Zoran Stojaković Ivica Bošnjak

ZADACI IZ LINEARNE ALGEBRE

SYMBOL

Naziv udžbenika: Zadaci iz linearne algebre

Autori: Dr Zoran Stojaković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Ivica Bošnjak, docent Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Recenzenti: Dr Đura Paunić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu
Dr Rade Doroslovački, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu

Izdavači: Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad
"SYMBOL", Novi Sad

Štampa: "SYMBOL", Novi Sad

CIP – Каталогизација у публикацији
Библиотека Матице српске, Нови Сад

512.64(075.8)(076)

СТОЈАКОВИЋ, Зоран
Zadaci iz linearne algebre / Zoran Stojaković, Ivica Bošnjak. – Novi Sad : Prirodno-matematički fakultet : Symbol, 2004 (Novi Sad: Symbol). – 210 str. : graf. prikazi ; 25 cm

1. Бошњак, Ивица
а) Линеарна алгебра – задаци

COBISS.SR-ID 194643719

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Zoran Stojaković **Ivica Bošnjak**

ZADACI IZ LINEARNE ALGEBRE

- drugo izdanje -

SYMBOL

NOVI SAD
2005

Sadržaj

Predgovor

Ova zbirka primera, zadataka i problema pripremljena je prema programu predmeta Linearna algebra za studente matematike i informatike Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Zbirka može biti od koristi i studentima drugih fakulteta, pre svega tehničkih, ekonomskih i ostalih koji koriste metode linearne algebre.

Na početku svake glave dat je opširan pregled teorije, definicije i teoreme čije poznavanje je potrebno za rešavanje zadataka koji slede. Većina zadataka je rešena, za neke su data uputstva, a jedan deo je ostavljen čitaocu za samostalno rešavanje. Zbirka sadrži i ispitne zadatke iz predmeta Linearna algebra, a takođe i izvestan broj zadataka iz matematičkih časopisa.

U zbirku nisu uključeni zadaci koji se odnose na numeričke metode linearne algebre, a čitaoce koji žele da se upoznaju sa tom oblašću upućujemo na knjigu *D. Herceg, Z. Stojaković, Numeričke metode linearne algebre - zbirka zadataka, Građevinska knjiga, Beograd, 1989.*

Autori se zahvaljuju recenzentima dr Đuri Pauniću i dr Radetu Doroslovačkom na korisnim primedbama.

Novi Sad,
7. maj 2004.

Autori

Predgovor drugom izdanju

U drugom izdanju dodat je jedan broj novih zadataka, a neki zadaci koji u prvom izdanju nisu imali rešenja sada su kompletno rešeni.

Novi Sad,
10. novembar 2005.

Autori

GLAVA 1

Vektorski prostori

1.1. Neka je $(V,+)$ komutativna grupa, a $(F,+,\cdot)$ polje. V je vektorski (ili linearni) prostor nad poljem F, ako je definisano preslikavanje $F \times V \to V$, pri čemu sliku para (α, a) označavamo sa αa, tako da za svako $\alpha, \beta \in F, \quad a, b \in V$ važi

(1) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$,
(2) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$,
(3) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$,
(4) $1a = a$,

gde je sa 1 označen neutralni elemenat za množenje polja F.

Vektorski prostor V nad poljem F označavaćemo i sa $V(F)$.

Elemente skupa V nazivamo vektorima i označavamo ih malim slovima latinice $a, b, c, \ldots$, a elemente skupa F nazivamo skalarima i označavamo ih malim grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$.

Vektorski prostor nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva nazivamo realni (kompleksni) vektorski prostor.

1.2. Neka je V vektorski prostor nad poljem F . Tada za svako $\alpha \in F$, $a \in V$ važi

(1) $\alpha 0_V = 0_V$,
(2) $0_F a = 0_V$,
(3) $(-\alpha)a = \alpha(-a) = -(\alpha a)$,
(4) $\alpha a = 0_V \Leftrightarrow (\alpha = 0_F \vee a = 0_V)$,

gde je sa 0_V označen neutralni element grupe $(V,+)$ (koji se naziva nula-vektor), a sa 0_F neutralni elemenat za sabiranje polja F .

1.3. Neka je V vektorski prostor nad poljem F . Podskup W skupa V je potprostor vektorskog prostora V, ako i samo ako je W vektorski prostor nad poljem F u odnosu na restrikcije na W sabiranja vektora i množenja vektora skalarom.

1.4. Neprazan podskup W vektorskog prostora V nad poljem F je potprostor od V ako i samo ako za svako $\alpha, \beta \in F,\ a, b \in W$

$$\alpha a + \beta b \in W.$$

1.5. Uslov iz prethodnog stava (1.4) ekvivalentan je sa sledećim uslovom: za svako $\alpha \in F,\ a, b \in W$

$$\alpha a \in W \ \wedge\ a + b \in W.$$

1.6. Svaki vektorski prostor $V(F)$ ima bar dva potprostora, to su sam prostor V i tzv. nula-prostor $\{0\}$, tj. vektorski prostor koji se sastoji samo od nula-vektora. Te potprostore nazivamo trivijalnim, druge potprostore, ako postoje, nazivamo pravim.

1.7. U vektorskom prostoru presek proizvoljne familije potprostora je potprostor.

1.8. U vektorskom prostoru $V(F)$, vektor v je linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_n$ ako i samo ako postoje skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ takvi da je

$$v = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n.$$

1.9. Uređenu n-torku $(a_1, \dots, a_n)$ elemenata nekog skupa S nazivaćemo niz[1] elemenata iz S. Da bi se izbegla zabuna, preslikavanje skupa prirodnih brojeva u S (koje se uobičajeno naziva niz), nazivaćemo beskonačni niz.

1.10. Ako je S neprazan podskup vektorskog prostora $V(F)$, onda se skup svih linearnih kombinacija vektora iz S naziva lineal (ili linearni omotač) skupa S i označava sa $L(S)$. Dakle,

$$L(S) = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \mid n \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in F,\ a_i \in S\}.$$

Ako je S prazan skup, onda je $L(S) = \{0\}$.

Ako je $(a_1, \dots, a_n)$ niz vektora vektorskog prostora V, onda je $L((a_1, \dots, a_n)) = L(\{a_1, \dots, a_n\})$.

Umesto $L(\{a_1, \dots, a_n\})$ pisaćemo skraćeno $L(a_1, \dots, a_n)$.

1.11. Ako je S podskup ili niz vektora vektorskog prostora $V(F)$, onda je $L(S)$ potprostor vektorskog prostora V.

$L(S)$ je najmanji potprostor koji sadrži S.

$L(S)$ je presek svih potprostora koji sadrže S.

---

[1] Termin „uređena n-torka" je nezgodan za korišćenje jer se njime određuje koliko elemenata ima u n-torci, što najčešće nije poznato ili nije bitno. Na primer, izraz „... podniz niza..." se veoma komplikuje kada ga treba formulisati jezikom uređenih n-torki.

U literaturi se za uređenu n-torku pored termina „niz" koriste i termini „lista" i „sistem".

1.12. Ako je S podskup (niz vektora) vektorskog prostora $V(F)$, onda kažemo da je potprostor $L(S)$ generisan skupom (nizom) S, a elemente S nazivamo generatorima potprostora $L(S)$.

U specijalnom slučaju, ako je $L(S) = V$, onda S generiše V, a elementi S su generatori vektorskog prostora V. Ako postoji niz ili konačan skup S takav da je $L(S) = V$, kažemo da je vektorski prostor V konačno generisan.

1.13. U vektorskom prostoru $V(F)$ niz vektora $(a_1, \ldots, a_n)$ je linearno zavisan, ako i samo ako postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, od kojih je bar jedan različit od nule, takvi da je

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0.$$

Niz vektora koji nije linearno zavisan je linearno nezavisan.

Umesto „niz vektora $(a_1, \ldots, a_n)$ je linearno zavisan (nezavisan)" govorićemo i „vektori $a_1, \ldots, a_n$ su linearno zavisni (nezavisni)".

1.14. Poredak vektora u nizu ne utiče na njegovu linearnu zavisnost odnosno nezavisnost.

Niz vektora koji sadrži nula-vektor je linearno zavisan.

Niz vektora koji sadrži linearno zavisan podniz je linearno zavisan.

Svaki podniz linearno nezavisnog niza vektora je linearno nezavisan.

Ako su u nizu vektora bar dva vektora jednaka, onda je taj niz linearno zavisan.

1.15. Baza konačno generisanog vektorskog prostora je niz vektora koji je linearno nezavisan i koji generiše vektorski prostor.

1.16. Svaki konačno generisan nenula vektorski prostor ima bazu.

1.17. Ako je $V(F)$ konačno generisan nenula vektorski prostor, onda svaki niz generatora tog vektorskog prostora sadrži podniz koji je baza vektorskog prostora.

1.18. U vektorskom prostoru $V(F)$ niz vektora je baza ako i samo ako je taj niz maksimalan linearno nezavisan niz.

1.19. U vektorskom prostoru $V(F)$ niz vektora je baza ako i samo ako je taj niz minimalan niz generatora.

1.20. U vektorskom prostoru $V(F)$ niz vektora $(a_1, \ldots, a_n)$ je baza ako i samo ako se svaki vektor $x \in V$ može na jedinstven način napisati u obliku

$$x = \sum_{1}^{n} \alpha_i a_i, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F.$$

1.21. Ako je $(a_1, \dots, a_n)$ baza vektorskog prostora $V(F)$, a $x \in V$, onda se skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ takvi da je

$$x = \sum_1^n \alpha_i a_i$$

nazivaju koordinate vektora x u odnosu na bazu $(a_1, \dots, a_n)$. Pri tome, α_1 je prva koordinata, α_2 druga itd.

1.22. U vektorskom prostoru $V(F)$ niz vektora $(a_1, \dots, a_n)$, $n \geq 2$, među kojima nije nula-vektor, je linearno zavisan ako i samo ako među vektorima $a_2, \dots, a_n$ postoji vektor a_k koji je linearna kombinacija vektora $a_1, \dots, a_{k-1}$.

1.23. Ako je $(a_1, \dots, a_k)$ linearno nezavisan niz vektora konačno generisanog vektorskog prostora $V(F)$, onda je taj niz baza vektorskog prostora ili postoje vektori $b_1, \dots, b_m \in V$ takvi da je $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_m)$ baza vektorskog prostora V (tj. u konačno generisanom vektorskom prostoru svaki linearno nezavisan niz vektora je baza ili se može dopuniti do baze vektorskog prostora).

1.24. Ako je u vektorskom prostoru $V(F)$, $(a_1, \dots, a_n)$ linearno nezavisan niz vektora, a $(b_1, \dots, b_m)$ niz generatora vektorskog prostora V, onda je $n \leq m$.

1.25. Ako je vektorski prostor $V(F)$ generisan sa n vektora, onda je svaki niz vektora iz V koji sadrži više od n vektora linearno zavisan.

1.26. Sve baze konačno generisanog nenula vektorskog prostora imaju isti broj vektora.

1.27. Broj vektora baze konačno generisanog nenula vektorskog prostora $V(F)$ naziva se dimenzija tog vektorskog prostora i označava sa $\dim V$. Dimenzija nula-prostora je 0.

1.28. Vektorski prostor koji ima bar jednu konačnu bazu i nula-prostor nazivaju sa konačno dimenzionalnim. U suprotnom, vektorski prostor je beskonačno dimenzionalan.

Vektorski prostor je konačno dimenzionalan ako i samo ako je konačno generisan.

1.29. U n-dimenzionalnom vektorskom prostoru

– svaki niz sa više od n vektora je linearno zavisan,
– svaki niz od n linearno nezavisnih vektora je baza,
– svaki niz od n vektora koji generiše vektorski prostor je baza.

1.30. Svaki potprostor W konačno dimenzionalnog vektorskog prostora $V(F)$ je konačno dimenzionalan i pri tome je $\dim W \leq \dim V$. Ako je $\dim W = \dim V$, onda je $W = V$.

1.31. Neka su $W_1, \ldots, W_n$ potprostori vektorskog prostora $V(F)$. Suma potprostora $W_1, \ldots, W_n$ je sledeći skup vektora

$$W = W_1 + \cdots + W_n = \{w_1 + \cdots + w_n \mid w_1 \in W, \ldots, w_n \in W_n\}.$$

Suma W je potprostor vektorskog prostora V. Potprostor W sadrži sve vektore potprostora $W_1, \ldots, W_n$ i sve linearne kombinacije tih vektora.

W je najmanji potprostor koji sadrži $W_1, \ldots, W_n$.

1.32. Suma $W = W_1 + \cdots + W_n$ potprostora $W_1, \ldots, W_n$ vektorskog prostora $V(F)$ naziva se direktna ako i samo ako je za svako $i \in \mathbb{N}_n$

$$W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_n) = \{0\}$$

i označava se sa $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$.

Za $n = 2$, suma potprostora W_1 i W_2 je direktna ako i samo ako je $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

1.33. Suma $W = W_1 + \cdots + W_n$ potprostora $W_1, \ldots, W_n$ vektorskog prostora $V(F)$ je direktna ako i samo ako se svaki vektor w te sume može na jedinstven način prikazati u obliku

$$w = w_1 + \cdots + w_n,$$

gde je $w_i \in W_i, \;\; i = 1, \ldots, n$.

1.34. Ako su W_1 i W_2 potprostori konačno dimenzionalnog vektorskog prostora $V(F)$, onda je

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2).$$

1.35. Neka su W_1 i W_2 potprostori konačno dimenzionalnog vektorskog prostora $V(F)$. Suma potprostora W_1 i W_2 je direktna ako i samo ako je

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2).$$

1.36. Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad istim poljem F. Vektorski prostor V_1 je izomorfan vektorskom prostoru V_2 ako postoji bijekcija $f : V_1 \to V_2$ takva da je za svako $\alpha, \beta \in F$, $a, b \in V_1$

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b).$$

Preslikavanje f naziva se izomorfizam. Da je vektorski prostor V_1 izomorfan vektorskom prostoru V_2 zapisivaćemo sa $V_1 \simeq V_2$.

1.37. Neka je f izomorfizam vektorskog prostora $V_1(F)$ na vektorski prostor $V_2(F)$. Tada važi

a) $f(0_1) = 0_2$, (0_i je nula-vektor vektorskog prostora V_i, $i = 1, 2$),

b) ako je niz vektora $(a_1, \ldots, a_n)$ linearno nezavisan (zavisan) u V_1, onda je niz $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ linearno nezavisan (zavisan) u V_2,

c) ako je $L(a_1, \ldots, a_n) = V_1$, onda je $L(f(a_1), \ldots, f(a_n)) = V_2$,

d) ako je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza vektorskog prostora V_1, onda je $(f(a_1), \ldots, f(a_n))$ baza vektorskog prostora V_2.

1.38. Dva konačno dimenzionalna vektorska prostora nad istim poljem su izomorfna ako i samo ako su iste dimenzije.

Z A D A C I

1. Neka je F polje i $F^n = \{(a_1, \ldots, a_n) | a_i \in F\}$ skup svih uređenih n-torki elemenata iz F. Ako se sabiranje elemenata iz F^n i množenje elemenata iz F^n elementima iz F definišu na sledeći način:

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),$$

$$\alpha(a_1, \ldots, a_n) = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n), \quad \alpha \in F,$$

onda je F^n vektorski prostor nad F. Dokazati.

Rešenje. Neposredno iz osobina polja F sledi da je sabiranje unutrašnja, asocijativna i komutativna operacija na F^n. Neutralni elemenat za sabiranje je $(0, \ldots, 0)$, a suprotan elemenat za $(a_1, \ldots, a_n)$ je $(-a_1, \ldots, -a_n)$, što znači da je $(F^n, +)$ komutativna grupa. Ostali aksiomi vektorskog prostora takođe slede iz odgovarajućih osobina polja F, pa je F^n vektorski prostor nad F.

Za $n = 1$, s obzirom da ne pravimo razliku između 1-torke (a) i elementa a, sledi da je F vektorski prostor nad poljem F.

2. Neka je F polje i $F^\infty = \{(a_1, a_2, \ldots) | a_i \in F\}$ skup svih beskonačnih nizova elemenata iz F. Ako se sabiranje elemenata iz F^∞ i množenje elemenata iz F^∞ elementima iz F definišu na sledeći način:

$$(a_1, , a_2, \ldots) + (b_1, b_2, \ldots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots),$$

$$\alpha(a_1, a_2, \ldots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots), \quad \alpha \in F,$$

onda je F^∞ vektorski prostor nad F. Dokazati.

3. a) Neka je V skup svih geometrijskuh vektora (orijentisanih duži) u prostoru vezanih za tačku, sa zajedničkom početnom tačkom O. Dokazati da je V vektorski prostor nad poljem realnih brojeva ako se na uobičajeni način definišu sabiranje vektora (po pravilu paralelograma) i množenje vektora realnim brojem.

b) Dokazati da analogna tvrđenja važe za skupove vezanih vektora u ravni i na pravoj, a takođe i za skupove slobodnih vektora u prostoru, u ravni i na pravoj.

4. a) Neka je $F_n[x]$ skup svih polinoma po x stepena manjeg od n zajedno sa nula-polinomom[2], sa koeficijentima iz polja F. Dokazati da je $F_n[x]$ vektorski prostor nad poljem F u odnosu na uobičajene operacije sabiranja polinoma i množenja polinoma elementom iz F.

b) Dokazati da analogno tvrđenje važi i za skup $F[x]$ svih polinoma po x sa koeficijentima iz F.

Rešenje. a) Zbir dva polinoma stepena manjeg od n je polinom stepena manjeg od n, pa je sabiranje polinoma unutrašnja operacija na $F_n[x]$. Slično, ako polinom iz $F_n[x]$ pomnožimo skalarom, dobijamo polinom iz $F_n[x]$. Lako se pokazuje da je $(F_n[x], +)$ komutativna grupa čiji je neutralni elemenat nula-polinom, kao i da važe i ostali aksiomi vektorskog prostora.

5. Neka je $C[a,b]$ skup svih realnih neprekidnih funkcija definisanih na intervalu $[a,b]$. Ako se sabiranje elemenata iz $C[a,b]$ i množenje elementa iz $C[a,b]$ realnim brojem definišu na sledeći način:

– zbir dve funkcije f i g iz $C[a,b]$ je funkcija $f+g$ definisana sa

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{za svako } x \in [a,b],$$

– proizvod realnog broja α i funkcije f iz $C[a,b]$ je funkcija αf definisana sa

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \text{za svako } x \in [a,b],$$

onda je $C[a,b]$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Dokazati.

Rešenje. Operacija sabiranja je unutrašnja na $C[a,b]$ jer je zbir dve neprekidne funkcije neprekidna funkcija, a isto važi i za množenje funkcije realnim brojem. Asocijativnost i komutativnost operacije sabiranja slede iz odgovarajućih osobina realnih brojeva. Neutralni elemenat za sabiranje je nula-funkcija definisana sa $f(x) = 0$ za svako $x \in [a,b]$ koja je neprekidna. Za funkciju f suprotni elemenat je funkcija $-f$ definisana sa $(-f)(x) = -f(x)$ za svako $x \in [a,b]$. Kad je f neprekidna funkcija, onda je i $-f$ neprekidna. Ostali aksiomi vektorskog prostora slede iz osobina polja $\mathbb{R}$.

Napomena. Slično se može pokazati da je i skup $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ svih funkcija koje preslikavaju $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa analogno definisanim operacijama vektorski prostor

[2] S obzirom da nula-polinom nema definisan stepen, prilikom definisanja skupa $F_n[x]$ potrebno je navesti da tom skupu pripada i nula-polinom.

nad poljem $\mathbb{R}$, a analogno važi i za skup $\mathbb{R}^{[a,b]}$ svih funkcija koje preslikavaju $[a,b] \to \mathbb{R}$.

6. Neka je F polje a K potpolje polja F. Dokazati da je F vektorski prostor nad poljem K, ako se sabiranje vektora definiše kao sabiranje elemenata iz F, a proizvod αa skalara (elementa $\alpha \in K$) i vektora (elementa $a \in F$) kao proizvod elemenata α i a u polju F.

7. Neka je $V(F)$ vektorski prostor, S proizvoljan neprazan skup i $U = V^S$ skup svih preslikavanja skupa S u V. Ako se operacije sabiranja elemenata iz U i množenja elemenata iz U elementima iz F definišu na sledeći način: zbir dve funkcije f i g iz U je funkcija $f+g$ definisana sa

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{za svako } x \in S,$$

a proizvod skalara α iz F i funkcije f iz U je funkcija αf definisana sa

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad \text{za svako } x \in S,$$

onda je U vektorski prostor nad poljem F. Dokazati.

Rešenje. Ako su $f, g \in U$, $\alpha \in F$, onda je očigledno $f+g$, $\alpha f \in U$. Asocijativnost i komutativnost sabiranja na U slede iz odgovarajućih osobina sabiranja u vektorskom prostoru. Neutralni elemenat za sabiranje je nula-funkcija definisana sa $O(x) = 0$, za svako $x \in S$. Suprotni elemenat za preslikavanje $f \in U$ je preslikavanje $-f \in U$ definisano sa $(-f)(x) = -f(x)$, za svako $x \in S$. Prema tome, $(U, +)$ je komutativna grupa. Ostali aksiomi vektorskog prostora slede iz odgovarajućih osobina vektorskog prostora V. Na primer,

$$\begin{aligned} ((\alpha+\beta)f)(x) &= (\alpha+\beta)(f(x)) = \alpha f(x) + \beta f(x) = \\ &= (\alpha f)(x) + (\beta f)(x) = (\alpha f + \beta f)(x), \end{aligned}$$

pa je $(\alpha+\beta)f = \alpha f + \beta f$.

Napomena. Vektorski prostor $U(F)$ definisan u prethodnom zadatku, u posebnom slučaju za razne vrednosti S, V i F daje različite vektorske prostore. Tako, na primer,

– ako je $S = \{1, \dots, n\}$, $V = F$, onda je $U = F^n$,

– ako je $S = \mathbb{N}$, $V = F$, onda je $U = F^\infty$,

– ako je $S = [a,b]$, $V = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}$, onda je U vektorski prostor $\mathbb{R}^{[a,b]}$ svih realnih funkcija definisanih na intervalu $[a,b]$, opisan u napomeni posle zadatka 5.

8. Neka je $\mathbb{R}^+$ skup svih pozitivnih realnih brojeva. Dokazati da je $\mathbb{R}^+$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, ako se sabiranje vektora označeno sa

$\oplus$ i množenje vektora skalarom označeno sa $\odot$ definišu na sledeći način, $a, b \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$a \oplus b = ab,$$
$$\alpha \odot a = a^\alpha.$$

Rešenje. $(\mathbb{R}^+, \oplus)$ je komutativna grupa jer je skup pozitivnih realnih brojeva komutativna grupa u odnosu na množenje. Važe i ostali aksiomi vektorskog prostora:

1. $\alpha \odot (a \oplus b) = (a \oplus b)^\alpha = (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha = (\alpha \odot a)(\alpha \odot b) = (\alpha \odot a) \oplus (\alpha \odot b)$,
2. $(\alpha + \beta) \odot a = a^{\alpha+\beta} = a^\alpha a^\beta = (\alpha \odot a)(\beta \odot a) = (\alpha \odot a) \oplus (\beta \odot a)$,
3. $(\alpha\beta) \odot a = a^{\alpha\beta} = (a^\beta)^\alpha = \alpha \odot (a^\beta) = \alpha \odot (\beta \odot a)$,
4. $1 \odot a = a^1 = a$.

9. Neka je V skup svih uređenih parova realnih brojeva. Ispitati da li je V vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, ako se operacije sabiranja elemenata iz V i množenja elemenata iz V elementima iz $\mathbb{R}$ definišu na sledeći način, $\alpha, a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$\alpha(a, b) = (\alpha a, b).$$

Rešenje. $(V, +)$ je komutativna grupa jer je operacija $+$ definisana kao u $\mathbb{R}^2$ (zadatak 1).

1. $\alpha((a, b) + (c, d)) = \alpha(a + c, b + d) = (\alpha a + \alpha c, b + d) = (\alpha a, b) + (\alpha c, d) = \alpha(a, b) + \alpha(c, d)$,
3. $(\alpha\beta)(a, b) = ((\alpha\beta)a, b) = (\alpha(\beta a), b) = \alpha(\beta a, b) = \alpha(\beta(a, b))$,
4. $1(a, b) = (1a, b) = (a, b)$,
2. $(\alpha + \beta)(a, b) = (\alpha a + \beta a, b) = (\alpha a, b) + (\beta a, 0) \neq \alpha(a, b) + \beta(a, b)$, za $b \neq 0$,

pa ovaj aksiom nije zadovoljen, što znači da V nije vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.

Napomena. Algebarska struktura iz prethodnog zadatka zadovoljava sve aksiome vektorskog prostora sem aksioma

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

što znači da je ovaj aksiom nezavisan od ostalih aksioma vektorskog prostora (ne može se izvesti kao njihova posledica).

10. Dokazati da se aksiom komutativnosti sabiranja vektora može izvesti iz ostalih aksioma vektorskog prostora.

Rešenje. Neka je $(V,+)$ grupoid koji nad poljem F zadovoljava sve aksiome vektorskog prostora osim komutativnosti sabiranja vektora. Tada je za svako $a,b \in V$

$$(1+1)(a+b) = (1+1)a + (1+1)b = 1a + 1a + 1b + 1b = a + a + b + b,$$

a s druge strane,

$$(1+1)(a+b) = 1(a+b) + 1(a+b) = a + b + a + b.$$

Prema tome,

$$a + a + b + b = a + b + a + b,$$

a odatle je

$$a + b = b + a.$$

11. Dokazati nezavisnost aksioma $1a = a$ od ostalih aksioma vektorskog prostora.

Rešenje. Konstruisaćemo algebarsku strukturu za koju će važiti svi aksiomi vektorskog prostora sem aksioma $1a = a$.

Neka je $(V,+)$ ma koja komutativna grupa sa bar dva elementa, a F polje. Definišimo množenje elemenata iz V elementima iz F sa

$$\alpha a = 0, \quad \alpha \in F,\ a \in V,$$

gde je 0 neutralni elemenat grupe V.

Jednostavno se proverava da su za ovu algebarsku strukturu zadovoljeni svi aksiomi vektorskog prostora osim aksioma $1a = a$.

12. Neka je V skup uređenih parova realnih brojeva. Ispitati da li je V vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, ako su sabiranje elemenata iz V i množenje elemenata iz V realnim brojem definisani na sledeći način:

$$a) \quad (a,b) + (c,d) = (3a + 3d, -a - c),$$
$$\alpha(a,b) = (3\alpha b, -\alpha a).$$
$$b) \quad (a,b) + (c,d) = (a + c, b + d),$$
$$\alpha(a,b) = (\alpha^2 a, \alpha^2 b).$$

Rešenje.

a) Ne. Ne postoji neutralni elemenat za sabiranje vektora.

b) Ne. Ne važi aksiom $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

13. Dokazati tvrđenje 1.4.

Rešenje. Neka je V vektorski prostor nad poljem F, $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$, tako da za svako $\alpha, \beta \in F$, $a, b \in W$ važi $\alpha a + \beta b \in W$.

Treba dokazati da je sabiranje vektora unutrašnja operacija na W, da je proizvod skalara i vektora iz W vektor iz W i da je suprotni elemenat svakog vektora iz W vektor iz W. Ostale osobine važe u V, pa samim tim važe i u podskupu W skupa V.

$a, b \in W \Rightarrow 1a + 1b \in W \Rightarrow a + b \in W,$

$\alpha \in F,\ a \in W \ \Rightarrow \alpha a + 0a \in W \Rightarrow \alpha a \in W,$

$a \in W \Rightarrow (-1)a + 0a \in W \Rightarrow -a \in W.$

Ako je W potprostor vektorskog prostora $V(F)$, onda je očevidno za svako $\alpha, \beta \in F$, $a, b \in W$ $\ \alpha a + \beta b \in W$.

14. Da li sledeći podskupovi odgovarajućih vektorskih prostora čine potprostore:

a) U $\mathbb{R}^n$ – skup svih vektora čije su koordinate celi brojevi.

b) U vektorskom prostoru geometrijskih vektora vezanih za tačku (zadatak 3) – skup svih vektora čije krajnje tačke pripadaju jednoj pravoj.

c) U $\mathbb{R}^n$ – skup svih vektora $(x_1, \ldots, x_n)$ čije koordinate zadovoljavaju uslov

$$x_1 + \cdots + x_n = a,$$

gde je a fiksiran realan broj.

d) U bilo kom vektorskom prostoru $V(F)$ – skup svih vektora oblika

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n, \quad \alpha_i \in F,$$

gde su $a_1, \ldots, a_n$ dati vektori.

e) U $\mathbb{R}^4$ – skup svih vektora (x_1, x_2, x_3, x_4) čije koordinate zadovoljavaju uslov

i) $x_1 = 2x_2, \quad x_3 = x_1 + x_2,$

ii) $x_1 = x_2 = 0.$

15. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^\infty$ (zadatak 2) skupovi

$$S = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid \ a_i \in \mathbb{R}, \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0\},$$

$$T = \{(a_1, a_2, \ldots) \mid \ a_i \in \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\},$$

su potprostori i $T \subseteq S$. Dokazati.

16. Da li sledeći skupovi funkcija čine potprostore vektorskog prostora $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ svih realnih funkcija (zadatak 5, napomena):

a) skup funkcija za koje je $3f(0) = 2f(1)$,

b) skup funkcija za koje je $f(1) = f(0) + 1$,

c) skup svih polinoma stepena manjeg od n zajedno sa nula-polinomom,

d) skup svih polinoma stepena n zajedno sa nula-polinomom,

e) skup svih konstanti, tj. funkcija oblika $f(x) = a$ za svako $x \in \mathbb{R}$,

f) skup svih funkcija koje imaju neprekidan prvi izvod.

Rešenje. a) Ako je $3f_i(0) = 2f_i(1), \quad i = 1, 2$, neka je $g(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$.

Tada je

$$g(0) = \alpha f_1(0) + \beta f_2(0) = \frac{2}{3}\alpha f_1(1) + \frac{2}{3}\beta f_2(1),$$

pa je

$$3g(0) = 2(\alpha f_1(1) + \beta f_2(1)) = 2g(1).$$

Prema tome, skup ovih funkcija je potprostor.

b) Ne. c) Da. d) Ne. e) Da. f) Da.

17. Neka su $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, n$, i neka je W skup svih uređenih n-torki $(x_1, \dots, x_n)$ realnih brojeva za koje važi

$$\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = 0,
\end{gathered}$$

tj. W je skup svih rešenja homogenog sistema linearnih jednačina sa n nepoznatih. Dokazati da je W potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

Rešenje. Neka su $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n)$ rešenja sistema i α, $\beta \in \mathbb{R}$. Za sve $i = 1, 2, \dots, n$ važi

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\alpha y_k + \beta z_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik} y_k + \beta \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k = \alpha 0 + \beta 0 = 0,$$

tako da je $\alpha y + \beta z$ takođe rešenje datog sistema.

18. Odrediti parametar t tako da u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ skup W vektora (x_1, x_2, x_3, x_4) čije koordinate zadovoljavaju uslov

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - t(x_1^2 + x_4^2) = 0$$

bude potprostor.

Rešenje. Ako je W potprostor vektorskog prostora V, onda se vektor $a = (1, 0, t-3, 0)$ nalazi u W, a tada i vektor $2a = (2, 0, 2t-6, 0)$ mora pripadati W. Odatle sledi $6 + 2t - 6 - 4t = 0$, odnosno $t = 0$.

Lako se proverava da je za $t = 0$ W potprostor.

19. U $\mathbb{R}^3$ ispitati linearnu zavisnost vektora

a) $(1,2,0)$, $(0,1,-1)$, $(2,0,1)$,

b) $(1,2,3)$, $(1,0,-1)$, $(0,2,4)$.

Rešenje. a) Iz

$$\alpha(1,2,0) + \beta(0,1,-1) + \gamma(2,0,1) = 0,$$

dobija se

$$\begin{aligned} \alpha + 2\gamma &= 0, \\ 2\alpha + \beta &= 0, \\ -\beta + \gamma &= 0, \end{aligned}$$

odakle sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tj. ovaj niz vektora je linearno nezavisan.

b) Kako je

$$-1(1,2,3) + 1(1,0,-1) + 1(0,2,4) = 0$$

ovi vektori čine linearno zavisan niz.

20. U $\mathbb{R}^3$ za koje vrednosti a, b su vektori $(a, b, 3)$ i $(2, a-b, 1)$ linearno nezavisni ?

21. Ako su u vektorskom prostoru vektori $a_1, \ldots, a_n$ linearno nezavisni, da li su i vektori

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \\ b_2 &= a_1 + a_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ b_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \end{aligned}$$

linearno nezavisni ?

Rešenje. Neka je

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n = 0.$$

Tada je

$$\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \cdots + \alpha_n b_n = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 (a_1 + a_2) + \cdots + \alpha_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) =$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) a_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_n) a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0.$$

Odavde se dobija

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= 0, \\ \alpha_2 + \cdots + \alpha_n &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_n &= 0, \end{aligned}$$

pa sledi da je $\alpha_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n$, što znači da su vektori $b_1, b_2, \ldots, b_n$ linearno nezavisni.

22. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}$ realnih brojeva nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ (zadatak 6) dokazati da su vektori 1, $\sqrt{2}$ i $\sqrt{3}$ linearno nezavisni.

23. a) U vektorskom prostoru uređenih trojki kompleksnih brojeva nad poljem racionalnih brojeva ispitati linearnu zavisnost vektora

$$a = (1 + 3i, 5 + i, 3 - 2i), \quad b = (2 - i, -4 + 2i, -1 + 3i), \quad c = (i, 2, 1 - i).$$

b) U vektorskom prostoru uređenih trojki kompleksnih brojeva nad poljem

– realnih brojeva,

– kompleksnih brojeva,

ispitati linearnu zavisnost vektora

$$d = (3 - 2i, i, 1 + i), \quad e = (1, -i, 1 - i), \quad f = (4 - i, 1, 3 + i).$$

Rešenje. a) Neka je $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$. Tada je

$$\alpha(1 + 3i) + \beta(2 - i) + \gamma i = 0,$$
$$\alpha(5 + i) + \beta(-4 + 2i) + \gamma 2 = 0,$$
$$\alpha(3 - 2i) + \beta(-1 + 3i) + \gamma(1 - i) = 0,$$

odnosno,

$$\begin{array}{lll} \alpha + 2\beta = 0, & 5\alpha - 4\beta + 2\gamma = 0, & 3\alpha - \beta + \gamma = 0, \\ 3\alpha - \beta + \gamma = 0, & \alpha + 2\beta = 0, & -2\alpha + 3\beta - \gamma = 0. \end{array}$$

Odatle je $\alpha = -2\beta, \quad \gamma = 7\beta$, pa sistem ima netrivijalna racionalna rešenja, dakle, dati niz vektora je linearno zavisan.

b) Neka je $\alpha d + \beta e + \gamma f = 0$. Tada je

$$\alpha(3-2i) + \beta + \gamma(4-i) = 0,$$

$$\alpha i - \beta i + \gamma = 0,$$

$$\alpha(1+i) + \beta(1-i) + \gamma(3+i) = 0,$$

a rešenje ovog sistema je $\alpha = -\gamma,\ \ \beta = -(1+i)\gamma$. Prema tome, sistem ima netrivijalna rešenja nad poljem kompleksnih brojeva, pa je dati niz vektora linearno zavisan nad tim poljem. Sistem nema netrivijalnih realnih rešenja, jer β i γ ne mogu istovremeno biti realni, pa je nad poljem realnih brojeva dati niz linearno nezavisan.

24. U vektorskom prostoru svih realnih neprekidnih funkcija (zadatak 5) ispitatati linearnu zavisnost sledećih nizova vektora:

a) $f(x) = x,\ \ g(x) = \sin x,\ \ h(x) = \cos x,$

b) $f(x) = 1,\ \ g(x) = \sin^2 x,\ \ h(x) = \cos^2 x,$

c) $f(x) = e^{2x},\ \ g(x) = e^{3x},\ \ h(x) = x.$

Rešenje. a) Neka je $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$. Tada za svako $x \in \mathbb{R}$ važi

$$\alpha x + \beta \sin x + \gamma \cos x = 0.$$

Uzimajući za x posebne vrednosti, dobija se za

$x = 0, \qquad \alpha 0 + \beta 0 + \gamma 1 = 0,$

$x = \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha \frac{\pi}{2} + \beta 1 + \gamma 0 = 0,$

$x = \pi, \qquad \alpha \pi + \beta 0 - \gamma 1 = 0.$

Jedino rešenje ovog sistema je $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pa je niz vektora f, g, h linearno nezavisan.

b) Vektori su linearno zavisni jer je $1f - 1g - 1h = 0$.

c) Neka je $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$. Tada je za

$x = 0, \qquad \alpha 1 + \beta 1 + \gamma 0 = 0,$

$x = 1, \qquad \alpha e^2 + \beta e^3 + \gamma 1 = 0,$

$x = 2, \qquad \alpha e^4 + \beta e^6 + \gamma 2 = 0.$

Determinanta ovog sistema jednačina je

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^2 & e^3 & 1 \\ e^4 & e^6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^3 & 1 \\ e^6 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e^2 & 1 \\ e^4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2e^3 - e^6 - 2e^3 + e^4 = e^2(e-1)(2 - e^2(e+1)) \neq 0.$$

Dakle, sistem ima samo trivijalno rešenje, pa je niz vektora f, g i h linearno nezavisan.

25. Neka su $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ realni brojevi. Dokazati da je u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (zadatak 5, napomena) niz vektora $e^{a_1 x}, \dots, e^{a_n x}$ linearno nezavisan.

Rešenje. Pretpostavimo da je dati niz linearno zavisan, tj. da postoje $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, od kojih je bar jedan različit od nule, tako da je za svako $x \in \mathbb{R}$

$$\alpha_1 e^{a_1 x} + \cdots + \alpha_n e^{a_n x} = 0.$$

Neka je k najveći broj iz skupa $\{1, \dots, n\}$ takav da je $\alpha_k \neq 0$. Onda je

$$\alpha_1 e^{a_1 x} + \cdots + \alpha_k e^{a_k x} = 0,$$

odnosno

$$\alpha_1 e^{(a_1 - a_k)x} + \cdots + \alpha_{k-1} e^{(a_{k-1} - a_k)x} + \alpha_k = 0.$$

S obzirom da $e^{(a_i - a_k)x}$ teži nuli kad x teži beskonačnosti, za dovoljno veliko x biće

$$|\alpha_1 e^{(a_1 - a_k)x} + \cdots + \alpha_{k-1} e^{(a_{k-1} - a_k)x}| < |\alpha_k|,$$

što je kontradikcija. Dakle, dati niz je linearno nezavisan.

26. Neka je $(a_1, \dots, a_n)$ baza vektorskog prostora $V(\mathbb{R})$ i neka su $x = \sum_1^n \alpha_i a_i$ i $y = \sum_1^n \beta_i a_i$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ nenula vektori vektorskog prostora V. Ako je $\sum_1^n \alpha_i \beta_i = 0$, dokazati da su x i y linearno nezavisni.

Rešenje. Pretpostavimo da su x i y linearno zavisni. Tada je $x = \gamma y$, gde je $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Odatle sledi

$$x = \gamma \sum_1^n \beta_i a_i = \sum_1^n \alpha_i a_i,$$

pa je

$$\alpha_i = \gamma \beta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

i

$$0 = \sum_1^n \alpha_i \beta_i = \gamma \sum_1^n \beta_i^2 \neq 0.$$

S obzirom na dobijenu kontradikciju, x i y su linearno nezavisni.

27. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ dati su vektori

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & (1, a, a, \dots, a, a), \\ x_2 & = & (a-1, 2, a, \dots, a, a), \\ x_3 & = & (a-2, a, 3, \dots, a, a), \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ x_{n-1} & = & (a-n+2, a, a, \dots, n-1, a), \\ x_n & = & (a-n+1, a, a, \dots, a, n). \end{array}$$

Za koje vrednosti realnog parametra a ovi vektori čine linearno nezavisan niz ?

Rešenje. Neka je $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. Tada je

$$\begin{array}{l} \alpha_1 1 + \alpha_2(a-1) + \alpha_3(a-2) \cdots + \alpha_n(a-n+1) = 0, \\ \alpha_1 a + \alpha_2 2 + \alpha_3 a \cdots + \alpha_n a = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1 a + \alpha_2 a + \alpha_3 a \cdots + \alpha_n n = 0. \end{array}$$

Dati niz vektora je linearno nezavisan ako i samo ako je determinanta ovog homogenog sistema linearnih jednačina po $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ različita od nule.

$$\begin{vmatrix} 1 & a-1 & a-2 & \dots & a-n+2 & a-n+1 \\ a & 2 & a & \dots & a & a \\ a & a & 3 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & n-1 & a \\ a & a & a & \dots & a & n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a-2 & a-3 & \dots & a-n+1 & a-n \\ a & 2-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & 3-a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & \dots & n-1-a & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & n-a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1+(n-1)a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 2-a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 0 & 3-a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & \dots & n-1-a & 0 \\ a & 0 & 0 & \dots & 0 & n-a \end{vmatrix} =$$

$$= (1 + (n-1)a)(2-a)(3-a)\dots(n-a).$$

Niz je linearno nezavisan ako i samo ako je $a \neq \frac{1}{1-n}, 2, 3, \dots, n$.

28. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{2k+1}$ dati su vektori

$$x_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{i,2k+1}), \quad i = 1, 2, \dots, 2k+1,$$

gde je $a_{ij} = 0$ kad je $i + j$ paran broj. Ispitati linearnu zavisnost vektora $x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}$.

Rezultat. Niz vektora $x_1, x_2, \dots, x_{2k+1}$ je linearno zavisan.

29. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ odrediti dimenziju potprostora W generisanog vektorima

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & (p+1, p, p \dots, p), \\ a_2 & = & (p, p + \frac{1}{2}, p, \dots, p), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_n & = & (p, p, \dots, p, p + \frac{1}{n}), \end{array}$$

u zavisnosti od realnog parametra p.

Rezultat. Za $p = -\frac{2}{n(n+1)}$, $\dim W = n - 1$, a za $p \neq -\frac{2}{n(n+1)}$, $\dim W = n$.

30. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ dati su vektori

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \\ x_2 & = & (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ x_n & = & (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}). \end{array}$$

Ako je

$$|a_{ii}| > |a_{1i}| + \dots + |a_{i-1,i}| + |a_{i+1,i}| + \dots + |a_{ni}|, \quad i = 1, \dots, n,$$

dokazati da je niz vektora $(x_1, \dots, x_n)$ linearno nezavisan.

Rešenje. Pretpostavimo da je niz $(x_1, \dots, x_n)$ linearno zavisan, tj. postoje skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ od kojih je bar jedan različit od nule, tako da je

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0.$$

To znači da je

$$\alpha_1 a_{1i} + \dots + \alpha_n a_{ni} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Neka je među brojevima $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ onaj čija je apsolutna vrednost najveća $\alpha_k (\neq 0)$, tj. $|\alpha_k| \geq |\alpha_j|$, $j = 1, \ldots, n$. Tada iz

$$\alpha_k a_{kk} = -\alpha_1 a_{1k} - \cdots - \alpha_{k-1} a_{k-1,k} - \alpha_{k+1} a_{k+1,k} - \cdots - \alpha_n a_{nk},$$

sledi

$$\begin{aligned} |\alpha_k||a_{kk}| &\leq |\alpha_1||a_{1k}| + \cdots + |\alpha_{k-1}||a_{k-1,k}| + |\alpha_{k+1}||a_{k+1,k}| + \cdots + |\alpha_n||a_{nk}| \\ &\leq |\alpha_k||a_{1k}| + \cdots + |\alpha_k||a_{k-1,k}| + |\alpha_k||a_{k+1,k}| + \cdots + |\alpha_k||a_{nk}| \end{aligned}$$

tj.

$$|a_{kk}| \leq |a_{1k}| + \cdots + |a_{k-1,k}| + |a_{k+1,k}| + \cdots + |a_{nk}|,$$

a to protivreči datom uslovu.

31. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ nenula vektori konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V. Ako su a_1 i a_n linearno nezavisni, a_1 i $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k$ linearno zavisni, a_n i $\sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k$ linearno zavisni, dokazati da su i a_i i $\sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} a_k$ linearno zavisni za svako $i = 1, \ldots, n$.

Rešenje. Pošto su a_1 i $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k$ linearno zavisni postoje skalari α, β, od kojih je bar jedan različit od 0, tako da je

$$\alpha a_1 + \beta \sum_{k=2}^{n} a_k = 0.$$

Ovde je $\beta \neq 0$ (jer bi u protivnom bilo $a_1 = 0$), pa sledi $(\frac{\alpha}{\beta} - 1) a_1 = -\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Analogno je

$$\gamma a_n + \delta \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 0,$$

i $(\frac{\gamma}{\delta} - 1) a_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Iz prethodnog sledi da je $(\frac{\alpha}{\beta}-1)a_1 = (\frac{\gamma}{\delta}-1)a_n$, a pošto su a_1 i a_n linearno nezavisni mora biti $\frac{\alpha}{\beta}-1 = \frac{\gamma}{\delta}-1 = 0$, tj. $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$, pa je

$$a_i = -\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_k, \quad i = 1, \ldots, n,$$

dakle, vektori a_i i $\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_k$ su linearno zavisni za svako $i = 1, \ldots, n$.

32. U vektorskom prostoru V dat je niz vektora $(a_1, \ldots, a_n)$. Ako se svaki vektor vektorskog prostora V može prikazati kao linearna kombinacija vektora $(a_1, \ldots, a_n)$ i postoji vektor $b \in V$ koji se na samo jedan način može prikazati kao linearna kombinacija vektora $(a_1, \ldots, a_n)$, onda je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza vektorskog prostora V. Dokazati.

Rešenje. S obzirom na 1.20 dovoljno je dokazati da se svaki vektor $x \in V$ može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija vektora $(a_1, \ldots, a_n)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je se x može prikazati na dva načina pomoću $(a_1, \ldots, a_n)$:

$$x = \sum_{1}^{n} \alpha_i a_i = \sum_{1}^{n} \beta_i a_i,$$

odakle je $\sum\limits_{1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) a_i = 0$. b se može prikazati pomoću $(a_1, \ldots, a_n)$ tačno na jedan način $b = \sum\limits_{1}^{n} \gamma_i a_i$, međutim,

$$b = b + 0 = \sum_{1}^{n} \gamma_i a_i + \sum_{1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) a_i = \sum_{1}^{n} (\gamma_i + \alpha_i - \beta_i) a_i,$$

pa, s obzirom na jedinstvenost prikaza vektora b, sledi $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$.

33. Neka su S i T konačno dimenzionalni potprostori vektorskog prostora V, takvi da je $S \subseteq T$ i $\dim S = \dim T$. Dokazati da je $S = T$.

Rešenje. Neka je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza potprostora S. Ti vektori pripadaju i potprostoru T, čine linearno nezavisan niz, pa se na osnovu 1.23 taj niz može dopuniti do baze potprostora T. Kako je, međutim, $\dim S = \dim T = n$, sledi da je niz $(a_1, \ldots, a_n)$ baza i potprostora T.

34. Da li u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ vektori $(1, 2, -1)$ i $(2, -3, 2)$ generišu isti potprostor koji generišu vektori $(4, 1, 3)$ i $(-3, 1, 2)$?

Rezultat. Ne, jer $(4, 1, 3)$ nije linearna kombinacija vektora $(1, 2, -1)$ i $(2, -3, 2)$ (nije ni $(-3, 1, 2)$).

35. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$, S je potprostor generisan vektorima $(1, 0, -1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, T je potprostor generisan vektorima $(2, 1, -1)$, $(1, -1, 0)$ i R je potprostor generisan vektorima $(2, 1, -1)$, $(1, 2, 1)$. Ispitati kakav odnos postoji među skupovima S, T i R u odnosu na relaciju sadržavanja ($\subseteq$).

Rezultat. $S = R$, T je neuporedivo sa S i R.

36. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ naći jedan maksimalan linearno nezavisan podniz niza vektora:

$$a = (4, 1, 2, -3),\ b = (1, 0, 2, 1),\ c = (6, 1, 0, 3),$$
$$d = (0, 0, -3, 3),\ e = (3, 1, 1, -5).$$

Rešenje. Formiraćemo linearnu kombinaciju ovog niza vektora i izjednačiti je sa 0

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e = 0. \tag{1}$$

Prethodna vektorska jednačina ekvivalentna je sa sledećim sistemom skalarnih jednačina

$$\begin{array}{rrrrrl} 4\alpha & +\ \beta & +6\gamma & & +3\varepsilon & = 0 \\ \alpha & & +\ \gamma & & +\ \varepsilon & = 0 \\ 2\alpha & +2\beta & & -3\delta & +\ \varepsilon & = 0 \\ -3\alpha & +\ \beta & +3\gamma & +3\delta & -5\varepsilon & = 0 \end{array}$$

a rešenje ovog sistema je $\alpha = -5\gamma - 3\delta$, $\beta = 2\gamma + 3\delta$, $\varepsilon = 4\gamma + 3\delta$.

Vektori uz koje stoje zavisne promenljive ovog sistema (to su vektori a, b i e) čine jedan maksimalan linearno nezavisan podniz datog niza. Sada ćemo to i dokazati.

a, b i e su linearno nezavisni. Zaista, ako bi ovi vektori bili linearno zavisni, onda bi za neke skalare α, β i ε, od kojih je bar jedan različit od nule, važilo

$$\alpha a + \beta b + 0c + 0d + \varepsilon e = 0,$$

ali tada, s obzirom na rešenje sistema, sledi $\alpha = -5\gamma - 3\delta = 0$, $\beta = 2\gamma + 3\delta = 0$, $\varepsilon = 4\gamma + 3\delta = 0$ (jer je $\gamma = \delta = 0$).

Niz vektora (a, b, e) je maksimalan linearno nezavisan podniz niza (a, b, c, d, e), jer se svaki od preostalih vektora c i d može dobiti kao linearna kombinacija vektora a, b i e. Stavljajući u (1) najpre $\gamma = 1$ i $\delta = 0$, dobijamo da je c linearna kombinacija a, b i e, a zatim za $\gamma = 0$ i $\delta = 1$ dobijamo da je d linearna kombinacija a, b i e.

37. Neka je $(a_1, \dots, a_n)$ niz vektora vektorskog prostora V i $(a_1, \dots, a_k)$, $(k < n)$, jedan njegov maksimalan linearno nezavisan podniz. Šta se može zaključiti o vektorima $a_{k+1}, \dots, a_n$ ako:

a) dati niz vektora ima tačno jedan maksimalan linearno nezavisan podniz,

b) dati niz vektora ima tačno dva maksimalna linearno nezavisna podniza.

Rešenje.

a) Pretpostavimo da je $a_m \neq 0$ za neko $m > k$. Jednočlan niz (a_m) je linearno nezavisan, pa može biti proširen do nekog maksimalnog linearno nezavisnog podniza niza $(a_1, \dots, a_n)$. Međutim, tada bi postojala dva maksimalna linearno nezavisna podniza. Dakle, mora biti $a_i = 0$ za sve $i > k$.

b) Neka je $a_m \neq 0$ za neko $m > k$. Niz vektora $(a_1, \dots, a_k, a_m)$ je linearno zavisan, pa postoje skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_m$, koji nisu svi jednaki nuli, takvi da je

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k + \alpha_m a_m = 0.$$

Mora biti $\alpha_m \neq 0$ jer su $a_1, \dots, a_k$ linearno nezavisni, a, takođe, i $\alpha_j \neq 0$ za neko $j \leq k$. Tada je $a_m = -\alpha_m^{-1}(\alpha_1 a_1 + \dots, \alpha_k a_k)$ i $a_j = -\alpha_j^{-1}(\alpha_1 a_1 + \dots, \alpha_{j-1} a_{j-1} + \alpha_{j+1} a_{j+1} + \dots, \alpha_k a_k + \alpha_m a_m)$. Prema tome, $a_m \in L(a_1 \dots, a_k)$ i $a_j \in L(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k, a_m)$, pa je

$$L(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k, a_m) = L(a_1 \dots, a_k).$$

Kako je $\dim(L(a_1, \dots, a_k)) = k$, niz vektora $(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_k, a_m)$ je linearno nezavisan i to je maksimalan linearno nezavisan podniz. Kako ne postoji više ni jedan maksimalan linearno nezavisan podniz, mora biti $\alpha_i = 0$ za $i \neq j, m$ i $a_i = 0$ za $i > k$ i $i \neq m$. Dakle, tačno jedan od vektora $a_{k+1}, \dots, a_n$ je različit od nule i on je kolinearan sa jednim od vektora $a_1, \dots, a_k$.

38. Neka su $a_1, \dots, a_n$ vektori vektorskog prostora V. Dokazati:

a) Ako je $L(a_1, \dots, a_n) = V$, onda je i

$$L(a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_{n-1} - a_n, a_n) = V.$$

b) Ako je niz $(a_1, \dots, a_n)$ linearno nezavisan, onda je i niz

$$(a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_{n-1} - a_n, a_n)$$

linearno nezavisan.

39. Neka je u vektorskom prostoru V, $(a_1, \dots, a_n)$ linearno nezavisan niz vektora i $b \in V$. Ako je niz $(a_1 + b, \dots, a_n + b)$ linearno zavisan, dokazati da onda $b \in L(a_1 + b, \dots, a_n + b)$.

40. Dokazati tvrđenja 1.15, 1.18 i 1.19.

41. Dokazati da je $(x^2 + x, x^2 - x, x + 1)$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}_3[x]$. Prikazati vektor $-x^2 + 2x + 3$ pomoću te baze.

Uputstvo. Kako dati niz ima tri vektora i $\dim(\mathbb{R}_3[x]) = 3$, dovoljno je pokazati da je taj niz linearno nezavisan.

42. Niz vektora $a = (3, 1, 4, 2)$, $b = (0, -1, 2, 1)$ dopuniti do baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$.

Rešenje. I način

Dati vektori su linearno nezavisni, pa se mogu dopuniti do baze. Uzećemo jednu bazu vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, na primer, standardnu bazu $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$, i formirati niz vektora a, b, e_1, e_2, e_3, e_4 koji generiše vektorski prostor $\mathbb{R}^4$. Iz tog niza treba izdvojiti jedan maksimalan linearno nezavisan podniz koji sadrži vektore a i b i to će biti tražena baza.

Iz

$$\alpha a + \beta b + \gamma e_1 + \delta e_2 + \varepsilon e_3 + \varphi e_4 = 0,$$

sledi

$$\begin{array}{llllll} 3\alpha & & +\gamma & & & = 0 \\ \alpha & -\beta & & +\delta & & = 0 \\ 4\alpha & +2\beta & & & +\varepsilon & = 0 \\ 2\alpha & +\beta & & & +\varphi & = 0 \end{array}$$

Ovaj sistem treba rešiti tako da α i β budu zavisne promenljive, dobija se $\alpha = \frac{1}{3}(\delta + \varphi)$, $\beta = \frac{1}{3}(2\delta - \varphi)$, $\gamma = \delta + \varphi$, $\varepsilon = 2\varphi$. Traženu bazu čine vektori a, b, e_1, e_3 (v. zadatak 36).

II način

Umesto da se vektori standardne baze dodaju datom nizu odjednom, mogu se dodavati jedan po jedan.

Najpre dodajemo e_1, dobijamo niz (a, b, e_1) i proveravamo da li je ovaj niz linearno nezavisan. Iz

$$\alpha a + \beta b + \gamma e_1 = 0,$$

sledi $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tj. niz (a, b, e_1) je linearno nezavisan. Zatim dodajemo vektor e_2, pa ispitujemo linearnu zavisnost niza (a, b, e_1, e_2). Iz

$$\alpha a + \beta b + \gamma e_1 + e_2 = 0,$$

sledi $\alpha = -\frac{1}{3}\delta$, $\beta = \frac{2}{3}\delta$, $\gamma = \delta$, što znači da je ovaj niz linearno zavisan, pa e_2 odbacujemo. Sada umesto vektora e_2 dodajemo vektor e_3 i ispitujemo linearnu zavisnost niza (a, b, e_1, e_3). Dobija sa da je ovaj niz linearno nezavisan, dakle, taj niz je tražena baza.

43. Dokazati da ne postoji polje F različito od polja kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ i različito od polja realnih brojeva $\mathbb{R}$, takvo da je

$$\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}.$$

Rešenje. Polje $\mathbb{C}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$, a polje $\mathbb{R}$ posmatrano kao vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ je potprostor vektorskog prostora $\mathbb{C}$ (v. zadatak 6). Pri tom je $\dim \mathbb{C} = 2$ (jedna baza prostora $\mathbb{C}$ je $(1, i)$), a $\dim \mathbb{R} = 1$. Polje F za koje je $\mathbb{R} \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$, posmatrano kao vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ je dimenzije $1 \leq \dim F \leq 2$. Dakle, $\dim F = 1$ ili $\dim F = 2$, pa na osnovu zadatka 33 sledi da mora biti $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$.

44. U vektorskom prostoru $\mathbb{C}^\infty$ (v. zadatak 2) neka je S skup svih beskonačnih nizova $\{u_n\} = (u_1, u_2, \ldots)$ koji zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_k u_{n-k}, \quad \text{za } n > k,$$

gde je k pozitivan ceo broj, a $a_1, \ldots, a_k$ su fiksirani kompleksni brojevi.

a) Dokazati da je S potprostor vektorskog prostora $\mathbb{C}^\infty$.

b) Naći jednu bazu potprostora S.

Rešenje. a) Neka $\{u_n\}$, $\{v_n\} \in S$ i $\{w_n\} = \{u_n\} + \{v_n\}$. Onda je

$$w_n = u_n + v_n = \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i} + \sum_{i=1}^{k} a_i v_{n-i} = \sum_{i=1}^{k} a_i w_{n-i},$$

a to znači da $\{w_n\} \in S$.

Takođe, ako je $\{t_n\} = \lambda\{u_n\}$, onda je

$$t_n = \lambda u_n = \lambda \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i} = \sum_{i=1}^{k} a_i t_{n-i},$$

a to znači da $\{t_n\} \in S$.

b) Ma koji niz $\{u_n\}$ iz S potpuno određuju njegovih prvih k članova $u_1, \dots, u_k$. Označimo sa $\{e_n^{(i)}\}$, $i = 1, \dots, k$, niz čijih su prvih k članova nule, osim i-tog člana koji je 1, dakle, $\{e_n^{(1)}\} = (\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{k}, \dots)$, $\{e_n^{(2)}\} = (\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_{k}, \dots)$ itd.

Bilo koji niz $\{u_n\}$ iz S može se prikazati kao

$$\{u_n\} = u_1\{e_n^{(1)}\} + \cdots + u_k\{e_n^{(k)}\},$$

pa nizovi $\{e_n^{(1)}\}, \dots, \{e_n^{(k)}\}$ generišu potprostor S. Oni su i linearno nezavisni jer iz

$$\alpha_1(\underbrace{1, 0, \dots, 0}_{k}, \dots) + \cdots + \alpha_k(\underbrace{0, \dots, 0, 1}_{k}, \dots) = 0$$

sledi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Dakle, $(\{e_n^{(1)}\}, \dots, \{e_n^{(k)}\})$ je baza potprostora S.

45. Neka je S m-dimenzionalni potprostor n-dimenzionalnog vektorskog prostora V, pri čemu je $m < n$. Dokazati da postoji baza prostora V u kojoj se ne nalazi nijedan vektor iz S.

Rešenje. Neka je $(a_1, \dots, a_n)$ proizvoljna baza prostora V. U ovoj bazi nalazi se bar jedan vektor koji nije u S, jer bi u suprotnom u S postojao niz od $n (> m)$ linearno nezavisnih vektora. Neka $a_k \notin S$. Formirajmo niz vektora b_i, $i = 1, \dots, n$, na sledeći način:

$$b_i = \begin{cases} a_i, & a_i \notin S, \\ a_i - a_k, & a_i \in S. \end{cases}$$

Dokažimo da je $(b_1, \dots, b_n)$ baza prostora V koja ispunjava dati uslov.

Pre svega, nijedan vektor ovog niza nije iz potprostora S. Ako $a_i \notin S$, tada, naravno, i $b_i \notin S$, a ako $a_i \in S$, onda $b_i \notin S$, jer bi u suprotnom vektor $a_k = a_i - b_i$ pripadao skupu S.

Dalje, dokažimo da $a_i \in L(b_1, \dots, b_n)$, $i = 1, \dots, n$. Ako $a_i \notin S$, tada je $a_i = b_i$, a ako $a_i \in S$, tada je $a_i = b_i + a_k = b_i + b_k$.

Dakle, dokazali smo da je

$$V = L(a_1, \dots, a_n) \subseteq L(b_1, \dots, b_n),$$

odnosno $V = L(b_1, \dots, b_n)$. U n-dimenzionalnom prostoru svaki niz generatora sa n članova je baza (1.29), pa je $(b_1, \dots, b_n)$ baza vektorskog prostora V.

46. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$, S je potprostor svih vektora čija je prva koordinata 0, a T je potprostor generisan vektorima $(1,1,1)$, $(2,3,0)$. Odrediti potprostor $S \cap T$.

Rešenje. Ako $a \in T$, onda je $a = \alpha(1,1,1) + \beta(2,3,0) = (\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \alpha)$. Ako $a \in S \cap T$, onda je $\alpha + 2\beta = 0$, tj. $\alpha = -2\beta$, pa je $a = (0, \beta, -2\beta) = \beta(0,1,-2)$. Prema tome, $S \cap T$ je potprostor generisan vektorom $(0,1,-2)$.

47. Neka su U i V potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$

$$U = \{(a,b,c,d) \mid b + c + d = 0\},$$

$$V = \{(a,b,c,d) \mid a + b = 0,\ c = 2d\}.$$

Odrediti baze i dimenzije potprostora $U, V, U \cap V, U + V$.

Rešenje. Ako $x = (a,b,c,d) \in U$, tada je $x = (a,b,c,-b-c) = (a,0,0,0) + (0,b,0,-b) + (0,0,c,-c) = a(1,0,0,0) + b(0,1,0,-1) + c(0,0,1,-1)$. Vektori $(1,0,0,0)$, $(0,1,0,-1)$ i $(0,0,1,-1)$ generišu U, a lako je proveriti da čine linearno nezavisan niz. Prema tome, oni čine jednu bazu potprostora U, pa je $\dim U = 3$.

Slično tome, ako $x = (a,b,c,d) \in V$, tada je $x = (a,-a,2d,d) = a(1,-1,0,0) + d(0,0,2,1)$, pa je $\dim V = 2$.

$U \cap V = \{(a,b,c,d) \mid b+c+d = 0,\ a+b = 0,\ c = 2d\}$, a rešenje sistema jednačina koji definiše $U \cap V$ je

$$b = -3d,\ a = 3d,\ c = 2d.$$

Dakle, ako $x \in U \cap V$, tada je $x = (3d, -3d, 2d, d) = d(3,-3,2,1)$, pa je $\dim(U \cap V) = 1$. Na osnovu 1.34 sledi da je $\dim(U + V) = 4$, pa je $U + V = \mathbb{R}^4$.

48. Neka je S potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ generisan vektorima $a = (1,0,0,1)$, $b = (1,1,1,2)$, $c = (-2,0,1,1)$, a T potprostor generisan vektorima $d = (2,0,-4,6)$, $e = (3,1,-3,7)$. Naći po jednu bazu potprostora $S + T$ i $S \cap T$.

Rešenje. Potprostor $S + T$ je generisan vektorima a, b, c, d, e, a njegova baza je svaki maksimalni linearno nezavisan podniz ovog niza vektora. Iz

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \varepsilon e = 0,$$

sledi $\alpha = \frac{3}{8}\varepsilon,\ \ \beta = -\varepsilon,\ \ \gamma = \frac{1}{4}\varepsilon,\ \ \delta = -\frac{15}{16}\varepsilon$ (v. zadatak 36). Dakle, jedna baza za $S+T$ je (a,b,c,d), pa je $S+T=\mathbb{R}^4$.

Neka $x \in S \cap T$. Tada je $x = \alpha a + \beta b + \gamma c = \delta d + \varepsilon e$, odakle je $\alpha a + \beta b + \gamma c - \delta d - \varepsilon e = 0$, pa koristeći gore dobijene veze sledi

$$\alpha = -\frac{3}{8}\varepsilon,\ \ \beta = \varepsilon,\ \ \gamma = -\frac{1}{4}\varepsilon,\ \ \delta = -\frac{15}{16}\varepsilon.$$

Odavde se dobija

$$x = \delta d + \varepsilon e = -\frac{15}{16}\varepsilon d + \varepsilon e = \varepsilon\left(\frac{9}{8}, 1, \frac{3}{4}, \frac{11}{8}\right).$$

Dakle, baza potprostora $S \cap T$ je vektor $(9,8,6,11)$.

49. Neka su S i T potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$, pri čemu je S generisan vektorima $a=(0,2,1,1)$, $b=(3,4,-4,14)$, $c=(2,2,-3,9)$, a $T=\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid -5x_1+x_2-x_3=0,\ 5x_1-3x_2-x_3+2x_4=0\}$. Naći jednu bazu potprostora $S+T$ i $S\cap T$.

Rezultat.

Jedna baza potprostora $S+T$ je (a,b,f), gde je $f=(0,1,1,2)$, a baza potprostora $S\cap T$ je vektor $(1,6,1,7)$.

50. Neka su R,S i T potprostori vektorskog prostora V, takvi da je $S\cap T = S\cap R,\ \ S+T=S+R\ \text{ i }\ R\subseteq T$. Dokazati da je $R=T$.

Rešenje. Pretpostavimo da je $t\in T$ proizvoljan element i treba da dokažemo da $t\in R$, iz čega će slediti da $T\subseteq R$. Kako je dato $R\subseteq T$, imaćemo tada $R=T$.

Iz $t\in T\subseteq S+T=S+R$ sledi da postoje elementi $r\in R$ i $s\in S$ takvi da $t=r+s$. Dakle, sledi da $s=t-r$, pa iz $x\in T$ i $r\in R\subseteq T$ sledi da $s\in T$, odnosno da $s\in S\cap T=S\cap R$, dakle, $s\in R$. Iz $t=r+s$ sad sledi da $t\in R$, kao što smo i želeli da dokažemo.

51. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ data su dva skupa vektora S i T. Skup S se sastoji od svih vektora čije su dve koordinate 1, a druge dve -1, dok se skup T sastoji od svih vektora čije su dve poslednje koordinate jednake 1.

Ako je W_1 potprostor generisan skupom S, a W_2 potprostor generisan skupom T, naći baze i dimenzije potprostora W_1, W_2, $W_1\cap W_2$ i W_1+W_2.

Rezultat.

Baza potprostora W_1 je niz $a_1=(1,1,-1,-1)$, $a_2=(1,-1,1,-1)$, $a_3=(1,-1,-1,1)$, baza potprostora W_2 je niz $b_1=(0,0,1,1)$, $b_2=(0,1,1,1)$,

$b_3 = (1, 0, 1, 1)$, baza potprostora $W_1 + W_2$ je niz a_1, a_2, a_3, b_1 i baza potprostora $W_1 \cap W_2$ je niz $(0, 2, -1, -1)$, $(2, 0, -1, -1)$.

52. Ako su W_1 i W_2 potprostori vektorskog prostora V takvi da je $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 2$ i $\dim W_1 \neq \dim W_2$, dokazati da je $W_1 + W_2 = W_1$ ili $W_1 + W_2 = W_2$.

Rešenje. Neka je $\dim W_1 = l$, $\dim W_2 = k$ i $l < k$. Onda je $\dim(W_1 \cap W_2) \leq l < k \leq \dim(W_1 \cap W_2) + 2$, jer je $W_1 \cap W_2 \subseteq W_i \subseteq W_1 + W_2$ za $i = 1, 2$.

Dalje, s obzirom na 1.34, važi $l + k = 2\dim(W_1 \cap W_2) + 2$, pa postoje dve mogućnosti: $l = \dim(W_1 \cap W_2)$ ili $l = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$.

Ako je $l = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$, tada je $k = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$, pa je $l = k$ što protivreči uslovima zadatka. Dakle, mora biti $l = \dim(W_1 \cap W_2)$, pa je $k = \dim(W_1 \cap W_2) + 2$. Kako je $\dim W_2 = \dim(W_1 + W_2)$ i $W_2 \subseteq W_1 + W_2$, na osnovu zadatka 33 sledi $W_2 = W_1 + W_2$.

53. Neka su A i B neprazni podskupovi vektorskog prostora V i $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

a) Dokazati da je $L(A + B) \subseteq L(A \cup B)$.

b) Ako $0 \in A \cup B$, dokazati da je $L(A + B) = L(A \cup B)$.

c) Pokazati primerom da ne važi obrat tvrđenja b).

Rešenje. a) Dovoljno je dokazati da je $A + B \subseteq L(A \cup B)$, jer je skup $L(A + B)$ sadržan u svakom potprostoru koji sadrži $A + B$.

Ako $x \in A + B$, onda je $x = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Kako $a, b \in A \cup B$, sledi da $x \in L(A \cup B)$.

b) Treba dokazati da je $L(A \cup B) \subseteq L(A + B)$. Slično kao pod a), dovoljno je dokazati da je $A \cup B \subseteq L(A + B)$.

Pretpostavimo da $0 \in A$ i neka $x \in A \cup B$. Ako $x \in B$, tada je $x = 0 + x$, $0 \in A$, $x \in B$. Ako $x \in A$, tada uzimajući proizvoljno $b \in B$ sledi $x = x + b - (0 + b) \in L(A + B)$.

c) Ako je $V = \mathbb{R}^2$, $A = \{a\}$, $B = \{b\}$, gde su a i b dva nenula kolinearna vektora, onda je $L(A + B) = L(A \cup B)$, ali $0 \notin A \cup B$.

54. Ako su S i T podskupovi konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V, dokazati da je

$$\dim(L(S \cup T)) = \dim(L(S)) + \dim(L(T)) - \dim(L(S) \cap L(T)).$$

Uputstvo. Koristiti $L(S \cup T) = L(S) + L(T)$, a zatim primeniti 1.34.

55. Neka su A, B, C podskupovi vektorskog prostora V.

a) Dokazati da je $L(A \cap (B + C)) \subseteq L(A) \cap (L(B) + L(C))$.

b) Pokazati da ne mora da važi $L(A \cap (B + C)) = L(A) \cap (L(B) + L(C))$.

Rešenje. a) Dovoljno je dokazati $A \cap (B + C)) \subseteq L(A) \cap (L(B) + L(C))$ (jer važi: ako je S potprostor i $A \subseteq S$, onda je $L(A) \subseteq S$).

Kako je $B \subseteq L(B)$, $C \subseteq L(C)$, imamo da je $B + C \subseteq L(B) + L(C)$, što zajedno sa $A \subseteq L(A)$, daje $A \cap (B + C) \subseteq L(A) \cap (L(B) + L(C))$.

b) Ako je $V = \mathbb{R}^2$, $A = \{(1, 2)\}$, $B = \{(1, 0)\}$, $C = \{(0, 1)\}$, onda je $L(A \cap (B + C)) = L(\emptyset) = \{0\}$ i $L(A) \cap (L(B) + L(C)) = L(A)$.

56. Neka su S_1, S_2 i S_3 različiti potprostori n-dimenzionalnog vektorskog prostora V takvi da je $\dim S_i = n - 1$, za $i = 1, 2, 3$, i $S_1 \cap S_2 \not\subseteq S_3$.

a) Odrediti $\dim(S_1 \cap S_2)$.

b) Dokazati da je $\dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = n - 3$.

Rešenje. a) $\dim(S_1 \cap S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 + S_2)$. Znamo da je $S_1 \subseteq S_1 + S_2 \subseteq V$, pa je

$$n - 1 \leq \dim(S_1 + S_2) \leq n.$$

Ako bi bilo $\dim(S_1 + S_2) = n - 1$, onda bi na osnovu zadatka 33 sledilo $S_1 = S_2 = S_1 + S_2$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom $S_1 \neq S_2$. Dakle, $\dim(S_1 + S_2) = n$, pa je

$$\dim(S_1 \cap S_2) = 2(n - 1) - n = n - 2.$$

b) $\dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = \dim(S_1 \cap S_2) + \dim S_3 - \dim((S_1 \cap S_2) + S_3)$. Slično kao pod a), koristeći uslov $S_1 \cap S_2 \not\subseteq S_3$ i zadatak 33, zaključujemo da je $\dim((S_1 \cap S_2) + S_3) = n$, pa je

$$\dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = n - 1 + n - 2 - n = n - 3.$$

57. Neka je V vektorski prostor, a $\mathcal{S}(V)$ skup svih potprostora vektorskog prostora V.

a) Da li je na $\mathcal{S}(V)$ operacija $\cap$ distributivna u odnosu na operaciju $+$, tj. da li je za svako $A, B, C \in \mathcal{S}(V)$

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C).$$

b) Da li za svako $A, B, C \in \mathcal{S}(V)$ važi

$$A \cap (B + (A \cap C)) = (A \cap B) + (A \cap C).$$

Rezultat.

a) Ne. b) Da.

58. Ako su S i T potprostori konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V, dokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

a) $V = S \oplus T$.

b) Za svaki vektor $a \in V$ postoje jedinstveni vektori $s \in S$ i $t \in T$, takvi da je $a = s + t$.

c) Ako je $(a_1, \dots, a_k)$ baza S, a $(b_1, \dots, b_l)$ baza T, onda je $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l)$ baza V.

d) $V = S + T$ i $\dim V = \dim S + \dim T$.

59. Neka su u konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V potprostori $U_1, \dots, U_n$ takvi da je

$$V = U_1 + \cdots + U_n.$$

Dokazati da je

$$\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n,$$

ako i samo ako je

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n.$$

60. Neka je u vektorskom prostoru $F_n[x]$ polinom $p(x)$ stepena k.

a) Dokazati da je skup S svih polinoma iz $F_n[x]$ deljivih sa $p(x)$ potprostor vektorskog prostora $F_n[x]$.

b) Naći jedan komplementaran potprostor R za potprostor S (tj. potprostor R takav da je $R \oplus S = F_n[x]$).

c) Odrediti dimenzije potprostora S i R.

Rešenje. b) Jedan komplementaran potprostor R za potprostor S je skup svih polinoma čiji je stepen manji od k. Zaista, ako je $s(x)$ proizvoljan polinom iz $F_n[x]$, onda je $s(x) = q(x)p(x) + r(x)$, gde je $\deg r(x) \le k - 1$, tj. $S + R = F_n[x]$. Očevidno je $S \cap R = \{0\}$, pa je $S \oplus R = R_n[x]$.

c) Jedna baza potprostora S je $(p(x), xp(x), \dots, x^{n-k-1}p(x))$, a baza potprostora R je $(1, x, \dots, x^{k-1})$, pa je $\dim S = n - k$, $\dim R = k$.

61. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$, S je skup svih vektora $(x_1, \dots, x_n)$ čije koordinate zadovoljavaju uslov

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0,$$

a T je skup svih vektora za koje je

$$x_1 = \cdots = x_n.$$

a) Dokazati da su S i T potprostori vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

b) Dokazati da je $\mathbb{R}^n = S \oplus T$.

c) Svaki od vektora $e_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,\ldots,,0,1)$, prikazati kao linearnu kombinaciju jednog vektora iz S i jednog iz T.

Uputstvo. a) Direktna posledica zadatka 17.

b) Lako se vidi da je $S \cap T = \{0\}$. Kako je $\dim S = n-1$ i $\dim T = 1$ (dokazati), zaključujemo da je $\dim(S+T) = \dim S + \dim T = n$, pa je $S + T = \mathbb{R}^n$.

c) Ako je $e_i = x + y$, gde je $x \in S$, $y \in T$, tada je

$$y = \frac{2i}{n(n+1)}(1,1,\ldots,1).$$

62. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ svih realnih funkcija (zadatak 5, napomena) dokazati da je skup W_1 svih parnih funkcija potprostor, da je skup W_2 svih neparnih funkcija takođe potprostor i da je $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Rešenje. Ako su $f_1, f_2 \in W_1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, neka je $g = \alpha f_1 + \beta f_2$. Tada je očigledno $g(-x) = g(x)$ za svako x, pa je W_1 potprostor. Analogno se proverava da je i W_2 potprostor.

Ako je $f \in W_1 \cap W_2$, onda je $f(-x) = f(x)$ i $f(-x) = -f(x)$ za svako x, pa je $f(x) = -f(x)$, tj. $f(x) = 0$ za svako x. Dakle, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Pokažimo da se svaka funkcija $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ može prikazati kao zbir jedne parne i jedne neparne funkcije. Zaista,

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

pri tome je $\frac{f(x)+f(-x)}{2} \in W_1$, a $\frac{f(x)-f(-x)}{2} \in W_2$, što znači da je $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

63. Neka su $S_1, \ldots, S_n$ potprostori vektorskog prostora V takvi da je $V = S_1 + \cdots + S_n$.

a) Ako je $S_i \cap (S_1 + \cdots + S_{i-1}) = \{0\}$ za sve $i \in \{2,\ldots,n\}$, dokazati da je $V = S_1 \oplus \cdots \oplus S_n$.

b) Ako je $S_i \cap S_j = \{0\}$ za $i \neq j$, dokazati da V ne mora biti direktna suma potprostora $S_1, \ldots, S_n$.

Rešenje. a) Pretpostavimo da suma $S_1 + \cdots + S_n$ nije direktna, odnosno, da postoji $x \neq 0$ i $x \in S_i \cap (S_1 + \cdots + S_{i-1} + S_{i+1} + \cdots + S_n)$. Tada je $x = s_1 + \cdots + s_{i-1} + s_{i+1} + \cdots + s_n$, gde je $s_j \in S_j$. Bar jedan od vektora $s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_n$ je različit od nule, jer bi u suprotnom bilo $x \in$

$S_i \cap (S_1 + \cdots + S_{i-1})$, što je u suprotnosti sa uslovima zadatka. Prema tome, postoji $k > i$ tako da je $s_k \neq 0$ i $s_{k+1} = s_{k+2} = \cdots = s_n = 0$. Međutim, tada je

$$s_k = -s_1 - \cdots - s_{i-1} - x - s_{i+1} - \cdots - s_{k-1},$$

pa je $S_k \cap (S_1 + \cdots + S_{k-1}) \neq \{0\}$, što je kontradikcija.

b) Neka je $V = \mathbb{R}^2$, $S_1 = L((1,1))$, $S_2 = L((1,0))$, $S_3 = L((0,1))$. Tada je $S_1 \cap (S_2 + S_3) = S_1 \neq \{0\}$.

64. Neka su S i T potprostori vektorskog prostora V. Dokazati da je $S \cup T$ potprostor vektorskog V ako i samo ako je $S \subseteq T$ ili $T \subseteq S$.

Rešenje. Ako je $S \subseteq T$ ili $T \subseteq S$, tada je $S \cup T = T$ ili $S \cup T = S$.

Obrnuto, neka je $S \cup T$ potprostor. Pretpostavimo da je $S \nsubseteq T$ i $T \nsubseteq S$. Tada postoje vektori $s \in S \setminus T$ i $t \in T \setminus S$. Vektor $s + t$ nalazi se u $S \cup T$, zato što je $S \cup T$ potprostor. S druge strane, $s + t \notin S$ i $s + t \notin T$, što je protivrečnost.

65. Neka su S i T potprostori konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V takvi da je $\dim S = \dim T$. Dokazati da postoji potprostor U takav da je $S \oplus U = T \oplus U = V$.

Rešenje. Ako je $S = T = V$, tada je $U = \{0\}$. Neka je $\dim S = \dim T < \dim V$. Tada na osnovu zadatka 64 postoji vektor $u_1 \in V$ koji nije u $S \cup T$. Neka je $S_1 = S \oplus L(u_1)$ i $T_1 = T \oplus L(u_1)$. Ako je $S_1 = T_1 = V$, tada je $U = L(u_1)$. U suprotnom, postoji $u_2 \in V$ koji nije u $S_1 \cup T_1$. Sada isti postupak primenimo na potprostore $S_2 = S_1 \oplus L(u_2)$ i $T_2 = T_1 \oplus L(u_2)$. Nastavljajući na taj način, u konačnom broju koraka doćićemo do potprostora S_k i T_k takvih da je $S_k = T_k = V$, pa je $S \oplus U = T \oplus U = V$, gde je $U = L(u_1, \ldots, u_k)$.

66. Neka su x_1, x_2, x_3 linearno nezavisni vektori vektorskog prostora V i neka za vektore $y_1, y_2, y_3 \in V$ važi $y_1 \notin L(x_1, x_2, x_3)$, $y_2 = y_1 + x_1 + x_2$, $y_3 = 2y_1 + x_3$.

a) Dokazati da je niz vektora y_1, y_2, y_3 linearno nezavisan.

b) Naći baze potprostora $L(x_1, x_2, x_3) + L(y_1, y_2, y_3)$ i $L(x_1, x_2, x_3) \cap L(y_1, y_2, y_3)$.

67. Dokazati da je preslikavanje f vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}^3$ definisano sa

$$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$$

izomorfizam.

Rešenje. Dokazaćemo, najpre, da je f bijekcija. Iz $f(x) = f(y)$, gde je $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, sledi da je $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$, pa je f $1-1$ preslikavanje. f je i preslikavanje *na*, jer za svako $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ postoji $y = \left(\frac{x_1-x_2+x_3}{2}, \frac{x_1+x_2-x_3}{2}, \frac{-x_1+x_2+x_3}{2}\right) \in \mathbb{R}^3$ tako da je $f(y) = x$.

Za svako $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x+y) = (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, x_2 + y_2 + x_3 + y_3, x_1 + y_1 + x_3 + y_3)$$

$$= (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3) + (y_1 + y_2, y_2 + y_3, y_1 + y_3) = f(x) + f(y).$$

Slično se proverava da je za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}^3$ $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, pa je f izomorfizam.

