) = f_{min}(x)\} \tag{45}$$

Lema 4.3 *[17]. Neka je $U \subset S$ i $x_* \in U$. Ako je x_* globalni minimum funkcije $f_{min}(x)$, $x \in U$, tada je x_* i globalni minimu funkcije $f^i(x)$, $x \in U$, za svako $i \in I_{min}(x_*)$.*

Dokaz:

Neka je x_* globalni minimum funkcije $f_{min}(x)$ i pretpostavimo da za neko $i \in I_{min}(x_*)$ ne važi da je x_* minimum za $f^i(x)$. Tada postoji neko $z \in U$ tako da je $f^i(z) < f^i(x_*)$. Sada, prema definiciji $f_{min}(x)$ i $I_{min}(x)$, imamo da je

$$f_{min}(z) \leq f^i(z) < f^i(x_*) = f_{min}(x_*),$$

pa sledi da x_* nije globalni minimum od $f_{min}(x)$, $x \in U$.

$\square$.

Teorema 4.5 *[17].*

a) Ako je $x_* \in S$ lokalni minimum za $f_{min}(x)$, $x \in S$, tada i je za sve $i \in I_{min}(x_*)$ tačka x_* lokalni minimum od $f^i(x)$, $x \in S$.

b) Ako je $x_* \in S$ lokalni minimum za $f^i(x)$, $x \in S$, za sve $i \in I_{min}(x_*)$ i ako je $f^i(x)$ neprekidna u x_* za sve $i \notin I_{min}(x_*)$, tada je x_* lokalni minimum i za $f_{min}(x)$, $x \in S$.

Dokaz:

a) Uzmimo $\varepsilon > 0$ takvo da je x_* minimum za $f_{min}(x)$ za sve x iz skupa

$$U = \{x \in S | \; \|x - x_*\| \leq \varepsilon\}$$

Tada je, na osnovu Leme 4.3, x_* minimum od $f^i(x)$ za $x \in U$ i $i \in I_{min}(x_*)$, to jest x_* je lokalni minimum za $f^i(x)$.

b) Uzmimo ponovo $\varepsilon > 0$ takvo da je

$$f^i(x_*) > f_{min}(x_*) + \varepsilon, \quad \text{za } i \notin I_{min}(x_*).$$

Kako je $f^i(x)$ neprekidna, za sve $i \notin I_{min}(x_*)$ postoji neko $\delta_1 > 0$, tako da za sve x za koje je $\|x - x_*\| \leq \delta_1$ važi

$$f^i(x) \geq f_{min}(x_*) \quad (\text{za } i \notin I_{min}(x_*)). \tag{46}$$

Takođe, na osnovu pretpostavke teoreme, postoji $\delta_2 > 0$, tako da za sve $i \in I_{min}(x_*)$ i sve x za koje je $\|x - x_*\| \leq \delta_2$, važi

$$f^i(x) \geq f^i(x_*) = f_{min}(x_*). \tag{47}$$

Neka je $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada na osnovu (46) i (47), imamo da je za $i = 1, \ldots, m$ i sve $x \in S$ za koje je $\|x - x_*\| \leq \delta$,

$$f^i(x) \geq f_{min}(x_*),$$

pa je i

$$f_{min}(x) \geq f_{min}(x_*).$$

Sledi, x_* je lokalni minimum za $f_{min}(x)$.

$\square$.

Posledica ove teoreme jeste da ako je x_* lokalni minimum za $f_{min}(x)$ i ako su $f^i(x)$ diferencijabilne na skupu koji sadrži S, tada x_*, za sve $i \in I_{min}(x_*)$, zadovoljava *potrebne uslove optimalnosti* za problem

$$\min f^i(x) \qquad \text{s.t.} \quad x \in S. \tag{48}$$

Na osnovu toga, uvedimo sledeću definiciju.