68. Dokazati da je vektorski prostor $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ (polje kompleksnih brojeva posmatrano kao vektorski prostor nad poljem realnih brojeva, zadatak 6) izomorfan vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$.

69. Dokazati da se izomorfizmom direktna suma potprostora preslikava u direktnu sumu slika tih potprostora.

GLAVA 2

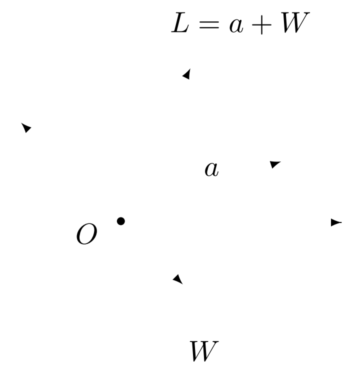
Linearne mnogostrukosti

2.1. Neka je W potprostor vektorskog prostora V i $a \in V$. Skup vektora

$$L = a + W = \{a + w \mid w \in W\}$$

naziva se linearna mnogostrukost. Potprostor W naziva se direktrisa linearne mnogostrukosti L.

Često se kaže da je skup $a + W$ dobijen translacijom potprostora W za vektor a i da je mnogostrukost $a + W$ paralelna sa W. Ako se u geometrijskom vektorskom prostoru (zadatak 3) posmatra 1-dimenzionalni potprostor W i vektor $a \notin W$, onda vektori iz W obrazuju pravu koja prolazi kroz koordinatni početak, a krajnje tačke vektora koji pripadaju mnogostrukosti $a + W$ obrazuju pravu koja prolazi kroz krajnju tačku vektora a i paralelna je sa pravom W.



2.2. Dimenzija linearne mnogostrukosti $L = a + W$ je dimenzija potprostora W, dakle, $\dim L = \dim W$.

2.3. Linearne mnogostrukosti dimenzije 0 nazivamo tačkama.

S obzirom da je $\{0\}$ jedini potprostor dimenzije 0, biće L=a+$\{0\}$=$\{$a$\}$, dakle, pojedinačni vektori su linearne mnogostrukosti dimenzije 0, tj. tačke.

Jednodimenzionalne linearne mnogostrukosti nazivamo pravim.

Dvodimenzionalne linearne mnogostrukosti nazivamo ravnima.

$(n-1)$-dimenzionalne linearne mnogostrukosti u n-dimenzionalnom prostoru nazivamo hiper-ravnima.

2.4. Ako je $L = a + W$ linearna mnogostrukost i $b \in L$, onda je $L = b + W$.

2.5. Neka su $L_1 = a_1 + W_1$ i $L_2 = a_2 + W_2$ linearne mnogostrukosti u vektorskom prostoru V. $L_1 = L_2$ ako i samo ako je $W_1 = W_2$ i $a_1 - a_2 \in W_1$.

2.6. Presek dve linearne mnogostrukosti je skup vektora koji pripadaju i jednoj i drugoj linearnoj mnogostrukosti.

2.7. Presek linearnih mnogostrukosti $L_1 = a_1 + W_1$ i $L_2 = a_2 + W_2$ je prazan skup ili linearna mnogostrukost $L_3 = a_3 + W_1 \cap W_2$.

2.8. Linearne mnogostrukosti $L_1 = a_1 + W_1$ i $L_2 = a_2 + W_2$ su paralelne ako i samo ako je $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ i $W_1 \subseteq W_2$ ili $W_2 \subseteq W_1$.

2.9. Ako je u vektorskom prostoru $V(F)$, $L = a + W$ jednodimenzionalna linearna mnogostrukost (prava), onda je $W = \{\alpha b \mid \alpha \in F\}$ i $L = \{a + \alpha b \mid \alpha \in F\}$.

Vektorska jednačina prave L je

$$r = a + \alpha b,$$

gde je r proizvoljan vektor koji pripada toj linearnoj mnogostrukosti.

Ako je $V = F^n$ i $r = (x_1, \ldots, x_n)$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$, onda sistem jednačina

$$x_i = a_i + \alpha b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

predstavlja parametarske jednačine prave L u prostoru F^n.

Eliminacijom parametra α iz gornjeg sistema dobija se kanonički (normalni) oblik jednačine prave L:

$$\frac{x_1 - a_1}{b_1} = \cdots = \frac{x_n - a_n}{b_n}.$$

2.10. Ako je u vektorskom prostoru $V(F)$, $L = a + W$ linearna mnogostrukost dimenzije k, $(b_1, \ldots, b_k)$ baza W, onda je $W = \{\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_k b_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F\}$, pa je $L = \{a + \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_k b_k \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F\}$.

Vektorska jednačina k-dimenzionalne linearne mnogostrukosti L je

$$r = a + \sum_1^k \alpha_i b_i,$$

gde je r proizvoljni vektor koji pripada linearnoj mnogostrukosti.

Ako je $V = F^n$ i $r = (x_1, \dots, x_n)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b_j = (b_1^{(j)}, \dots, b_n^{(j)})$, $j = 1, \dots, k$, onda sistem jednačina

$$x_i = a_i + \alpha_1 b_i^{(1)} + \cdots + \alpha_k b_i^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

predstavlja parametarski oblik jednačine linearne mnogostrukosti L.

Eliminacijom parametara $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ iz ovog sistema dobija se kanonički (normalni) oblik jednačine te mnogostrukosti.

2.11. Neka je W potprostor vektorskog prostora $V(F)$. Sa V/W označavamo skup svih linearnih mnogostrukosti dobijenih translacijom potprostora W, tj.

$$V/W = \{a + W \mid a \in W\}.$$

Ako se na V/W i između skalara iz F i elemenata V/W definišu sledeće operacije

$$(a + W) + (b + W) = (a + b) + W,$$
$$\alpha(a + W) = \alpha a + W, \quad \alpha \in F,$$

onda je V/W vektorski prostor nad poljem F koji se naziva faktor-prostor vektorskog prostora V po potprostoru W.

2.12. Ako je W potprostor konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V, onda je

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

2.13. Ako su U, W potprostori vektorskog prostora $V(F)$ takvi da je $V = U \oplus W$, onda je $U \simeq V/W$.

Z A D A C I

70. Neka je $L = a + W$ linearna mnogostrukost vektorskog prostora V. Dokazati:

a) $a \in L$,

b) ako $b \in L$, onda $L = b + W$,

c) ako $b, c \in L$, onda $b - c \in W$,

d) L je potprostor vektorskog prostora V ako i samo ako $a \in W$.

Rešenje. a) $0 \in W \Rightarrow a = a + 0 \in L$.

b) Ako $b \in L$, tada je $b = a + w$, gde je w neki vektor iz W. Kako je $(V, +)$ grupa, sledi

$$b + W = (a + w) + W = a + (w + W) = a + W = L.$$

c) Neka je $b = a + w_1, \quad c = a + w_2$, $w_1, w_2 \in W$. Tada je $b - c = w_1 - w_2 \in W$.

d) Neka je L potprostor. Tada $a + (-a) = 0 \in L$, pa $-a \in W$. Kako je W potprostor sledi $a \in W$.

Ako $a \in W$, onda je $L = a + W = W$.

71. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ naći jednačinu prave koja sadrži vektore:

a) $a = (1, 3, 5, 1)$, $b = (2, -1, 7, 0)$,

b) $a = (2, 2, -2, -2)$, $b = (1, 1, 1, -3)$.

Rešenje. a) Ako je $L = c + W$ prava kojoj pripadaju vektori a i b, tada, s obzirom na zadatak 70 c), vektor $a - b$ pripada potprostoru W. Vektor c može biti bilo koji vektor iz L (zadatak 70 b)), pa vektorska jednačina prave koja sadrži a i b glasi

$$r = b + \alpha(a - b) = (2, -1, 7, 0) + \alpha(-1, 4, -2, 1).$$

Parametarske jednačine te prave su

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - \alpha, \\ x_2 &= -1 + 4\alpha, \\ x_3 &= 7 - 2\alpha, \\ x_4 &= \alpha, \end{aligned}$$

a eliminacijom parametra α iz gornjih jednačina dobija se kanonički oblik jednačine ove prave

$$\frac{x_1 - 2}{-1} = \frac{x_2 + 1}{4} = \frac{x_3 - 7}{-2} = \frac{x_4}{1}.$$

72. U vektorskom prostoru $\mathbb{C}^3$ odrediti parametarske jednačine prave koja sadrži vektore $(-i, 1, 1 + i)$ i $(2 + i, 0, -i)$.

Rezultat.

$$\begin{aligned} x_1 &= -i + (2 + 2i)\alpha, \\ x_2 &= 1 - \alpha, \\ x_3 &= 1 + i + (-1 - 2i)\alpha. \end{aligned}$$

73. a) U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ naći najmanju linearnu mnogostrukost koja sadrži vektore

$$a_1 = (2, 2, -1, -1),\ a_2 = (1, 2, 3, -1),\ a_3 = (0, 2, 1, 2),\ a_4 = (2, 2, 5, -4).$$

b) Kako se može odrediti jednačina najmanje linearne mnogostrukosti koja sadrži vektore $b_1, \ldots, b_k$ proizvoljnog vektorskog prostora $V(F)$?

Rešenje. a) Neka je $L = a_1 + W$, gde je direktrisa W potprostor generisan vektorima $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$ i $a_4 - a_1$. Tada je

$$L = \{a_1 + \alpha(a_2 - a_1) + \beta(a_3 - a_1) + \gamma(a_4 - a_1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Vektori a_1, a_2, a_3, a_4 pripadaju L (za $\alpha = 1$, $\beta = 0$ $\gamma = 0$ sledi $a_2 \in L$, itd.). Dalje, L je najmanja linearna mnogostrukost koja sadrži ove vektore, jer svaka direktrisa mnogostrukosti koja sadrži a_1, a_2, a_3 i a_4 mora sadržavati i vektore $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$ i $a_4 - a_1$ (zadatak 70, c)).

Kako je $a_4 - a_1 = 2(a_2 - a_1) - (a_3 - a_1)$, a vektori $a_2 - a_1$ i $a_3 - a_1$ su linearno nezavisni, vektorska jednačina tražene mnogostrukosti je

$$r = a_1 + \alpha(a_2 - a_1) + \beta(a_3 - a_1).$$

b) Neka je $L = a + W$ linearna mnogostrukost koja sadrži $b_1, \dots, b_k$. Kako a može biti bilo koji vektor te mnogostrukosti, može se uzeti $a = b_1$. W sadrži vektore $b_2 - b_1$, $b_3 - b_1, \dots, b_k - b_1$ (zadatak 70). S druge strane, ako neki potprostor W sadrži vektore $b_2 - b_1$, $b_3 - b_1, \dots, b_k - b_1$, onda $b_1 + W$ sadrži $b_1, \dots, b_k$. Prema tome, skup vektora $L = b_1 + W$, gde je W potprostor generisan vektorima $b_2 - b_1$, $b_3 - b_1, \dots, b_k - b_1$ je najmanja linearna mnogostrukost koja sadrži $b_1, \dots, b_k$. Ta linearna mnogostrukost sastoji se od svih vektora oblika $b_1 + \alpha_2(b_2 - b_1) + \alpha_3(b_3 - b_1) + \cdots + \alpha_k(b_k - b_1)$. Ako su vektori $b_2 - b_1$, $b_3 - b_1, \dots, b_k - b_1$ linearno nezavisni, onda je $\dim L = k - 1$, a vektorska jednačina te mnogostrukosti je

$$r = b_1 + \alpha_2(b_2 - b_1) + \alpha_3(b_3 - b_1) + \cdots + \alpha_k(b_k - b_1).$$

U slučaju kada su vektori $b_2 - b_1$, $b_3 - b_1, \dots, b_k - b_1$ linearno zavisni, potrebno je iz niza vektora $b_2 - b_1$, $b_3 - b_1, \dots, b_k - b_1$ izdvojiti maksimalan linearno nezavisan podniz koji će činiti bazu direktrise tražene linearne mnogostrukosti, a onda pomoću tog podniza formirati odgovarajuću jednačinu.

74. U vektorskom prostoru F^n skup rešenja saglasnog sistema linearnih jednačina sa koeficijentima iz F sa n nepoznatih ranga r je linearna mnogostrukost $L = a + W$ dimenzije $n - r$. Direktrisa W ove linearne mnogostrukosti je skup rešenja odgovarajućeg homogenog sistema. Dokazati.

75. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^5$ data je linearna mnogostrukost

$$L = \{(x_1, \dots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 3$$

$$\wedge\ 2x_1 + 33x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 6\ \wedge\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = -3\}.$$

Ako je $L = a + W$, odrediti bazu direktrise W i jedan vektor a.

Rešenje. Rešenje sistema jednačina kojim je definisana linearna mnogostrukost L je:

$$x_2 = 0, \quad x_4 = 9 + x_1, \quad x_3 = 30 + 6x_1 + 2x_5.$$

Proizvoljni vektor r iz L je oblika:

$$\begin{aligned} r &= (x_1, 0, 30 + 6x_1 + 2x_5, 9 + x_1, x_5) \\ &= (0, 0, 30, 9, 0) + x_1(1, 0, 6, 1, 0) + x_5(0, 0, 2, 0, 1). \end{aligned}$$

Dakle, $a = (0, 0, 30, 9, 0)$, a jedna baza W je $((1, 0, 6, 1, 0), (0, 0, 2, 0, 1))$.

76. Ako prava L_1 i linearna mnogostrukost L_2 imaju dva zajednička vektora, onda je L_1 sadržana u L_2. Dokazati.

77. Neka je u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$, $L_1 = a_1 + W_1$ ravan, gde je $a_1 = (1, 0, 1, 0)$, a W_1 je potprostor generisan vektorima $(1, 1, 1, 0)$ i $(2, 0, 1, 1)$. Dokazati da je ravan L_1 paralelna sa hiper-ravni L_2 koja je data skalarnom jednačinom

$$x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \tag{2}$$

Rešenje. Kako je za svaki vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) koji pripada hiper-ravni L_2, $x_1 = 4 + 2x_2 - x_3 + 3x_4$, vektorska jednačina te hiper-ravni biće

$$\begin{aligned} r &= (4 + 2x_2 - x_3 + 3x_4, x_2, x_3, x_4) \\ &= (4, 0, 0, 0) + x_2(2, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(3, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

odnosno, $L_2 = a_2 + W_2$, gde je $a_2 = (4, 0, 0, 0)$, a W_2 je potprostor generisan vektorima $(2, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ i $(3, 0, 0, 1)$.

Sada treba ispitati da li je potprostor W_1 sadržan u W_2 (ne može biti $W_2 \subseteq W_1$, jer je očigledno da su vektori $(2, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ i $(3, 0, 0, 1)$ koji generišu W_2 linearno nezavisni, pa je $\dim W_2 = 3$, a $\dim W_1 = 2$). Jednostavno se proverava da se svaki od vektora $(1, 1, 1, 0)$ i $(2, 0, 1, 1)$ može prikazati kao linearna kombinacija vektora $(2, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, 0)$ i $(3, 0, 0, 1)$, pa je, zaista, $W_1 \subseteq W_2$.

Još treba dokazati da L_1 i L_2 nemaju zajedničkih tačaka. Pretpostavimo da postoji neki vektor koji pripada $L_1 \cap L_2$. Svaki vektor iz L_1 je oblika

$$(1 + \alpha + 2\beta, \alpha, 1 + \alpha + \beta, \beta),$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, pa bi koordinate ovog vektora morale zadovoljavati (2), dakle,

$$1 + \alpha + 2\beta - 2\alpha + 1 + \alpha + \beta - 3\beta = 4,$$

što je nemoguće. To znači da ne postoji vektor koji pripada L_1 i L_2, prema tome, linearne mnogostrukosti L_1 i L_2 su paralelne.

78. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ data je prava L_1 parametarskim jednačinama

$$x_1 = 1 + t, \quad x_2 = 2 + 2t, \quad x_3 = 3 + 3t, \quad x_4 = 4 + 4t,$$

i linearna mnogostrukost

$$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + 1 = 0 \ \wedge \ x_3 - x_4 - 1 = 0\}.$$

a) Ispitati da li se L_1 i L_2 seku.

b) Odrediti linearnu mnogostrukost L_3 minimalne dimenzije koja sadrži L_2 i paralelna je sa L_1.

c) Odrediti linearnu mnogostrukost L_4 minimalne dimenzije koja sadrži L_1 i L_2.

Rešenje. a) Ne.

b) $L_1 = a_1 + W_1$, gde je $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, a baza W_1 je $((1, 2, 3, 4))$, pa je $L_1 = a_1 + W_1 = W_1$.

$L_2 = a_2 + W_2$, gde je $a_2 = (-1, 0, 1, 0)$, a baza W_2 je $((-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.

Kako $W_1 \not\subseteq W_2$, L_1 i L_2 nisu paralelne, pa je $L_3 = a_2 + W_3$, gde je W_3 potprostor čija je baza $((1, 2, 3, 4),\ (-1, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, 1))$, odnosno $L_3 = a_2 + W_1 + W_2$.

c) Ako je $L_4 = a_4 + W_4$, tada mora biti $W_1 \subseteq W_4$, $W_2 \subseteq W_4$ i $a_1 - a_2 \in W_4$. Kako $a_1 - a_2 \notin W_1 + W_2$, jednačina linearne mnogostrukosti L_4 je:

$$r = a_2 + \alpha(a_1 - a_2) + \beta(1, 2, 3, 4) + \gamma(-1, 1, 0, 0) + \delta(0, 0, 1, 1).$$

Prema tome, $L_4 = \mathbb{R}^4$.

79. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ date su prave L_1 i L_2 i ravan L_3:

$$L_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4,\ x_2 = 2,\ 2x_1 - 2 = x_4\},$$
$$L_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ 2x_3 - 2 = x_4\},$$
$$L_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 2,\ 2x_3 - x_4 = -1 + x_1\}.$$

a) Odrediti vektorske jednačine datih linearnih mnogostrukosti.

b) Naći linearnu mnogostrukost $L_4 = a_4 + W_4$ najmanje dimenzije koja sadrži L_1, L_2 i L_3 i odrediti njenu dimenziju.

80. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ naći jednačinu prave koja sadrži vektor $a = (1, 2, 3, 4)$, seče pravu p čija je jednačina $r = (2, 1, 0, 1) + \alpha(4, 1, -1, -4)$

i paralelna je sa ravni π čija je jednačina $r = (1,0,0,0) + \alpha(2,1,2,1) + \beta(1,0,2,3)$.

Rešenje. Ako takva prava postoji, ona leži u ravni π_1 koja sadrži a i paralelna je sa π (postoji tačno jedna takva ravan). Jednačina ravni π_1 je

$$r = (1,2,3,4) + \alpha(2,1,2,1) + \beta(1,0,2,3).$$

Presek prave p i ravni π_1 je $\{b\}$, gde je $b = (-2,0,1,5)$. Tražena prava određena je vektorima a i b i njena jednačina je

$$r = (1,2,3,4) + \alpha(-3,-2,-2,1).$$

81. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ date su prave $L_1 = \{(2,1,0,2) + \alpha(1,2,0,2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ i $L_2 = \{(0,0,6,4) + \alpha(1,1,1,1) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$. Naći jednačinu prave L_3 koja seče prave L_1 i L_2 i sadrži vektor a, ako je:

a) $a = (6,5,-5,3)$,

b) $a = (1,3,5,7)$.

Rešenje. a) Ako tražena prava postoji, ona leži u ravni L_4 koja sadrži a i L_1. Jednačina te ravni je

$$\begin{aligned} r &= (2,1,0,2) + \alpha(1,2,0,2) + \beta((6,5,-5,3) - (2,1,0,2)) \\ &= (2,1,0,2) + \alpha(1,2,0,2) + \beta(4,4,-5,1). \end{aligned}$$

Presek ravni L_4 i prave L_2 je $\{b\}$, gde je $b = (-1,-1,5,3)$. Neka je L_3 prava određena vektorima a i b. Njena jednačina je

$$r = (6,5,-5,3) + \alpha(-7,-6,10,0).$$

Prava L_3 zadovoljava uslove zadatka jer je $L_3 \cap L_1 = \{(5/2,2,0,3)\}$.

b) Ne postoji takva prava.

82. Naći potreban i dovoljan uslov da u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ dve prave $r = a_1 + \alpha b_1$ i $r = a_2 + \alpha b_2$ pripadaju jednoj ravni.

Rešenje. Najmanja linearna mnogostrukost koja sadrži ove dve prave sastoji se od svih vektora oblika

$$r = a_1 + \alpha(a_2 - a_1) + \beta b_1 + \gamma b_2.$$

Dimenzija te mnogostrukosti nije veća od dva ako i samo ako su vektori $a_2 - a_1$, b_1 i b_2 linearno zavisni.

83. Neka su u vektorskom prostoru V, $L_1 = a_1 + W_1$ i $L_2 = a_2 + W_2$ dve linearne mnogostrukosti. Dokazati da se L_1 i L_2 seku ako i samo ako vektor $a_1 - a_2$ pripada potprostoru $W_1 + W_2$.

Rešenje. Ako $x \in L_1 \cap L_2$, onda je $x = a_1 + w_1 = a_2 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, pa je $a_2 - a_1 = w_1 - w_2 \in W_1 + W_2$.

Obrnuto, ako je $a_2 - a_1 \in W_1 + W_2$, onda je $a_2 - a_1 = v_1 + v_2$, $v_1 \in W_1$, $v_2 \in W_2$, tj. $a_2 - v_2 = a_1 + v_1$. Leva strana poslednje jednakosti je vektor iz L_2, a desna iz L_1, pa je $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$.

84. Ako je vektorski prostor V direktna suma svojih potprostora U i W, onda presek linearnih mnogostrukosti čije su direktrise U i W sadrži tačno jedan element. Dokazati.

Rešenje. Neka je $V = U \oplus W$ i $L_1 = a + U$, $L_2 = b + W$. Kako je $a - b \in V = U + W$, na osnovu zadatka 83 sledi da je $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$. Neka je $c \in L_1 \cap L_2$. Prema 2.7 sledi da je $L_1 \cap L_2 = c + (U \cap W) = c + \{0\} = \{c\}$.

85. Neka je V vektorski prostor dimenzije veće od k i L linearna mnogostrukost dimenzije k.

a) Dokazati da je svaki niz od $k+2$ vektora koji pripadaju mnogostrukosti L linearno zavisan.

b) Ako L nije potprostor, dokazati da postoji linearno nezavisan niz koji sadrži $k+1$ vektora mnogostrukosti L.

Rešenje. a) Neka je $L = a + W$ i neka je $(a_1, \dots, a_k)$ baza potprostora W. Tada je L sadržana u potprostoru generisanom vektorima $a, a_1, \dots, a_k$ čija je dimenzija manja od $k+2$. Prema tome, u tom prostoru ne može postojati linearno nezavisan niz od $k+2$ vektora.

b) Ako $L = a + W$ nije potprostor, tada $a \notin W$. Posmatrajmo niz vektora $a, a + a_1, \dots, a + a_k$. Ako je

$$\alpha_0 a + \alpha_1(a + a_1) + \cdots + \alpha_k(a + a_k) = 0,$$

onda je

$$(\alpha_0 + \alpha_1 + \dots \alpha_k)a + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0,$$

pa, s obzirom da je niz $a, a_1, \dots, a_k$ linearno nezavisan, sledi $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. To znači da je niz vektora $a, a + a_1, \dots, a + a_k$ koji pripadaju L, linearno nezavisan.

86. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ skup vektora L je linearna mnogostrukost ako i samo ako za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ i svako $x, y \in L$ važi $(1-\alpha)x + \alpha y \in L$. Dokazati.

Rešenje. Neka je $L = a + W$ linearna mnogostrukost. Ako $x, y \in L$, onda je $x = a + w_1$, $y = a + w_2$, $w_1, w_2 \in W$, pa je za svako $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(1-\alpha)x + \alpha y = (1-\alpha)(a + w_1) + \alpha(a + w_2) = a + w_3 \in L,$$

gde je $w_3 = w_1 - \alpha w_1 + \alpha w_2 \in W$.

Neka je sada L skup vektora takvih da za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ i svako $x, y \in L$ važi $(1-\alpha)x + \alpha y \in L$.

Ako je a proizvoljan vektor iz L, označimo sa W skup $W = L - a$. Za svako $x_1, x_2 \in W$ biće $x_1 = l_1 - a$, $x_2 = l_2 - a$, $l_1, l_2 \in L$, pa je

$$x_1+x_2 = (l_1+l_2-a)-a = \left(2\left(\frac{l_1}{2}+\frac{l_2}{2}\right)-a\right)-a = (2l_3-a)-a = l_4-a \in W,$$

gde je, s obzirom na dati uslov, $l_3 = \frac{l_1}{2} + \frac{l_2}{2} \in L$ $(\alpha = 1/2)$ i $l_4 = 2l_3 - a \in L$ $(\alpha = -1)$.

Za svako $\xi \in \mathbb{R}$ i svako $x \in W$ je $x = l - a$, $l \in L$, pa je

$$\xi x = \xi(l-a) = \xi l - \xi a = \xi l + (1-\xi)a - a = l' - a \in W,$$

gde je $l' = \xi l + (1-\xi)a \in L$. Prema tome, W je potprostor, pa je $L = a+W$ linearna mnogostrukost.

87. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ skup vektora L je linearna mnogostrukost ako i samo ako za svako $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, takvo da je

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1,$$

i svako $x_1, \ldots, x_k \in L$ važi

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \in L,$$

pri čemu je $k \geq 2$ fiksiran prirodan broj. Dokazati.

Rešenje. Neka je $L = a+W$ linearna mnogostrukost. Ako su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, takvi da je $\alpha_1+\cdots+\alpha_k = 1$, i $x_1, \ldots, x_k \in L$, onda je $x_1 = a+w_1, \ldots, x_k = a + w_k$, $w_1, \ldots, w_k \in W$, i

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k &= \alpha_1(a+w_1) + \cdots + \alpha_k(a+w_k)\\ &= (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)a + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k = a + w' \in L,\end{aligned}$$

gde je $w' = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k \in W$.

Obrnuto, neka je L skup vektora takav da za svako $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ takvo da je

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1,$$

i svako $x_1, \ldots, x_k \in L$ važi

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k \in L.$$

Neka je $k_0 \leq k$. Tada uzimajući da je $\alpha_i = 0$, $i = k_0+1, \ldots, k$, i

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{k_0} = 1,$$

dobija se da za svako $x_1, \ldots, x_{k_0} \in L$ važi

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{k_0} x_{k_0} \in L,$$

pa navedeni uslov važi i za svako $k_0 \leq k$. Za $k_0 = 2$, na osnovu zadatka 86 sledi da je L linearna mnogostrukost.

88. Dokazati da su u vektorskom prostoru $V(F)$, linearne mnogostrukosti $L_1 = a_1 + W_1$ dimenzije p i $L_2 = a_2 + W_2$ dimenzije q sadržane u linearnoj mnogostrukosti čija dimenzija nije veća od $p + q + 1$.

Rešenje. Neka je $W_3 = \{\alpha(a_1 - a_2) \mid \alpha \in F\}$ potprostor generisan vektorom $a_1 - a_2$ i neka je $W = W_1 + W_2 + W_3$. Linearna mnogostrukost $L = a_2 + W$ sadrži L_2 jer je $W_2 \subseteq W_1 + W_2 + W_3$.

Takođe, L sadrži i L_1 jer je $L_1 = a_1 + W_1 = a_1 - a_2 + a_2 + W_1 = a_2 + a_1 - a_2 + W_1 \subseteq a_2 + W_3 + W_1 \subseteq a_2 + W = L$.

Dimenzija mnogostrukosti L (tj. $\dim W$) nije veća od

$$\dim W_1 + \dim W_2 + \dim W_3 = p + q + 1,$$

jer je potprostor W generisan vektorima koji čine baze potprostora W_1, W_2 i W_3, a tih vektora ima $p + q + 1$.

89. Neka je $L = a + W$, $W \neq \{0\}$, linearna mnogostrukost u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, koja zadovoljava sledeći uslov: za svaku linearnu mnogostrukost M, $L \cap M \neq \emptyset$ ili su L i M paralelne.

a) Dokazati da je $\dim L \geq n - 1$.

b) Dokazati da svaka linearna mnogostrukost $L = a + W$ čija dimenzija nije manja od $n - 1$ zadovoljava uslov naveden u zadatku.

Rešenje. a) Pretpostavimo da je $\dim W = k$, gde je $k < n - 1$. Tada postoji 1-dimenzionalni potprostor W_1 takav da je $W_1 \not\subseteq W$ i $W \not\subseteq W_1$. Kako je $\dim(W + W_1) \leq \dim W + \dim W_1 \leq n - 1$, postoji vektor b koji ne pripada $W + W_1$. Ako je $c = a - b$, neka je $L_1 = c + W_1$. Linearna mnogostrukost L_1 nije paralelna sa L, a s obzirom da je $a - c = b \notin W + W_1$, na osnovu zadatka 83 sledi da je $L \cap L_1 = \emptyset$. Ovo je protivrečnost, pa je $\dim W \geq n - 1$.

b) Ako je $\dim W = n$, onda je $L = V$ i uslov zadatka je očigledno ispunjen.

Neka je $\dim W = n - 1$ i neka je $M = a_1 + W_1$ proizvoljna linearna mnogostrukost. Tada je $L \cap M \neq \emptyset$ ili $L \cap M = \emptyset$. Ako je $L \cap M = \emptyset$, onda $a - b \notin W + W_1$ (zadatak 83), pa je $W + W_1 \neq V$, odnosno, $\dim(W + W_1) \leq$

$n-1$. Međutim, to je moguće samo ako je $W+W_1=W$, pa je $W_1 \subseteq W$ i mnogostrukosti L i M su paralelne.

90. Neka su $L_1 = a + W_1$ i $L_2 = b + W_2$ linearne mnogostrukosti u vektorskom prostoru V. Dokazati da važi:

$L_1 \cap L_2 = a + b + (W_1 \cap W_2)$ ako i samo ako $a \in W_2$ i $b \in W_1$.

Rešenje. Neka je $L_1 \cap L_2 = a + b + (W_1 \cap W_2)$. Tada $a + b \in L_1 \cap L_2$ i

$$a + b \in L_1 = a + W_1 \Rightarrow b \in W_1,$$

$$b + a \in L_2 = b + W_2 \Rightarrow a \in W_2.$$

Neka sada $a \in W_2$ i $b \in W_1$. Tada je $a + b + (W_1 \cap W_2) \subseteq a + W_1 = L_1$ i $a + b + (W_1 \cap W_2) \subseteq b + W_2 = L_2$.

Dalje, ako $x \in L_1 \cap L_2$, onda je $x = a + w_1 = b + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Sledi da je $w_1 - b = w_2 - a$, pa $w_1 - b \in W_1 \cap W_2$. Tada je $x = a + w_1 = a + b + w_1 - b \in a + b + (W_1 \cap W_2)$.

91. U n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V date su dve različite linearne mnogostrukosti $L_1 = a_1 + W_1$ i $L_2 = a_2 + W_2$ dimenzija $n-1$. Ako je $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$, odrediti dimenziju $L_1 \cap L_2$.

Uputstvo. Ako $a \in L_1 \cap L_2$, posmatrati mnogostrukost $a + W_1 \cap W_2$.

92. U n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V linearna mnogostrukost L_1 je dimenzije p, a linearna mnogostrukost L_2 je dimenzije q. Ako je $p + q > n$, dokazati da postoje dve paralelne linearne mnogostrukosti M_1 i M_2, od kojih svaka sadrži bar dve tačke, takve da je

$$M_1 \subseteq L_1 \quad \text{i} \quad M_2 \subseteq L_2.$$

93. Dokazati da je u vektorskom prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ skup polinoma $L = \{f \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(a) = b\}$, gde su a i b fiksirani realni brojevi, linearna mnogostrukost. Odrediti dimenziju te linearne mnogostrukosti.

Uputstvo. Ako je $W = \{f \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(a) = 0\}$, dokazati da je W potprostor dimenzije $n-1$ i da je $L = b + W$.

94. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ date su dve različite linearne mnogostrukosti L_1 i L_2 dimenzije p. Ako linearno nezavisni vektori $x_1, \ldots, x_p$ pripadaju $L_1 \cap L_2$, dokazati:

$$x \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p \wedge \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Rešenje. Neka je $L = \{\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p \mid \sum_{i=1}^{p} \alpha_1 = 1\}$. Na osnovu zadatka 86 lako je dokazati da je L linearna mnogostrukost. Na osnovu zadatka 87 sledi $L \subseteq L_1$, $L \subseteq L_2$, pa je $L \subseteq L_1 \cap L_2$. Iz $L_1 \neq L_2$ sledi da je $\dim(L_1 \cap L_2) < p$, a pomoću zadatka 85.a) zaključujemo da je $\dim L \geq p-1$. Odatle je $\dim L = \dim(L_1 \cap L_2) = p - 1$, pa je $L = L_1 \cap L_2$.

95. Ako je W potprostor konačno dimenzionalnog vektorskog prostora $V(F)$, onda je

$$\dim V/W = \dim V - \dim W.$$

Dokazati.

Rešenje. Neka je $(a_1, \ldots, a_k)$ baza vektorskog potprostora W. Ova baza se može dopuniti do baze $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ vektorskog prostora V (1.23). U daljem razmatranju za elemente faktor-prostora V/W uvešćemo skraćene oznake: $a + W = \overline{a}$. Koristeći ove oznake, operacije u faktor-prostoru V/W (2.11) definisane su sa

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b},$$

$$\alpha\overline{a} = \overline{\alpha a}, \quad \alpha \in F.$$

Dokazaćemo da je $(\overline{a}_{k+1}, \ldots, , \overline{a}_n)$ baza faktor-prostora V/W. Ako je $\overline{x} \in V/W$, onda je $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, pa je

$$\overline{x} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{a}_i = \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \overline{a}_i,$$

jer je $\overline{a}_1 = \cdots = \overline{a}_k = \overline{0}$. Dakle, $V/W = L(\overline{a}_{k+1}, \ldots, \overline{a}_n)$.

Preostaje još da dokažemo linearnu nezavisnost niza $(\overline{a}_{k+1}, \ldots, \overline{a}_n)$. Ako je

$$\sum_{i=k+1}^{n} \xi_i \overline{a}_i = \overline{0},$$

onda je $\overline{\sum_{i=k+1}^{n} \xi_i a_i} = \overline{0}$, tj. $\sum_{i=k+1}^{n} \xi_i a_i \in W$, pa je $\sum_{i=k+1}^{n} \xi_i a_i = \sum_{i=1}^{k} \xi_i a_i$, odakle sledi $\xi_i = 0, \;\; i = 1, \ldots, n$.

96. Ako su U, W potprostori vektorskog prostora $V(F)$ takvi da je $V = U \oplus W$, onda je $U \simeq V/W$. Dokazati.

Rešenje. Najpre ćemo definisati preslikavanje $f : U \to V/W$ sa

$$f(u) = u + W.$$

f je $1-1$ preslikavanje, jer ako je $f(u_1) = f(u_2)$, onda je $u_1 + W = u_2 + W$, pa je $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, $w_1, w_2 \in W$, i $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$. Kako je $U \cap W = \{0\}$, mora biti $u_1 = u_2$.

f je preslikavanje *na*, jer za svako $a + W \in V/W$, $a = u + w$, $u \in U$, $w \in W$, pa je

$$a + W = u + w + W = u + W = f(u).$$

Za svako $u_1, u_2 \in U$, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + W \\ &= \alpha_1(u_1 + W) + \alpha_2(u_2 + W) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2), \end{aligned}$$

pa je f izomorfizam vektorskog prostora U i V/W.

GLAVA 3

Unitarni vektorski prostori

U ovom poglavlju radićemo isključivo sa vektorskim prostorima nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva. Tako, kada kažemo „vektorski prostor nad poljem F" podrazumevaćemo da je $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$. To ograničenje važi samo za ovo poglavlje, u daljem ćemo, kao i ranije, razmatrati vektorske prostore nad proizvoljnim poljem.

3.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem F (gde je $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$). Unutrašnji (skalarni) proizvod na V je svaka funkcija $(\ ,\ ) : V \times V \to F$, pri čemu sliku uređenog para vektora $(x, y) \in V \times V$ označavamo sa (x, y), za koju za svako $x, y, z \in V$ i svako $\alpha \in F$ važi

(1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
(2) $(x + y, z) = (x, y) + (y, z)$,
(3) $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$,
(4) $(x, x) \geq 0$,
(5) $(x, x) = 0 \iff x = 0$.

Sa $\overline{(x, y)}$ označen je kompleksan broj konjugovan sa (x, y).

3.2. Vektorski prostor nad poljem realnih ili kompleksnih brojeva zajedno sa funkcijom koja definiše unutrašnji proizvod naziva se unitarni vektorski prostor.

Realni unitarni vektorski prostor naziva se još i euklidski vektorski prostor.

3.3. U unitarnom vektorskom prostoru $V(F)$ za svako $x, y, z \in V$ i svako $\alpha \in F$ važi

(1) $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$,
(2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$,
(3) $(x, 0) = (0, x) = 0$.

3.4. U unitarnom vektorskom prostoru V funkcija $\|\ \| : V \to \mathbb{R}$ definisana sa

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$$

naziva se norma na V. Nenegativan realan broj $\|x\|$ naziva se norma vektora x.

3.5. U unitarnom vektorskom prostoru rastojanje $d(x,y)$ vektora x i y definisano je sa

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

3.6. (*Švarcova (Schwarz) nejednakost*) U unitarnom vektorskom prostoru V za svako $x, y \in V$ važi

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Pri tome, jednakost važi ako i samo ako su vektori x, y linearno zavisni.

3.7. U unitarnom vektorskom prostoru $V(F)$ za svako $x, y \in V$ i svako $\alpha \in F$ važi

(1) $\|x\| \geq 0$,
(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, (nejednakost trougla).

3.8. U euklidskom vektorskom prostoru ugao između vektora $x \neq 0$ i $y \neq 0$ je realan broj α, $0 \leq \alpha \leq \pi$, takav da je

$$\cos\alpha = \frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}.$$

3.9. U unitarnom vektorskom prostoru V vektori $x, y \in V$ su ortogonalni ako i samo ako je

$$(x,y) = 0.$$

Da su vektori x i y ortogonalni zapisujemo sa $x \perp y$.

3.10. Vektor x iz unitarnog vektorskog prostora se naziva normiran (ili jedinični) ako i samo ako je $\|x\| = 1$.

Normirati (ili normalizovati) neki vektor x znači naći vektor x_0 takav da je $\|x_0\| = 1$, $x_0 = \alpha x$, gde je α pozitivan realan broj.

3.11. Niz vektora u kome su svaka dva vektora ortogonalna naziva se ortogonalan niz. Ortogonalan niz vektora u kome su svi vektori normirani naziva se ortonormiran niz.

Niz od jednog vektora je ortogonalan.

Baza koja je ortogonalan (ortonormiran) niz naziva se ortogonalna (ortonormirana) baza.

3.12. U unitarnom vektorskom prostoru svaki ortogonalan niz nenula vektora je linearno nezavisan.

3.13. Ako je u unitarnom vektorskom prostoru $(a_1, \dots, a_n)$ linearno nezavisan niz vektora, onda je niz vektora $(b_1, \dots, b_n)$, gde je

$$(3) \qquad b_1 = a_1, \quad b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i, \quad k = 2, \dots, n.$$

ortogonalan niz.

Niz $(c_1, \dots, c_n)$, gde je $c_k = \dfrac{b_k}{\|b_k\|}$, $k = 1, \dots, n$ je ortonormiran niz vektora.

Postupak dat sa (3) kojim se od linearno nezavisnog niza vektora dobija ortogonalan (ortonormiran) niz, naziva se Gram-Šmitov (Gram-Schmidt) postupak ortogonalizacije.

3.14. Svaki konačno dimenzionalni unitarni vektorski prostor $V \neq \{0\}$ ima ortogonalnu (ortonormiranu) bazu.

3.15. Neka je $(a_1, \dots, a_n)$ baza unitarnog vektorskog prostora V. Unutrašnji proizvod se može pisati u obliku

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i,$$

gde je $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$, ako i samo ako je baza $(a_1, \dots, a_n)$ ortonormirana.

3.16. Ako je S neprazan podskup unitarnog vektorskog prostora V, onda se skup $S^\perp$ svih vektora iz V koji su ortogonalni na svakom vektoru iz S naziva ortogonalni komplement skupa S. Dakle,

$$S^\perp = \{x \in V \mid (\forall y \in S)\, (x, y) = 0\}.$$

3.17. Ako je S neprazan podskup unitarnog vektorskog prostora V, onda je $S^\perp$ potprostor vektorskog prostora V.

3.18. Ako je u konačno dimenzionalnom unitarnom vektorskom prostoru V, W potprostor, onda je

$$V = W \oplus W^\perp \quad \text{i} \quad V/W \simeq W^\perp.$$

3.19. Ako je u konačno dimenzionalnom unitarnom vektorskom prostoru V, W potprostor, onda je

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

3.20. Neka je V unitarni vektorski prostor, W potprostor i $V = W \oplus W^\perp$. Ako je $x \in V$, $x = a + b$, gde je $a \in W$, $b \in W^\perp$, onda se a naziva ortogonalna projekcija vektora x na potprostor W.