Definicija 4.4

1) *Kažemo da je $x_* \in S$* **jako kritična tačka** *ako x_*, za sve $i \in I_{min}(x_*)$, zadovoljava* potrebne uslove optimalnosti *vezane za problem (48).*

2) *Kažemo da je $x_* \in S$* **slabo kritična tačka** *ako postoji $i \in I_{min}(x_*)$ takvo da x_* zadovoljava* potrebne uslove optimalnosti *vezane za problem (48).*

4.1.2 LOVO Algoritam za problem bez ograničenja i konvergencija ka slabo kritičnim tačkama

U ovom delu definisaćemo LOVO algoritam za problem (44) uzimajući da je $S = \mathbb{R}^n$, to jest za problem bez ograničenja i pokazati njegovu konvergenciju ka **slabo kritičnim tačkama**. Pretpostavićemo da su funkcije $f^i(x)$ neprekidno diferencijabilne na celom $\mathbb{R}^n$ i za neko $i \in I_{min}(x)$ "definisaćemo":

$$\nabla f_{min}(x) := \nabla f^i(x).$$

Iako ovakva strategija u većini problema neglatke optimizacije može rezultovati udaljavanju od rešenja, pokazaćemo da kod LOVO problema to nije slučaj i da algoritam konvergira ka slabo kritičnim tačkama.

Algoritam 1
Neka su $\theta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1)$, $M > 1$, $\rho > 0$, $t_{start} > 0$ algoritamski parametri i $x_0 \in \mathbb{R}^n$ početna aproksimacija. Za dato $x_k \in \mathbb{R}^n$, koraci za $k-$tu iteraciju su

- **Korak 1** Izaberi $\nu(k) \in I_{min}(x_k)$. Ako je $\|\nabla f^{\nu(k)}(x_k)\| = 0$, **STOP**
- **Korak 2** Izračunaj $d_k \in \mathbb{R}^n$ tako da je

$$\nabla f^{\nu(k)}(x_k)^T d_k \leq -\theta \|d_k\| \|\nabla f^{\nu(k)}(x_k)\| \quad \text{i} \quad \|d_k\| \geq \rho \|\nabla f^{\nu(k)}(x_k)\| \tag{49}$$

- **Korak 3** Izračunaj $t_k > 0$, $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ tako da je

$$f_{min}(x_{k+1}) \leq f_{min}(x_k) + \gamma t_k \nabla f^{\nu(k)}(x_k)^T d_k \tag{50}$$

i

$$t_k \geq t_{start} \ \text{ ili } \ f_{min}(x_k + \bar{t}_k d_k) > f_{min}(x_k) + \gamma \bar{t}_k \nabla f^{\nu(k)}(x_k)^T d_k \tag{51}$$

za $\bar{t}_k \leq M t_k$

$\square$.

Jedna od mogućih implementacija za (50) i (51) je bektreking (*backtracking*). U tom slučaju t_k se bira kao prvi broj niza $\{1, 2^{-1}, 2^{-2}, \ldots\}$ koji zadovoljava (50) i $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, $t_{start} = 1$ i $M = 2$.
U nastavku ćemo pokazati da je **Algoritam 1** dobro definisan i da se zaustavlja u x_k samo ako je x_k slabo kritična tačka, kao i da je granična vrednost niza generisanog **Algoritmom 1** slabo kritična tačka.

Teorema 4.6 *[17].* **Algoritam 1** *je dobro definisan i zaustavlja se u* x_k *samo ako je* x_k *slabo kritična tačka.*

Dokaz:

Neka je $i = \nu(k)$ i pretpostavimo da x_k nije slabo kritična tačka, to jest $\nabla f^i(x_k) \neq 0$. Pošto je $f^i(x)$ diferencijabilna, imamo da je

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^i(x_k + td_k) - f^i(x_k)}{t} = \nabla f^i(x_k)^T d_k$$

što je manje od 0, na osnovu (49). Dalje je

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^i(x_k + td_k) - f^i(x_k)}{t \nabla f^i(x_k)^T d_k} = 1.$$

Kako je $\gamma < 1$, za dovoljno malo t imamo da je

$$\frac{f^i(x_k + td_k) - f^i(x_k)}{t \nabla f^i(x_k)^T d_k} \geq \gamma.$$

A kako je $\nabla f^i(x_k)^T d_k < 0$, dobijamo

$$f^i(x_k + td_k) \leq f^i(x_k) + \gamma t \nabla f^i(x_k)^T d_k.$$

Sad, pošto je $f_{min}(x_k + td_k) \leq f^i(x_k + td_k)$ i $f_{min}(x_k) = f^i(x_k)$, sledi

$$f_{min}(x_k + td_k) \leq f_{min}(x_k) + \gamma t \nabla f^i(x_k)^T d_k$$

za dovoljno malo t. Birajući za t prvi broj niza $\{t_{start}, \frac{t_{start}}{M}, \frac{t_{start}}{M^2}, \ldots\}$ koji zadovoljava poslednju nejednakost, uslovi (50) i (51) važe. Znači, ukoliko x_k nije slabo kritična tačka, može se pronaći sledeća za koju su zadovoljeni (50)-(51), to jest algoritam je dobro definisan.