Z A D A C I

97. U vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$ funkcija definisana sa

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i,$$

gde je $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$, je unutrašnji proizvod. Dokazati.

Rešenje. Da važe aksiomi 1–3 iz definicije unutrašnjeg proizvoda (3.1) očigledno je.

Kako je $(x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \geq 0$, sledi da je $(x, x) = 0 \iff x = 0$, pa je data funkcija zaista unutrašnji proizvod.

Napomena. Analogno se pokazuje da je i u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ funkcija $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ unutrašnji proizvod.

Ovako definisan unutrašnji proizvod u vektorskim prostorima $\mathbb{C}^n$ i $\mathbb{R}^n$ se naziva standardni unutrašnji proizvod.

98. U geometrijskom vektorskom prostoru orijentisanih duži vezanih za tačku (zadatak 3), funkcija

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

je unutrašnji proizvod. Dokazati.

99. U vektorskom prostoru $C[a, b]$ svih realnih neprekidnih funkcija definisanih na intervalu $[a, b]$ (zadatak 5) preslikavanje definisano sa

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

je unutrašnji proizvod. Dokazati.

Rešenje. Da važe aksiomi 1–3 iz 3.1 očigledno je, a kako je $(f, f) = \int_a^b f^2(x)\, dx \geq 0$, važi $(f, f) = 0 \iff (\forall x \in [a, b]) f(x) = 0$.

100. Pokazati da u vektorskom prostoru $C[0, 1]$ svih realnih neprekidnih funkcija definisanih na intervalu $[0, 1]$ (zadatak 5) preslikavanje definisano sa

$$(f, g) = \int_0^{1/2} f(x) g(x)\, dx$$

nije unutrašnji proizvod.

Rešenje. Za ovo preslikavanje važe svi aksiomi unutrašnjeg proizvoda, osim poslednjeg. Naime, u skupu $C[0,1]$ postoje funkcije koje su identički jednake nuli na intervalu $[0, \frac{1}{2}]$, ali nisu na celom intervalu $[0,1]$.

101. Da li je u vektorskom prostoru $C[a,b]$ svih realnih neprekidnih funkcija definisanih na intervalu $[a,b]$ (zadatak 5) preslikavanje definisano sa

$$(f,g) = \int_a^b x^2 f(x)g(x)\,dx$$

unutrašnji proizvod?

102. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ sa

$$(p,q) = \int_a^b p(x)q(x)\,dx,$$

gde su a i b, $a < b$, proizvoljni fiksirani realni brojevi, je definisan unutrašnji proizvod.

Analogno važi za vektorski prostor $\mathbb{R}[x]$.

Dokazati.

Primedba. Uporediti prethodni zadatak sa zadatkom 100.

103. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ sa

$$(p,q) = \int_0^\infty e^{-x} p(x)q(x)\,dx,$$

je definisan unutrašnji proizvod. Dokazati.

104. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ ispitati da li je sa

$$(x,y) = 4x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2,$$

gde je $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$, definisan unutrašnji proizvod.

Rešenje. Lako se proverava da važe prva tri aksioma iz definicije unutrašnjeg proizvoda (3.1).

Kako je

$$(x,x) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 4\left(x_1 - \frac{1}{4}x_2\right)^2 + \frac{11}{4}x_2^2 \geq 0$$

i

$$(x,x) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \frac{1}{4}x_2 = 0 \wedge x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

sledi da je data funkcija unutrašnji proizvod.

105. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ ispitati za koje vrednosti $a, b \in \mathbb{R}$ je funkcija

$$(x, y) = ax_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + bx_2y_2,$$

gde je $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$, unutrašnji proizvod.

Rezultat. $a > 0,\ ab > 1$.

106. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ ispitati koje od sledećih funkcija definišu unutrašnji proizvod

a) $(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$,
b) $(x, y) = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + x_2y_2$,
c) $(x, y) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)$,
d) $(x, y) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + y_1y_2$,

gde je $x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2)$.

Rezultat. a) Ne, b) da, c) ne, d) ne.

107. Neka su S i T potprostori unitarnog vektorskog prostora V sa unutrašnjim proizvodom $(\ ,\ )$, takvi da je $S \cap T = \{0\}$. Dokazati da se u prostoru $S \oplus T$ može definisati unutrašnji proizvod $(\ ,\ )_1$ na sledeći način

$$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)_1 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2),$$

gde je $x_1, y_1 \in S$, $x_2, y_2 \in T$.

Rešenje.

(1)

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2, y_1 + y_2)_1 &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2)\\ &= \overline{(y_1, x_1)} + \overline{(y_2, x_2)} = \overline{(y_1, x_1) + (y_2, x_2)}\\ &= \overline{(y_1 + y_2, x_1, +x_2)_1}.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&(x_1 + x_2 + y_1 + y_2, z_1 + z_2)_1\\ &= (x_1 + y_1 + x_2 + y_2, z_1 + z_2)_1\\ &= (x_1 + y_1, z_1) + (x_2 + y_2, z_2)\\ &= (x_1, z_1) + (y_1, z_1) + (x_2, z_2) + (y_2, z_2)\\ &= (x_1, z_1) + (x_2, z_2) + (y_1, z_1) + (y_2, z_2)\\ &= (x_1 + x_2, z_1 + z_2)_1 + (y_1 + y_2, z_1 + z_2)_1.\end{aligned}$$

(3)

$$(\alpha(x_1 + x_2), y_1 + y_2)_1 = (\alpha x_1 + \alpha x_2, y_1 + y_2)_1$$

$$= (\alpha x_1, y_1) + (\alpha x_2, y_2) = \alpha(x_1, y_1) + \alpha(x_2, y_2)$$
$$= \alpha((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = \alpha(x_1 + x_2, y_1 + y_2)_1.$$

(4)

$$(x_1 + x_2, x_1 + x_2)_1 = (x_1, x_1) + (x_2, x_2) \geq 0.$$

(5)

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 \in S \cap T \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$$
$$\Rightarrow (x_1 + x_2, x_1 + x_2)_1 = (x_1, x_1) + (x_2 + x_2) = 0.$$
$$(x_1 + x_2, x_1 + x_2)_1 = 0 \Rightarrow (x_1, x_1) + (x_2, x_2)$$
$$\Rightarrow (x_1, x_1) = 0 \wedge (x_2, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0.$$

108. Dokazati da se u svakom konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru V nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva može definisati unutrašnji proizvod.

Rešenje. Ako je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza V, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$, onda je sa

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i$$

definisan unutrašnji proizvod.

109. Unutrašnji proizvod $(\ ,\ )_W$ definisan je na potprostoru W realnog konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V. Dokazati da se može definisati unutrašnji proizvod $(\ ,\ )_V$ na celom prostoru V, tako da za svako $x, y \in W$ važi $(x, y)_W = (x, y)_V$.

Rešenje. Neka je $(a_1, \ldots, a_k)$ baza potprostora W, $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ baza celog prostora V i neka je $U = L(a_{k+1} \ldots, a_n)$. Tada je $V = W \oplus U$ i neka je $(\ ,\ )_U$ jedan unutrašnji proizvod na U (da se na svakom realnom konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru može definisati unutrašnji proizvod dokazano je u zadatku 108). Ako su $x, y \in V$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in W$, $x_2, y_2 \in U$, onda definišemo

$$(x, y)_V = (x, y)_W + (x, y)_U.$$

Funkcija $(\ ,\ )_V$ je unutrašnji proizvod na V, što ostavljamo čitaocu da proveri.

110. Neka su a i b vektori unitarnog vektorskog prostora V. Dokazati da važi:

a) $((\forall x \in V)\ (a, x) = 0) \Rightarrow a = 0$,

b) $((\forall x \in V)\ (a,x) = (b,x)) \Rightarrow a = b.$

Rešenje. a) $((\forall x \in V)\ (a,x) = 0) \Rightarrow (a,a) = 0 \Rightarrow a = 0.$

b) $((\forall x \in V)\ (a,x) = (b,x)) \Rightarrow (a-b,x) = 0$, pa na osnovu a) sledi $a - b = 0$, tj. $a = b$.

111. U $\mathbb{C}^3$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom odrediti unutrašnji proizvod vektora $x = (1,0,-2)$ i $y = (2+i, 3, -2i)$, naći njihove norme i normirati ih. Odrediti rastojanje datih vektora.

Rešenje.

$(x,y) = 1 \cdot (2-i) + 0 \cdot 3 - 2 \cdot 2i = 2 - 5i,$

$\|x\| = \sqrt{1+0+4} = \sqrt{5}, \quad \|y\| = \sqrt{5+9+4} = 3\sqrt{2}.$

Normirati neki vektor x znači naći vektor x_0 takav da je $\|x_0\| = 1$, $x_0 = \alpha x$, gde je α pozitivan realan broj. Dakle,

$$x_0 = \frac{x}{\|x\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right), \quad y_0 = \frac{y}{\|y\|} = \left(\frac{2+i}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-2i}{3\sqrt{2}}\right),$$

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1-i, -3, -2+2i)\| = \sqrt{19}.$$

112. U unitarnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom dati su vektori $a = (1,2,3)$ i $b = (2,0,-1)$. Naći najkraći vektor (tj. vektor sa najmanjom normom) oblika $c = a + \alpha b$. Da li je taj vektor ortogonalan na b ?

Rešenje.

$c = a + \alpha b = (1+2\alpha, 2, 3-\alpha)$, pa je $\|c\|^2 = 5\alpha^2 - 2\alpha + 14$.

c je najmanje kada je $\alpha = 1/5$, dakle, traženi vektor je $c = (7/5, 2, 14/5)$. Lako se proverava da je c ortogonalan na b.

113. Ako su u i v vektori u unitarnom vektorskom prostoru takvi da je $||u|| = 3$, $||u+v|| = 4$ i $||u-v|| = 6$, izračunati $||v||$.

Rešenje.

$$||u+v||^2 = 16 = (u+v, u+v) = (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v),$$

$$||u-v||^2 = 36 = (u-v, u-v) = (u,u) - (u,v) - (v,u) + (v,v).$$

Sabirajući prethodne jednakosti dobija se

$$2(u,u) + 2(v,v) = 52,$$

odnosno

$$||u||^2 + ||v||^2 = 26,$$

pa je $||v|| = \sqrt{17}$.

114. U unitarnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom naći rastojanje tačke $(1, 2, 1, 0)$ od prave

$$r = (2, 1, 0, 1) + \alpha(-1, 1, 0, 1).$$

Uputstvo. Podsećamo da je tačka linearna mnogostrukost dimenzije 0, tj. vektor (v. glavu 2). Rastojanje tačke x od linearne mnogostrukosti $L = a + W$ je minimum normi svih vektora oblika $r - x$, gde je r proizvoljan vektor iz L.

115. U unitarnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}^3$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom vektori $a = (i, 1, 0)$ i $b = (0, 1, i)$ su ortogonalni na jediničnom vektoru $u = (x, y, z)$. Naći taj jedinični vektor.

Rešenje. Iz navedene ortogonalnosti sledi da su odgovarajući unutrašnji proizvodi jednaki nuli

$$(u, a) = -ix + y = 0, \quad (u, b) = y - iz = 0,$$

odakle je $x = z,\ y = ix$. Vektor u je jedinični, pa je $x\overline{x} + y\overline{y} + z\overline{z} = 1$. Prema tome, $3x\overline{x} = 1$, odnosno, $|x|^2 = 1/3$, pa su trojke kompleksnih brojeva

$$x = \frac{1}{3}\sqrt{3}e^{\theta i}, \quad y = \frac{1}{3}\sqrt{3}e^{(\theta + \pi/2)i}, \quad z = \frac{1}{3}\sqrt{3}e^{\theta i},$$

za svako θ tražene koordinate vektora u.

116. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom dat su vektori

$$a = (1, 1, 1, 1) \text{ i } b = (1, 2, -3, 0).$$

a) Naći dva linearno nezavisna vektora c i d koji su ortogonalni na a i b.

b) Naći nenula vektor e ortogonalan na svakom od vektora a i b, i pokazati da je on linearna kombinacija vektora c i d.

117. Dokazati da u euklidskom vektorskom prostoru za svaka dva vektora važi:

$$\|x\| = \|y\| \iff (x + y) \perp (x - y).$$

Dokazati da gornje tvrđenje ne mora da važi u proizvoljnom unitarnom vektorskom prostoru.

Rešenje. U euklidskom vektorskom prostoru je

$$(x + y, x - y) = 0 \Leftrightarrow (x, x) - (x, y) + (y, x) - (y, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x,x)-(y,y)=0 \Leftrightarrow \|x\|^2=\|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|=\|y\|.$$

U unitarnom vektorskom prostoru $\mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom je

$$\|1\|=\|i\|=1, \quad (1+i,1-i)=(1+i)(1+i)=2i\neq 0.$$

118. Neka su a i b vektori euklidskog vektorskog prostora. Dokazati da su a i b ortogonalni ako i samo ako je

$$\|a+b\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2.$$

119. Dokazati da su vektori a i b unitarnog vektorskog prostora $V(\mathbb{C})$ ortogonalni ako i samo ako za svaka dva skalara α, $\beta\in\mathbb{C}$ važi:

$$\|\alpha a+\beta b\|^2=\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2.$$

Rešenje. Neka je $(a,b)=0$. Tada je

$$\begin{aligned}\|\alpha a+\beta b\|^2&=(\alpha a+\beta b,\alpha a+\beta b)\\&=(\alpha a,\alpha a)+(\beta b,\beta b)+(\alpha a,\beta b)+(\beta b,\alpha a)\\&=\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2+\alpha\overline{\beta}(a,b)+\overline{\alpha\overline{\beta}(a,b)}=\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2.\end{aligned}$$

Obrnuto, neka je

$$\|\alpha a+\beta b\|^2=\|\alpha a\|^2+\|\beta b\|^2,$$

za sve α, $\beta\in\mathbb{C}$. Onda je $(\alpha a,\beta b)+(\beta b,\alpha a)=0$, pa ako uzmemo $\alpha=\beta=1$, dobijamo

$$0=(a,b)+(b,a)=(a,b)+\overline{(a,b)}=2\,\mathrm{Re}\,((a,b)).$$

Ako sada uzmemo $\alpha=i$, $\beta=1$, dobija se

$$0=(ia,b)+(b,ia)=i(a,b)-i(b,a)=i((a,b)-\overline{(a,b)})=2\,\mathrm{Im}\,((a,b)).$$

Prema tome, $\mathrm{Re}\,((a,b))=\mathrm{Im}\,((a,b))=0$, pa je $(a,b)=0$.

120. Dokazati da u unitarnom vektorskom prostoru V za svako $x,y\in V$ važi:

a) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, (nejednakost trougla),

b) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$, (pravilo paralelograma),

c) $\Big|\|x\|-\|y\|\Big|\leq\|x-y\|$.

Rešenje. a) Kako je

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=\|x\|^2+(x,y)+(y,x)+\|y\|^2$$

$$= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x,y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|(x,y)| + \|y\|^2$$
$$\le \|x\|^2 + 2\,\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

gde je iskorišćena Švarcova nejednakost (3.6), sledi $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$.

121. Koristeći Švarcovu nejednakost rešiti jednačinu

$$(x-2y+3z)^2 - 14(x^2+y^2+z^2) = 0.$$

Rešenje.

$$((x,y,z),(1,-2,3))^2 \le \|(x,y,z)\|^2 \|(1,-2,3)\|^2 = 14(x^2+y^2+z^2).$$

Jednakost važi ako i samo ako su vektori (x,y,z) i $(1,-2,3)$ linearno zavisni, dakle, $(x,y,z) = \alpha(1,-2,3)$.

122. Dokazati da za svako x,y,z iz unitarnog vektorskog prostora važi

$$\|x-y\| \le \|x-z\| + \|y-z\|.$$

123. Neka su $(a_1,\dots,a_n)$ i $(b_1,\dots,b_n)$ nizovi vektora n-dimenzionalnog unitarnog vektorskog prostora V takvi da je

$$(a_i,b_j) = \begin{cases} 1, & i=j, \\ 0, & i \ne j. \end{cases}$$

a) Dokazati da su $(a_1,\dots,a_n)$ i $(b_1,\dots,b_n)$ baze prostora V.

b) Ako je $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$, izraziti skalare $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ pomoću vektora $b_1,\dots,b_n,x$.

Rešenje. a) Neka je $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = 0$. Množenjem ove jednakosti skalarno sa b_i, $i=1,\dots,n$, dobija se

$$\alpha_1(a_1,b_i) + \cdots + \alpha_i(a_i,b_i) + \cdots + \alpha_n(a_n,b_i) = (0,b_i),$$

odnosno $\alpha_i = 0$, pa je niz $(a_1,\dots,a_n)$ linearno nezavisan.

b) Ako je $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$, množenjem ove jednakosti skalarno sa b_i, $i=1,\dots,n$, dobijamo

$$(x,b_i) = \alpha_i, \quad i=1,\dots,n.$$

124. U unitarnom vektorskom prostoru $(a_1,\dots,a_k)$ je linearno nezavisan niz vektora, a $(b_1,\dots,b_k)$ i $(c_1,\dots,c_k)$ su ortogonalni nizovi nenula vektora, takvi da su vektori b_i i c_i linearne kombinacije vektora $a_1,\dots,a_i$, $i=1,\dots,k$. Dokazati da je $b_i = \alpha_i c_i$, $i=1,\dots,k$.

Rešenje. Dokaz ćemo dati matematičkom indukcijom.

Za $i = 1$ je $b_1 = \beta_1 a_1$ i $c_1 = \gamma_1 a_1$, pa je $b_1 = \dfrac{\beta_1}{\gamma_1} c_1$.

Pretpostavimo da je $b_i = \alpha_i c_i$, $i = 1, \ldots, j$, i dokažimo da je $b_{j+1} = \alpha_{j+1} c_{j+1}$. Kako $b_p, c_p \in L(a_1, \ldots, a_{j+1}) = S$, $p = 1, \ldots, j+1$, sledi da je $S = L(b_1, \ldots, b_{j+1}) = L(c_1, \ldots, c_{j+1})$. Ako je $x \in S$, onda je

$$x = \sum_{i=1}^{j+1} \xi_i b_i = \sum_{i=1}^{j+1} \eta_i c_i,$$

odnosno,

$$\sum_{i=1}^{j} (\xi_i \alpha_i - \eta_i) c_i = \eta_{j+1} c_{j+1} - \xi_{j+1} b_{j+1}. \tag{4}$$

Pomnožimo li prethodnu jednakost skalarno sa c_p, $p = 1, \ldots, j$, dobiće se $(\xi_p \alpha_p - \eta_p)(c_p, c_p) = 0$. Kako je $(c_p, c_p) \neq 0$, mora biti $\xi_p \alpha_p - \eta_p = 0$, $p = 1, \ldots, j$. Prema tome, iz (4) sledi $\eta_{j+1} c_{j+1} - \xi_{j+1} b_{j+1} = 0$, odnosno $b_{j+1} = \dfrac{\eta_{j+1}}{\xi_{j+1}} c_{j+1}$.

125. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom dati su vektori

$$a_1 = (1, 1, 0, 0), \quad a_2 = (1, 0, 1, 0), \quad a_3 = (-1, 0, 0, 1).$$

Dokazati da su dati vektori linearno nezavisni, a zatim ortogonalizovati taj niz vektora.

Rešenje. Lako se proverava da su dati vektori zaista linearno nezavisni. Da bi dati niz (a_1, a_2, a_3) ortogonalizovali primenićemo Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije (3.13).

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1, \\
b_2 &= a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = (1, 0, 1, 0) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right), \\
b_3 &= a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 \\
&= (-1, 0, 0, 1) + \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) + \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right).
\end{aligned}$$

Traženi ortogonalni niz vektora je (b_1, b_2, b_3) i taj niz generiše isti prostor kao i niz (a_1, a_2, a_3).

126. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom ortogonalizovati niz vektora $(1,2,1,1), (1,-1,0,2), (2,0,1,1)$.

127. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom ortonormirati bazu (a_1, a_2, a_3), gde je

$$a_1 = (1,0,1), \quad a_2 = (1,3,1), \quad a_3 = (3,2,1).$$

Rešenje. Datu bazu ćemo najpre ortogonalizovati Gram-Šmitovim postupkom 3.13), a zatim svaki vektor dobijenog ortogonalnog niza normirati.

$$b_1 = a_1 = (1,0,1),$$
$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = (0,3,0),$$
$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = (1,0,-1).$$
$$e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$
$$e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = (0,1,0),$$
$$e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

Niz (b_1, b_2, b_3) je ortogonalna baza, a niz (e_1, e_2, e_3) ortonormirana.

128. U vektorskom prostoru $\mathbb{C}^3$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom ortonormirati bazu (a_1, a_2, a_3), gde je

a) $a_1 = (0,1,-1), \quad a_2 = (1+i,1,1), \quad a_3 = (1-i,1,1)$,

b) $a_1 = (1+i,i,1), \quad a_2 = (2,1-2i,2+i), \quad a_3 = (1-i,0,-i)$.

Rezultat. a)

$$e_1 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}),\ e_2 = \left(\frac{1+i}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),\ e_3 = \left(-\frac{-i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{2\sqrt{2}}, \frac{1+i}{2\sqrt{2}}\right).$$

129. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}[x]$ u kome je unutrašnji proizvod definisan sa

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

ortogonalizovati niz polinoma $(1, 1-x, 2+x^2, x^3)$.

Rešenje. Date polinome označimo redom sa a_1, a_2, a_3, a_4 i primenimo Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije:

$$b_1 = a_1 = 1,$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = 1 - x - \frac{\int\limits_{-1}^{1} (1-x)\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} dx} = -x,$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2$$

$$= 2 + x^2 - \frac{\int\limits_{-1}^{1} (2+x^2)\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} dx} - \frac{\int\limits_{-1}^{1} (2+x^2)(-x)\,dx}{\int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx}(-x) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Produžujući ovaj postupak dobija se

$$b_4 = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Traženi ortogonalni niz polinoma je (b_1, b_2, b_3, b_4).

130. Ortonormirati niz polinoma iz prethodnog zadatka.

131. Neka je $(a_1, \ldots, a_n)$ ortonormirana baza unitarnog vektorskog prostora V i $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. Dokazati da su koordinate α_i vektora x u odnosu na tu bazu date sa $\alpha_i = (x_i, a_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

132. Dokazati da je svaki ortogonalan niz nenula vektora linearno nezavisan.

Rešenje. Neka je $(a_1, \ldots, a_n)$ ortogonalan niz nenula vektora. Ako je

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0,$$

pomnožimo gornju jednakost skalarno sa a_k, dobija se

$$\alpha_k (a_k, a_k) = 0.$$

Kako je $a_k \neq 0$, biće $(a_k, a_k) \neq 0$, pa je $\alpha_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$.

133. Pokazati da se Gram-Šmitovim postupkom može utvrditi da li je niz vektora $(a_1, \ldots, a_n)$ linearno nezavisan ili ne.

Uputstvo. Ako se Gram-Šmitovim postupkom dobije da je bar jedan od ortogonalnih vektora jednak nuli, niz $(a_1, \ldots, a_n)$ je linearno zavisan, u protivnom niz $(a_1, \ldots, a_n)$ je linearno nezavisan.

134. Neka je u unitarnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom potprostor S generisan vektorima $a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (7, 4, 3, -3)$, $a_3 = (1, 1, -6, 0)$ i $a_4 = (5, 7, 7, 8)$. Odrediti jednu ortonormiranu bazu potprostora S.

Rešenje. Primenimo Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije na niz (a_1, a_2, a_3, a_4). U prva dva koraka tog postupka dobićemo vektore

$$b_1 = (2, 1, 3, -1), \quad b_2 = (3, 2, -3, -1).$$

S obzirom da su b_1 i b_2 različiti od nule, vektori a_1, a_2 su linearno nezavisni i $L(a_1, a_2) = L(b_1, b_2)$. U trećem koraku Gram-Šmitovog postupka se dobija vektor $b_3 = (0, 0, 0, 0)$. To što je $b_3 = 0$ znači da su vektori a_1, a_2, a_3 linearno zavisni, pa vektore a_3 i b_3 odbacujemo, a postupak nastavljamo sa nizom (a_1, a_2, a_4). Dobija se $b_4 = (1, 5, 1, 0)$, pa je ortogonalna baza potprostora S (b_1, b_2, b_4).

Normiranjem vektora (b_1, b_2, b_4) dobija se ortonormirana baza S

$$\left(\frac{1}{\sqrt{15}}(2, 1, 3, -1), \quad \frac{1}{\sqrt{23}}(3, 2, -3, 1), \quad \frac{1}{\sqrt{127}}(1, 5, 1, 10)\right).$$

Drugi način da se reši ovaj zadatak je da se najpre nađe maksimalan linearno nezavisan podniz niza (a_1, a_2, a_3, a_4), a onda taj podniz ortonormira.

135. Niz vektora $a_1 = (1, i, -i, 0)$, $a_2 = (i, 1, 0, -1)$ dopuniti do ortogonalne baze unitarnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom.

Rešenje. Vektori a_1 i a_2 su međusobno ortogonalni. Jedan od načina je da se niz (a_1, a_2) dopuni do baze prostora $\mathbb{C}^4$, recimo, vektorima $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ i $e_2 = (0, 1, 0, 0)$. Ako se sada baza (a_1, a_2, e_1, e_2) ortogonalizuje Gram-Šmitovim postupkom, dobiće se ortogonalna baza (a_1, a_2, a_3, a_4), gde je

$$a_3 = \frac{1}{3}(1, 0, i, -i), \quad a_4 = \frac{1}{3}(0, 1, 1, 1).$$

136. a) Ispitati da li je u $\mathbb{R}[x]$ sa

$$(p, q) = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$$

definisan unutrašnji proizvod.

b) Dokazati da je gornjom formulom definisan unutrašnji proizvod na $\mathbb{R}_3[x]$.

c) Naći jednu ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{R}_3[x]$ u odnosu na gore definisani unutrašnji proizvod.

Rešenje. a) Ne. Nije ispunjen aksiom (5) iz definicije unutrašnjeg proizvoda jer postoji polinom p takav da je $p \neq 0$ i $(p,p) = 0$. Jedan takav polinom je $x(x-1)(x-2)$.

b) Lako je pokazati da važe aksiomi (1)–(4) iz definicije unutrašnjeg proizvoda. Neka je $p = ax^2+bx+c$ i $(p,p) = 0$. Tada je $p(0)^2+p(1)^2+p(2)^2 = 0$, pa je

$p(0) = c = 0,$
$p(1) = a + b + c = 0,$
$p(2) = 4a + 2b + c = 0.$

Odatle je $a = b = c = 0$, pa je $p = 0$, tj. važi i aksiom (5).

c) Ortonormiranu bazu možemo dobiti primenom Gram-Šmitovog postupka na vektore standardne baze prostora $\mathbb{R}_3[x]$:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = x, \quad p_3 = x^2.$$

Na ovaj način dobijamo bazu

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1), \quad q_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(x^2 - 2x + \frac{1}{3}\right).$$

137. Neka je $(a_1, \dots, a_n)$ baza unitarnog vektorskog prostora V. Unutrašnji proizvod se može pisati u obliku

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i,$$

gde je $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i$, ako i samo ako je baza $(a_1, \dots, a_n)$ ortonormirana. Dokazati.

138. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ definisati unutrašnji proizvod tako da niz vektora $a = (1,1,1)$, $b = (1,0,1)$, $c = (1,1,0)$ bude ortonormiran.

Rešenje. Pretpostavimo da je u $\mathbb{R}^3$ uveden unutrašnji proizvod takav da je baza (a,b,c) ortonormirana. Ako je

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 a + \alpha_2 b + \alpha_3 c, \quad y = (y_1, y_2, y_3) = \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c,$$

onda je, na osnovu zadatka 137,

$$(x,y) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

S obzirom da je

$$\alpha_1 = -x_1 + x_2 + x_3, \quad \alpha_2 = x_1 - x_2, \quad \alpha_3 = x_1 - x_3,$$
$$\beta_1 = -y_1 + y_2 + y_3, \quad \beta_2 = y_1 - y_2, \quad \beta_3 = y_1 - y_3,$$

sledi da je

$$(x, y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 - 2x_1y_3 - 2x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2. \tag{5}$$

Lako se proverava da je u $\mathbb{R}^3$ sa (5) definisan unutrašnji proizvod u odnosu na koji je baza (a, b, c) ortonormirana.

139. Neka je $(x_1, \ldots, x_n)$ ortonormiran niz vektora unitarnog vektorskog prostora V i $y_j = \sum_{i=1}^{j} x_i$, $j = 1, \ldots, n$. Odrediti vektore koji se dobijaju primenom Gram-Šmitovog postupka na niz $(y_1, \ldots, y_n)$.

Rezultat. Dobija se niz $(x_1, \ldots, x_n)$.

140. Neka je $(a_1, \ldots, a_k)$ niz vektora unitarnog vektorskog prostora V i neka je $(b_1, \ldots, b_k)$ niz dobijen od niza $(a_1, \ldots, a_k)$ Gram-Šmitovim postupkom ortogonalizacije. Dokazati da je za svako $s \in \{1, \ldots, k\}$

$$\|a_s\| \geq \|b_s\|.$$

Rešenje. Iz

$$b_s = a_s - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(a_s, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i$$

sledi

$$a_s = b_s + \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(a_s, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i.$$

Kako je $\left(b_s, \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(a_s,b_i)}{(b_i,b_i)} b_i\right) = 0$, na osnovu zadatka 119 biće

$$\|a_s\|^2 = \|b_s\|^2 + \left\| \sum_{i=1}^{s-1} \frac{(a_s, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i \right\|^2 \geq \|b_s\|^2.$$

141. Neka je $(a_1, \ldots, a_k)$ niz vektora u unitarnom vektorskom prostoru V. Determinanta

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}$$

se naziva Gramova determinanta niza vektora $(a_1, \ldots, a_k)$. Dokazati da je Gramova determinanta niza $(a_1, \ldots, a_k)$ jednaka 0 ako i samo ako je taj niz linearno zavisan.

Rešenje. Pretpostavimo, najpre, da su vektori $a_1, \ldots, a_k$ linearno zavisni. To znači da je

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i = 0,$$

gde je bar jedan od skalara $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ različit od 0. Ako gornju jednakost pomnožimo skalarno redom sa $a_1, \ldots, a_k$, dobija se

$$\begin{array}{l} \alpha_1(a_1, a_1) + \alpha_2(a_1, a_2) + \ldots + \alpha_k(a_1, a_k) = 0, \\ \alpha_1(a_2, a_1) + \alpha_2(a_2, a_2) + \ldots + \alpha_k(a_2, a_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_1(a_k, a_1) + \alpha_2(a_k, a_2) + \ldots + \alpha_k(a_k, a_k) = 0. \end{array} \tag{6}$$

Determinanta ovog homogenog sistema linearnih jednačina koji ima netrivijalno rešenje je $\Gamma(a_1, \ldots, a_k)$, pa mora biti $\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = 0$.

Pretpostavimo sada da je $\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = 0$. Formirajmo sistem (6). Determinanta tog sistema jedaka je 0, dakle, taj sistem ima netrivijalno rešenje. Međutim, sistem (6) se može pisati i u sledećem obliku

$$(a_i, \overline{\alpha}_1 a_1 + \overline{\alpha}_2 a_2 + \cdots + \overline{\alpha}_k a_k) = 0, \quad i = 1, \ldots, k. \tag{7}$$

Pomnožimo i-tu jednačinu sistema (7) sa $\overline{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, k$, a onda sve te jednačine saberimo. Dobija se

$$\sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha}_i (a_i, \overline{\alpha}_1 a_1 + \overline{\alpha}_2 a_2 + \cdots + \overline{\alpha}_k a_k) = 0,$$

odnosno

$$(\overline{\alpha}_1 a_1 + \overline{\alpha}_2 a_2 + \cdots + \overline{\alpha}_k a_k, \overline{\alpha}_1 a_1 + \overline{\alpha}_2 a_2 + \cdots + \overline{\alpha}_k a_k) = 0,$$

odakle sledi $\overline{\alpha}_1 a_1 + \overline{\alpha}_2 a_2 + \cdots + \overline{\alpha}_k a_k = 0$. S obzirom da je bar jedan od skalara α_i, $i = 1, \ldots, k$, različit od 0, sledi da je bar jedan od $\overline{\alpha}_i$, $i = 1, \ldots, k$ različit od 0, dakle, vektori $a_1, \ldots, a_k$ su linearno zavisni.

142. Neka je $(a_1, \ldots, a_k)$ linearno nezavisan niz vektora u unitarnom vektorskom prostoru V. Dokazati da je

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) > 0.$$

Rešenje. Neka je $(c_1, \ldots, c_k)$ ortonormiran niz vektora dobijen ortogonalizacijom niza $(a_1 \ldots, a_k)$ Gram-Šmitovim postupkom. Svaki od vektora

a_i, $i = 1, \dots, k$, je linearna kombinacija vektora $c_1, \dots, c_k$, tj.

$$a_i = \alpha_{i1}c_1 + \alpha_{i2}c_2 + \cdots + \alpha_{ik}c_k, \quad i = 1, \dots, k.$$

To znači da je

$$(a_i, a_j) = \sum_{p=1}^{k} \alpha_{ip}\overline{\alpha}_{jp}, \quad i, j = 1, \dots, k,$$

pa je Gramova determinanta niza $(a_1, \dots, a_k)$ jednaka proizvodu dve determinante D i D_1,

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = DD_1,$$

gde je

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} \overline{\alpha}_{11} & \overline{\alpha}_{21} & \dots & \overline{\alpha}_{k1} \\ \overline{\alpha}_{12} & \overline{\alpha}_{22} & \dots & \overline{\alpha}_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\alpha}_{1k} & \overline{\alpha}_{2k} & \dots & \overline{\alpha}_{kk} \end{vmatrix}.$$

Međutim, determinanta D_1 se može dobiti od determinante D konjugovanjem njenih elemenata i transponovanjem, dakle, D_1 je kompleksan broj konjugovan sa D, tj. $D_1 = \overline{D}$. Kako su vektori $a_1, \dots, a_k$ linearno nezavisni determinanta D je različita od 0, pa je

$$\Gamma(a_1 \dots, a_k) = D\overline{D} > 0.$$

Primedba. Iz zadataka 141 i 142 sledi da je uvek

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) \geq 0,$$

pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako je niz $(a_1, \dots, a_k)$ linearno zavisan.

143. Ako je $(b_1, \dots, b_k)$ ortogonalan niz vektora dobijen Gram-Šmitovim postupkom od linearno nezavisnog niza vektora $(a_1, \dots, a_k)$, dokazati da je

$$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \Gamma(b_1, \dots, b_k) = (b_1, b_1)(b_2, b_2) \dots (b_k, b_k).$$

Uputstvo. Prvu kolonu determinante $\Gamma(a_1, \dots, a_k)$ pomnožiti sa $-\dfrac{\overline{(a_2, b_1)}}{(b_1, b_1)}$ i dodati drugoj. Zatim prvu kolonu pomnožiti sa $-\dfrac{\overline{(a_3, b_1)}}{b_1, b_1)}$, a drugu sa

$-\dfrac{\overline{(a_3, b_2)}}{(b_2, b_2)}$ i dodati trećoj. Nastaviti sa ovim postupkom dok se ne dobije

$$\Gamma(a_1, \ldots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_k) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, b_1) & (a_k, b_2) & \ldots & (a_k, b_k) \end{vmatrix}.$$

Zatim sličan postupak primeniti na vrste dobijene matrice.

144. Pokazati da je Švarcova nejednakost (3.6) specijalan slučaj nejednakosti $\Gamma(a_1, \ldots, a_k) \geq 0$, (v. zadatke 141 i 142).

145. Ako je u konačno dimenzionalnom unitarnom vektorskom prostoru V, W potprostor, onda je

$$V = W \oplus W^{\perp} \quad \text{i} \quad V/W \simeq W^{\perp}.$$

Dokazati.

Rešenje. Ako $x \in W \cap W^{\perp}$, onda je $(x, x) = 0$, tj. $x = 0$, pa je $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

Neka je $(a_1, \ldots, a_k)$ baza potprostora W. Ta baza se može proširiti do baze prostora V (1.23) i neka je $(a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ baza V. Ako sada bazu $(a_1, \ldots, a_n)$ Gram-Šmitovim postupkom ortogonalizujemo dobićemo bazu $(b_1, \ldots, b_k, b_{k+1} \ldots, b_n)$, pri čemu će niz $(b_1, \ldots, b_k)$ biti baza potprostora W.

Ako je x proizvoljan vektor iz V, onda je

$$x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i + \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i b_i.$$

Ovde je $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i \in W$, a kako je za svaki vektor $y = \sum_{i=1}^{k} \beta_i b_i \in W$,

$$\left(y, \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i b_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i b_i, \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i b_i\right) = 0,$$

sledi da je $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i b_i \in W^{\perp}$, pa je $W + W^{\perp} = V$.

Da je $V/W \simeq W^{\perp}$, sledi na osnovu 2.13.

146. Ako je u konačno dimenzionalnom unitarnom vektorskom prostoru V, W potprostor, onda je

$$(W^{\perp})^{\perp} = W.$$

Dokazati.

Rešenje. Ako je $x \in W$, onda je za svako $y \in W^\perp$, $(x, y) = 0$, odakle sledi da je $x \in (W^\perp)^\perp$. Prema tome, $W \subseteq (W^\perp)^\perp$.

Na osnovu zadatka 145 je

$$W \oplus W^\perp = V$$

i

$$W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp = V,$$

pa je (1.35)

$$\dim W + \dim W^\perp = \dim V,$$
$$\dim W^\perp + \dim(W^\perp)^\perp = \dim V,$$

odakle sledi $\dim W = \dim(W^\perp)^\perp$. Kako smo već dokazali da je $W \subseteq (W^\perp)^\perp$, sledi $W = (W^\perp)^\perp$.

147. Primerom pokazati da tvrđenje navedeno u zadatku 146 ne važi za beskonačno dimenzionalne vektorske prostore.

Rešenje. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}[x]$ unutrašnji proizvod je definisan sa

$$(p, q) = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i,$$

gde je $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ i $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, a n je maksimum stepena polinoma p i q.

Neka je $W = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(1) = 0\}$. W je potprostor prostora $\mathbb{R}[x]$. Odredićemo $W^\perp$. Ako $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in W^\perp$, tada je $(q, x^l - x^{n+1}) = 0$, za sve $l \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Odatle je $b_l = 0$, pa je $q = 0$. Dakle, $W^\perp = \{0\}$. Očigledno je $W \oplus W^\perp \neq \mathbb{R}[x]$ i $(W^\perp)^\perp = \mathbb{R}[x] \neq W$.

Napomena. Kao što se vidi, tvrđenja dokazana u zadacima 145 i 146 za konačno dimenzionalne vektorske prostore, ne važe za prostore beskonačne dimenzije. Još jedan primer beskonačno dimenzionalnog vektorskog prostora u kome ne važe ova tvrđenja je vektorski prostor $C[a, b]$ sa uobičajenim unutrašnjim proizvodom (zadatak 99) i njegov potprostor $W = \mathbb{R}[x]$. U tom primeru je $W^\perp = \{0\}$, a dokaz za to je složen i neelementaran i zahteva korišćenje Vajerštrasove (Weierstrass) teoreme aproksimacije. Elementaran primer beskonačno dimenzionalnog vektorskog prostora u kome ne važe tvrđenja navedena u zadacima 145 i 146, različit od primera navedenog u zadatku 147, može se naći u

N. Fowler, *Elementary counterexamples in infinite dimensional inner product spaces*, Mathematics Magazine, Vol. 52, No. 2, 1979, 96–97.

148. U $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom naći ortogonalni komplement potprostora W generisanog vektorima $a_1 = (1,0,1,0)$ i $a_2 = (1,1,3,0)$.

Uputstvo. Niz vektora (a_1, a_2) dopuniti do baze (a_1, a_2, a_3, a_4) prostora $\mathbb{R}^4$, a zatim tu bazu ortogonalizovati. Ako je ta ortogonalizovana baza (b_1, b_2, b_3, b_4), traženi ortogonalni komplement $W^\perp$ je $L(b_3, b_4)$.

Ortogonalni komplement $W^\perp$ može se odrediti i direktno rešavanjem sistema jednačina

$$(x, a_1) = 0, \quad (x, a_2) = 0.$$

149. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom S je potprostor generisan vektorima $a_1 = (0,1,0,3)$, $a_2 = (2,0,1,3)$ i $a_3 = (4,1,2,9)$.

a) Odrediti jednu bazu potprostora $S^\perp$.

b) Odrediti ortogonalnu projekciju vektora $b = (4,-2,-6,7)$ na potprostor S.

Rešenje. a) Neka $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S$. Tada je $x = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3$, pa je

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\beta + 4\gamma, & x_2 &= \alpha + \gamma, \\ x_3 &= \beta + 2\gamma, & x_4 &= 3\alpha + 3\beta + 9\gamma. \end{aligned}$$

Eliminacijom α, β i γ dobija se

$$x_1 - 2x_3 = 0,$$

$$-3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0.$$

pa je $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - 2x_3 = 0 \wedge -3x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\}$, odnosno,

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid ((1,0,-2,0), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0$$

$$\wedge\, ((0,-3,-3,1), (x_1, x_2, x_3, x_4)) = 0\}.$$

Vektori $b_1 = (1,0,-2,0)$ i $b_2 = (0,-3,-3,1)$ generišu $S^\perp$, a pošto su linearno nezavisni oni čine bazu prostora $S^\perp$.

b) (a_1, a_2) je baza prostora S, a (b_1, b_2) je baza prostora $S^\perp$. Kako je $b = a_1 + a_2 + 2b_1 + b_2$, sledi da je ortogonalna projekcija vektora b na S vektor $a_1 + a_2$.

150. U $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom razložiti vektor $x = (4, 0, 1, 1)$ na zbir dva vektora od kojih jedan pripada potprostoru generisanom vektorima $a_1 = (0, 1, 0, 1)$ i $a_2 = (1, 0, 0, 1)$, a drugi je ortogonalan na taj potprostor.

Rešenje. Neka je $x = y + z$, $y \in S$, $z \in S^\perp$. Vektor $y \in S$, pa je $y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Kako je $(a_i, z) = 0$, $i = 1, 2$, biće

$$(a_i, x) = (a_i, y) + (a_i, z) = (a_i, y), \quad i = 1, 2,$$

pa je

$$(a_i, x) = \alpha_1(a_i, a_1) + \alpha_2(a_i, a_2), \quad i = 1, 2,$$

odnosno

$$1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad 5 = \alpha_1 + 2\alpha_2,$$

odakle sledi $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 3$.

Prema tome, $y = (3, -1, 0, 2)$, a $z = x - y = (1, 1, 1, -1)$.

Vektor y je ortogonalna projekcija vektora x na potprostor S (v. 3.20).

151. U unitarnom vektorskom prostoru $C[-1, 1]$ (zadatak 99), W je potprostor svih neparnih funkcija. Naći ortogonalni komplement potprostora W.

Uputstvo. Koristiti zadatak 62.

152. U $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom S je potprostor generisan vektorima $a = (1, 2, 0, 1)$, $b = (-1, 4, 2, 0)$.

a) Odrediti ortogonalni komplement $S^\perp$ potprostora S.

b) Vektor $x = (-6, 6, -1, 7)$ prikazati kao zbir jednog vektora iz S i jednog iz $S^\perp$.

Rezultat. a) $S^\perp = L((-4, -1, 0, 6), (-2, 1, -3, 0))$.

b) $x = (0, 6, 2, 1) + (-6, 0, -3, 6)$.

153. Neka je $S = \{f(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid f(1) = 0\}$.

a) Dokazati da je S potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}_n[x]$.

b) Dokazati da je sa

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k,$$

gde je $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$, definisan unutrašnji proizvod na $\mathbb{R}_n[x]$.

c) Odrediti $S^\perp$ (u odnosu na unutrašnji proizvod definisan pod b)).

d) Odrediti ortogonalnu projekciju polinoma $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ na potprostor S.

Rešenje. c) Niz $(1-x^{n-1}, x-x^{n-1}, \dots, x^{n-2}-x^{n-1})$ je baza potprostora S. U $S^\perp$ su vektori koji su ortogonalni na sve vektore ove baze, pa je

$$S^\perp = \{g(x) \in \mathbb{R}_n[x] \mid g(x) = a \sum_{k=0}^{n-1} x^k,\ a \in \mathbb{R}\}.$$

d) Ako je $p(x)$ ortogonalna projekcija polinoma $f(x)$ na S, onda je $p(x) = f(x) - a \sum_{k=0}^{n-1} x^k$ i $p(1) = 0$. Odatle sledi

$$0 = f(1) - a \sum_{k=0}^{n-1} 1^k \Rightarrow a = \frac{f(1)}{n}.$$

Dakle,

$$p(x) = f(x) - \frac{f(1)}{n} \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(a_k - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} a_i}{n} \right) x^k.$$

154. Neka su S i T potprostori konačno dimenzionalnog unitarnog vektorskog prostora V. Dokazati da je

a) $(S+T)^\perp = S^\perp \cap T^\perp$,

b) $(S \cap T)^\perp = S^\perp + T^\perp$.

Rešenje. a) Kako je $S \subseteq S+T$ i $T \subseteq S+T$, biće $(S+T)^\perp \subseteq S^\perp$ i $(S+T)^\perp \subseteq T^\perp$, pa je

$$(S+T)^\perp \subseteq S^\perp \cap T^\perp.$$

Neka $x \in S^\perp \cap T^\perp$. Ako $y \in S+T$, onda je $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in S$, $y_2 \in T$. Tada je $(x, y) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0$, pa je $x \in (S+T)^\perp$.

b) Na osnovu a) i zadatka 146, sledi

$$S^\perp + T^\perp = ((S^\perp + T^\perp)^\perp)^\perp = ((S^\perp)^\perp \cap (T^\perp)^\perp)^\perp = (S \cap T)^\perp.$$

155. Neka su S i T potprostori konačno dimenzionalnog unitarnog vektorskog prostora V, takvi da je $V = S \oplus T$. Dokazati da je $V = S^\perp \oplus T^\perp$.

Uputstvo. Videti zadatak 154.

156. Neka je S potprostor unitarnog vektorskog prostora V i neka je $(a_1, \dots, a_n)$ ortonormirana baza potprostora S. Ako je $v \in V$ i $x = \sum_{k=1}^{n} (v, a_k) a_k$, dokazati:

a) $v - x \in S^{\perp}$,

b) za svako $y \in S$
$$\|v - x\| \leq \|v - y\|.$$

Rešenje. a) $(v - x, a_i) = (v, a_i) - \sum_{k=1}^{n} (v, a_k)(a_k, a_i) = (v, a_i) - (v, a_i) = 0.$

Vektor $v - x$ je ortogonalan na sve vektore baze potprostora S, pa je stoga ortogonalan na sve vektore iz S.

b) $\|v - y\| = \|v - x + x - y\|$, a kako $v - x \in S^{\perp}$, $x - y \in S$, na osnovu zadatka 119 sledi
$$\|v - y\|^2 = \|v - x\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|v - x\|^2.$$

157. Neka je $(a_1, \dots, a_n)$ baza unitarnog vektorskog prostora V. Dokazati da postoji jedinstvena baza $(b_1, \dots, b_n)$ prostora V takva da je
$$(a_i, b_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Uputstvo. Neka je $V_i = (L(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n))^{\perp}$. Tada je $\dim V_i = 1$ i b_i je jedini vektor iz V_i takav da je $(a_i, b_i) = 1$.

158. Neka su $x_1, \dots, x_n, x$ vektori unitarnog vektorskog prostora V, $S = L(x_1, \dots, x_n)$, $x = y + z$, $y \in S$, $z \in S^{\perp}$. Dokazati:

a) $\Gamma(x_1, \dots, x_n, x) = \|z\|^2 \Gamma(x_1, \dots, x_n)$.

b) $\Gamma(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_n\|^2$.

($\Gamma(x_1, \dots, x_n)$ je Gramova determinanta definisana u zadatku 141.)

Rešenje. S obzirom da je $(z, x_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$, biće
$$\Gamma(x_1, \dots, x_n, x) = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_n) & (x_1, y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & \dots & (x_n, x_n) & (x_n, y) \\ (y, x_1) & \dots & (y, x_n) & (y, y) + (z, z) \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_n) & (x_1, y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & \dots & (x_n, x_n) & (x_n, y) \\ (y, x_1) & \dots & (y, x_n) & (y, y) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \dots & (x_1, x_n) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_n, x_1) & \dots & (x_n, x_n) & 0 \\ (y, x_1) & \dots & (y, x_n) & (z, z) \end{vmatrix}$$

$= \Gamma(x_1, \ldots, x_n, y) + (z, z)\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \Gamma(x_1, \ldots, x_n, y) + \|z\|^2\Gamma(x_1, \ldots, x_n).$

Međutim, niz vektora $(x_1, \ldots, x_n, y)$ je linearno zavisan, pa je, na osnovu zadatka 141, $\Gamma(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$.

b) Dokazuje se indukcijom, koristeći da je

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, \ldots, x_n, x) &= \|z\|^2\Gamma(x_1, \ldots, x_n) \\ &\le (\|z\|^2 + \|y\|^2)\Gamma(x_1, \ldots, x_n) = \|x\|^2\Gamma(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

159. Neka je $L = a + S$ linearna mnogostrukost u konačno dimenzionalnom unitarnom vektorskom prostoru V. Dokazati:

a) postoji tačno jedan vektor $b \in L \cap S^\perp$,

b) vektor b ima najmanju normu od svih vektora mnogostrukosti L.

Rešenje. a) Neka je $a \in L$ i $a = a_1 + a_2$, gde je $a_1 \in S$, $a_2 \in S^\perp$ (zadatak 145). Tada je $a_2 = a + (-a_1) \in L$, pa je $L = a_2 + S$ i $a_2 \in L \cap S^\perp$. S druge strane, ako $b \in L \cap S^\perp$, onda je $b = a_2 + s$, $s \in S$, i $b \in S^\perp$. Iz $s \in S \wedge s = b - a_2 \in S^\perp$ sledi $s \in S \cap S^\perp$, pa je $s = 0$.

b) $y \in L \Rightarrow y = b + s,\ s \in S \Rightarrow \|y\|^2 = \|b\|^2 + \|s\|^2 \ge \|b\|^2$.

GLAVA 4

Linearne transformacije

4.1. Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad istim poljem F. Preslikavanje $A : V_1 \to V_2$ takvo da je

$$(\forall a, b \in V_1)\ A(a + b) = A(a) + A(b), \tag{8}$$

$$(\forall \alpha \in F)(\forall a \in V_1)\ A(\alpha a) = \alpha A(a), \tag{9}$$

naziva sa linearna transformacija (linearni operator, homomorfizam) vektorskog prostora V_1 u V_2.

Uslovi (8) i (9) u gornjoj definiciji mogu se zameniti sledećim ekvivalentnim uslovom

$$(\forall a, b \in V_1)(\forall \alpha, \beta \in F)\ A(\alpha a + \beta b) = \alpha A(a) + \beta A(b).$$

Kada je $V_1 = V_2$, rećićemo da je A linearna transformacija vektorskog prostora V_1.

Skup svih linearnih transformacija vektorskog prostora V_1 u V_2 označavaćemo sa $\mathrm{Hom}\,(V_1, V_2)$, a skup svih linearnih transformacija vektorskog prostora V označavaćemo sa $\mathrm{End}\,(V)$.

Primedba. Iz prethodne definicije i 1.36 sledi da je izomorfizam vektorskih prostora linearna transformacija, a bijektivna linearna transformacija je izomorfizam.

4.2. Ako je A linearna transformacija vektorskog prostora V_1 u V_2, onda je jezgro $\mathrm{Ker}\, A$ linearne transformacije A skup svih vektora iz V_1 koji se preslikavaju u nula-vektor iz V_2, tj.

$$\mathrm{Ker}\, A = \{x \in V_1 \mid A(x) = 0\}.$$

4.3. Ako je A linearna transformacija vektorskog prostora V_1 u V_2, onda je slika $\mathrm{Im}\, A$ linearne transformacije A skup slika svih vektora iz V_1, tj.

$$\mathrm{Im}\, A = \{x \in V_2 \mid (\exists y \in V_1)\ A(y) = x\}.$$

4.4. Ako je A linearna transformacija vektorskog prostora V_1 u V_2, onda je jezgro $\operatorname{Ker} A$ potprostor vektorskog prostora V_1, a slika $\operatorname{Im} A$ potprostor vektorskog prostora V_2.

4.5. Ako je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V_1 u V_2, onda je

$$\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim V_1.$$

4.6. Ako je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V, onda $\dim(\operatorname{Ker} A)$ nazivamo nulitetom, a $\dim(\operatorname{Im} A)$ rangom linearne transformacije A. Rang linearne transformacije A označavamo sa $\operatorname{rang}(A)$.

4.7. Ako je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza vektorskog prostora $V_1(F)$, a $(b_1, \ldots, b_n)$ proizvoljan niz vektora iz vektorskog prostora $V_2(F)$, onda postoji tačno jedna linearna transformacija $A : V_1 \to V_2$ takva da je

$$A(a_i) = b_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

(tj. svako preslikavanje baze može se proširiti na jedinstven način do linearne transformacije).

4.8. Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F. Ako je $A, B \in \operatorname{Hom}(V_1, V_2)$, $\alpha \in F$, onda je

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x), \quad \text{za svako } x \in V_1,$$

$$(\alpha A)(x) = \alpha A(x), \quad \text{za svako } x \in V_1.$$

$A + B$ i αA su takođe linearne transformacije vektorskog prostora V_1 u V_2.

4.9. Ako su V_1 i V_2 vektorski prostori nad poljem F, onda je skup $\operatorname{Hom}(V_1, V_2)$ u odnosu na sabiranje linearnih transformacija i množenje linearne transformacije skalarom (definisanim u 4.8) vektorski prostor nad poljem F.

4.10. Ako je $V(F)$ vektorski prostor, $A, B \in \operatorname{End}(V)$, onda je

$$(AB)(x) = A(B(x)), \quad \text{za svako } x \in V.$$

AB je takođe linearna transformacija vektorskog prostora V.

4.11. Ako je $V(F)$ vektorski prostor, onda je $(\operatorname{End}, +, \cdot)$ prsten, gde su $+$ i $\cdot$ redom sabiranje i množenje linearnih transformacija definisani u 4.8 i 4.10

Prsten $(\operatorname{End}, +, \cdot)$ je prsten sa jedinicom E, gde je E identičko preslikavanje skupa V.

4.12. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$. Linearna transformacija A je regularna ako postoji preslikavanje $B : V \to V$ takvo da je

$$AB = BA = E,$$

gde je E identičko preslikavanje skupa V. Preslikavanje B koje zadovoljava gornji uslov nazivamo inverznom transformacijom za A.

Linearna transformacija koja nije regularna naziva se singularna.

4.13. Linearna transformacija A vektorskog prostora $V(F)$ je regularna ako i samo ako je A bijekcija.

4.14. Ako je A regularna linearna transformacija, a B njena inverzna transformacija, onda je i B linearna transformacija. B je jedina inverzna transformacija za A i označavamo je sa A^{-1}.

4.15. Neka je $V(F)$ konačno dimenzionalni vektorski prostor, a A linearna transformacija tog prostora. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(1) A je regularna linearna transformacija,
(2) $\operatorname{Im} A = V$,
(3) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$,
(4) A je $1-1$ preslikavanje,
(5) ako je $(a_1, \ldots, a_n)$ baza vektorskog prostora V, onda je i $(A(a_1), \ldots, A(a_n))$ baza vektorskog prostora V.

4.16. Ako su A i B regularne linearne transformacije vektorskog prostora $V(F)$, onda je i transformacija AB regularna i

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

4.17. Ako je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora $V(F)$, a $B : V \to V$ preslikavanje takvo da je $AB = E$, onda je i $BA = E$, tj. A je regularna linearna transformacija, a B je inverzna linearna transformacija za A.

Z A D A C I

160. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $V_1(F)$ u $V_2(F)$. Tada važi:

a) $A(0_1) = 0_2$, gde je 0_i nula-vektor iz prostora V_i, $i = 1, 2$.

b) Ako je W potprostor vektorskog prostora V_1, onda je $A(W)$ potprostor vektorskog prostora V_2.

Rešenje.

a) Iz $A(0_1) = A(0_1 + 0_1) = A(0_1) + A(0_1)$, sledi $A(0_1) = 0_2$.

b) Ako je $x, y \in A(W)$, $\alpha, \beta \in F$, onda postoje $x_1, y_1 \in W$ tako da je $A(x_1) = x$, i $A(y_1) = y$, pa je

$$\alpha x + \beta y = \alpha A(x_1) + \beta A(y_1) = A(\alpha x_1 + \beta y_1),$$

tj. $\alpha x + \beta y \in A(W)$.

161. Ispitati da li su sledeće funkcije linearne transformacije vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$:

a) $A((a,b)) = (1+a, b)$,

b) $A((a,b)) = (b, a)$,

c) $A((a,b)) = (a^2, b)$,

d) $A((a,b)) = (\sin a, b)$,

e) $A((a,b)) = (a-b, 0)$,

f) $A((a,b)) = (0,0)$.

Rešenje. a) $A((a,b)+(c,d)) = A((a+c, b+d)) = A((1+a+c, b+d)) = (1+a, b) + (c, d) \neq A((a,b)) + A((c,d))$, pa A nije linearna transformacija.

S obzirom da svaka linearna transformacija preslikava nula-vektor u nula-vektor (zadatak 160), mogli smo zaključiti da A nije linearna transformacija i iz $A((0,0)) = (1+0, 0) = (1,0) \neq (0,0)$.

b) $A((a,b)+(c,d)) = A((a+c, b+d)) = (b+d, a+c) = (b,a)+(d,c) = A((a,b)) + A((c,d))$,

$A(\alpha(a,b)) = A(\alpha a, \alpha b) = (\alpha b, \alpha a) = \alpha(b,a) = \alpha A((a,b))$,

pa je A linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$.

c) $A((a,b)+(c,d)) = A((a+c, b+d)) = (a^2+2ac+c^2, b+d) = (a^2, b) + (c^2, d) + (2ac, 0) = A((a,b)) + A((c,d)) + (2ac, 0) \neq A((a,b)) + A((c,d))$, čim je $ac \neq 0$. Dakle, A nije linearna transformacija.

U ovom slučaju provera da li je slika nula-vektora nula-vektor ne daje definitivan odgovor jer je $A((0,0)) = (0,0)$.

162. U vektorskom prostoru geometrijskih vektora vezanih za tačku (zadatak 3) dokazati da su sledeća preslikavanja linearne transformacije:

a) homotetija čije je središte koordinatni početak,

b) simetrija u odnosu na ravan (ili pravu) koja prolazi kroz koordinatni početak.

163. Neka je S potprostor unitarnog vektorskog prostora V. Dokazati da je funkcija koja preslikava svaki vektor $x \in V$ u njegovu ortogonalnu projekciju na potprostor S (3.20), linearna transformacija vektorskog prostora V.

164. Preslikavanje A vektorskog prostora $\mathbb{C}(F)$ (v. zadatak 6) dato je sa

$$A(z) = \overline{z}.$$

Ispitati da li je A linearna transformacija kada je $F = \mathbb{R}$ i kada je $F = \mathbb{C}$.

Rešenje. Kako je

$$A(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 = A(z_1) + A(z_2),$$

uslov (8) iz 4.1 važi nezavisno od toga da li je $F = \mathbb{R}$ ili $F = \mathbb{C}$.

Ako je $F = \mathbb{R}$, onda je

$$A(\alpha z) = \overline{\alpha z} = \alpha \overline{z} = \alpha A(z),$$

pa je A linearna transformacija.

Ako je $F = \mathbb{C}$, onda za $z = 1$ i $\alpha = i$ sledi

$$A(\alpha z) = A(i) = \overline{i} = -i \neq i = \alpha A(z),$$

pa u ovom slučaju A nije linearna transformacija.

165. Neka je V vektorski prostor nad poljem racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$. Da bi preslikavanje $A : V \to V$ bilo linearna transformacija dovoljno je da bude ispunjen samo aksiom (8) iz definicije 4.1. Dokazati.

Rešenje. Neka preslikavanje $A : V \to V$ zadovoljava (8), tj. za svako $a, b \in V$, $A(a + b) = A(a) + A(b)$. Potrebno je dokazati da je važi i aksiom (9) iz 4.1, tj. da je za svako $\alpha \in \mathbb{Q}$ i svako $a \in V$, $A(\alpha a) = \alpha A(a)$.

Za $\alpha = 0$ to važi jer je $A(0) = A(0 + 0) = A(0) + A(0)$ i $A(0) = 0$.

Dokazaćemo sada matematičkom indukcijom da (9) važi za $\alpha = n$, gde je $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ očigledno važi, a iz

$$A((n + 1)a) = A(na + a) = A(na) + A(a) = nA(a) + A(a) = (n + 1)A(a),$$

sledi da važi za svako $n \in \mathbb{N}$.

Dalje dokazujemo da je $A((-n)a) = (-n)A(a)$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Iz

$$A(-a) + A(a) = A(a - a) = A(0) = 0,$$

sledi $A(-a) = -A(a)$, pa je $A((-n)a) = A(-na) = -A(na) = -nA(a) = (-n)A(a)$ za svako $n \in \mathbb{N}$.

Neka je sada $\alpha \neq 0$ proizvoljan elemenat $\mathbb{Q}$, tj. $\alpha = m/n$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$nA(\alpha a) = A(n\alpha a) = A(ma) = mA(a),$$

pa je

$$A(\alpha a) = \frac{m}{n} A(a) = \alpha A(a).$$

Dakle, A je linearna transformacija vektorskog prostora V.

166. Ako je A linearna transformacija vektorskog prostora $V_1(F)$ u $V_2(F)$, onda je jezgro $\operatorname{Ker} A$ potprostor vektorskog prostora V_1, a slika $\operatorname{Im} A$ potprostor vektorskog prostora V_2. Dokazati.

Rešenje. $\operatorname{Ker} A$ nije prazan skup jer $0_1 \in \operatorname{Ker} A$. Ako su $x, y \in \operatorname{Ker} A$, $\alpha, \beta \in F$, onda je

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) = 0,$$

pa je $\alpha x + \beta y \in \operatorname{Ker} A$.

Da je $\operatorname{Im} A$ potprostor vektorskog prostora V_2 sledi iz zadatka 160, b.

167. Ako je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V_1 u V_2, onda je

$$\dim(\operatorname{Ker} A) + \dim(\operatorname{Im} A) = \dim V_1.$$

Dokazati.

Rešenje. Neka je $(a_1, \dots, a_k)$ baza $\operatorname{Ker} A$. Ova baza je linearno nezavisan niz, pa se može dopuniti do baze $(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n)$ vektorskog prostora V_1 (1.23).

Dokazaćemo da je $(A(a_{k+1}), \dots, A(a_n))$ baza vektorskog prostora $\operatorname{Im} A$.

Ako je $y = A(x)$ proizvoljan vektor iz $\operatorname{Im} A$, tada je $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$, pa je

$$y = A(x) = \alpha_1 A(a_1) + \cdots + \alpha_n A(a_n).$$

Kako je $A(a_i) = 0$, za $i = 1, \dots, k$, sledi da je

$$y = \alpha_{k+1} A(a_{k+1}) + \cdots + \alpha_n A(a_n),$$

što znači da niz vektora $(A(a_{k+1}), \dots, A(n))$ generiše $\operatorname{Im} A$.

Iz

$$\beta_{k+1} A(a_{k+1}) + \cdots + \beta_n A(a_n) = 0,$$

sledi

$$A(\beta_{k+1} a_{k+1} + \cdots + \beta_n a_n) = 0,$$

dakle, $\beta_{k+1}a_{k+1} + \cdots + \beta_n a_n \in \operatorname{Ker} A$, pa je

$$\beta_{k+1}a_{k+1} + \cdots + \beta_n a_n = \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_k a_k,$$

odakle, s obzirom na to da je niz $(a_1, \ldots, a_n)$ linearno nezavisan, sledi $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, pa je i niz $A(a_{k+1}), \ldots, A(a_n)$ linearno nezavisan.

168. Dokazati da je preslikavanje

$$A((a,b)) = ((a+b, a-b, a))$$

linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^3$ i odrediti $\operatorname{Im} A$, $\dim(\operatorname{Im} A)$, $\operatorname{Ker} A$, $\dim(\operatorname{Ker} A)$.

Rezultat. $\operatorname{Im} A$ je potprostor generisan vektorima $(1,1,1)$ i $(1,-1,0)$, $\dim(\operatorname{Im} A) = 2$, $\operatorname{Ker} A = \{(0,0)\}$, $\dim(\operatorname{Ker} A) = 0$.

169. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ definisana sa

$$A((x,y,z)) = (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z).$$

Odrediti baze i dimenzije potprostora $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{Im} A$.

Rešenje. Rešavanjem sistema $x + 2y - z = 0$, $y + z = 0$, $x + y - 2z = 0$, dobijamo $x = 3z$, $y = -z$. Dakle, ako $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} A$, tada je

$$(x,y,z) = (3z, -z, z) = z(3,1,-1).$$

Vektor $(3,-1,1)$ čini bazu potprostora $\operatorname{Ker} A$, a $\dim(\operatorname{Ker} A) = 1$.

Potprostor $\operatorname{Im} A$ generisan je slikama vektora bilo koje baze prostora $\mathbb{R}^3$. Slike vektora standardne baze su:

$$A(e_1) = (1,0,1), \quad A(e_2) = (2,1,1), \quad A(e_3) = (-1,1,-2).$$

Ovaj niz vektora je linearno zavisan, ali su vektori $(1,0,1)$ i $(2,1,1)$ linearno nezavisni i oni čine jednu bazu potprostora $\operatorname{Im} A$. Dakle, $\dim(\operatorname{Im} A) = 2$.

170. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ definisana sa

$$A((x,y,z)) = ((m-2)x + 2y - z, 2x + my + 2z, 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z).$$

Odrediti rang transformacije A u zavisnosti od realnog parametra m.

Rezultat. Za $m \notin \{0,1,2\}$, $\operatorname{rang}(A) = 3$; za $m \in \{0,1,2\}$, $\operatorname{rang}(A) = 2$.

171. Da li su sledeće funkcije linearne transformacije vektorskog prostora $\mathbb{R}_n[x]$:

a) $A(p(x)) = p(-x)$,

b) $A(p(x)) = p(x+1)$,

c) $A(p(x)) = p(x+1) - p(x)$.

Za one funkcije koje su linearne transformacije odrediti rang.

172. Dato je preslikavanje I vektorskog prostora $\mathbb{R}[x]$

$$I(p(x)) = \int_0^x p(t)\, dt.$$

Dokazati da je I linearna transformacija i odrediti $\operatorname{Im} I$ i $\operatorname{Ker} I$.

Rezultat. $\operatorname{Im} I = \{p(x) \mid p(0) = 0\}$, $\operatorname{Ker} I = \{0\}$.

173. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ određena sa

$$A((1,2)) = (3,4) \quad \text{i} \quad A((0,1)) = (2,1).$$

Naći $A((a,b))$.

174. Odrediti jednu linearnu transformaciju A vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ za koju je $\operatorname{Im} A = L((1,2,3))$.

175. Odrediti linearnu transformaciju A vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ takvu da bude:

a) $\operatorname{Im} A$ potprostor generisan vektorima $(1,3,-1,0)$ i $(2,4,0,-1)$.

b) $\operatorname{Ker} A$ potprostor generisan vektorom $(3,2,-1,1)$.

c) Istovremeno važi a) i b).

Rešenje. Svaka linearna transformacija određena je slikama vektora baze.

a) $A(e_1) = A(e_2) = A(e_3) = (1,3,-1,0)$, $A(e_4) = (2,4,0,1)$.

b) Uzmimo bazu u kojoj se nalazi vektor $(3,2,-1,1)$, $A(e_1) = e_1$, $A(e_2) = e_2$, $A(e_3) = e_3$, $A((3,2,-1,1)) = 0$. Za ovu transformaciju je $\dim(\operatorname{Im} A) = 3$, pa je $\dim(\operatorname{Ker} A) = 1$ i $(3,2,-1,1) \in \operatorname{Ker} A$.

c) Ne postoji takva linearna transformacija, jer je na osnovu 4.5 $\dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\operatorname{Ker} A) = 4$.

176. Dokazati da svaka linearna transformacija preslikava linearno zavisan niz vektora u linearno zavisan niz.

177. Naći dve linearne transformacije A i B vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ takve da je $AB = 0$, ali $BA \neq 0$.

Rezultat. $A((a,b)) = (a,0)$, $B((a,b)) = (0,a)$.

178. Navesti primer linearne transformacije vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ za koju je $A^2 = 0$ i $A \neq 0$.

Rezultat. $A((a_1,\ldots,a_n)) = (0,\ldots,0,a_1)$.

179. Neka su S i T potprostori n-dimenzionalnog vektorskog prostora V takvi da je $\dim S + \dim T = n$. Dokazati da postoji linearna transformacija A vektorskog prostora V za koju je $\operatorname{Ker} A = S$ i $\operatorname{Im} A = T$.

Rešenje. Neka je $(a_1,\ldots,a_k)$ baza potprostora S. Dopunimo ovu bazu do baze celog prostora V (1.23) i neka je $(a_1,\ldots,a_k,a_{k+1},\ldots,a_n)$ baza V. Ako je $(b_{k+1},\ldots,b_n)$ proizvoljna baza potprostora T, definišimo linearnu transformaciju $A : V \to V$ na sledeći način:

$A(a_i) = 0, \quad i = 1,\ldots,k,$

$A(a_j) = b_j, \quad j = k+1,\ldots,n.$

Linearna transformacija A je potpuno određena slikama vektora baze (4.7), a lako se proverava da je $\operatorname{Ker} A = S$ i $\operatorname{Im} A = T$.

180. Neka su V_1 i V_2 potprostori vektorskog prostora $V(F)$ takvi da je $V_1 \oplus V_2 = V$. Dokazati da postoji tačno jedna linearna transformacija P prostora V takva da je $\operatorname{Ker} P = V_1$, $\operatorname{Im} P = V_2$ i $P^2 = P$.

Rešenje. Dokažimo da je transformacija P jedinstvena (ako postoji). Neka je P transformacija koja zadovoljava uslove zadatka.

Ako $x \in V_1$, onda mora biti $P(x) = 0$.

Za $x \in V_2$ postoji $y \in V$ tako da je $P(y) = x$, a tada je $P(x) = P^2(y) = P(y) = x$.

Za proizvoljno $x \in V$, ako je $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, mora biti $P(x) = x_2$. Odatle se vidi da je P jednoznačno određena.

Dokažimo da je, na gore opisani način (za svako $x \in V$, $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_2$, $P(x) = x_2$), zaista definisana linearna transformacija prostora V. Neka je $x, y \in V$, $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_1, y_1 \in V_1$, $x_2, y_2 \in V_2$, $\alpha, \beta \in F$. Tada je $P(\alpha x + \beta y) = P(\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2) = \alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha P(x) + \beta P(y)$.

Za ovako definisanu linearnu transformaciju P očigledno važi $V_1 \subseteq \operatorname{Ker} P$, $V_2 \subseteq \operatorname{Im} P$. Ako je $P(x) = 0$, tada je $x = x_1 + x_2$ i $x_2 = 0$, pa je $x \in V_1$, što znači da je $\operatorname{Ker} P \subseteq V_1$. Ako $x \in \operatorname{Im} P$, tada je $x = P(y_1 + y_2) = y_2 \in V_2$, za neke $y_1, y_2 \in V_2$, pa je $\operatorname{Im} P \subseteq V_2$. Dakle, $\operatorname{Ker} P = V_1$, $\operatorname{Im} P = V_2$.

181. Data je linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$

$$A((a,b)) = (a+b, b).$$

Ispitati da li je A regularna transformacija i ako jeste naći A^{-1}.

Rešenje. Iz $A((a,b)) = A((c,d))$ sledi $(a+b,b) = (c+d,d)$, pa je $a = c$, $b = d$, što znači da je A $1-1$ preslikavanje.

Za svako $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ postoji vektor $(c,d) = (a-b,b)$ tako da je $A((c,d)) = (a,b)$, pa je A preslikavanje *na*.

Prema tome, A je regularna linearna transformacija i $A^{-1}((a,b)) = (a-b,b)$.

182. Linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ definisana je sa

$$A((x,y,z)) = (3x, x-y, 2x+y+z).$$

a) Da li je A regularna linearna transformacija? Ako jeste, naći A^{-1}.

b) Da li je $(A^2 - E)(A - 3E) = 0$?

Rezultat. a) Da, b) da.

183. U $\mathbb{R}^2$ definisano je preslikavanje A sa

$$A((x,y)) = (ax+by, cx+dy),$$

gde su a, b, c i d fiksirani realni brojevi.

a) Dokazati da je A linearna transformacija.

b) Koji potreban i dovoljan uslov treba da zadovoljavaju a, b, c i d pa da transformacija A bude regularna?

Rezultat. b) $ad - bc \neq 0$.

184. Ispitati da li su sledeće linearne transformacije vektorskog prostora $\mathbb{R}[x]$ regularne:

a) $D(p(x)) = p'(x)$, gde je $p'(x)$ izvod polinoma $p(x)$,

b) $A(p(x)) = xp(x)$.

Rešenje. a) Svaki polinom je izvod nekog polinoma, pa je preslikavanje D *na*. Međutim, D nije $1-1$ preslikavanje jer su izvodi svaka dva polinoma koji se razlikuju za konstantu jednaki, pa, prema tome, D nije regularna transformacija.

b) A preslikava $\mathbb{R}[x]$ na skup svih polinoma deljivih sa x, pa A nije *na*. Dakle, iako je A $1-1$ preslikavanje (što se neposredno vidi), A nije regularna transformacija.

185. Neka je u vektorskom prostoru $V(F)$ α skalar, $\alpha \neq 0$. Dokazati da je linearna transformacija A tog vektorskog prostora singularna ako i samo ako je αA singularna.

186. Primerom pokazati da nijedno od tvrđenja 2–4 iz 4.15 nije dovoljno za regularnost linearne transformacije u slučaju kada vektorski prostor $V(F)$ nije konačne dimenzije.

Pokazati, takođe, da ni tvrđenje 4.17 ne važi za beskonačno dimenzionalne vektorske prostore.

Rešenje. U vektorskom prostoru F^∞ beskonačnih nizova elemenata iz F (zadatak 2), preslikavanja

$$A((a_1, a_2, \dots)) = (a_2, a_3, \dots)$$

i

$$B((a_1, a_2, \dots)) = (0, a_1, a_2, \dots)$$

su singularne linearne transformacije. Pri tome, $\operatorname{Im} A = V$, $\operatorname{Ker} B = \{0\}$, B je 1–1 preslikavanje, $AB = E$, ali $BA \neq E$.

187. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora V sa bazom $(a_1, \dots, a_n)$. Transformacija A je regularna ako i samo ako je niz $(A(a_1), \dots, A(a_n))$ linearno nezavisan. Dokazati.

Rešenje. Neka je A regularna linearna transformacija. Ako je

$$\alpha_1 A(a_1) + \dots + \alpha_n A(a_n) = 0,$$

onda je

$$A(\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n) = 0.$$

Pošto je $A(0) = 0$, s obzirom da je A $1-1$ preslikavanje, sledi da je

$$\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Niz $(a_1, \dots, a_n)$ je linearno nezavisan, pa je $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, što znači i da je niz $(A(a_1), \dots, A(a_n))$ linearno nezavisan.

Pretpostavimo sada da je niz $(A(a_1), \dots, A(a_n))$ linearno nezavisan.

Ako je $A(x_1) = A(x_2)$, onda je $x_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$, $x_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i$, pa je

$$A\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i\right) = A\left(\sum_{i=1}^n \beta_i a_i\right),$$

odakle je

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)A(a_i),$$

pa pošto je $(A(a_1), \dots, A(a_n))$ linearno nezavisan niz sledi $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \dots, n$, tj. A je $1-1$ preslikavanje.

Vektorski prostor V je dimenzije n, pa je niz $(A(a_1), \dots, A(a_n))$ baza vektorskog prostora V. Svaki vektor $x \in V$ može se prikazati kao

$$x = \alpha_1 A(a_1) + \cdots + \alpha_n A(a_n),$$

odakle je $x = A(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n)$, pa je A preslikavanje *na*.

Dokazali smo da je A $1-1$ i *na*, dakle, A je regularna linearna transformacija.

188. U vektorskom prostoru $F_n[x]$ data je linearna transformacija A

$$A(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_{n-1}(x+1)^{n-1}.$$

Dokazati da je A regularna linearna transformacija.

Rešenje. Na osnovu 4.15 dovoljno je pokazati da je $\operatorname{Ker} A = 0$. Neka je $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ i $p(x) \in \operatorname{Ker} A$. Kako je $A(p(x)) = a_0 + a_1(x+1) + \cdots + a_{n-1}(x+1)^{n-1} = a_{n-1}x^{n-1} + q(x)$, gde je $q(x)$ polinom stepena manjeg od $n-1$ i $A(p(x)) = 0$, mora biti $a_{n-1} = 0$. No, tada je $A(p(x)) = a_{n-2}x^{n-2} + r(x)$, gde je $r(x)$ polinom stepena manjeg od $n-2$, pa je $a_{n-2} = 0$.

Produžujući dalje na taj način dobijamo da je $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$, pa je $p(x) = 0$.

189. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ dato je preslikavanje

$$A: \ p(x) \mapsto p(x+a) + p(x),$$

gde je a fiksiran realan broj. Dokazati:

a) A je linearna transformacija,

b) transformacija A je regularna,

c) niz polinoma

$$(2, (x+a)+x, (x+a)^2 + x^2, \dots, (x+a)^{n-1} + x^{n-1})$$

je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}_n[x]$.

Rešenje. b) S obzirom da je $\mathbb{R}_n[x]$ konačno dimenzionalni vektorski prostor, na osnovu 4.15 da bi dokazali da je A regularna linearna transformacija dovoljno je dokazati da je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

Ako je $A(p(x)) = 0$ i $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$, onda je

$$p(x+a) + p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i((x+a)^i + x^i) = 0.$$

Koeficijent uz x^{n-1} u prethodnoj jednačini je $2\alpha_{n-1}$, odakle sledi da je $\alpha_{n-1} = 0$. Zatim se analogno dobija da je $\alpha_{n-2} = 0$ i dalje $\alpha_{n-3} = \cdots = \alpha_0 = 0$. Dakle, $p(x) = 0$, pa je $\operatorname{Ker} A = \{0\}$.

c) Niz $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ je baza vektorskog prostora $\mathbb{R}_n[x]$, a kako je $A(x^i) = (x+a)^i + x^i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, vidimo da se transformacijom A baza $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ preslikava u niz $(2, (x+a)+x, (x+a)^2 + x^2, \ldots, (x+a)^{n-1} + x^{n-1})$ koji, s obzirom da je A regularna linearna transformacija, mora takođe biti baza vektorskog prostora $\mathbb{R}_n[x]$ (4.15).

190. Linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{C}^3$ data je sa

$$A((1,0,0)) = (1,0,i), \quad A((0,1,0)) = (0,1,1), \quad A(0,0,1) = (i,1,0).$$

Da li je transformacija A regularna?

Uputstvo. Na osnovu zadatka 187 regularnost transformacije A može se utvrditi ispitivanjem linearne nezavisnosti vektora $(1,0,i)$, $(0,1,1)$ i $(i,1,0)$.

191. Odrediti realan broj a tako da linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ definisana sa

$$A(e_1) = (1,1,1,1), \quad A(e_2) = (1,1,1,0),$$
$$A(e_3) = (1,1,0,0), \quad A(e_4) = (a,0,0,0),$$

gde je (e_1, e_2, e_3, e_4) standardna baza, bude singularna i u tom slučaju odrediti rang transformacije A.

192. Ako je A regularna linearna transformacija unitarnog vektorskog prostora sa unutrašnjim proizvodom $(\ ,\ )$, onda je funkcija $(\ ,\ )_1$ definisana sa

$$(x,y)_1 = (A(x), A(y)),$$

takođe unutrašnji proizvod na V. Dokazati.

193. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$ u vektorski prostor $W(F)$ i T potprostor prostora $\operatorname{Im} A$. Dalje, neka je $S = \{x \in V \mid A(x) \in T\}$. Dokazati da je S potprostor prostora V. Ako je $\dim V = n$, $\operatorname{rang}(A) = k$ i $\dim T = m$, odrediti dimenziju potprostora S.

Rešenje. Za svako $x, y \in S$, $\alpha, \beta \in F$, sledi $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) \in T$, pa je S potprostor. Neka je A_1 restrikcija preslikavanja A na potprostor S. Tada je A_1 linearno preslikavanje, $\operatorname{Im} A_1 = T$ i $\operatorname{Ker} A_1 = \operatorname{Ker} A$. Odatle je $\dim S = \dim T + \dim(\operatorname{Ker} A) = m + n - k$.

194. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora V. A je idempotentna ($A^2 = A$) ako i samo ako je

$$V = \operatorname{Ker} A \oplus W,$$

gde je $W = \{x \mid A(x) = x\}$. Dokazati.

Rešenje. Neka je $A^2 = A$ i $W = \{x \mid A(x) = x\}$. Jednostavno se proverava da je W potprostor i da je $\operatorname{Ker} A \cap W = \{0\}$.

Neka je x bilo koji vektor iz V i neka je $A(x) = y$. Posmatrajmo vektor $z = x - y$. Kako je

$$A(z) = A(x) - A^2(x) = 0,$$

sledi $z \in \operatorname{Ker} A$. Međutim, $A(y) = A^2(x) = A(x) = y$, pa $y \in W$.

Dokazali smo da se svaki vektor $x \in V$ može prikazati u obliku

$$x = y + z, \quad y \in W, \quad z \in \operatorname{Ker} A,$$

dakle, $V = \operatorname{Ker} A + W$.