$\square$.

Teorema 4.7 *[17]. Ako je* x_* *granica niza generisanog* **Algoritmom 1**, *onda je* x_* *slabo kritična. Šta više, ako je* $\lim_{k \in K} x_k = x_*$*, gde je u* **Koraku 1** *algoritma isti indeks* $i = \nu(k)$ *izabran za beskonačno mnogo* $k \in K$*, onda* $i \in I_{min}(x_*)$ *i* $\nabla f^i(x_*) = 0$*. Konačno, važi*

$$\lim_{k \in K} \|\nabla f^{\nu(k)}(x_k)\| = 0.$$

Dokaz:

Neka je $x_* \in \mathbb{R}^n$ granica niza generisanog **Algoritmom 1** i neka je $K = \{k_0, k_1, k_2, \ldots\}$ beskonačan niz indeksa takav da postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ tako da je $i = \nu(k)$ za sve $k \in K$ i $\lim_{k \in K} x_k = x_*$. Niz K i indeks i postoje zato što je $\{1, \ldots, m\}$ konačan. Pošto je $f^i(x)$ neprekidna, važi

$$\lim_{k \in K} f^i(x_k) = f^i(x_*). \tag{52}$$

Kako je $i = \nu(k) \in I_{min}(x_k)$, znamo da je za sve $k \in K$

$$f^i(x_k) \leq f^l(x_k), \quad \text{za sve} \quad l \in \{1, \ldots, m\}.$$

Ako sa obe strane nejednakosti pustimo $k \in K$, dobijamo da je

$$f^i(x_*) \leq f^l(x_*), \quad \text{za sve} \quad l \in \{1, \ldots, m\},$$

pa sledi da $i \in I_{min}(x_*)$.
Prema definiciji algoritma, znamo da je $k_{j+1} \geq k_j + 1$, pa je zato, za sve $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f^i(x_{k_{j+1}}) = f_{min}(x_{k_{j+1}}) &\leq f_{min}(x_{k_j+1}) \leq \\ &\leq f_{min}(x_{k_j}) + \gamma t_{k_j} \nabla f^i(x_{k_j})^T d_{k_j} < \\ &< f_{min}(x_{k_j}) = f^i(x_{k_j}). \end{aligned} \tag{53}$$

Kako je, po definiciji algoritma, ispunjeno (50) i važi (52) i (53), imamo da je

$$\lim_{j \to \infty} t_{k_j} \nabla f^i(x_{k_j})^T d_{k_j} = 0.$$

Ako iskoristimo (49), dobijamo

$$\lim_{j \to \infty} t_{k_j} \|\nabla f^i(x_{k_j})\| \|d_{k_j}\| = 0. \tag{54}$$

Ako je za neki podskup indeksa $K_1 \subset K$, $\lim_{k \in K_1} \nabla f^i(x_k) = 0$, tada je i $\nabla f^i(x_*) = 0$ i tvrđenje važi. Razmotrimo slučaj kada $\|\nabla f^i(x_k)\|$ ne teži nuli kad k prolazi kroz K. Tada je

$$\lim_{k \in K} t_k \|d_k\| = 0. \tag{55}$$

1° Pretpostavimo da za neki podniz $\|d_k\| \to 0$. Tada i $\nabla f^i(x_k) \to 0$, na osnovu (49, pa i $\nabla f^i(x_*) \to 0$.

2° Ostaje nam slučaj $\lim_{k \in K} t_k = 0$. Možemo smatrati, bez umanjenja opštosti, da je $t_k < t_{start}$ za sve $k \in K$. Tada, za sve $k \in K$, postoji $\overline{t}_k > 0$ tako da je

$$f^i(x_k + \overline{t}_k d_k) \geq f_{min}(x_k + \overline{t}_k d_k) > f_{min}(x_k) + \gamma \overline{t}_k \nabla f^i(x_k)^T d_k = \tag{56}$$
$$= f_i(x_k) + \gamma \overline{t}_k \nabla f^i(x_k)^T d_k.$$

Šta više, na osnovu (51) i (55), imamo da je

$$\lim_{k \in K} \overline{t}_k \|d_k\| = 0.$$

Označimo $s_k = \overline{t}_k d_k$. Tada je na osnovu gornje jednakosti

$$\lim_{k \in K} \|s_k\| = 0. \tag{57}$$

Sada na osnovu (56) i Teoreme srednje vrednosti, postoji $\tau \in [0, 1]$ tako da je

$$\nabla f^i(x_k + \tau s_k)^T s_k = f^i(x_k + s_k) - f^i(x_k) > \gamma \nabla f^i(x_k + s_k)^T s_k. \tag{58}$$

Takođe je, ako iskoristimo (49), za sve $k \in K$

$$\frac{\nabla f^i(x_k)^T s_k}{\|s_k\|} \leq -\theta \|\nabla f^i(x_k)\|. \tag{59}$$

Neka je $K_2 \subset K$ takav da je $\lim_{k \in K_2} s_k / \|s_k\| = s$, $s \in \mathbb{R}^n$. Kako je $\lim_{k \in K} \|s_k\| = 0$, ako podelimo obe strane nejednakosti (58) sa $\|s_k\|$ i pustimo k kroz K_2, dobijamo

$$\nabla f^i(x_*)^T s \geq \gamma \nabla f^i(x_*)^T s.$$

Pošto je $\gamma < 1$ i $\nabla f^i(x_k)^T d_k < 0$ za sve k, sledi da je $\nabla f^i(x_*)^T s = 0$. Sada uzmemo graničnu vrednost u (59) i dobijamo

$$\nabla f^i(x_*) = 0.$$

A pošto $i \in I_{min}(x_*)$, sledi da je x_* slabo kritična tačka.

Ostaje još da pokažemo $\lim_{k\in K} \|\nabla f^{\nu(k)}(x_k)\| = 0$. Ako ova jednakost nije tačna, to znači da za neko j i beskonačan skup indeksa $k \in K$, $j = \nu(k)$ i $j \in I_{min}(x_*)$, ali $\|\nabla f^j(x_*)\| \neq 0$, što je u kontradikciji sa prethodnim delom dokaza.

$\square$.

Može se pokazati lokalna superlinearna konvergencija **Algoritma 1**. Videti [17].

4.1.3 LOVO Algoritam za problem bez ograničenja i konvergencija ka jako kritičnim tačkama

Algoritam 2
Neka su $\theta \in (0,1)$, $\gamma \in (0,1)$, $M > 1$, $\rho > 0$, $t_{start} > 0$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ algoritamski parametri i $x_0 \in \mathbb{R}^n$ početna aproksimacija. Za dato $x_k \in \mathbb{R}^n$, koraci za $k-$tu iteraciju su

Korak 1 Ako je $\|\nabla f^i(x_k)\| = 0$ za sve $i \in I_{min}(x_k)$, **STOP.**

Ako je $\|\nabla f^i(x_k)\| > \delta$ za sve $i \in I_{min}(x_k)$, izaberi $i \in I_{min}(x_k)$ i definiši $J_k = \{i\}$. Inače, definiši

$$J_k = \{j \in \{1,\dots,m\} | f^j(x_k) \leq f_{min}(x_k) + \varepsilon \ \text{ i } \ \nabla f^i(x_k) \neq 0\}.$$

Korak 2 Za sve $j \in J_k$ izračunaj $d_k^i \in \mathbb{R}^n$ tako da je

$$\nabla f^i(x_k)^T d_k^i \leq -\theta \|d_k^i\| \|\nabla f^i(x_k)\| \quad \text{i} \quad \|d_k^i\| \geq \rho \|\nabla f^i(x_k)\|. \tag{60}$$

Korak 3 Za sve $j \in J_k$ izračunaj $t_k^i > 0$ tako da je

$$f^i(x_k + t_k^i d_k^i) \leq f^i(x_k) + \gamma t_k^i \nabla f^i(x_k)^T d_k^i \tag{61}$$

i

$$t_k^i \geq t_{start} \quad \text{ili}$$

$$f^i(x_k + \bar{t}_k^i d_k^i) > f^i(x_k) + \gamma \bar{t}_k^i \nabla f^i(x_k)^T d_k^i \quad \text{za} \quad \bar{t}_k^i \leq M t_k^i \tag{62}$$

Korak 4 Izračunaj $x_{k+1} \in \mathbb{R}^n$ tako da je

$$f_{min}(x_{k+1}) \leq \min_{i \in J_k} \{f^i(x_k + t_k^i d_k^i)\}. \tag{63}$$

$\square$.