Obrnuto tvrđenje je očigledno.

195. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora V. A je involucija ($A^2 = E$) ako i samo ako je

$$V = W_1 \oplus W_2,$$

gde je $W_1 = \{x \mid A(x) = x\}$, $W_2 = \{x \mid A(x) = -x\}$. Dokazati.

Uputstvo. $W_1 = \operatorname{Ker}(A - E)$, $W_2 = \operatorname{Ker}(A + E)$, koristiti jednakost

$$x = \frac{1}{2}(x + A(x)) + \frac{1}{2}(x - A(x)).$$

196. Neka su A i B idempotentne linearne transformacije vektorskog prostora V. Dokazati da važi:

a) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$ ako i samo ako je $AB = B$ i $BA = A$.

b) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ ako i samo ako je $AB = A$ i $BA = B$.

Rešenje. a) Ako je $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$, onda za svako $x \in V$ postoji $y \in V$ tako da je $B(x) = A(y)$, pa je $AB(x) = AA(y) = A(y) = B(x)$.

Slično se dokazuje da je $BA = A$.

Ako je $AB = B$ i $BA = A$, onda iz $x \in \operatorname{Im} A$ sledi $x = A(y) = BA(y)$ za neko $y \in V$, što znači da $x \in \operatorname{Im} B$. Analogno se dokazuje i da je $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Im} A$.

b) Ako je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$, iz $A^2 = A$ sledi $x - A(x) \in \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$, pa je $0 = B(x - A(x)) = B(x) - BA(x)$ za sve $x \in V$. Slično se dokazuje da je $AB = A$.

Ako je $AB = A$ i $BA = B$, iz $x \in \operatorname{Ker} A$ sledi $B(x) = BA(x) = B(0) = 0$, pa je $x \in \operatorname{Ker} B$.

Slično se dokazuje da je $\operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker} A$.

197. Neka su A i B linearne transformacije ranga 1 vektorskog prostora $V(F)$ i neka je $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$. Dokazati da je $A = \alpha B$ za neko $\alpha \in F$.

Rešenje. Neka je $x \in V$ tako da je $A(x) \neq 0$. Kako je $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$ i $\operatorname{rang}(A) = 1$, mora biti $A(x) = \alpha B(x)$ za neko $\alpha \in F$. Ako je $y \in V$, $y \neq x$, i $A(y) \neq 0$, onda je $A(x) = \beta A(y)$, tj. $A(x-\beta y) = 0$. Kako je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$, onda je i $B(x - \beta y) = 0$, pa je $B(x) = \beta B(y)$ i $\alpha B(x) = \alpha\beta B(y)$. To znači da je $\beta A(y) = \alpha\beta B(y)$, odnosno $A(y) = \alpha B(y)$.

Ako je $x \in \operatorname{Ker} A$, onda je $A(x) = \alpha B(x) = 0$.

198. Neka su A i B linearne transformacije ranga 1 konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V takve da je $A + B$ ranga 1. Dokazati da je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$ ili $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B$.

Rešenje. S obzirom na 4.5 (zadatak 167) dimenzije $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{Ker} B$ moraju biti jednake, pa ni jedno od ta dva jezgra ne može biti pravi podskup onog drugog. Pretpostavimo da je $\operatorname{Ker} A \neq \operatorname{Ker} B$. To znači da postoje vektori x, y takvi da je $A(x) = 0$, $B(x) \neq 0$, $A(y) \neq 0$, $B(y) = 0$.

Dalje je $(A + B)(x) = B(x)$, $(A + B)(y) = A(y)$, a kako je $\dim A = \dim B = \dim(A + B) = 1$, sledi da je $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} B = \operatorname{Im}(A + B)$.

199. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora V i neka je $S = \operatorname{Ker}(A^{k-2})$, $T = \operatorname{Ker}(A^{k-1})$ i $R = \operatorname{Ker}(A^k)$, za neki prirodan broj $k > 2$.

Dalje, neka su $(a_1, \dots, a_r)$, $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s)$ i $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s, c_1, \dots, c_t)$ baze prostora S, T i R redom. Dokazati da je $(a_1, \dots, a_r, A(c_1), \dots, A(c_t))$ linearno nezavisan niz vektora u vektorskom prostoru T.

Rešenje. Ako je

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \beta_1 A(c_1) + \cdots + \beta_t A(c_t) = 0, \tag{10}$$

onda je

$$\alpha_1 A^{k-2}(a_1) + \cdots + \alpha_r A^{k-2}(a_r) + \beta_1 A^{k-1}(c_1) + \cdots + \beta_t A^{k-1}(c_t) = 0,$$

i

$$A^{k-1}(\beta_1 c_1 + \cdots + \beta_t c_t) = 0.$$

To znači da je $\sum_1^t \beta_i c_i \in T$, pa je

$$\sum_1^t \beta_i c_i = \sum_1^r \gamma_i a_i + \sum_1^s \delta_i b_i,$$

odakle sledi $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, t$, a onda (10) postaje

$$\sum_1^r \alpha_i a_i = 0,$$

odakle sledi da je $\alpha_i = 0$, $i = 1, \ldots, r$.

200. Neka je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V. Dokazati da su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

a) $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$,

b) $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker}(A^2)$,

c) $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im}(A^2)$.

Rešenje. Dokazaćemo da je *a)* $\Leftrightarrow$ *b)* i *b)* $\Leftrightarrow$ *c)*.

a) $\Rightarrow$ *b)*

Iz $A(x) = 0$ sledi $A^2(x) = 0$, pa je uvek $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} A^2$. Neka $x \in \operatorname{Ker} A^2$. Tada je $A(A(x)) = 0$, pa $A(x) \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$, odakle je $A(x) = 0$, tj. $x \in \operatorname{Ker} A$.

b) $\Rightarrow$ *a)*

Neka $x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$. Tada je $x = A(y)$ za neko $y \in V$ i važi $A^2(y) = A(x) = 0$. Iz $A^2(y) = 0$ na osnovu b) sledi $A(y) = 0$, tj. $x = 0$.

b) $\Rightarrow$ *c)*

Iz $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$ sledi $\dim(\operatorname{Im} A) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker} A) = \dim V - \dim(\operatorname{Ker} A^2) = \dim(\operatorname{Im} A^2)$. Uvek važi $\operatorname{Im} A^2 \subseteq \operatorname{Im} A$, jer $x = A^2(y) = A(A(y)) \in \operatorname{Im} A$. Tvrđenje sada sledi na osnovu zadatka 33.

c) $\Rightarrow$ *b)*

Slično kao *b)* $\Rightarrow$ *c)*.

201. Neka je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V. Dokazati da je

$$\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A = V$$

ako i samo ako je

$$\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\}.$$

Navesti primer linearne transformacije A konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V, takve da je $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A \neq V$.

Uputstvo. Koristiti 1.35 i 4.5.

Za linearnu transformaciju A vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ definisanu sa $A((x,y)) = (y,0)$, je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, pa je $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Im} A \neq \mathbb{R}^2$.

202. Neka je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V.

a) Dokazati da postoji $k \in \mathbb{N}$, tako da je $\operatorname{Ker}(A^k) = \operatorname{Ker}(A^{k+1})$ i $\operatorname{Im}(A^k) = \operatorname{Im}(A^{k+1})$.

b) Dokazati da je $\operatorname{Ker}(A^k) \oplus \operatorname{Im}(A^k) = V$.

Rešenje. a) Očigledno je $\operatorname{Ker}(A^l) \subseteq \operatorname{Ker}(A^{l+1})$ i $\operatorname{Im}(A^l) \supseteq \operatorname{Im}(A^{l+1})$, za svako $l \in \mathbb{N}$. Kako je V konačne dimenzije, sledi da postoji $k \in \mathbb{N}$, tako da je $\operatorname{Ker}(A^k) = \operatorname{Ker}(A^{k+1})$, a na osnovu 4.5 sledi da je i $\operatorname{Im}(A^k) = \operatorname{Im}(A^{k+1})$.

b) Ako $x \in \operatorname{Ker}(A^k) \cap \operatorname{Im}(A^k)$, onda je $A^k(x) = 0$ i postoji $y \in V$ tako da je $x = A^k(y)$. Dalje je $A^{2k}(y) = 0$, odnosno $y \in \operatorname{Ker}(A^{2k})$. Iz a) sledi da je $\operatorname{Ker}(A^k) = \operatorname{Ker}(A^{k_1})$, za svako $k_1 \geq k$, pa je $y \in \operatorname{Ker}(A^k)$, tj. $x = 0$.

Na osnovu prethodnog i 1.35, 4.5 dobija se $\dim(\operatorname{Ker}(A^k) + \operatorname{Im}(A^k))$ $= \dim(\operatorname{Ker}(A^k)) + \dim(\operatorname{Im}(A^k)) = \dim V$, dakle, $\operatorname{Ker}(A^k) + \operatorname{Im}(A^k) = V$, pa je $\operatorname{Ker}(A^k) \oplus \operatorname{Im}(A^k) = V$.

203. Neka je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog unitarnog vektorskog prostora V. Dokazati da postoji pozitivan realan broj k takav da za svako $x \in V$ važi

$$||A(x)|| \leq k||x||.$$

Rešenje. Neka je $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza prostora V i neka je $m = \max_{i=1,\ldots,n} ||A(e_i)||$. Tada je za svako $x \in V$

$$\begin{aligned} ||A(x)|| &= ||A\Big(\sum_1^n \alpha_i e_i\Big)|| = ||\sum_1^n \alpha_i A(e_i)|| \\ &\leq \sum_1^n ||\alpha_i A(e_i)|| = \sum_1^n |\alpha_i|\, ||A(e_i)|| \leq m \sum_1^n |\alpha_i| \\ &\leq m\Big(\underbrace{\sqrt{\textstyle\sum_1^n |\alpha_i|^2} + \cdots + \sqrt{\textstyle\sum_1^n |\alpha_i|^2}}_{n \text{ puta}}\Big) = mn||x||. \end{aligned}$$

204. Neka su A i B idempotentne linearne transformacije vektorskog prostora $V(F)$, gde je F polje karakteristike različite od 2, takve da je $A+B$ takođe idempotentna. Dokazati:

a) $AB = BA = 0$,

b) $\operatorname{Im}(A+B) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B$,

c) $\operatorname{Ker}(A+B) = \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B$.

Rešenje. a) Kako je $A + B = (A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$, sledi $AB + BA = 0$. Množeći poslednju jednakost sa A, najpre sleva, a zatim zdesna, dobija se $AB + ABA = 0$ i $ABA + BA = 0$, odakle je $AB = BA$, pa je $AB = BA = 0$.

b) Očigledno je $\operatorname{Im}(A+B) \subseteq \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$. Ako je $x \in \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$, onda postoje $y, z \in V$ tako da je $x = A(y) + B(z)$. Kako je $(A+B)A = A$ i $(A+B)B = B$, biće $x = A(y) + B(z) = (A+B)A(y) + (A+B)B(z) = (A+B)(A(y) + B(z)) = (A+B)(x)$, što znači da $x \in \operatorname{Im}(A+B)$. Dakle, $\operatorname{Im}(A+B) = \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$.

Ako $x \in \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B$, onda postoje $y, z \in V$, tako da je $x = A(y)$ i $x = B(z)$. Dalje je $x = A(y) = A(A(y)) = A(B(z)) = 0$, tj. $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B = \{0\}$.

c) Očigledno je $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker}(A+B)$. Ako $x \in \operatorname{Ker}(A+B)$, onda je $A(x)+B(x) = 0$, pa primenjujući A na poslednju jednakost dobijamo $A(x) = 0$, i slično $B(x) = 0$.

205. Neka su A i B linearne transformacije vektorskog prostora V, takve da je $AB = BA$, $A^2 = A$, $B^2 = B$. Dokazati da je

a) $\operatorname{Ker}(AB) = \operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B$,

b) $\operatorname{Im}(AB) = \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B$.

Rešenje. a) Ako je $x \in \operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B$, onda je $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \operatorname{Ker} A$, $x_2 \in \operatorname{Ker} B$,

$$AB(x) = AB(x_1) + AB(x_2) = BA(x_1) + AB(x_2) = 0,$$

dakle, $\operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B \subseteq \operatorname{Ker}(AB)$.

Ako je $x \in \operatorname{Ker}(AB)$, onda je $AB(x) = 0$ i $A(y) = 0$, gde je $y = B(x)$. Kako je $x = y + (x-y)$, $y \in \operatorname{Ker} A$,

$$B(x-y) = B(x) - B(y) = B(x) - B^2(x) = 0,$$

$x - y \in \operatorname{Ker} B$, pa je $\operatorname{Ker}(AB) \subseteq \operatorname{Ker} A + \operatorname{Ker} B$.

b) $\operatorname{Im}(AB) \subseteq \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im}(AB) = \operatorname{Im}(BA) \subseteq \operatorname{Im} B$, pa je $\operatorname{Im}(AB) \subseteq \operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B$.

Ako $x \in \mathrm{Im}\, A \cap \mathrm{Im}\, B$, onda postoje $y_1, y_2 \in V$ tako da je $x = A(y_1) = A^2(y_1) = A(x)$, $x = B(y_2) = B^2(y_2) = B(x)$, pa je $AB(x) = x$, tj. $x \in \mathrm{Im}\,(AB)$.

206. Neka je A linearna transformacija n-dimenzionalnog vektorskog prostora V takva da je $A^n = 0$, ali $A^{n-1} \neq 0$. Dokazati da je $\mathrm{rang}(A^k) = n - k$, $k = 1, \dots, n$.

Rešenje. Ako su u beskonačnom nizu potprostora

$$V \supseteq \mathrm{Im}\, A \supseteq \mathrm{Im}\,(A^2) \supseteq \dots$$

neka dva potprostora jednaka, $\mathrm{Im}\,(A^j) = \mathrm{Im}\,(A^{j+1})$, onda je, očigledno, i $\mathrm{Im}\,(A^j) = \mathrm{Im}\,(A^{j+p})$, za svako $p \in \mathbb{N}$. S obzirom da je $\mathrm{Im}\,(A^n) \neq \mathrm{Im}\,(A^{n-1})$, dimenzije potprostora

$$V,\ \mathrm{Im}\, A,\ \mathrm{Im}\,(A^2),\ \dots\ , \mathrm{Im}\,(A^{n-1}),$$

su međusobno različiti prirodni brojevi koji čine strogo opadajući niz sa n članova čiji je prvi član n, što je moguće jedino ako je $\dim(\mathrm{Im}\,(A^k)) = n - k$, $k = 1, \dots, n$.

207. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ data su preslikavanja

$$D(p(x)) = p'(x), \quad A(p(x)) = p(x) - p'(x),$$

gde je $p'(x)$ izvod polinoma $p(x)$.

a) D i A su linearne transformacije vektorskog prostora $\mathbb{R}_n[x]$.

b) A je regularna linearna transformacija.

c) A^{-1} se može izraziti pomoću D i E.

Dokazati.

Rešenje.

b) $p(x) \in \mathrm{Ker}\, A \Rightarrow p(x) = p'(x) \Rightarrow p(x) = 0$. Dakle, $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, pa kako je $\mathbb{R}_n[x]$ konačne dimenzije, na osnovu 4.15 sledi da je A regularna linearna transformacija.

c) Kako je $A = E - D$, biće

$$A(E + D + D^2 + \cdots + D^{n-1}) = E - D^n.$$

S obzirom da je $D^n = 0$, sledi

$$A^{-1} = E + D + D^2 + \cdots + D^{n-1}.$$

208. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora V. Ako je $b \in \mathrm{Im}\, A$, sa $A^{(-1)}(b)$ označimo sledeći skup

$$A^{(-1)}(b) = \{x \in V \mid A(x) = b\}.$$

a) Dokazati da je $A^{(-1)}(b)$ linearna mnogostrukost u prostoru V.

b) Ispitati za koje $b \in \operatorname{Im} A$ je $A^{(-1)}(b)$ potprostor vektorskog prostora V.

Uputstvo. a) Neka je $S = \{x \in V \mid A(x) = 0\}$ (tj. $S = \operatorname{Ker} A$) i neka je c vektor iz V takav da je $A(c) = b$. Tada je

$$A^{(-1)}(b) = c + S.$$

b) Da bi $A^{(-1)}(b)$ bio potprostor mora biti $0 \in A^{(-1)}(b)$, a to važi samo ako je $b = 0$.

209. Neka su A i B regularne linearne transformacije vektorskog prostora V takve da je transformacija $AB - E$ takođe regularna. Dokazati da je linearna transformacija

$$D = (A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$$

regularna i prikazati D^{-1} pomoću A i B.

Rešenje. Dokažimo najpre da je $A - B^{-1}$ regularna linearna transformacija. Kako je $(A - B^{-1})B = AB - E$, biće

$$(A - B^{-1})B(AB - E)^{-1} = E$$

i $(A - B^{-1})^{-1} = B(AB - E)^{-1}$. Dalje je

$$D = B(AB - E)^{-1} - A^{-1},$$

odakle sledi $D(AB - E) = A^{-1}$ i $D(ABA - A) = E$, pa je $D^{-1} = ABA - A$.

210. Neka je A linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V, a W potprostor od V takav da je

$$V = W \oplus \operatorname{Ker} A.$$

Ako je $(a_1, \ldots, a_k)$ baza potprostora W, dokazati da je niz vektora $(A(a_1), \ldots, A(a_k))$ linearno nezavisan i da je $\operatorname{rang}(A) = k$.

Rešenje. Ako je

$$\alpha_1 A(a_1) + \cdots + \alpha_k A(a_k) = 0,$$

onda je $A(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k) = 0$, pa $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k \in \operatorname{Ker} A$. Kako je $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k \in W$ i $W \cap \operatorname{Ker} A = \{0\}$, biće $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = 0$, odakle sledi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$.

Na osnovu 1.35 i 4.5 sledi da je $\dim(\operatorname{Im} A) = \dim W = k$.

211. Neka je $V(\mathbb{C})$ unitarni vektorski prostor, a $A : V \to V$ preslikavanje *na* takvo da je za svako $x, y \in V$

$$(A(x), A(y)) = (x, y).$$

Dokazati da je A linearna transformacija.

Rešenje. Neka su $x, y, v \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ i neka je $z = A(\alpha x + \beta y) - \alpha A(x) - \beta A(y)$. Kako je A preslikavanje *na*, to je $v = A(u)$ za neko $u \in V$, pa je

$$\begin{aligned}(z, v) &= (A(\alpha x + \beta y) - \alpha A(x) - \beta A(y), A(u)) \\ &= (A(\alpha x + \beta y), A(u)) - \alpha(A(x), A(u)) - \beta(A(y), A(u)) \\ &= (\alpha x + \beta y, u) - \alpha(x, u) - \beta(y, u) = 0.\end{aligned}$$

Kako je v proizvoljan vektor, za $v = z$ se dobija $(z, z) = 0$, tj. $z = 0$, pa je A zaista linearna transformacija.

212. Neka je T linearna transformacija unitarnog vektorskog prostora $V(\mathbb{C})$. Ako je za svako $u \in V$, $(T(u), u) = 0$, dokazati da je $T = 0$.

Pokazati da analogno tvrđenje ne važi ako je V unitarni vektorski prostor nad poljem relanih brojeva.

Rešenje. Ako su $u, v \in V$, onda je

$$\begin{gathered}(T(u+v), u+v) = (T(u) + T(v), u+v) \\ = (T(u), u) + (T(u), v) + (T(v), u) + (T(v), v) \\ = (T(u), v) + (T(v), u) = 0,\end{gathered}$$

pa je $(T(u), v) = -(T(v), u)$.

Takođe je

$$(T(u+iv), u+iv) = (T(u) + iT(v), u+iv) = i(T(v), u) - i(T(u), v) = 0,$$

odakle sledi $(T(v), u) = (T(u), v)$, pa je $(T(u), v) = 0$ za svako $u, v \in V$.

Međutim, ako je $(T(u), v) = 0$ za svako $u, v \in V$, onda je i za $u \in V$ i $T(u) = w$, $(T(u), w) = (T(u), T(u)) = 0$, pa je $T(u) = 0$, za svako $u \in V$.

U unitarnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom, preslikavanje $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definisano sa $T((x, y)) = (y, -x)$, je linearna transformacija takva da je $(T(u), u) = 0$, za svako $u \in V$, ali $T \neq 0$.

213. Neka su U, V i W konačno dimenzionalni vektorski prostori, a $A : U \to V$ i $B : V \to W$ linearne transformacije takve da je $BA = 0$. Dokazati da je $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) \leq m$, gde je $m = \dim V$.

Rešenje. Ako je $BA = 0$, onda je $\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Ker} B$, pa je $\operatorname{rang}(A) \leq \dim(\operatorname{Ker} B)$. Kako je $\dim(\operatorname{Ker} B) + \dim(\operatorname{Im} B) = m$, to je $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) \leq m$.

214. Neka su U, V i W konačno dimenzionalni vektorski prostori, a $A : U \to V$ i $B : V \to W$ linearne transformacije. Dokazati da je

$$\operatorname{rang}(BA) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}.$$

Rešenje. Kako je $\operatorname{Im} BA \subseteq \operatorname{Im} B$, odmah sledi da je $\operatorname{rang}(BA) \leq \operatorname{rang}(B)$. Ako je $A(x) = 0$, onda je $BA(x) = 0$, pa je $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Ker} BA$ i $\dim(\operatorname{Ker} A) \leq \dim(\operatorname{Ker}(BA))$. S obzirom da je (na osnovu 4.5) $\dim(\operatorname{Ker} A) = n - \operatorname{rang}(A)$, $\dim(\operatorname{Ker}(BA)) = n - \operatorname{rang}(BA)$, gde je $n = \dim U$, sledi da je $\operatorname{rang}(BA) \leq \operatorname{rang}(A)$.

215. Neka su A i B linearne transformacije konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V takve da je

$$V = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Ker} B.$$

Dokazati da je $\operatorname{rang}(A + B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

Rešenje. Ako $x \in \operatorname{Ker}(A + B)$, onda je $A(x) = B(-x)$, a kako je $\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B = \{0\}$, biće $A(x) = B(x) = 0$. Dakle, $x \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$, tj. $x = 0$ i $\operatorname{Ker}(A + B) = \{0\}$, pa mora biti $\operatorname{Im}(A + B) = V$.

Dakle, $\operatorname{Im}(A+B) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B$, pa je $\dim(\operatorname{Im}(A+B)) = \dim(\operatorname{Im} A) + \dim(\operatorname{Im} B)$, tj. $\operatorname{rang}(A + B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

216. Neka su A i B linearne transformacije n-dimenzionalnog vektorskog prostora V takve da je $A + B$ regularna linearna transformacija i $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Ker} A$.

a) Odrediti $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$.

b) Dokazati da je $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$.

Rešenje. a) Iz $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Ker} A$ sledi

$$\operatorname{rang}(B) \leq n - \operatorname{rang}(A),$$

odnosno,

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) \leq n.$$

S druge strane je

$$\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) \geq \operatorname{rang}(A + B) = n.$$

Dakle, $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) = n$.

b) Iz $\operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) = n$ sledi

$$\dim(\operatorname{Im} B) = \operatorname{rang}(B) = n - \operatorname{rang}(A) = \dim(\operatorname{Ker} A).$$

Pošto je $\operatorname{Im} B \subseteq \operatorname{Ker} A$, na osnovu zadatka 33 sledi $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$.

217. Neka je P linearna transformacija n-dimenzionalnog vektorskog prostora V takva da je $P^2 = P$. Dokazati da je $\operatorname{rang}(P) + \operatorname{rang}(E - P) = n$.

Rešenje. Dokazaćemo da je $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(E - P)$. Ako $x \in \operatorname{Im} P$, onda je $x = P(y)$, pa je $(E - P)(x) = P(y) - P^2(y) = 0$, dakle, $x \in \operatorname{Ker}(E - P)$. Ako $x \in \operatorname{Ker}(E - P)$, onda je $x = P(x)$, pa $x \in \operatorname{Im} P$.

Prema tome, $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(E - P)$, pa je $\operatorname{rang}(P) = n - \operatorname{rang}(E - P)$.

218. Neka je A linearna transformacija ranga 1 konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V.

a) Dokazati da je $\dim(\operatorname{Ker}(E + A)) \leq 1$ i $\dim(\operatorname{Ker}(E - A)) \leq 1$.

b) Dokazati da je bar jedna od transformacija $E + A$ i $E - A$ regularna.

Rešenje.

a) Dokazaćemo da je $\operatorname{Ker}(E + A) \subseteq \operatorname{Im} A$.

Neka $x \in \operatorname{Ker}(E + A)$. Tada je $x + A(x) = 0$, pa je

$$x = A(-x) \in \operatorname{Im} A.$$

Kako je $\dim(\operatorname{Im} A) = 1$, mora biti $\dim(\operatorname{Ker}(E + A)) \leq 1$. Slično se dokazuje da je $\operatorname{Ker}(E - A) \subseteq \operatorname{Im} A$, pa je $\dim(\operatorname{Ker}(E - A)) \leq 1$.

b) Ako su $E + A$ i $E - A$ singularne linearne transformacije, onda postoji $x \neq 0$, $x \in \operatorname{Ker}(E + A)$ i postoji $y \neq 0$, $y \in \operatorname{Ker}(E - A)$. Dokazaćemo da su x i y linearno nezavisni. Naime, iz $\alpha x + \beta y = 0$ sledi $A(\alpha x + \beta y) = 0$, pa je $\alpha A(x) + \beta A(y) = 0$. Iz razmatranja pod a) vidimo da je $A(x) = -x$ i $A(y) = y$, dakle, važi $-\alpha x + \beta y = 0$, što zajedno sa $\alpha x + \beta y = 0$ daje $\alpha x = 0$ i $\beta y = 0$, a odatle je $\alpha = 0$ i $\beta = 0$. Prema tome, x i y su linearno nezavisni. Pod a) smo dokazali da $x, y \in \operatorname{Im} A$, te je $\dim(\operatorname{Im} A) \geq 2$, što ne može biti jer je $\operatorname{rang}(A) = 1$.

219. Neka je A linearna transformacija realnog vektorskog prostora V takva da je $A^2 - A + E = 0$. Dokazati da je $A + kE$ regularna transformacija za svaki realan broj k i naći $(A + kE)^{-1}$.

Rešenje. Kako je

$$(A + kE)(A - (k + 1)E) = A^2 - A - k(k + 1)E = -(k^2 + k + 1)E,$$

onda je, s obzirom da je za svaki realan broj k, $k^2 + k + 1 \neq 0$,

$$(A + kE)^{-1} = -\frac{1}{k^2 + k + 1}(A - (k+1)E).$$

GLAVA 5

Matrice

5.1. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Matrica formata (tipa) $m \times n$ nad poljem F je svako preslikavanje $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to F$. Slike a_{ij} parova (i, j), $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, nazivaju se elementima matrice. Matricu formata $m \times n$ prikazujemo u obliku pravougaone tablice koja ima m vrsta i n kolona:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Gornju matricu ćemo skraćeno označavati sa $[a_{ij}]_{m \times n}$ ili samo sa $[a_{ij}]$.

Niz $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ nazivamo i-ta vrsta matrice, a niz $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ j-ta kolona matrice.

Skup svih matrica formata $m \times n$ nad poljem F označavaćemo sa $F^{m,n}$.

Matrice nad poljem realnih (kompleksnih) brojeva nazivaćemo realnim (kompleksnim) matricama.

5.2. Matrica formata $n \times n$ naziva se kvadratna matrica reda n.

Niz $(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ je glavna dijagonala kvadratne matrice $[a_{ij}]$ reda n.

Kvadratna matrica je gornja (donja) trougaona ako je $a_{ij} = 0$ za svako $i > j$ $(i < j)$.

Kvadratna matrica je dijagonalna ako je $a_{ij} = 0$ za svako $i \neq j$. Dijagonalna matrica čiji su svi elementi na dijagonali jednaki naziva se skalarna matrica.

Dijagonalnu matricu A čija je glavna dijagonala $(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ označavaćemo sa $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

Dijagonalna matrica reda n čiji su svi dijagonalni elementi jednaki 1 naziva se jedinična matrica reda n i označava se sa E_n ili samo sa E.

Matrica formata $m \times n$ čiji su svi elementi jednaki 0 naziva se nula-matrica i označava se sa $O_{m \times n}$ ili samo sa O.

5.3. Neka su $A, B \in F^{m,n}$, $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$. Zbir $A + B$ matrica A i B je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ takva da je

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

5.4. Neka je $A = [a_{ij}] \in F^{m,n}$ i $\alpha \in F$. Proizvod αA skalara α i matrice A je matrica $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ takva da je

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

5.5. Za svako $A, B, C \in F^{m,n}$ i svako $\alpha, \beta \in F$ važi

1) $A + (B + C) = (A + B) + C$,

2) $A + B = B + A$,

3) $A + O = A$, gde je $O \in F^{m,n}$,

4) $A + (-A) = O$, gde je $(-A) = (-1)A$,

5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$,

6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$,

7) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

8) $1A = A$.

Prema tome, $(F^{m,n}, +)$ je komutativna grupa, a $F^{m,n}$ je u odnosu na sabiranje matrica i množenje matrice skalarom vektorski prostor nad poljem F. Dimenzija ovog vektorskog prostora je mn.

5.6. Neka su $A = [a_{ij}] \in F^{m,n}$, $B = [b_{ij}] \in F^{n,p}$. Proizvod AB matrica A i B je matrica $C = [c_{ij}]_{m\times p}$ takva da je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, p.$$

5.7. Za svako $A \in F^{m,n}$, $B \in F^{n,p}$, $C \in F^{p,q}$,

$$A(BC) = (AB)C.$$

5.8. Za svako $A \in F^{m,n}$, $B, C \in F^{n,p}$,

$$A(B + C) = AB + AC,$$

i za svako $A, B \in F^{m,n}$, $C \in F^{n,p}$,

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Za svako $A \in F^{n,n}$,

$$AE = EA = A,$$

gde je $E \in F^{n,n}$ jedinična matrica.

5.9. $(F^{n,n}, +, \cdot)$ je prsten sa jedinicom E.

5.10. Neka je $V(F)$ vektorski prostor sa bazom $\mathcal{B} = (a_1, \ldots, a_n)$. Ako je $x \in V$ i

$$x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n,$$

onda se matrica formata $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

naziva koordinatna kolona vektora x u odnosu na bazu $(a_1, \ldots, a_n)$ i označava skraćeno sa $[x]_{\mathcal{B}}$ ili samo sa $[x]$.

Preslikavanje $f : V \to F^{n,1}$ definisano sa $f : x \mapsto [x]$ je bijekcija.

5.11. Ako je $V(F)$ vektorski prostor sa bazom $(a_1, \ldots, a_n)$, za svako $x, y \in V$ i svako $\alpha \in F$ važi

$$[x + y] = [x] + [y],$$

$$[\alpha x] = \alpha[x].$$

5.12. Ako je $V(F)$ vektorski prostor sa bazom $(a_1, \ldots, a_n)$, preslikavanje $f : V \to F^{n,1}$ definisano sa $f : x \mapsto [x]$ je izomorfizam, $V(F) \simeq F^{n,1}$.

5.13. Neka je $V(F)$ vektorski prostor sa bazom $\mathcal{B} = (a_1, \ldots, a_n)$ i A linearna transformacija tog vektorskog prostora. Ako je

$$\begin{aligned} A(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\ A(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n, \end{aligned}$$

onda se matrica

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

naziva matrica linearne transformacije A u odnosu na bazu $(a_1, \ldots, a_n)$ i označava skraćeno sa $[A]_{\mathcal{B}}$ ili samo sa $[A]$.

Dakle, kolone matrice $[A]$ su koordinatne kolone $[A(a_1)]$, $[A(a_2)]$, $\ldots$, $[A(a_n)]$.

Preslikavanje $f : \operatorname{End}(V) \to F^{n,n}$ definisano sa $f : A \to [A]$ je bijekcija.

5.14. Ako je $V(F)$ vektorski prostor sa bazom $(a_1,\dots,a_n)$ i A linearna transformacija tog vektorskog prostora, onda je za svako $x\in V$

$$[A(x)]=[A][x].$$

5.15. Ako je $V(F)$ vektorski prostor sa bazom $(a_1,\dots,a_n)$, onda je za svako $A,B\in \operatorname{End}(V)$ i svako $\alpha\in F$,

$$\begin{aligned}[A+B]&=[A]+[B],\\ [\alpha A]&=\alpha[A],\\ [AB]&=[A][B].\end{aligned}$$

5.16. Neka je $V(F)$ vektorski prostor sa bazom $(a_1,\dots,a_n)$.

Preslikavanje $f:\operatorname{End}(V)\to F^{n,n}$ definisano sa $f:A\to[A]$ je izomorfizam vektorskih prostora $\operatorname{End}(V)$ i $F^{n,n}$.

Preslikavanje f je, takođe, izomorfizam prstena $(\operatorname{End}(V),+,\cdot\,)$ i $(F^{n,n},+,\cdot\,)$.

5.17. Kvadratna matrica A je regularna ako postoji matrica B takva da je

$$AB=BA=E.$$

Ako postoji matrica B koja zadovoljava gornju jednakost, ona postoji jedinstveno, naziva se inverzna matrica za matricu A i označava sa A^{-1}.

Kvadratna matrica koja nije regularna naziva se singularna.

5.18. Ako je A kvadratna matrica za koju postoji matrica B takva da je $AB=E$ ili $BA=E$, onda je i $AB=BA=E$, tj. A je regularna matrica i B je njena inverzna matrica.

5.19. Linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora je regularna ako i samo ako je regularna njena matrica (u odnosu na bilo koju bazu).

5.20. Ako je A regularna linearna transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora, onda je

$$[A]^{-1}=[A^{-1}].$$

5.21. Determinanta kvadratne matrice $A=[a_{ij}]$ reda n je

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

i označavamo je sa $|A|$.

5.22. Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako je $|A| \neq 0$.

5.23. Ako su $A, B \in F^{n,n}$ regularne matrice, onda je matrica AB regularna i

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

5.24. Ako su A i B kvadratne matrice, onda je

$$|AB| = |A|\,|B|.$$

5.25. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

transponovana matrica je matrica

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Dakle, transponovana matrica matrice A se dobija tako što vrste matrice A postaju kolone matrice A'.

5.26. Ako je A regularna matrica, onda je

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

5.27. Ako su $A \in F^{m,n}$ i $B \in F^{n,p}$, onda je

$$(AB)' = B'A'.$$

5.28. Trag $\operatorname{tr} A$ matrice $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$ je zbir elemenata sa njene glavne dijagonale

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

5.29. Regularna matrica $A \in F^{n,n}$ je ortogonalna ako je $A' = A^{-1}$, tj. $AA' = E$.

Matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$ je simetrična ako je $A = A'$, tj. ako je $a_{ij} = a_{ji}$ za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Matrica $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$ je antisimetrična (ili kososimetrična) ako je $A' = -A$, tj. ako je $a_{ij} = -a_{ji}$ za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

5.30. Matrica $A \in F^{n,n}$ je nilpotentna ako postoji prirodan broj m takav da je $A^m = O$.

Matrica $A \in F^{n,n}$ je idempotentna ako je $A^2 = A$.

Matrica $A \in F^{n,n}$ je involutorna ako je $A^2 = E$.

5.31. Ako je $A \in F^{m,n}$, onda su elementarne transformacije te matrice sledeće transformacije:

1) Zamena mesta dve vrste (kolone).

2) Množenje svih elemenata jedne vrste (kolone) skalarom različitim od nule.

3) Dodavanje elemenata jedne vrste (kolone), prethodno pomnoženih nekim skalarom, odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone).

5.32. Elementarne matrice su matrice dobijene vršenjem tačno jedne elementarne transformacije na jediničnoj matrici E.

Elementarnu matricu dobijenu od jedinične matrice zamenom i-te i j-te vrste označavamo sa E_{ij}.

Elementarnu matricu dobijenu od jedinične matrice množenjem i-te vrste skalarom α označavamo sa $E_i(\alpha)$.

Elementarnu matricu dobijenu od jedinične matrice dodavanjem elemenata j-te vrste, prethodno pomnoženih skalarom α, odgovarajućim elementima i-te vrste označavamo sa $E_{ij}(\alpha)$.

Elementarne matrice dobijene vršenjem odgovarajućih elementarnih transformacija na kolonama jedinične matrice označavamo sa E'_{ij}, $E'_i(\alpha)$ i $E'_{ij}(\alpha)$.

Za elementarne matrice važe sledeće jednakosti

$$E_{ij} = E'_{ij}, \quad E_i(\alpha) = E'_i(\alpha), \quad E_{ij}(\alpha) = E'_{ji}(\alpha).$$

5.33. Neka je $A \in F^{m,n}$.

Ako je P elementarna matrica dobijena od jedinične matrice reda m vršenjem jedne elementarne transformacije na vrstama, onda je PA matrica koja se dobija od matrice A vršenjem na A te iste elementarne transformacije.

Ako je Q elementarna matrica dobijena od jedinične matrice reda n vršenjem jedne elementarne transformacije na kolonama, onda je AQ matrica koja se dobija od matrice A vršenjem na A te iste elementarne transformacije.

Dakle, vršenje elementarnih transformacija na vrstama (kolonama) matrice A ekvivalentno je množenju matrice A odgovarajućim elementarnim matricama sleva (zdesna).

5.34. Elementarne matrice su regularne, a njihove inverzne matrice su takođe elementarne matrice. Pri tome je

$$E_{ij}^{-1} = E_{ij}, \quad E_i(\alpha)^{-1} = E_i\left(\frac{1}{\alpha}\right), \quad E_{ij}(\alpha)^{-1} = E_{ij}(-\alpha),$$

i analogno za elementarne matrice dobijene od jedinične matrice vršenjem odgovarajućih elementarnih transformacija na kolonama.

5.35. Neka je $A = [\alpha_{ij}] \in F^{m,n}$. Kolone $A_1 = [\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{m1}]'$, $\ldots$, $A_n = [\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn}]'$ matrice A, posmatrane kao vektori vektorskog prostora $F^{m,1}$ nazivaju se vektori kolone matrice A. Analogno se definišu vektori vrste matrice A.

Rang po kolonama matrice A je maksimalan broj linearno nezavisnih vektora kolona te matrice.

Rang po vrstama matrice A je maksimalan broj linearno nezavisnih vektora vrsta te matrice.

Rang po minorima matrice A je broj k takav da su svi minori reda većeg od k matrice A, ako postoje, jednaki 0, a postoji bar jedan minor reda k koji je različit od nule.

Rang po kolonama, vrstama i minorima nula-matrice je 0.

5.36. Za svaku matricu $A = [\alpha_{ij}] \in F^{m,n}$ rang po kolonama jednak je rangu po vrstama i rangu po minorima, pa ćemo ga ubuduće nazivati samo rang i označavati sa $\operatorname{rang}(A)$.

5.37. Nulitet kvadratne matrice A reda n i ranga k je $n-k$.

5.38. Ako je $A = [\alpha_{ij}] \in F^{m,n}$ i ako su $A_1, \ldots, A_n$ vektori kolone matrice A, a $B_1, \ldots, B_m$ vektori vrste te matrice, onda je rang od A jednak dimenziji prostora $L(A_1, \ldots, A_n)$ generisanog vektorima kolonama matrice A i dimenziji prostora $L(B_1, \ldots, B_m)$ generisanog vektorima vrstama matrice A

$$\operatorname{rang}(A) = \dim(L(A_1, \ldots, A_n)) = \dim(L(B_1, \ldots, B_m)).$$

5.39. Vršenjem elementarnih transformacija na matrici ne menja se rang te matrice.

5.40. Rang i nulitet linearne transformacije konačno dimenzionalnog vektorskog prostora jednaki su redom rangu i nulitetu matrice te linearne transformacije.

5.41. Kvadratna matrica A reda n je regularna ako i samo ako je $\operatorname{rang}(A) = n$.

5.42. Kvadratna matrica A je regularna ako i samo ako se A može elementarnim transformacijama svesti na jediničnu matricu.

5.43. Svaka regularna matrica jednaka je proizvodu elementarnih matrica.

5.44. Matrica $A \in F^{m,n}$ je ekvivalentna matrici B, ako postoje regularne matrice P i Q takve da je

$$PAQ = B.$$

Da je matrica A ekvivalentna matrici B označavamo sa $A \sim B$.

5.45. Matrica A je ekvivalentna matrici B ako i samo ako se A može elementarnim transformacijama svesti na B.

5.46. Ekvivalencija matrica definisana u 5.44 je relacija ekvivalencije.

5.47. Dve matrice istog formata su ekvivalentne ako i samo ako imaju isti rang.

5.48. Ako su $A, B \in F^{m,n}$, onda je

$$\operatorname{rang}(A \pm B) \leq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$$

i

$$\operatorname{rang}(A \pm B) \geq \big|\operatorname{rang}(A) - \operatorname{rang}(B)\big|.$$

5.49. Ako su $A \in F^{m,n}$, $B \in F^{n,p}$, onda je

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang}(A), \operatorname{rang}(B)\}$$

i

$$\operatorname{rang}(AB) \geq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) - n.$$

5.50. Rang matrice se ne menja ako se ona pomnoži regularnom matricom.

5.51. Neka je $V(F)$ vektorski prostor, a $\mathcal{B}_1 = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\mathcal{B}_2 = (b_1, \ldots, b_n)$ dve baze tog prostora. Ako je $x \in V$, sa $[x]_1$ označavamo koordinatnu kolonu vektora x u odnosu na prvu bazu, a sa $[x]_2$ koordinatnu kolonu vektora x u odnosu na drugu bazu.

Tada za svako $x \in V$ važi

$$[x]_1 = T_{12}\,[x]_2,$$

gde je

$$T_{12} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

matrica, koja se naziva matrica prelaza sa prve na drugu bazu, definisana sa

$$b_1 = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n,$$

$$b_2 = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_n = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n.$$

Dakle, kolone matrice prelaza T_{12} čine koordinatne kolone $[b_1]_1$, $[b_2]_1$,...,$[b_n]_1$ vektora $b_1, b_2, \ldots, b_n$ u odnosu na prvu bazu.

Analogno je
$$[x]_2 = T_{21}\,[x]_1,$$
gde je T_{21} matrica prelaza sa druge na prvu bazu i njene kolone čine koordinatne kolone $[a_1]_2$, $[a_2]_2$,...,$[a_n]_2$ vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$ u odnosu na drugu bazu.

Pri tome je $T_{12}^{-1} = T_{21}$.

5.52. Neka je $V(F)$ vektorski prostor, a $\mathcal{B}_1 = (a_1, \ldots, a_n)$ i $\mathcal{B}_2 = (b_1, \ldots, b_n)$ dve baze tog prostora. Ako je $A \in \operatorname{End}(V)$, sa $[A]_1$ označavamo matricu transformacije A u u odnosu na prvu bazu, a sa $[A]_2$ matricu transformacije A u odnosu na drugu bazu.

Tada važi
$$[A]_1 = T_{12}\,[A]_2\,T_{21}.$$
Analogno je $[A]_2 = T_{21}\,[A]_1\,T_{12}$. S obzirom da je $T_{12}^{-1} = T_{21}$, prethodne dve jednakosti se mogu zapisati u obliku u kome su matrice T_{12} i T_{21} zamenjene odgovarajućim inverznim matricama.

5.53. Ako je $A = [\alpha_{ij}]$ kvadratna matrica reda $n \geq 2$ i ako je sa A_{ij} označen kofaktor (algebarski komplement) elementa α_{ij} u $|A|$, onda se matrica
$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}$$
naziva adjungovana matrica matrice A.

5.54. Za svaku kvadratnu matricu A reda $n \geq 2$ važi
$$AA^* = A^*A = |A|E.$$

5.55. Ako je A kvadratna matrica reda $n \geq 2$, onda je
$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

5.56. Ako je A kvadratna matrica reda $n \geq 2$, onda je
$$(A^*)^* = A, \quad \text{za } n = 2,$$
$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A \quad \text{za } n > 2.$$

5.57. Ako je A kvadratna matrica reda $n \geq 2$, onda važi

1) $\operatorname{rang}(A) \leq n-2 \Rightarrow \operatorname{rang}(A^*) = 0$,

2) $\operatorname{rang}(A) = n-1 \Rightarrow \operatorname{rang}(A^*) = 1$,

3) $\operatorname{rang}(A) = n \Rightarrow \operatorname{rang}(A^*) = n$.

5.58. Ako su A i B kvadratne matrice, onda je

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

5.59. Ako je A regularna matrica, onda je

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

5.60. Svaka regularna matrica se može svesti na jediničnu matricu elementarnim transformacijama vrsta.

5.61. Neka je regularna matrica A nizom elementarnih transformacija vrsta svedena na jediničnu matricu E. Ako se na matrici E izvrši taj isti niz elementarnih transformacija, dobija se matrica A^{-1}.

Z A D A C I

220. Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ realna matrica, dokazati da su sve matrice koje komutiraju sa A oblika $\alpha A + \beta E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Rešenje. Ako je $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix}$ matrica koja komutira sa A, onda se iz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dobija sistem jednačina čije je rešenje $z = y$, $x = y + u$, pa je

$$B = \begin{bmatrix} y+u & y \\ y & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y+(u-y) & y \\ y & y+(u-y) \end{bmatrix}$$

$$= y\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (u-y)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

221. Ako su $A, B \in F^{2,2}$, dokazati da je matrica $(AB - BA)^2$ skalarna matrica (5.2).

222. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \\ -c & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

matrica nad poljem F, dokazati da je

$$A^3 + aA^2 + bA + cE = O,$$

i

$$A^2 + \alpha A + \beta E \neq O,$$

za svako $\alpha, \beta \in F$.

223. Izračunati

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}^n, \; i^2 = -1, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n,$$

gde je $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. a) Ako je $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, onda je $A^2 = -E$, $A^3 = -A$, $A^4 = E$, pa je

$$A^{4k} = E, \quad A^{4k+1} = A, \quad A^{4k+2} = -E, \quad A^{4k+3} = -A, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

b) Ako je $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, onda je $A^2 = E$, pa je $A^n = E$ za n parno i $A^n = A$ za n neparno.

c) Indukcijom dokazati da je

$$\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}.$$

224. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

naći A^n, gde je $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. Matrica A se može rastaviti na zbir $A = 2E + B$, gde je

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jednostavno se proverava da je $B^n = O$ za svako $n \geq 3$, a kako matrice B i E komutiraju, n-ti stepen matrice A može se izračunati pomoću binomne formule

$$A^n = 2^n E + n2^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}B^2 = 2^{n-1}\begin{bmatrix} 2 & 4n & 3n(n+1) \\ 0 & 2 & 3n \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

225. Izračunati

$$\text{a)} \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n,$$

gde je $n \in \mathbb{N}$.

Uputstvo. Primeniti postupak naveden u rešenju zadatka 224 ili koristiti matematičku indukciju.

226. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

odrediti A^{300}.

Uputstvo. Datu matricu A podeliti na blokove $A = \begin{bmatrix} E & B \\ O & B \end{bmatrix}$ gde je $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ i primetiti da je $B^2 = B$. Koristeći ovu podelu na blokove matrice A, pokazati da je

$$A^k = \begin{bmatrix} E & B + B^2 + \cdots + B^k \\ O & B^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & kB \\ O & B \end{bmatrix}.$$

Prema tome,

$$A^{300} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 1 & 0 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

227. Koristeći 5.5 (da je $F^{n,n}$ u odnosu na sabiranje matrica i množenje matrice skalarom vektorski prostor dimenzije n^2 nad poljem F) dokazati da svaka matrica $A \in F^{n,n}$ zadovoljava jednu polinomnu jednačinu sa koeficijentima iz F, tj. da postoje $\alpha_0, \alpha_1 \ldots, \alpha_m \in F$ tako da je

$$\alpha_m A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = O.$$

228. Data je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Dokazati da je skup S svih matrica koje komutiraju sa A potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^{2,2}$. Odrediti dimenziju i jednu bazu tog potprostora.

Rešenje. Ako su $B, C \in S$, onda iz $AB = BA$ i $AC = CA$ sledi za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A(\alpha B + \beta C) = \alpha AB + \beta AC = \alpha BA + \beta CA = (\alpha B + \beta C)A,$$

pa je S potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^{2,2}$.

Neka je $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in S$. Tada iz $AB = BA$ sledi

$$5x - z = 5x + 6y, \qquad 5y - t = -x + 2y,$$
$$6x + 2z = 5z + 6t, \qquad 6y + 2t = -z + 2t.$$

Rešenje ovog sistema jednačina je

$$z = -6y, \quad x = -3y + t.$$

Odatle je

$$B = \begin{bmatrix} -3y + t & y \\ -6y & t \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bazu potprostora S čine matrice $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

229. Ako je $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ dijagonalna matrica reda n naći sve matrice $A = [a_{ij}]$ koje komutiraju sa D

a) ako su svi elementi $d_1, \ldots, d_n$ međusobno različiti,

b) ako među elementima $d_1, \ldots, d_n$ ima jednakih.

Rešenje. a) Kako je

$$DA = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_1a_{12} & \ldots & d_1a_{1n} \\ d_2a_{21} & d_2a_{22} & \ldots & d_2a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ d_na_{n1} & d_na_{n2} & \ldots & d_na_{nn} \end{bmatrix}$$

i

$$AD = \begin{bmatrix} d_1a_{11} & d_2a_{12} & \ldots & d_na_{1n} \\ d_1a_{21} & d_2a_{22} & \ldots & d_na_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ d_1a_{n1} & d_2a_{n2} & \ldots & d_na_{nn} \end{bmatrix}$$

iz $AD = DA$ izjednačujući odgovarajuće elemente dobija se da je za svako $i \neq j$, $a_{ij} = 0$, tj. A je dijagonalna matrica.

230. Matrica $A \in F^{n,n}$ komutira sa svakom matricom iz $F^{n,n}$ ako i samo ako je A skalarna matrica. Dokazati.

Uputstvo. Koristiti zadatak 229.

231. Dokazati da je proizvod dve gornje (donje) trougaone matrice gornja (donja) trougaona matrica.

Rešenje. Neka su $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = 0$, za $i > j$ i $B = [b_{ij}]$, $b_{ij} = 0$, za $i > j$, gornje trougaone matrice. Ako je $AB = C = [c_{ij}]$, onda je za $i > j$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=i}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0,$$

jer za $k = 1, \ldots, i-1$ je $i > k$ i $a_{ik} = 0$, a za $k = i, \ldots, n$ je $k \geq i > j$ pa je $b_{kj} = 0$.

232. U prstenu $(F^{n,n}, +, \cdot)$ (5.9) skup svih gornjih (donjih) trouganih matrica je potprsten. Dokazati.

Uputstvo. Koristiti zadatak 231.

233. Neka je $\mathrm{Inv}(F^{n,n})$ skup svih regularnih matrica reda n nad poljem F. Dokazati da je $(\mathrm{Inv}(F^{n,n}), \cdot)$ grupa.

234. Dokazati da je vektorski prostor $F^{n,n}$, gde je F polje sa bar tri elementa, generisan skupom $\mathrm{Inv}(F^{n,n})$ (v. zad. 233), tj. da se svaka matrica iz $F^{n,n}$ može prikazati kao linearna kombinacija regularnih matrica.

Rešenje. Neka je $A = [a_{ij}]$ proizvoljna matrica iz $F^{n,n}$. A se može napisati u sledećem obliku

$$A = A_l + A_u,$$

gde je A_l donja trougaona matrica čiji su elementi na glavnoj dijagonali i ispod nje jednaki odgovarajućim elementima matrice A, a ostali elementi su 0, a A_u je gornja trougaona matrica čiji su elementi iznad glavne dijagonale jednaki odgovarajućim elementima matrice A, a ostali elementi su 0.

Ako je $D = \mathrm{diag}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, gde su $k_1, \dots, k_n$ elementi polja F različiti od 0 i takvi da je $k_1 \neq a_{11}$, $k_2 \neq a_{22}$,…,$k_n \neq a_{nn}$, onda su matrice

$$B = D - A_l \quad \text{i} \quad C = A + B = A_u + D$$

regularne i pri tom je

$$A = -B + C.$$

235. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ simetrična, idempotentna matrica. Ako je $a_{mm} = 0$ za neko m, onda je $a_{mi} = 0$ za svako i i $a_{jm} = 0$ za svako j. Dokazati.

Rešenje. Neka je $A^2 = [b_{ij}]$. Tada je

$$b_{mm} = \sum_{i=1}^{n} a_{mi}a_{im} = \sum_{i=1}^{n} a_{mi}^2 = a_{mm},$$

jer je $a_{ij} = a_{ji}$ za svako i, j i $A^2 = A$.

236. Ako su $A, B, C \in F^{n,n}$, gde je F polje karakteristike različite od 2, simetrične matrice za koje važi jednakost

$$A + B + C = E,$$

tada su uslovi

a) A, B i C su idempotentne matrice,

b) $AB = BC = CA = O$,

ekvivalentni. Dokazati.

Rešenje. Neka su A, B i C idempotentne matrice. Množenjem jednakosti $A+B+C=E$ matricama A, B, C sa leve i sa desne strane dobijamo

$$AB + AC = O,$$

$$BA + BC = O,$$

$$CA + CB = O,$$

$$BA + CA = O,$$

$$AB + CB = O,$$

$$AC + BC = O.$$

Odavde se dobija $AB = BC = CA$ i $BA = CB = AC$, pa je $AB + BA = O$. Kada poslednju jednakost pomnožimo matricom A sleva dobijamo $AB + ABA = O$, odakle je $AB + CA = O$. Pošto je karakteristika polja F različita od 2, sledi da je

$$AB = CA = BC = O.$$

Obratno, ako je $AB = BC = CA = O$, zbog simetričnosti matrica A, B i C sledi

$$BA = B'A' = (AB)' = O$$

i na taj način $CB = O$ i $AC = O$. Tvrđenje se sada lako dobija množenjem jednakosti $A + B + C = E$ redom matricama A, B i C.

237. Dokazati da je svaka trougaona matrica čiji su svi elementi glavne dijagonale jednaki 0 nilpotentna.

Uputstvo. Ako je $A = [a_{ij}]$ gornja trougaona matrica reda n takva da je $a_{ij} = 0$ za $i \geq j$, dokazati da je onda $A^k = [b_{ij}]$ matrica kod koje je $b_{ij} = 0$ za $i + (k-1) \geq j$, odakle sledi da je $A^n = O$.

238. Ako su $A = [a_{ij}] \in F^{m,n}$ i $B = [b_{ij}] \in F^{n,m}$, dokazati da je

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Rešenje. Neka je $AB = C = [c_{ij}]_{m\times m}$ i $BA = D = [d_{ij}]_{n\times n}$. Tada je

$$c_{kk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

$$d_{ii} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{ki}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

pa je

$$\sum_{k=1}^{m} c_{kk} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ki}b_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{ki}b_{ik},$$
$$\sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{ki}.$$

PRIMEDBA. Koristeći zadatak 238 dokazati da je za matrice A, B, C reda n

$$\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB).$$

Generalisati.

Navesti primer matrica A, B, C za koje je

$$\operatorname{tr}(ABC) \neq \operatorname{tr}(BAC).$$

239. Ako su $A = [a_{ij}] \in F^{m,n}$ i $B = [b_{ij}] \in F^{n,m}$ matrice takve da je $AB = E_m$ i $BA = E_n$, gde su E_m i E_n jedinične matrice reda m i n respektivno, dokazati da je tada $m = n$.

Rešenje. Koristeći zadatak 238 dobija se

$$m = \operatorname{tr} E_m = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \operatorname{tr} E_n = n.$$

240. Dokazati da jednakost $AB - BA = E$ ne može važiti ni za koje dve matrice $A, B \in F^{n,n}$, gde je F polje beskonačne karakteristike.

Rešenje. Na osnovu zadataka 238 je $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, da je $\operatorname{tr}(A \pm B) = \operatorname{tr} A \pm \operatorname{tr} B$ očigledno je, pa je

$$\operatorname{tr}(AB - BA) = \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(BA) = 0.$$

Međutim, $\operatorname{tr} E = n \neq 0$.

241. Neka su $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$. Ako je $AA' = A'A$ i $AB = BA$, dokazati da je $AB' = B'A$.

Rešenje. Neka je $X = AB' - B'A$, $X = [x_{ij}]$. Tada je

$$\begin{aligned} XX' &= (AB' - B'A)(BA' - A'B) = AB'(BA' - A'B) - B'A(BA' - A'B) \\ &= A(B'BA' - B'A'B) - (B'BA' - B'A'B)A = AY - YA, \end{aligned}$$

gde je uvedena oznaka $Y = B'BA' - B'A'B$.

Na osnovu zadatka 238 je

$$\operatorname{tr}(XX') = \operatorname{tr}(AY - YA) = 0.$$

Kako je $\operatorname{tr}(XX') = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^2 = 0$, sledi $X = O$, pa je $AB' = B'A$.

242. Dokazati da je za svako $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$(\operatorname{tr}(A'B))^2 \le \operatorname{tr}(A'A)\operatorname{tr}(B'B).$$

Uputstvo. Pokazati da je sa $(A, B) = tr(A'B)$ definsan unutrašnji proizvod na $\mathbb{R}^{n,n}$, a onda primeniti Švarcovu nejednakost (3.6)

$$(A, B)^2 \le ||A||^2||B||^2,$$

pa je

$$(\operatorname{tr}(A'B))^2 \le \operatorname{tr}(A'A)\operatorname{tr}(B'B).$$

243. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ preslikavanje

$$A((x, y, z)) = (2x - 2y - 4z, -x + 3y + 4z, x - 2y - 3z)$$

je linearna transformacija. Naći matricu te transformacije u odnosu na bazu (e_1, e_2, e_3) ($e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$) i ispitati da li je A regularna transformacija.

Rešenje. Kako je

$$\begin{aligned} A(e_1) &= 2e_1 - e_2 + e_3, \\ A(e_2) &= -2e_1 + 3e_2 - 2e_3, \\ A(e_3) &= -4e_1 + 4e_2 - 3e_3, \end{aligned}$$

tražena matrica je

$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je $\big|[A]\big| = 0$, na osnovu 5.22 sledi da je matrica $[A]$ singularna, pa je i linearna transformacija A singularna (5.19).

244. Linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ u odnosu na bazu (e_1, e_2, e_3) ima matricu

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odrediti $A((1, 1, 2))$ i vektor (x, y, z) za koji je $A((x, y, z)) = (1, 1, 2)$.

Rešenje. Iz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sledi da je $A((1,1,2)) = (6,1,1)$, a iz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

rešavanjem odgovarajućih jednačina dobijamo da je $A((0,1,0)) = (1,1,2)$.

245. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom, linearna transformacija A preslikava svaki vektor $x \in \mathbb{R}^4$ u njegovu ortogonalnu projekciju na potprostor generisan vektorima $(1,2,3,0)$ i $(0,-1,-1,0)$. Naći matricu te transformacije u odnosu na bazu (e_1, e_2, e_3, e_4).

246. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ preslikavanje $D : p(x) \mapsto p'(x)$ koje svaki polinom preslikava u njegov izvod je linearna transformacija. Naći matricu ove linearne transformacije u odnosu na bazu $(1, x, x^2, x^3)$ i naći sliku polinoma $3 + 2x - x^2 + x^3$ transformacijom D.

Rešenje. Kako je

$$\begin{array}{lclcl} D(1) & = & 0 & = & 0 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x) & = & 1 & = & 1 \cdot 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x^2) & = & 2x & = & 0 \cdot 1 + 2x + 0x^2 + 0x^3, \\ D(x^3) & = & 3x^2 & = & 0 \cdot 1 + 0x + 3x^2 + 0x^3, \end{array}$$

tražena matrica je

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slika polinoma $3+2x-x^2+x^3$ transformacijom D (tj. izvod datog polinoma) je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix},$$

tj. $D(3 + 2x - x^2 + x^3) = 2 - 2x + 3x^2$.

247. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}_4[x]$ preslikavanje

$$D(p(x)) = p'(x),$$

gde je $p'(x)$ izvod polinoma $p(x)$, je linearna transformacija. Naći matricu ove linearne transformacije u odnosu na bazu $(1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3)$.

248. Linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$ definisana je sa $A((x,y)) = (2y, 3x-y)$. Naći matricu ove transformacije u odnosu na bazu $((1,3),(2,5))$ i sliku vektora $(1,4)$ transformacijom A.

Rešenje. Slike vektora date baze su

$$A((1,3)) = (6,0), \quad A((2,5)) = (10,1),$$

a da bismo dobili matricu transformacije A u odnosu na datu bazu treba te slike prikazati kao linearne kombinacije vektora iste baze. Iz

$$(6,0) = \alpha(1,3) + \beta(2,5),$$
$$(10,1) = \gamma(1,3) + \delta(2,5),$$

dobija se $\alpha = -30$, $\beta = 18$, $\gamma = -48$, $\delta = 29$, pa je

$$[A] = \begin{bmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{bmatrix}.$$

Da bismo dobili koordinatnu kolonu vektora $(1,4)$ prikazujemo taj vektor kao linearnu kombinaciju vektora date baze

$$(1,4) = 3(1,3) - 1(2,5).$$

Prema tome, tražena koordinatna kolona je $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, pa je

$$\begin{bmatrix} -30 & -48 \\ 18 & 29 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 \\ 25 \end{bmatrix},$$

tj. $A((1,4)) = -42(1,3) + 25(2,5) = (8,-1)$.

(Ovde smo $A((1,4))$ odredili množeći matricu transformacije A odgovarajućom koordinatnom kolonom da bismo ilustrovali taj postupak, međutim, u ovom primeru se $A((1,4))$ može jednostavnije odrediti direktno iz definicije transformacije A.)

249. Linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ preslikava vektore $a_1 = (1,2,3)$, $a_2 = (1,1,1)$ i $a_3 = (1,3,6)$ na sledeći način

$$\begin{aligned} A(a_1) &= (8,1,6), \\ A(a_2) &= (4,0,3), \\ A(a_3) &= (13,3,10). \end{aligned}$$

Naći slike vektora e_1, e_2 i e_3 i odrediti matricu ove linearne transformacije u odnosu na bazu (e_1, e_2, e_3).

Rešenje. Iz

$$e_1 = \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3,$$

dobija se $\alpha = -3$, $\beta = 3$ i $\gamma = 1$, pa je

$$A(e_1) = -3A(a_1) + 3A(a_2) + A(a_3) = (1, 0, 1) = e_1 + e_3.$$

Analogno se dobija da je

$$A(e_2) = (2, -1, 1) \quad \text{i} \quad A(e_3) = (1, 1, 1),$$

pa je matrica ove transformacije u odnosu na bazu (e_1, e_2, e_3)

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

250. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ linearne transformacije A i B su definisane sa

$$A((x, y)) = (y, -x), \qquad B((x, y)) = (x + 2y, x - y).$$

Naći matrice ovih transformacija u odnosu na bazu

a) (e_1, e_2),

b) $((2, 1), (-1, 1))$,

c) $((3, 5), (1, 0))$.

251. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ data je linearna transformacija A sa

$$A((x, y, z)) = (2x + y - z, x - y + 3z, x - y - z).$$

Naći matricu ove transformacije u odnosu na bazu

a) (e_1, e_2, e_3),

b) $((1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 3, 6))$.

252. Ako je B proizvoljna idempotentna linearna transformacija dvodimenzionalnog vektorskog prostora V, dokazati da je tada $B = E$ ili $B = O$ ili postoji neka baza $\mathcal{B}$ takva da je $[B]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (sa $[B]_{\mathcal{B}}$ je označena matrica transformacije B u odnosu na bazu $\mathcal{B}$).

Rešenje. Neka je B linearna transformacija takva da je $B^2 = B$.

S obzirom da su transformacije E i O idempotentne, B može biti jedna od tih transformacija.

Ako je $B \neq E$ i $B \neq O$, dokazaćemo da postoji $a \in V \setminus \{0\}$, tako da je

$$B(a) \neq a \quad \text{i} \quad B(a) \neq 0.$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je za svaki elemenat $a \in V \setminus \{0\}$, $B(a) = 0$ ili $B(a) = a$. Ako su $a_1, a_2 \in V \setminus \{0\}$, $B(a_1) = a_1$ i $B(a_2) = 0$, onda je $B(a_1 + a_2) = a_1$. Međutim, s obzirom na pretpostavku o B, moralo bi biti $B(a_1 + a_2) = 0$ ili $B(a_1 + a_2) = a_1 + a_2$, što je protivrečnost. Dakle, postoji $a \in V$, tako da je $B(a) \neq a \quad \text{i} \quad B(a) \neq 0$.

Dokazaćemo sada da je $(B(a), B(a) - a)$ baza vektorskog prostora V.

Iz

$$\alpha B(a) + \beta(B(a) - a) = 0,$$

sledi

$$\alpha B^2(a) + \beta(B^2(a) - B(a)) = 0,$$

pa je $\alpha B(a) = 0$, tj. $\alpha = 0$, a tada je i $\beta = 0$. Vektori $B(a)$ i $B(a) - a$ su linearno nezavisni u prostoru dimenzije 2, pa čine bazu tog prostora.

Odredićemo matricu linearne transformacije B u odnosu na bazu $\mathcal{B} = (B(a), B(a) - a)$. Iz

$$B(B(a)) = B(a) = B(a) + 0(B(a) - a),$$
$$B(B(a) - a) = 0 = 0B(a) + 0(B(a) - a),$$

sledi da je tražena matrica

$$[B]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

253. Ako je $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrica linearne transformacije A u standardnoj bazi prostora $\mathbb{R}^2$, odrediti sve baze prostora $\mathbb{R}^2$ u kojima transformacija A ima istu matricu.

Rešenje. Neka je $((x, y), (z, t))$ jedna takva baza. Tada je $\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}$ matrica prelaza sa standardne baze na ovu bazu, pa važi

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix},$$

odnosno,

$$\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix}.$$

Rešenje odgovarajućeg sistema jednačina je

$$z = -3y, \quad t = x - y,$$

pa su tražene baze oblika

$$((x, y), (-3y, x - y)), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

254. Neka je

$$[A]_2 = \begin{bmatrix} 9 & 5 & -5 \\ -18 & -10 & 10 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

matrica linearne transformacije A u odnosu na bazu $a = (2, -1, 3)$, $b = (1, -1, 2)$, $c = (-1, 1, -1)$, vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Ako je $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, odrediti $A(x)$.

Rešenje. Standardnu bazu nazivamo prvom bazom, a (a, b, c) drugom. Najpre ćemo odrediti matrice prelaza, a potom matricu $[A]_1$ u odnosu na standardnu bazu:

$$T_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad T_{21} = T_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$[A]_1 = T_{12}[A]_2 T_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$[A(x)]_1 = [A]_1[x]_1 = \begin{bmatrix} x_1 - 3x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 \end{bmatrix},$$

pa je $A(x) = (x_1 - 3x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 + x_3, -3x_1 - 2x_2 - x_3)$.

255. Linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ data je sa $A(a_i) = b_i$, $i = 1, 2, 3$, gde je $a_1 = (1, 0, 2)$, $a_2 = (2, 1, 1)$, $a_3 = (0, 3, 1)$, $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (0, 1, 3)$, $b_3 = (1, 1, 0)$. Linearna transformacija B data je svojom matricom $[B]_1$ u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathbb{R}^3$

$$[B]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odediti matricu $[BA]_2 = [\alpha_{ij}]$ linearne transformacije BA u odnosu na bazu (a_1, a_2, a_3).

Rešenje.

$$[BA(a_1)]_1 = [B(b_1)]_1 = [B]_1[b]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Iz

$$(2,6,5) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \alpha_{31}a_3$$

sledi

$$\begin{aligned} \alpha_{11} + 2\alpha_{21} &= 2,\\ \alpha_{21} + 3\alpha_{31} &= 6,\\ 2\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31} &= 5, \end{aligned}$$

pa je $\alpha_{11} = \frac{7}{5}$, $\alpha_{21} = \frac{3}{10}$, $\alpha_{31} = \frac{19}{10}$.

Na isti način se dobija

$$\begin{aligned} BA(a_2) &= \frac{1}{5}a_1 + \frac{7}{5}a_2 + \frac{16}{5}a_3,\\ BA(a_3) &= \frac{8}{5}a_1 - \frac{3}{10}a_2 + \frac{11}{10}. \end{aligned}$$

Tražena matrica je

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} & \frac{8}{5}\\ \frac{3}{10} & \frac{7}{5} & -\frac{3}{10}\\ \frac{19}{10} & \frac{16}{5} & \frac{11}{10} \end{bmatrix}.$$

256. Neka su $\phi_1 = (a_1, \dots, a_n)$, $\phi_2 = (b_1, \dots, b_n)$ i $\phi_3 = (c_1, \dots, c_n)$ baze prostora $\mathbb{R}^n$ i S linearna transformacija prostora $\mathbb{R}^n$ takva da je $S(a_i) = b_i$ za $i = \{1, \dots, n\}$. Ako je A matrica prelaza sa baze ϕ_3 na bazu ϕ_1 i B matrica prelaza sa baze ϕ_3 na bazu ϕ_2, dokazati da je matrica transformacije S u bazi ϕ_3 jednaka BA^{-1}.

Rešenje. Posmatrajući matrice A i B kao blok matrice formata $1 \times n$ (elementi tih blok matrica su kolone matrica A i B), dobijamo

$$\begin{aligned} [S]_{\phi_3}A &= [S]_{\phi_3}\Big[[a_1]_{\phi_3}, \dots, [a_n]_{\phi_3}\Big]\\ &= \Big[[S(a_1)]_{\phi_3}, \dots, [S(a_n)]_{\phi_3}\Big]\\ &= \Big[[b_1]_{\phi_3}, \dots, [b_n]_{\phi_3}\Big] = B. \end{aligned}$$

257. Neka je P idempotentna realna matrica i $I = 2P - E$. Dokazati da je P simetrična matrica ako i samo ako je I ortogonalna matrica.

Rešenje.

$I^2 = (2P - E)^2 = 4P^2 - 4P + E = E.$

Ako je P simetrična matrica, onda je

$$I \cdot I' = (2P - E)(2P - E)' = (2P - E)(2P' - E) = (2P - E)^2 = E.$$

Ako je I ortogonalna matrica, onda je $I \cdot I = E$ i $I \cdot I' = E$, odakle sledi $I = I'$.

$$P' = \frac{1}{2}(I + E)' = \frac{1}{2}(I' + E) = \frac{1}{2}(I + E) = P.$$

258. Pokazati da je za svake dve matrice $A_{m\times n}$ i $B_{n\times m}$ matrica

$$C = \begin{bmatrix} E - BA & B \\ 2A - ABA & AB - E \end{bmatrix}$$

involutorna ($A^2 = E$).

259. Ako su $A, B, C \in F^{n,n}$, A i B regularne matrice, dokazati da je

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

260. Neka je S regularna simetrična realna matrica, a P regularna realna matrica takva da je $P'SP = S$. Ako je $E + P$ regularna matrica i $T = S(E - P)(E + P)^{-1}$, dokazati da je T kososimetrična matrica.

Rešenje. U dokazu koristimo da iz $AB = BA$ sledi $A^{-1}B = BA^{-1}$ (pod uslovom da je A regularna matrica). Dokazaćemo da je $T' = -T$.

$$\begin{aligned}
T' &= ((E + P)^{-1})'(E - P)'S' = (E + P')^{-1}(E - P')S \\
&= (E + P')^{-1}(E - P')SPP^{-1} = (E + P')^{-1}(S - SP^{-1}) \\
&= (E + P')^{-1}S(E - P^{-1}) = (E + P')^{-1}(S^{-1})^{-1}(E - P^{-1}) \\
&= (S^{-1}(E + P'))^{-1}(E - P^{-1}) = (S^{-1} + S^{-1}P')^{-1}(E - P^{-1}) \\
&= (S^{-1} + P^{-1}S^{-1})^{-1}(E - P^{-1}) = ((E + P^{-1})S^{-1})^{-1}(E - P^{-1}) \\
&= S(E + P^{-1})^{-1}(E - P^{-1}) = S(E + P^{-1})^{-1}P^{-1}P(E - P^{-1}) \\
&= S(P(E + P^{-1}))^{-1}(P - E) = S(P + E)^{-1}(P - E) \\
&= S(P - E)(P + E)^{-1} = -S(E - P)(E + P)^{-1} = -T.
\end{aligned}$$

261. Neka su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ realne matrice reda n. Dokazati da je u unitarnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ sa standardnim unutrašnjim proizvodom $(Ax, y) = (x, By)$ za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$, ako i samo ako je $B = A'$.

Rešenje. Ako je $(Ax, y) = (x, By)$ za svaka dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^n$, tada ova jednakost važi i za $x = e_i$, $y = e_j$. Sada iz $(Ae_i, e_j) = a_{ji}$ i $(e_i, Be_j) = b_{ij}$ sledi $b_{ij} = a_{ji}$ za sve $i, j \in \{1, \dots, n\}$, pa je $B = A'$.

Ako je $B = A'$, lako je videti da za vektor kolone $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi $(x, y) = y' \cdot x$. Koristeći ovu jednakost dobijamo

$$(Ax, y) = y' \cdot Ax = (A'y)' \cdot x = (x, A'y).$$

Primedba. Slično tvrđenje važi i u prostoru $\mathbb{C}^n$:

Ako $A, B \in \mathbb{C}^n$, tada je $(Ax, y) = (x, By)$ za sve $x, y \in \mathbb{C}^n$ ako i samo ako je $B = \bar{A}'$.

262. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ i $p(x) \in \mathbb{R}[x]$. Ako je $A' = p(A)$ i $AB = BA$, dokazati da je $AB' = B'A$.

Rešenje.

$$AB' = (BA')' = (Bp(A))' = (p(A)B)' = (A'B)' = B'A.$$

263. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dokazati da je za svako $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ $A'AX = XA'A$ ako i samo ako postoji $k \in \mathbb{R}$ tako da je za sve $x, y \in \mathbb{R}$ $(Ax, Ay) = k(x, y)$.

Rešenje. Neka je za svako $X \in \mathbb{R}^{n,n}$ $A'AX = XA'A$. Pošto $A'A$ komutira sa svakom matricom, na osnovu zadatka 230 sledi da je $A'A = kE$ za neko $k \in \mathbb{R}$. Tada je

$$(Ax, Ay) = (x, A'Ay) = (x, ky) = k(x, y).$$

Ako postoji $k \in \mathbb{R}$ tako da je za sve $x, y \in \mathbb{R}$ $(Ax, Ay) = k(x, y)$, iz $(Ax, Ay) = k(x, y)$ sledi $(x, A'Ay) - (x, ky) = 0$, odnosno,

$$(x, (A'A - kE)y) = 0.$$

S obzirom da gornja jednakost važi za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$, uzimajući za x, y redom vektore standardne baze sledi da je $A'A - kE = 0$, pa je $A'A = kE$ i $A'AX = XA'A$ za svako $X \in \mathbb{R}^{n,n}$.

264. Neka je A realna simetrična matrica reda n, a B realna antisimetrična matrica istog reda takva da je $AB = BA$. Dokazati da za sve vektore $x \in \mathbb{R}^{n,1}$ važi $(Ax, Bx) = 0$.

Rešenje. $(Ax, Bx) = (x, A'Bx) = (x, ABx) = (x, BAx) = (B'x, Ax) = (-Bx, Ax) = -(Ax, Bx)$, a odavde sledi $(Ax, Bx) = 0$.

265. Neka su A i B linearne transformacije vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ takve da je $(A(x), A(x)) = (B(x), B(x))$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$. Definišimo preslikavanje $C : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Im} B$ sa $C : a \mapsto b$ ako i samo ako je $A(x) = a$ i

$B(x) = b$ za neko $x \in \mathbb{R}^n$. Dokazati da je C linearna transformacija i naći $\operatorname{Im} C$ i $\operatorname{Ker} C$.

Rešenje. Dokažimo najpre da je preslikavanje C dobro definisano. Neka je $A(x) = a$, $B(x) = b$, $A(y) = a$, $B(y) = c$. Tada je $A(x-y) = 0$, pa je $(B(x-y), B(x-y)) = (A(x-y), A(x-y)) = 0$, a odatle je $B(x-y) = 0$. Dakle, $C = B(y) = B(x) = b$.

Dokažimo da je preslikavanje C linearno. Neka je $C(a_1) = b_1$, $C(a_2) = b_2$. To znači da je za neke $x, y \in \mathbb{R}^n$, $A(x) = a_1$, $B(x) = b_1$, $A(y) = a_2$, $B(y) = b_2$. Ako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda je $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) = \alpha a_1 + \beta a_2$. Slično tome, $B(\alpha x + \beta y) = \alpha b_1 + \beta b_2$. Odatle sledi $C(\alpha a_1 + \beta a_2) = \alpha b_1 + \beta b_2 = \alpha C(a_1) + \beta C(a_2)$.

Neka $a \in \operatorname{Ker} C$. Tada je $A(x) = a$ i $B(x) = 0$ za neko $x \in \mathbb{R}^n$, pa je $0 = (Bx, Bx) = (Ax, Ax)$, odakle je $A(x) = a = 0$. Dakle, $\operatorname{Ker} C = \{0\}$.

Neka $b \in \operatorname{Im} B$. Onda postoji $x \in \mathbb{R}^n$ tako da je $B(x) = b$. Iz $C(A(x)) = B(x)$ sledi $C(A(x)) = b$, pa je $\operatorname{Im} C = \operatorname{Im} B$.

266. Neka je A realna simetrična matrica reda n. Dokazati:

a) $(\forall x \in \mathbb{R}^n)(A^2 x = 0 \Rightarrow Ax = 0)$,

b) $(\forall x \in \mathbb{R}^n)((\exists k \in \mathbb{N})(A^k x = 0) \Rightarrow Ax = 0)$.

Rešenje. a) Ako je $A^2 x = 0$, onda je $(Ax, Ax) = (x, A'Ax) = (x, A^2 x) = 0$, pa je $Ax = 0$.

b) Dokaz ćemo dati matematičkom indukcijom po k.

Tvrđenje važi za $k = 1$ i $k = 2$. Neka važi za sve $l < k$. Iz $A^k x = 0$, sledi $A^2(A^{k-2}x) = 0$, a odatle, s obzirom na a) dobijamo da je $A(A^{k-2}x) = A^{k-1}x = 0$. Sada, po induktivnoj pretpostavci sledi $Ax = 0$.

267. Ispitati za koje prirodne brojeve n postoji realna matrica reda n koja je ortogonalna i antisimetrična.

Rešenje. Neka je A realna, ortogonalna, antisimetrična matrica reda n. Iz $A'A = E$ i $A' = -A$ sledi $-A^2 = E$. Onda je $|-A^2| = (-1)^n |A|^2 = 1$, a poslednja jednakost ne može da važi za neparne brojeve n.

Neka je $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Tada je

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B \end{bmatrix}$$

ortogonalna i antisimetrična matrica, što znači da takva matrica postoji za sve parne brojeve n.

268. Matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

prikazati kao proizvod elementarnih matrica.

Rešenje. Matricu A ćemo najpre elementarnim transformacijama svesti na jediničnu matricu:

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\overset{E_{31}(-1)\cdot}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{E_{32}(1)\cdot}{\sim} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} &\overset{E_{3}(\frac{1}{2})\cdot}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{E_{23}(-1)\cdot}{\sim} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\overset{E_{12}(-1)\cdot}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$E_{12}(-1)E_{23}(-1)E_3(\tfrac{1}{2})E_{32}(1)E_{31}(-1)A = E,$$

odakle sledi

$$A^{-1} = E_{12}(-1)E_{23}(-1)E_3(\tfrac{1}{2})E_{32}(1)E_{31}(-1),$$

pa je

$$\begin{aligned} A &= E_{31}^{-1}(-1)E_{32}^{-1}(1)E_3^{-1}(\tfrac{1}{2})E_{23}^{-1}(-1)E_{12}^{-1}(-1) \\ &= E_{31}(1)E_{32}(-1)E_3(2)E_{23}(1)E_{12}(1). \end{aligned}$$

269. Dokazati da se svaka elementarna transformacija tipa 1) na vrstama (kolonama) (5.31) može zameniti nizom od četiri elementarne transformacije tipa 2) i 3) na vrstama (kolonama).

Rezultat.

$$E_{ij} = E_j(-1)E_{ij}(1)E_{ji}(-1)E_{ij}(1).$$

270. Dokazati da su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ekvivalentne. Odrediti matrice P i Q takve da bude

$$A = PBQ.$$

271. Odrediti rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. S obzirom da se vršenjem elementarnih transformacija na matrici njen rang ne menja, datu matricu ćemo elementarnim transformacijama svesti na stepenasti ili dijagonalni oblik iz koga se rang neposredno određuje.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa je $\operatorname{rang}(A) = 3$.

272. Odrediti rang matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$A = \begin{bmatrix} n-1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & n-1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Za $n = 1$ očigledno je $\operatorname{rang}(A) = 0$. Dalje nastavljamo pod pretpostavkom da je $n \neq 1$.

Elementarnim transformacijama svešćemo matricu A na dijagonalnu. Najpre prvoj vrsti dodajemo sve ostale

$$A \sim \begin{bmatrix} 2(n-1) & 2(n-1) & \dots & 2(n-1) \\ 1 & n-1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

Sada podelimo prvu vrstu sa $2(n-1)$, zatim oduzmemo prvu vrstu od ostalih, a na kraju oduzimamo prvu kolonu od svih ostalih

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n-1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & n-1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & n-2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & n-2 \end{bmatrix}.$$

Za $n = 2$, $\operatorname{rang}(A) = 1$, a za $n > 2$, $\operatorname{rang}(A) = n$.

273. Neka su $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in F$ i $A = [a_{ij}] \in F^{m,n}$, gde je $a_{ij} = x_i - y_j$. Odrediti rang matrice A.

Rešenje. Iz $A = B - C$, gde je

$$B = \begin{bmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & x_m & \dots & x_m \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix},$$

na osnovu 5.48 sledi $\operatorname{rang}(A) \leq \operatorname{rang}(B) + \operatorname{rang}(C) \leq 1 + 1 = 2$.