4.1.4 LOVO algoritam za problem sa ograničenjima

Sada ćemo predstaviti LOVO algoritam za problem kad dopustiv skup S nije ceo $\mathbb{R}^n$. Pretpostavljamo da je S opisan skupom jednačina i nejednačina. Definisaćemo Algoritam proširenih Lagranžovih množitelja za rešavanje LOVO problema sa ograničenjima. Definišimo prvo Algoritam proširenih Lagranžovih množitelja.

Algoritam proširenih Lagranžovih množitelja za problem glatke optimizacije

Posmatramo problem

$$\begin{aligned} &\min f(x) \\ \text{s.t.} \quad &h(x) = 0, \\ &g(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{64}$$

gde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_h}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_g}$ i f, h, g su neprekidno diferencijabilne.

Za sve $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{R}_{++}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{n_h}$ i $\mu \in \mathbb{R}_+^{n_g}$ definišemo *prošireni Lagranžijan*

$$L(x, \lambda, \mu, \rho) = f(x) + \frac{\rho}{2}\left[\left\| h(x) + \frac{\lambda}{\rho} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\mu}{\rho} \right)^+ \right\|^2 \right] \tag{65}$$

Algoritam 3

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}^n$ proizvoljna početna tačka i neka su $\tau \in [0, 1)$, $\gamma > 1$, $-\infty < \overline{\lambda}_{min} < \overline{\lambda}_{max} < \infty$, $0 \leq \overline{\mu}_{max} < \infty$, $\rho_1 \in \mathbb{R}_{++}$, $[\lambda_1]_j \in [\overline{\lambda}_{min}, \overline{\lambda}_{max}]$ za $j = 1, \ldots, n_h$, $[\mu_1]_j \in [0, \mu_{max}]$ za $j = 1, \ldots, n_g$ i $\varepsilon_1 > 0$ algoritamski parametri.

- **Korak 1** *Inicijalizacija*

  Postavi $k \leftarrow 1$. Za $j = 1, \ldots, n_g$ izračunaj

  $$[\sigma_0]_j = \max\{g_j(x_0), 0\}$$

- **Korak 2** *Rešavanje problema*

Izračunaj $x_k \in S$ tako da je

$$\|\nabla L(x_k, \lambda_k, \mu_k, \rho_k)\|_\infty \leq \varepsilon_k$$

- **Korak 3** *Ocena parametara*

  Za $j = 1, \ldots, n_h$ izračunaj

$$[\lambda_{k+1}]_j = [\overline{\lambda}_k]_j + \rho_k h_j(x_k)$$

i

$$[\overline{\lambda}_{k+1}]_j \in [\overline{\lambda}_{min}, \overline{\lambda}_{max}].$$

Za $j = 1, \ldots, n_g$ izračunaj

$$[\mu_{k+1}]_j = \max\{0, [\overline{\mu}_k]_j + \rho_k g_j(x_k)\},$$

$$[\sigma_k]_j = \max\{g_j(x_k), -\frac{[\overline{\mu}_k]_j}{\rho_k}\}$$

i

$$[\overline{\mu}_{k+1}]_j \in [0, \overline{\mu}_{max}].$$

- **Korak 4** *Korekcija kaznenih parametara*

  Ako je

$$\max\{\|h(x_k)\|_\infty, \|\sigma_k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x_{k-1})\|_\infty, \|\sigma_{k-1}\|_\infty\},$$

postavi

$$\rho_{k+1} = \rho_k,$$

inače postavi

$$\rho_{k+1} = \gamma \rho_k.$$

- **Korak 5** *Nova spoljna iteracija*

  Izračunaj $\varepsilon_{k+1} > 0$. Postavi $k \leftarrow k + 1$. Idi na **Korak 2**.

$\square$.

Pokažimo kako **Algoritam 3** možemo primeniti na LOVO problem. U tom smislu preformulišimo LOVO problem u sledeći

$$\begin{aligned} &\min f_{min}(x) \\ \text{s.t.} \quad &h(x) = 0 \\ &g(x) \leq 0 \end{aligned} \tag{66}$$

gde $f^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, za $i = 1, \ldots, m$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_h}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_g}$ i ove funkcije su neprekidno diferencijabilne. Takođe, za sve $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in \mathbb{R}_{++}$, $\lambda \in \mathbb{R}^{n_h}$ i $\mu \in \mathbb{R}_+^{n_g}$ definišemo *prošireni Lagranžijan*

$$L_i(x, \lambda, \mu, \rho) = f^i(x) + \frac{\rho}{2}\left[\left\|h(x) + \frac{\lambda}{\rho}\right\|^2 + \left\|\left(g(x) + \frac{\mu}{\rho}\right)^+\right\|^2\right],$$

$$L_{min}(x, \lambda, \mu, \rho) = f_{min}(x) + \frac{\rho}{2}\left[\left\|h(x) + \frac{\lambda}{\rho}\right\|^2 + \left\|\left(g(x) + \frac{\mu}{\rho}\right)^+\right\|^2\right].$$

Neka je za sve $x \in \mathbb{R}^n$, ρ, λ i μ

$$I_{min}(x) = \{i \in \{1, \ldots, m\} | L_i(x, \lambda, \mu, \rho) = L_{min}(x, \lambda, \mu, \rho)\}.$$

Algoritam 3-LOVO

- **Koraci 1, 3, 4, 5** isto kao **Algoritam 3**
- **Korak 2** *Rešavanje potproblema*

  Izračunaj $x_k \in \mathbb{R}^n$ tako da je

  $$\|\nabla L_i(x_k, \lambda_k, \mu_k, \rho_k)\|_\infty \leq \varepsilon_k$$

  za neko $i \in I_{min}(x_k)$.

$\square$.

Jedan od načina da se reši potproblem u **Koraku 2** jeste da se primeni **Algoritam 1** ili **Algoritam 2** na

$$\min \quad L_{min}(x_k, \lambda_k, \mu_k, \rho_k).$$

U oba slučaja rešenje dobijeno **Algoritmom 3-LOVO** je slabo kritična tačka.

5 Implementacija modela

Posmatrajmo portfolio sa tri kredita, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, gde x_i predstavlja udeo kredita i u portfoliu $\mathbf{x}$. Prema **CreditMetrics$^{\text{TM}}$** metodologiji, kreditni gubitak nastaje usled promene kreditnog rejtinga datog dužnika. U tom smislu, na osnovu istorijskih podataka možemo odrediti tzv. migracionu matricu čiji elementi predstavljaju verovatnoću da dužnik rangiran u određenoj kategoriji pređe u neku drugu kategoriju. Prema standardima Narodne banke Srbije postoji pet kreditnih kategorija: A, B, V, G i D. Migraciona matrica, dobijena empirijski na osnovu podataka iz jedna srpske banke srednje veličine, izgleda

Kategorija	*A*	*B*	*V*	*G*	*D*
A	91.187	7.769	0.86	0.046	0.138
B	1.2595	94.974	3.2242	0.4365	0.0873
V	0.0814	4.4752	89.097	5.3702	0.9764
G	0	0	4.8673	86.504	8.6283
D	1.7264	0.664	0.0443	0.0885	97.477

Tabela 2: Migraciona matrica (%)

Takođe, NBS je propisala i stope rezervisanja za svaku kreditnu kategoriju. Stope rezervisanja, u stvari, pokazuju koliki je maksimalni gubitak po nekom kreditu iz određene kategorije i date su u sledećoj tabeli:

Kateorija	A	B	V	G	D
r	0.02	0.05	0.25	0.5	1

Tabela 3: Stope rezervisanja NBS

Neka su dužnici $i = 1, 2, 3$ trenutno rangirani u kreditne kategorije B, V i D respektivno. Neka je dalje $y_j = (r_{1_j}, r_{2_j}, r_{3_j})^T$ vektor budućeg stanja, gde je r_{i_j} stopa rezervisanja u zavisnosti od kreditne kategorije u kojoj se nalazi dužnik i, $i = 1, 2, 3$. Kako je $n = 3$ i imamo 5 kreditnih kategorija, sledi da je $N = 5^3 = 125$, to jest imamo 125 mogućih scenaria (budućih stanja).

Neka je $f_j(x) = p_j y_j^T x$, $j = 1, \ldots, 125$, gde je p_j verovatnoća da se desi ishod j. Tada $f_j(x)$ predstavlja predviđeni gubitak portfolia $\mathbf{x}$ u slučaju ishoda j. Uzmimo da je $\beta = 0.96$ (u tom slučaju je $p = 5$) i definišimo sledeći HOVO problem

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=121}^{125} f_j(x) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{3} x_i = 1, \\ & \sum_{i=1}^{3} x_i \lambda_i \geq R. \end{aligned} \tag{67}$$

Prvo ograničenje znači da smo u portfolio uložili ceo kapital, a drugo ograničenje da želimo da prinos portfolia bude bar R, pri čemu λ_i predstavlja prinos (kamatu) kredita i. Ukoliko je $x_i < 0$ znači da smo u portfolio uložili negativan kapital, odnosno sredstva koja ne posedujemo i koja u određenom trenutke treba da vratimo. Ako želimo da zabranimo kratke operacije, uvešćemo dodatno ograničenje

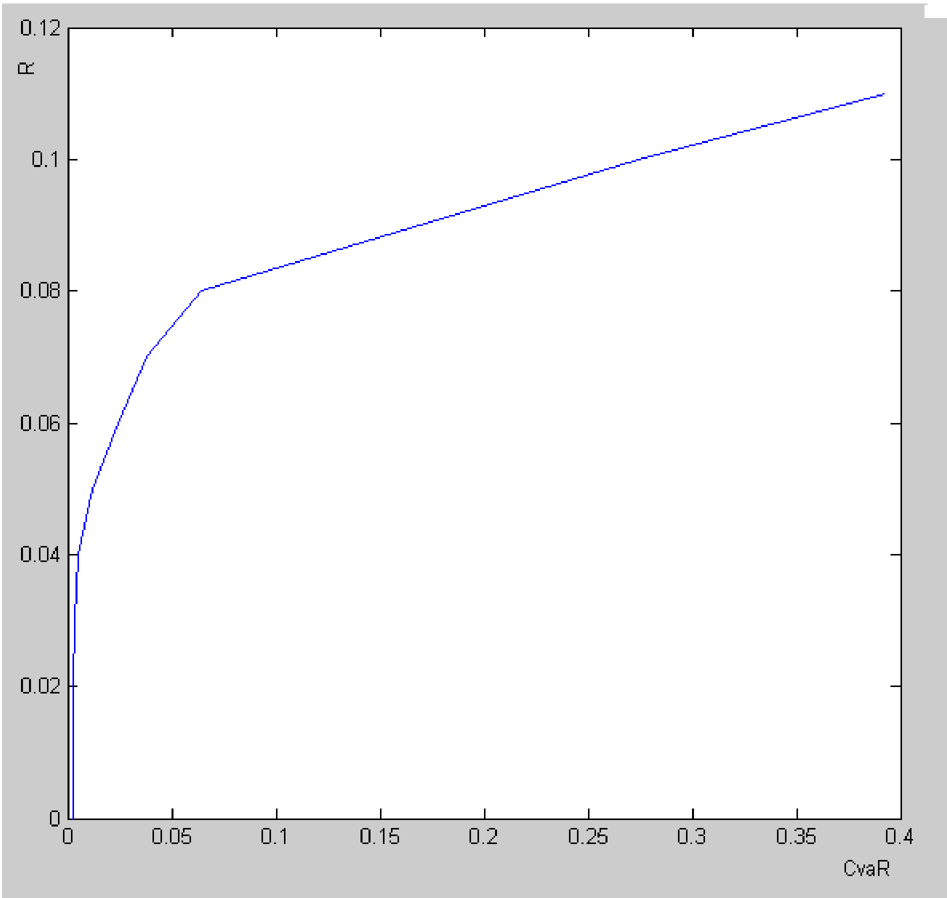
$$x_i > 0, \qquad i = 1, 2, 3.$$

Za $\lambda_1 = 0.05$, $\lambda_2 = 0.08$ i $\lambda_3 = 0.12$ i dozvoljenu kratku prodaju, korišćenjem programskog paketa MATLAB i ugrađene funkcije `fmincon`, dobijeni su sledeći rezultati

R	x_1	x_2	x_3	CVaR
0	1.8934	-0.3134	-0.58	0.0006
0.01	1.7399	-0.2948	-0.4451	0.00065
0.02	1.56	-0.23	-0.33	0.0007
0.03	1.232	0.094	-0.326	0.0009
0.04	0.9231	0.3845	-0.3077	0.0013
0.05	0.7134	0.5016	-0.215	0.0031
0.06	0.3047	0.9668	-0.2715	0.00602
0.07	-0.1755	1.5572	-0.3816	0.0095
0.08	-1.2085	3.1149	-0.9064	0.01603
0.09	-0.005	0.7587	0.2463	0.10588

Tabela 4: Kreditni portfolio sa 3 elementa

Portfolio sa minimalnim CVaR-om je $(1.8934, -0.3134, -0.58)^T$, gde je prinos portfolia $R = 0$ i $CVaR = 0.0006$, odnosno najmanje rizičan je portfolio za koji treba pozajmiti na ime drugog i trećeg kredita 31.34% i 58% respektivno i uložiti 189.34% u prvi kredit, pri čemu se ne ostvaruje zarada. Skup efikasnih portfolia dat je na Slici 4



Slika 4: Skup efikasnih portfolia

Iz dopustivog skupa portfolia biramo portfolie koji leže na granici efikasnosti zato što oni imaju "najbolji" odnos rizik-prinos:

- ako fiksiramo prinos, efikasan portfolio ima najmanji CVaR u odnosu na portfolie sa istim prinosom,

- ako fiksiramo CVaR, efikasan portfolio ima najveći prinos u odnosu na portfolie sa istim CVaR-om.

Iz dobijenih rezultata se može videti da je rezerva kapitala potrebna za zaštitu od nepredviđenog gubitka znatno manja od 8%, koliko preporučuje Komitet za superviziju banaka u Bazelu. Ta razlika se može iskoristiti za nove plasmane, a samim tim doprineti povćanju profita, što je i osnovni cilj poslovanja.

Literatura

[1] The Basel Committee on Banking Supervision: *Internacional Covergence of Capital Measurment and Capital Standards*, Basel, (2004)

[2] Morgan, J.P. : *Credit Metrics TM Technical Document*, New York, (1997)

[3] Credit Suisse Financial Products: *CreditRisk+: A Credit Risk Management Framework Technical Documentation*, CSFP, London, (1997)

[4] Wilson, T. : *Credit Portfolio Risk (I, II)*, Risk Magazine, September / October 1997, str.111-117 i str.56-61, (1997)

[5] Wilson, T. : *Portfolio Credit Risk*, FRBNY Economic Policy Review, Oktobar 1998, str.71-82, (1998)

[6] Kern, M., Bernd, R. :*Comparative Analysis of Alternative Credit Risk Models an Application on German Middle Market Loan Portfolios*, CFS Working Paper No. 2001/03, Frankfurt am Main , (2001)

[7] Jorion, P. : *Value-at-Risk: The new Benchmark for Managing Financial Risk*, Second edition, McGraw Hill, (2001)

[8] Rockafellar, R. T. : *Coherent Approaches to Risk in Optimization Under Uncertainty*, University of Washington, Department of Mathematics, (2007)

[9] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. : *Optimization of Conditional Value-at-Risk*, Journal of Risk 2, str.21-41

[10] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. : *Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions*, Journal of Banking and Finance 26, str.1443-1471, (2002)

[11] Pflug, G. : *Some remarks on the Value-at-Risk and the conditional Value-at-Risk* (Uryasev, S. ed.), Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications, str.278-287, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2000)

[12] Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D., Uryasev, S. : *Credit Risk Optimization with Conditional ValueatRisk*, Mathematical Programming, Series B, December 2000, (2000)

[13] Andreani, R., Dunder, C., Martinez, J. M. : *Order-Value Optimization: formulation and solution by means of a primal Cauchy method*, Mathematical Methods of Operations research 58, str. 387-399, (2003)

[14] Andreani, R., Dunder, C., Martinez, J. M. : *Nonlinear-Programming Reformulation of the Order-Value Optimization Problem*, Mathematical Methods of Operations Research 61, str. 365-384, (2005)

[15] Andreani, R., Martinez, J. M., Salvatierra, M., Yano, F. : *Global Order-Value Optimization by means of a multistart harmonic oscillator tunneling strategy*, Global Optimization: Theory and Practice, str. 379-404. Edited by L. Liberti and N. Maculan, Kluwer, (2006)

[16] Andreani, R., Martinez, J. M., Salvatierra, M., Yano, F. : *Quasi-Newton methods for order-value optimization and value-at-risk calculations*, Pacific Journal of Optimization 2, str. 11-33, (2006)

[17] Andreani, R., Martinez, J. M., Martinez, L., Yano, F.: *Low Order-Value Optimization and applications*, Technical Report MCDO 051013, Department of Applied Mathematics, State University of Campinas, Brazil, October 24, 2005/ January 4, 2007, (2007)

[18] www.gloriamundi.org