Na matrici A vršimo sledeće elementarne transformacije: prvu vrstu oduzimamo od svih ostalih vrsta, a zatim prvu kolonu oduzimamo od svih ostalih kolona. Tako se dobija

$$A = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & \dots & x_1 - y_n \\ x_2 - y_1 & x_2 - y_2 & \dots & x_2 - y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m - y_1 & x_m - y_2 & \dots & x_m - y_n \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} x_1 - y_1 & x_1 - y_2 & \dots & x_1 - y_n \\ x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & \dots & x_2 - x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m - x_1 & x_m - x_1 & \dots & x_m - x_1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} x_1 - y_1 & y_1 - y_2 & \dots & y_1 - y_n \\ x_2 - x_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m - x_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako su brojevi $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ međusobno jednaki, tada je $\text{rang}(A) = 0$.

Ako nisu svi ovi brojevi jednaki, ali je $x_i = x_j$ za sve $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ili $y_i = y_j$ za sve $i, j \in \{1, \dots, m\}$, onda je $\text{rang}(A) = 1$.

Ako postoji k tako da je $x_k \neq x_1$ i postoji l tako da je $y_l \neq y_1$, tada je $\text{rang}(A) = 2$, jer postoje dve linearno nezavisne vrste u poslednjoj matrici dobijenoj elementarnim transformacijama od matrice A (to su prva i k-ta vrsta).

274. Neka je $A \in F^{m,n}$. Dokazati da je $\text{rang}(A) \leq 1$ ako i samo ako postoje $b_1, \dots, b_m, c_1, \dots, c_n \in F$ takvi da je $A = [b_i c_j]$.

Rešenje. Ako je $A = [b_i c_j]$, onda je

$$A = \begin{bmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & \dots & b_1c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \dots & b_2c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_mc_1 & b_mc_2 & \dots & b_mc_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_n \end{bmatrix} = BC,$$

gde je $B = \begin{bmatrix} b_1, b_2, \dots, b_m \end{bmatrix}'$, $C = \begin{bmatrix} c_1, c_2, \dots, c_n \end{bmatrix}$.

Kako je $\text{rang}(B) \leq 1$ i $\text{rang}(C) \leq 1$, na osnovu 5.49 sledi

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(BC) \leq \min\{\text{rang}(B), \text{rang}(C)\} \leq 1.$$

Obrnuto, ako je $\text{rang}(A) = 0$, onda A ima traženi oblik (može se uzeti $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$). Ako je $\text{rang}(A) = 1$, onda je bar jedna vrsta matrice A različita od $(0, 0, \dots, 0)$. Ako je ta vrsta prva (slično je i za ostale), pošto je rang po vrstama 1, postoje skalari $b_2, \dots, b_m$ tako da je

$$A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ b_2c_1 & b_2c_2 & \dots & b_2c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_mc_1 & b_mc_2 & \dots & b_mc_n \end{bmatrix}.$$

Primedba. Iz rešenja prethodnog zadatka vidi se da je rang matrice $A \in F^{m,n}$ manji ili jednak 1 ako i samo ako je $A = BC$, gde je B matrica kolona, a C matrica vrsta.

275. Dokazati da je za svaku matricu $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\text{rang}(A^n) = \text{rang}(A^{n+1})$.

Rešenje. Ako je A regularna matrica, s obzirom da se rang matrice ne menja ako se ona pomnoži regularnom matricom, odmah sledi da je $\operatorname{rang}(A^n) = \operatorname{rang}(A^{n+1})$.

Ako je A singularna matrica, onda je $\operatorname{rang}(A) < n$, pa je na osnovu 5.49

$$n > \operatorname{rang}(A) \geq \operatorname{rang}(A^2) \geq \cdots \geq \operatorname{rang}(A^n) \geq 0.$$

Ako su u gornjem nizu sve nejednakosti stroge, onda je $\operatorname{rang}(A^n) = 0$, pa je i $\operatorname{rang}(A^{n+1}) = 0$. Ako to nije slučaj, onda postoji $k < n$, tako da je $\operatorname{rang}(A^k) = \operatorname{rang}(A^{k+1})$.

Ako je sa A_1 označena linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ definisana matricom A, onda je $\operatorname{rang}(A^i) = \dim(\operatorname{Im}(A_1^i))$ za svako $i \in \mathbb{N}$ (5.40). Dakle, $\dim(\operatorname{Im}(A_1^k)) = \dim(\operatorname{Im}(A_1^{k+1}))$, a kako je za svaku linearnu transformaciju B, $\operatorname{Im}(B^{k+1}) \subseteq \operatorname{Im}(B^k)$, sledi $\operatorname{Im}(A_1^{k+1}) = \operatorname{Im}(A_1^k)$.

Kako je

$$\operatorname{Im}(A_1^{k+2}) = A_1(\operatorname{Im}(A_1^{k+1})) = A_1(\operatorname{Im}(A_1^k)) = \operatorname{Im}(A_1^{k+1}),$$

sledi da je $\operatorname{rang}(A^{k+1}) = \operatorname{rang}(A^{k+2})$. Nastavljajući ovaj postupak dalje, dobija se da je $\operatorname{rang}(A^n) = \operatorname{rang}(A^{n+1})$.

276. Ako je $A \in F^{n,n}$ matrica ranga 1, dokazati da je $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.

Rešenje. Na osnovu zadatka 274 postoje $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in F$ takvi da je $A = [a_{ij}] = [b_i c_j]$. Neka je $A^2 = [d_{ij}]$. Tada je

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_i c_k b_k c_j = b_i c_j \sum_{k=1}^{n} b_k c_k = a_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{kk} = a_{ij} \cdot \operatorname{tr} A,$$

pa pošto to važi za sve i, j sledi $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$.

277. Neka je $A \in F^{n,n}$ i $\operatorname{rang}(A) = 1$. Dokazati da je $A^2 = A$ ako i samo ako je $\operatorname{tr} A = 1$.

Rešenje. Sledi direktno iz zadatka 276.

278. Neka je A linearna transformacija n-dimenzionalnog vektorskog prostora V takva da je $\operatorname{Im} A^2 \subseteq \operatorname{Ker} A^2$. Dokazati da je $\operatorname{rang}(A) \leq \frac{3}{4}n$.

Rešenje. Iz $\dim(\operatorname{Im} A^2) \leq \dim(\operatorname{Ker} A^2)$ sledi

$$\operatorname{rang}(A^2) \leq n - \operatorname{rang}(A^2),$$

odnosno,

$$\operatorname{rang}(A^2) \leq \frac{n}{2}.$$

Na osnovu 5.49 je

$$\operatorname{rang}(A^2) \geq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(A) - n,$$

pa iz prethodne dve nejednakosti sledi

$$\frac{n}{2} \geq \operatorname{rang}(A^2) \geq 2\operatorname{rang}(A) - n.$$

Dakle, $2\operatorname{rang}(A) \leq n + \frac{n}{2}$, pa je $\operatorname{rang}(A) \leq \frac{3}{4}n$.

279. Neka su $A_1, A_2, \ldots, A_k$ kvadratne matrice reda n takve da je $A_1A_2\ldots A_k = 0$. Dokazati da je

$$\operatorname{rang}(A_1) + \operatorname{rang}(A_2) + \cdots + \operatorname{rang}(A_k) \leq (k-1)n.$$

Rešenje. Dokaz ćemo dati indukcijom po k. Za $k = 2$ tvrđenje važi, jer je na osnovu 5.49

$$\operatorname{rang}(A_1) + \operatorname{rang}(A_2) \leq \operatorname{rang}(A_1A_2) + n = n.$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za $k-1$. Koristeći 5.49 i induktivnu pretpostavku dobijamo

$$\begin{aligned} &\operatorname{rang}(A_1) + \operatorname{rang}(A_2) + \cdots + \operatorname{rang}(A_k) \\ \leq\, &n + \operatorname{rang}(A_1A_2) + \operatorname{rang}(A_3) + \cdots + \operatorname{rang}(A_k) \\ \leq\, &n + (k-2)n = (k-1)n. \end{aligned}$$

280. Odrediti matricu A ako je

$$A^* = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -6 & 9 & -1 \\ 8 & -12 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Iz $AA^* = |A|E$ sledi $A = |A|(A^*)^{-1}$.

Na osnovu 5.55 sledi $|A|^2 = |A^*| = 4$, odakle je $|A| \in \{-2, 2\}$. Neposrednom proverom obe mogućnosti dobijamo da je

$$A = 2(A^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

281. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ takva da je $\operatorname{rang}(A) = 1$, $A((1,1,1)) = (1,-2,2)$ i matrica $[A]_1$ transformacije A u odnosu na standardnu bazu prostora $\mathbb{R}^3$ je simetrična. Naći matricu $[A]_2$ transformacije A u odnosu na bazu $x = (1,2,3)$, $y = (0,1,2)$, $z = (1,1,0)$.

Rešenje. Neka je $[A]_1$ matrica transformacije A u odnosu na standardnu bazu. Tada važi

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \beta a & \beta b & \beta c \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad [A]_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

pa se dobija

$$\begin{aligned} a+b+c &= 1, \\ \alpha(a+b+c) &= -2, \\ \beta(a+b+c) &= 2. \end{aligned}$$

Odatle je $\alpha = -2,\ \beta = 2$.

Dalje, zbog simetričnosti matrice $[A]_1$ važi

$$b = -2a, \quad c = 2a, \quad -2c = 2b,$$

pa je $a+b+c = a-2a+2a = 1$ i $a = 1$, $b = -2$, $c = 2$. Dakle,

$$[A]_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$[A]_2 = T_{12}^{-1}[A]_1 T_{12},$$

gde je $T_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrica prelaza sa prve na drugu bazu.

Na kraju,

$$[A]_2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 16 & -8 \\ -33 & -22 & 11 \\ -21 & -14 & 7 \end{bmatrix}.$$

282. Ako su $A, B \in F^{m,n}$, dokazati da je

$$\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang}(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}).$$

Rešenje. Ako u matrici $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ dodamo $(m+i)$-tu vrstu i- toj, za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$, dobija se ekvivalentna matrica $\begin{bmatrix} A+B \\ B \end{bmatrix}$. Kako je u matrici rang podmatrice uvek manji ili jednak od ranga cele matrice, sledi da je

$$\operatorname{rang}(A+B) \leq \operatorname{rang}(\begin{bmatrix} A+B \\ B \end{bmatrix}) = \operatorname{rang}(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}).$$

283. Odrediti inverznu matricu za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Kako je

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|},$$

biće

$$A^{-1} = \frac{A^*}{|A|} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

PRIMEDBA. Broj računskih operacija potrebnih za izračunavanje inverzne matrice reda n ovim postupkom raste proporcionalno sa $n!$, pa s obzirom da $n!$ raste veoma brzo ovaj postupak za odeđivanje inverzne matrice je pogodan samo za matrice malog reda n.

284. Odrediti inverznu matricu za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Svaka regularna matrica se može svesti na jediničnu matricu samo elementarnim transformacijama vrsta (5.60), dakle, postoje elementarne matrice $E_1, E_2, \ldots, E_k$ takve da je

$$E_k \ldots E_2 E_1 A = E,$$

pa je

$$A^{-1} = E_k \ldots E_2 E_1 E,$$

što znači da se matrica A^{-1} može dobiti vršenjem na jediničnoj matrici E onih istih elementarnih transformacija istim redom koje smo vršili kada smo A transformisali u E.

Primenićemo ovo na datoj matrici. Najjednostavniji način da se to izvede je da formiramo matricu $[A|E]$ formata 3×6 čiji blokovi su matrice A i E, a onda na toj matrici vršimo elementarne transformacije na vrstama dok levi blok (matricu A) ne svedemo na jediničnu matricu. Desni blok (prvobitno matrica E) će onda biti transformisan u matricu A^{-1}.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Dakle,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

285. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ i

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \ldots & b & b \\ b & a & b & \ldots & b & b \\ b & b & a & \ldots & b & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & a & b \\ b & b & b & \ldots & b & a \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Odrediti vrednosti a, b za koje je matrica A regularna i za te vrednosti a, b izračunati A^{-1}.

Rešenje. Vršimo elementarne transformacije na vrstama matrice $[A|E]$. Ako sve vrste od druge do n-te dodamo prvoj dobijamo

$$[A|E] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \ldots & a+(n-1)b & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ b & a & \ldots & b & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & \ldots & a & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right].$$

Ako je $a+(n-1)b = 0$, onda matrica sa leve strane, a samim tim i matrica A, nisu regularne. Dakle, dalje radimo pod pretpostavkom $a+(n-1)b = c \neq 0$.

Ako podelimo prvu vrstu sa c, a zatim svim vrstama od druge do n-te dodamo prvu pomnoženu sa $-b$, dobijamo

$$[A|E] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & \ldots & 1 & \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \ldots & \frac{1}{c} \\ 0 & a-b & \ldots & 0 & -\frac{b}{c} & 1-\frac{b}{c} & \ldots & -\frac{b}{c} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a-b & -\frac{b}{c} & -\frac{b}{c} & \ldots & 1-\frac{b}{c} \end{array}\right].$$

Ako je $a-b=0$, levi blok poslednje matrice je singularna matrica. Dakle, u daljem uzimamo da je $a-b\neq 0$. Podelimo sve vrste osim prve sa $a-b$, a zatim sve vrste od druge do n-te oduzmeno od prve. Tada je

$$[A|E]=\left[\begin{array}{c|cccc} & \dfrac{c-b}{c(a-b)} & -\dfrac{b}{c(a-b)} & \dots & -\dfrac{b}{c(a-b)}\\ E & -\dfrac{b}{c(a-b)} & \dfrac{c-b}{c(a-b)} & \dots & -\dfrac{b}{c(a-b)}\\ & \dots & \dots & \dots & \dots\\ & -\dfrac{b}{c(a-b)} & -\dfrac{b}{c(a-b)} & \dots & \dfrac{c-b}{c(a-b)}\end{array}\right].$$

Dakle, A je regularna ako je $a+(n-1)b\neq 0$ i $a\neq b$ i tada je

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{c-b}{c(a-b)} & -\dfrac{b}{c(a-b)} & \dots & -\dfrac{b}{c(a-b)}\\ -\dfrac{b}{c(a-b)} & \dfrac{c-b}{c(a-b)} & \dots & -\dfrac{b}{c(a-b)}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\dfrac{b}{c(a-b)} & -\dfrac{b}{c(a-b)} & \dots & \dfrac{c-b}{c(a-b)}\end{bmatrix},$$

gde je $c=a+(n-1)b$.

286. Za matricu $A=[a_{ij}]\in F^{n,n}$, gde je $a_{ij}=\min(i,j)$, odrediti A^{-1}.

Rešenje. Vršimo elementarne transformacije na vrstama matrice

$$[A|E]=\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & E\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & \end{array}\right].$$

Ako $(n-1)$-vu vrstu oduzmemo od n-te, zatim vrstu $n-2$ od vrste $n-1$ itd., dobija se

$$[A|E]\sim\left[\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{array}\right],$$

a zatim drugu vrstu oduzmemo od prve, zatim treću od druge itd.

$$[A|E] \sim \left[\begin{array}{c|cccccc} & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ E & \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Desni blok gornje matrice je matrica A^{-1}.

287. Naći inverznu matricu za matricu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Rezultat.

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} 2-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-n & \dots & 1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 1 & 1 & \dots & 2-n \end{bmatrix}.$$

288. Za matricu iz $F^{n+1,n+1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \binom{n}{0} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \dots & \binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \binom{n}{3} \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \binom{n}{n} \end{bmatrix}$$

čiji elementi iznad glavne dijagonale čine Paskalov trougao, odrediti inverznu matricu.

Rešenje. U vektorskom prostoru $F_{n+1}[x]$ preslikavanje A definisano sa

$$A\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i (1+x)^i$$

je regularna linearna transformacija (zadatak 188). Prema tome, inverzno preslikavanje A^{-1} određeno sa

$$A^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i(-1+x)^i$$

je takođe linearna transformacija. Matrica transformacije A u odnosu na bazu $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ je data trougaona matrica, a matrica transformacije A^{-1} će biti tražena inverzna matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \ldots & (-1)^{1+(n+1)}\binom{n}{0} \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \ldots & (-1)^{2+(n+1)}\binom{n}{1} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & \ldots & (-1)^{3+(n+1)}\binom{n}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & (-1)^{4+(n+1)}\binom{n}{3} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & (-1)^{n+1+(n+1)}\binom{n}{n} \end{bmatrix}.$$

289. Neka je $A = [a_i j] \in F^{n,n}$ matrica takva da je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 0$ za svako $i = 1, \ldots, n$ (tj. zbir elemenata u svakoj vrsti je 0). Dokazati da je A singularna matrica.

Rešenje. Ako je $a = [1, 1, \ldots, 1]'$, onda je $Aa = 0$, a to znači da je A singularna matrica.

290. Neka su $A, B \in F^{n,n}$. Dokazati da je matrica AB regularna ako i samo ako su matrice A i B regularne.

Rešenje. Neka je AB regularna matrica i $X = (AB)^{-1}$. Tada je $A(BX) = E$ i $(XA)B = E$, pa su i matrice A i B regularne.

Neka su A i B regularne matrice. Tada je $ABB^{-1}A^{-1} = E$, pa je $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

291. Neka je $A \in F^{n,n}$. Dokazati:

a) Postoji regularna matrica $X \in F^{n,n}$ takva da je $AXA = A$.

b) A se može predstaviti u obliku $A = PY$, gde je P idempotentna matrica, a Y je regularna matrica.

Rešenje. a) Ako je r rang matrice A, onda postoje regularne matrice Q i R takve da je

$$QAR = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

gde je E_r jedinična matrica reda r.

Iz
$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
sledi $QARQAR = QAR$, a odatle je $ARQA = A$. Matrica RQ je regularna, jer su R i Q regularne, dakle, RQ je tražena matrica X.

b) Iz $AXA = A$ sledi $AXAX = AX$, tj. AX je idempotentna matrica. Matricu A možemo napisati u obliku proizvoda $A = AXX^{-1}$, gde je AX idempotentna, a X^{-1} regularna matrica.

292. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ matrica takva da je za svako $i \in \{1, \ldots, n\}$
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$
Dokazati da je A regularna matrica.

Uputstvo. Koristiti zadatak 30.

293. U regularnoj matrici $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ zbir elemenata jedne vrste jednak je zbiru elemenata bilo koje druge vrste. Dokazati da istu osobinu ima i matrica A^{-1}.

Rešenje. Neka je $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = r$, $i = 1, \ldots, n$. Tada je
$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}=A^{-1}\begin{bmatrix} r \\ r \\ \vdots \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{r}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

GLAVA 6

Polinomne matrice. Karakteristični koreni i vektori

6.1. Neka je F polje, a $F[\lambda]$ prsten polinoma po λ sa koeficijentima iz F. Polinomna matrica formata $m \times n$ je svako preslikavanje $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \to F[\lambda]$. Kao i kod matrica nad poljem, koje su definisane u glavi 5, polinomne matrice prikazujemo u obliku pravougaone tablice sa m vrsta i n kolona:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Gornju matricu ćemo skraćeno označavati sa $[a_{ij}(\lambda)]$.

Skup svih polinomnih matrica formata $m \times n$ nad $F[\lambda]$ označavaćemo sa $F[\lambda]^{m,n}$.

Za polinomne matrice važe tvrđenja analogna tvrđenjima o matricama nad poljem F navedenim u 5.1–5.9.

6.2. Ako je

$$A(\lambda) = A_p\lambda^p + \dots + A_1\lambda + A_0, \tag{$*$}$$

gde su A_i, $i = 0, 1, \dots, p$, matrice iz $F^{n,n}$, $A_p \neq 0$, onda se $A(\lambda)$ naziva matrični polinom stepena p. Pri tome, usvajamo konvenciju da je $A\lambda = \lambda A$, $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$, dakle,

$$A\lambda = \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sabirajući elemente na desnoj strani jednakosti (*), dobija se da je $A(\lambda)$ polinomna matrica. Očevidno, svaki matrični polinom može se na jedinstven način prikazati kao polinomna matrica.

Važi i obrnuto, ako je

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

polinomna matrica, a p maksimalan stepen polinoma $a_{ij}(\lambda)$, $i, j = 1, \dots, n$, onda se $A(\lambda)$ može prikazati kao matrični polinom stepena p

$$A(\lambda) = A_p\lambda^p + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

gde je $A_i \in F^{n,n}$, $i = 0, 1, \dots, p$.

6.3. Neka je

$$A(\lambda) = A_p\lambda^p + \cdots + A_1\lambda + A_0, \quad A_i \in F^{n,n}$$

matrični polinom. Ako se u tom polinomu stavi $\lambda = c \in F$, dobija se

$$A(c) = A_pc^p + \cdots + A_1c + A_0,$$

i ta vrednost ne zavisi od toga da li je λ pisano sa leve ili desne strane u polinomu $A(\lambda)$.

Međutim, ako se u matričnom polinomu $A(\lambda)$ stavi $\lambda = C \in F^{n,n}$, s obzirom da množenje matrica nije komutativno, mogu se dobiti različite vrednosti za $A(C)$, zavisno od toga da li je λ pisano sa leve ili desne strane:

$$A_r(C) = A_pC^p + \cdots + A_1C + A_0$$

i

$$A_l(C) = C^pA_p + \cdots + CA_1 + A_0.$$

$A_r(C)$ se naziva desna funkcionalna vrednost matričnog polinoma $A(\lambda)$ za $\lambda = C$, a $A_l(C)$ leva funkcionalna vrednost matričnog polinoma $A(\lambda)$ za $\lambda = C$.

Iako smo naveli da se svaki matrični polinom može prikazati kao polinomna matrica i obrnuto, zamena promenljive λ matricom moguća je samo u matričnom polinomu, dok u polinomnoj matrici to nije moguće (jer bi se pojavili zbirovi matrica i skalara, što nije definisano).

6.4. Ako su

$$A(\lambda) = A_p\lambda^p + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

i

$$B(\lambda) = B_q\lambda^q + \cdots + B_1\lambda + B_0, \quad |B_q| \neq 0,$$

matrični polinomi, onda postoje jedinstveni matrični polinomi $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ i $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$, takvi da je

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda)B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

i

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_2(\lambda) + R_2(\lambda),$$

gde je $R_1(\lambda) = 0$ ili $\deg(R_1(\lambda)) < \deg(B(\lambda))$; i $R_2(\lambda) = 0$ ili $\deg(R_2(\lambda)) < \deg(B(\lambda))$.

$R_1(\lambda)$ se naziva desni ostatak, a $R_2(\lambda)$ levi ostatak pri deobi matričnog polinoma $A(\lambda)$ matričnim polinomom $B(\lambda)$.

Ako je $R_1(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ je desni delitelj $A(\lambda)$, a ako je $R_2(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ je levi delitelj $A(\lambda)$.

6.5. Ako je $A(\lambda) = A_p\lambda^p + \cdots + A_1\lambda + A_0$ matrični polinom nad $F[\lambda]$, a $B \in F^{n,n}$, onda je desni ostatak R_1 pri deobi $A(\lambda)$ sa $\lambda E - B$

$$R_1 = A_pB^p + \cdots + A_1B + A_0 = A_r(B),$$

a levi ostatak je

$$R_2 = B^pA_p + \cdots + BA_1 + A_0 = A_l(B).$$

6.6. Ako je $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$, onda se polinomna matrica

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

naziva karakteristična matrica matrice A.

Determinanata karakteristične matrice matrice A je nomalizovan polinom n-tog stepena

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

koji se naziva karakteristični polinom matrice A.

Jednačina

$$|\lambda E - A| = 0$$

se naziva karakteristična jednačina matrice A.

6.7. Karakteristični polinom linearne transformacije vektorskog prostora je karakteristični polinom njene matrice u bilo kojoj bazi.

Karakteristični polinom linearne transformacije je invarijantan u odnosu na promenu baze.

6.8. Ako je $A \in F^{n,n}$, $f(\lambda) = a_m\lambda^m + \cdots + a_1\lambda + a_0 \in F[\lambda]$, onda je

$$f(A) = a_mA^m + \cdots + a_1A + a_0E.$$

6.9. (*Cayley-Hamilton*) Ako je $A \in F^{n,n}$ matrica čiji je karakteristični polinom $f(\lambda)$, onda je $f(A) = O$. (Svaka matrica zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu.)

6.10. Elementarne transformacije polinomne matrice $A(\lambda) \in F[\lambda]^{m,n}$ su sledeće transformacije:

1) Zamena mesta dve vrste (kolone).

2) Množenje svih elemenata jedne vrste (kolone) konstantom različitom od nule.

3) Dodavanje elemenata jedne vrste (kolone), prethodno pomnoženih nekim polinomom, odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone).

Elementarne matrice polinomnih matrica definišu se i označavaju analogno odgovarajućim definicijama za elementarne matrice nad poljem (5.32).

Za elementarne matrice polinomnih matrica važe tvrđenja analogna tvrđenjima 5.33 i 5.34.

6.11. Determinante elementarnih matrica polinomnih matrica su konstante različite od nule.

6.12. Polinomna matrica $A(\lambda)$ je ekvivalentna sa matricom $B(\lambda)$ ako postoje matrice $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ jednake proizvodu elementarnih matrica takve da je

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda),$$

tj. $A(\lambda)$ je ekvivalentna sa $B(\lambda)$, ako se $A(\lambda)$ može elementarnim transformacijama svesti na $B(\lambda)$.

6.13. Ekvivalencija polinomnih matrica definisana u 6.12 je relacija ekvivalencije.

6.14. Rang polinomne matrice $A(\lambda)$ je broj r takav da su svi minori reda većeg od r matrice $A(\lambda)$, ako postoje, jednaki 0, a postoji bar jedan minor reda r koji je različit od nule.

6.15. Ekvivalentne polinomne matrice imaju isti rang.

6.16. Polinomna matrica $A(\lambda)$ reda n je regularna ako je njen rang n, tj. ako je $|A(\lambda)| \neq 0$.

Polinomna matrica $A(\lambda)$ je invertibilna ako postoji polinomna matrica $B(\lambda)$ takva da je

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E.$$

Matrica $B(\lambda)$ naziva se inverzna matrica za matricu $A(\lambda)$.

Ako je $A(\lambda)$ kvadratna polinomna matrica za koju postoji polinomna matrica $B(\lambda)$ takva da je $A(\lambda)B(\lambda) = E$ ili $B(\lambda)A(\lambda) = E$, onda je i

$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$, tj. $A(\lambda)$ je invertibilna matrica, a $B(\lambda)$ je njena inverzna matrica.

Polinomna matrica može biti regularna, a da ne bude invertibilna, što nije slučaj sa matricama nad poljem F (5.17, 5.22).

6.17. Ako je $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ matrica ranga r, onda je ona ekvivalentna sa matricom

$$N(\lambda) = \operatorname{diag}(f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0),$$

gde su $f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ normalizovani polinomi nad F takvi da je $f_i(\lambda) \big| f_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, \dots, r-1$.

Matrica $N(\lambda)$ naziva se Smitova (Smith) kanonička (ili normalna) matrica za matricu $A(\lambda)$.

U svakoj klasi međusobno ekvivalentnih kvadratnih polinomnih matrica postoji tačno jedna Smitova kanonička matrica.

6.18. Ako je $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$, onda sa $d_{kA}(\lambda)$ označavamo najveći zajednički delitelj svih minora reda k te matrice. Pri tome, ako su svi minori reda k jednaki 0, po definiciji je $d_{kA}(\lambda) = 0$.

Ako su $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ ekvivalentne polinomne matrice reda n, onda je $d_{kA}(\lambda) = d_{kB}(\lambda)$, za svako $k = 1, \dots, n$.

6.19. Ako je $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ matrica čije je Smitova matrica $N(\lambda) = \operatorname{diag}(f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0)$, onda je

$$\begin{aligned} d_{1A}(\lambda) &= f_1(\lambda), \\ d_{2A}(\lambda) &= f_1(\lambda)f_2(\lambda), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{rA}(\lambda) &= f_1(\lambda)f_2(\lambda)\dots f_r(\lambda), \\ d_{iA}(\lambda) &= 0, \quad i = r+1, \dots, n. \end{aligned}$$

6.20. Ako je $A(\lambda)$ polinomna matrica, a $N(\lambda)$ njena Smitova kanonička matrica, onda se polinomi sa dijagonale matrice $N(\lambda)$ nazivaju invarijantni faktori matrice $A(\lambda)$. Invarijantni faktori koji su jednaki 1 nazivaju se trivijalni, ostali su netrivijalni.

6.21. Dve kvadratne polinomne matrice su ekvivalentne ako i samo ako imaju redom jednake invarijantne faktore.

6.22. Dve polinomne matrice $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ reda n su ekvivalentne ako i samo ako je $d_{kA}(\lambda) = d_{kB}(\lambda)$, za svako $k = 1, \dots, n$.

6.23. Matrica $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n.n}$ jednaka je proizvodu elementarnih matrica ako i samo ako je $|A(\lambda)|$ konstanta različita od 0.

6.24. Matrica $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ ima inverznu matricu nad $F[\lambda]$ ako i samo ako je $A(\lambda)$ jednaka proizvodu elementarnih matrica (tj. s obzirom na 6.23, ako i samo ako je $|A(\lambda)| = c \neq 0$, $c \in F$).

6.25. Matrica $A \in F^{n,n}$ je slična sa matricom $B \in F^{n,n}$ ako postoji regularna matrica P takva da je

$$B = P^{-1}AP.$$

Da je matrica A slična sa matricom B zapisujemo sa $A \overset{S}{\sim} B$.

6.26. U skupu $F^{n,n}$ relacija sličnosti definisana u 6.25 je relacija ekvivalencije.

6.27. Matrice $A, B \in F^{n,n}$ su slične ako i samo ako su njihove karakteristične matrice $\lambda E - A$ i $\lambda E - B$ ekvivalentne kao polinomne matrice nad $F[\lambda]$.

6.28. Ako je $A \in F^{n,n}$, onda se invarijantni faktori matrice $\lambda E - A$ nazivaju invarijante sličnosti matrice A.

6.29. Matrice $A, B \in F^{n,n}$ su slične ako i samo ako su im redom jednake invarijante sličnosti.

6.30. Karakteristični polinom matrice $A \in F^{n,n}$ jednak je proizvodu njenih invarijanata sličnosti.

6.31. Ako je $A \in F^{n,n}$, normalizovan polinom $m(\lambda)$ najmanjeg stepena takav da je $m(A) = O$, naziva se minimalni polinom matrice A.

Za svaku kvadratnu matricu postoji jedinstven minimalni polinom.

6.32. Ako je $A \in F^{n,n}$, $f(\lambda) \in F[\lambda]$, onda je $f(A) = O$ ako i samo ako je polinom $f(\lambda)$ deljiv minimalnim polinomom matrice A.

6.33. Minimalni polinom matrice $A \in F^{n,n}$ jednak je invarijanti sličnosti najvećeg stepena te matrice.

6.34. Neka je

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

normalizovan polinom nad poljem F. Matrica

$$C(f(\lambda)) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

se naziva prateća matrica polinoma $f(\lambda)$.

Prateća matrica polinoma $\lambda + a$ je $[-a]$.

6.35. Minimalni i karakteristični polinom prateće matrice $C(f(\lambda))$ polinoma $f(\lambda)$ je polinom $f(\lambda)$.

6.36. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$. Ako su $x \in V$, $x \neq 0$ i $\lambda \in F$ takvi da je $A(x) = \lambda x$, onda se x naziva karakteristični vektor transformacije A, a λ karakteristični koren te transformacije.

6.37. Neka je $A \in F^{n,n}$. Ako su $x \in F^{n,1}$, $x \neq 0$ i $\lambda \in F$ takvi da je $Ax = \lambda x$, onda je x karakteristični vektor matrice A, a λ karakteristični koren te matrice.

U konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru koordinatna kolona $[x]$ karakterističnog vektora x linearne transformacije A tog prostora je karakteristični vektor matrice $[A]$ te transformacije, a karakteristični koreni linearne transformacije i njene matrice su isti.

6.38. Skup svih karakterističnih korena linearne transformacije (matrice) A naziva se spektar te linearne transformacije (matrice) i označava sa $\sigma(A)$.

Ako je A linearna transformacija konačnodimenzionalnog vektorskog prostora, a $[A]$ njena matrica, onda je $\sigma(A) = \sigma([A])$.

6.39. Ako je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$, a λ_i jedan njen karakteristični koren, onda se skup vektora

$$S_A(\lambda_i) = \{x \mid A(x) = \lambda_i x\}$$

naziva invarijantni potprostor linearne transformacije A koji odgovara karakterističnom korenu λ_i. Analogno se definiše invarijantni potprostor matrice.

Jednodimenzioni invarijantni potprostor se naziva i invarijantni pravac.

$S_A(\lambda_i)$ je potprostor vektorskog prostora $V(F)$. Analogno tvrđenje važi za matrice.

6.40. Ako je $A \in F^{n,n}$, a λ_i koren višestrukosti k njene karakteristične jednačine, onda je rang matrice $\lambda_i E - A$ veći ili jednak $n - k$, a dimenzija odgovarajućeg invarijantnog potprostora je manja ili jednaka k.

6.41. Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svi karakteristični koreni matrice $A \in F^{n,n}$, pri čemu su u prethodnom nizu višestruki koreni navedeni onoliko puta kolika im je višestrukost, onda je

a) $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$,

b) $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

6.42. Ako je $f(\lambda)$ karakteristični polinom matrice $A \in F^{n,n}$, onda je

$$f(\lambda) = \lambda^n - (\operatorname{tr} A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|.$$

6.43. Matrica $A \in F^{n,n}$ je singularna ako i samo ako je 0 karakteristični koren te matrice.

6.44. Karakteristični i minimalni polinom jedne matrice imaju iste korene, jedino se može razlikovati višestrukost tih korena.

ZADACI

294. Naći karakteristične korene i vektore matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

nad poljem realnih brojeva.

Rešenje. Karakteristična jednačina matrice A je

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = (\lambda-2)^2(\lambda-4) = 0,$$

a karakteristični koreni su $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$.

Za $\lambda_1 = 2$, jednačina $(\lambda E - A)x = 0$, gde je $x = [x_1, x_2, x_3]'$, postaje

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

odakle je

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_3 = -(x_1 + x_2),$$

pa je karakteristični vektor koji odgovara λ_1 svaki vektor oblika

$$[x_1, x_2, -x_1 - x_2]' = x_1[1, 0, -1]' + x_2[0, 1, -1]',$$

gde su x_1, x_2 proizvoljni realni brojevi. Invarijantni potprostor koji odgovara karakterističnom korenu $\lambda_1 = 2$ je potprostor generisan vektorima $[1, 0, -1]'$ i $[0, 1, -1]'$.

Za $\lambda_3 = 4$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0,$$

odakle je $x_1 = x_2, \quad x_3 = 0$, pa ovom korenu odgovara invarijantan potprostor generisan vektorom $[1, 1, 0]'$.

295. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ linearna transformacija A je definisana sa

$$A((x, y)) = (-2y, x)\,.$$

Odrediti karakteristične korene i vektore date transformacije.

Rešenje. Matrica ove linearne transformacije (u odnosu na bazu (e_1, e_2)) je

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a karakteristični polinom te matrice je

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2.$$

Ovaj polinom nema realne korene, pa transformacija A nema karakteristične korene i vektore.

PRIMEDBA. Ako datu transformaciju A posmatramo kao transformaciju vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$, onda A ima dva karakteristična korena $\lambda_1 = i\sqrt{2}$ i $\lambda_2 = -i\sqrt{2}$ i odgovarajuće karakteristične vektore.

296. U vektorskom prostoru V_2 geometrijskih vezanih vektora sa zajedničkom početnom tačkom O koji pripadaju jednoj ravni nad poljem realnih brojeva, simetrija τ u odnosu na pravu $y = x$ je linearna transformacija. Naći karakteristične korene i vektore te transformacije.

Rešenje. Matrica linearne transformacije τ u odnosu na bazu (e_1, e_2) je

$$[\tau] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njena karakteristična jednačina je

$$|\lambda E - [\tau]| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

a karakteristični koreni su $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Karakteristični vektor koji odgovara λ_1 dobijamo rešavanjem sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0.$$

Odavde je $x = y$, pa su karakteristični vektori matrice $[\tau]$ sva nenula rešenja gornjeg sistema, dakle, svaki vektor oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$. Slično, za $\lambda_2 = -1$ biće

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0,$$

a odatle sledi da je $x = -y$, pa su karakteristični vektori koji odgovaraju λ_2 svi vektori oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$.

Kako su karakteristični vektori matrice $[\tau]$ koordinatne kolone karakterističnih vektora linearne transformacije τ, sledi da su $x_1 = (1, 1)$ i $x_2 = (1, -1)$ (pri čemu se koordinate ovih vektora odredjuju u odnosu na bazu e_1, e_2) karakteristični vektori linearne transformacije τ. Invarijantni potprostori linearne transformacije τ su potprostori $L(x_1)$ i $L(x_2)$ tj. potprostori generisani sa x_1 odnosno x_2.

PRIMEDBA. S obzirom da je poznato da su svi nenula skalarni umnošci karakterističnog vektora takodje karakteristični vektori, to se često ne naglašava posebno, već se samo kao karakteristični vektori navode generatori odgovarajućih invarijantnih potprostora.

297. U vektorskom prostoru V_2 iz zadatka 296 rotacija ρ te ravni oko tačke O za ugao $\pi/2$ je linearna transformacija. Naći karakteristične korene i vektore te transformacije.

Rešenje. Matrica linearne transformacije ρ u odnosu na bazu (e_1, e_2) je

$$[\rho] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednačina je

$$(*) \qquad |\lambda E - [\rho]| = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0,$$

a njeni koreni u polju nad kojim je dat vektorski prostor su traženi karakteristični koreni. U našem primeru jednačina (*) nema realne korene, tj. data matrica i njom odredjena linearna transformacija nemaju karakteristične korene, a to znači ni vektore.

Do istog zaključka se može doći očiglednim geometrijskim razmatranjem (ne postoji nenula vektor koji bi posle rotacije za ugao $\pi/2$ oko tačke O bio kolinearan sa originalom).

298. Odrediti karakterističnu jednačinu i karakteristične korene za matrice nad poljem realnih brojeva

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{d)} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rezultat. a) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$, d) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1$, $\lambda_{1,2,3} = 1$ (v. 6.34 i 6.35).

299. Odrediti karakteristične korene i vektore za matrice nad poljem realnih brojeva

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \ \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \text{c)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \text{d)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

300. Odrediti karakteristične korene i vektore za matrice nad poljem realnih brojeva

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Rezultat. b)$\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3,4} = 1$. Karakterističnom korenu 2 odgovara jednodimenzionalni invarijantni potprostor generisan vektorom $[2, 3, -2, -3]'$, a trostrukom karakterističnom korenu 1 odgovara takodje jednodimenzionalni potprostor generisan vektorom $[3, 6, -4, -5]'$ (v. 6.40).

301. Odrediti karakteristične korene i vektore linearne transformacije A vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$ definisane sa

$$A((x, y)) = (-x + 3y, 3x - y).$$

Rezultat. -4 i 2; $(1, -1)$ i $(1, 1)$ respektivno.

302. Pokazati da linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$ definisana sa

$$A((x, y)) = (2x - y, x + 4y)$$

ima tačno jedan karakteristični koren i naći bazu odgovarajućeg invarijantnog potprostora.

Rezultat. 3; $(1, -1)$.

303. Odrediti karakteristične korene i vektore matrica

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

posmatranih kao matrice nad poljem a) realnih brojeva, b) kompleksnih brojeva.

Rezultat. Matrica A nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$ $\quad 2;\ [1,1]'$. Matrica B nad $\mathbb{R}$ nema karakteristične korene, nad $\mathbb{C}$ $\quad i, -i;\quad [1, 1-i]'$, $[1, 1+i]'$ respektivno.

304. Pokazati da matrice

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

imaju isti karakteristični koren višestrukosti 3, ali su im invarijantni potprostori različitih dimenzija.

305. Karakteristični vektori matrice A reda 3 su

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

a njima redom odgovarajući karakteristični koreni $1, -1, 0$. Odrediti A.

306. Odrediti karakteristične korene matrice reda n

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

nad poljem realnih brojeva.

Rešenje. Karakteristični polinom je

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda - 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \lambda - 1 \end{vmatrix},$$

pa oduzimajući prvu vrstu od ostalih dobijamo

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ -\lambda & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}.$$

Ako sada prvoj koloni dodamo sve preostale biće

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - n & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix},$$

pa je $f(\lambda) = \lambda^{n-1}(\lambda - n)$. Karakteristični koreni su $\lambda_1 = n$ (jednostruki) i $\lambda_2 = 0$ (višestrukosti $n-1$).

307. Neka su $k_1, \dots, k_n$ realni brojevi različiti od 0 i neka je $A = [a_{ij}]$ matrica reda n takva da je $a_{ij} = \dfrac{k_i}{k_j}$, $i, j = 1, \dots, n$. Odrediti karakteristične korene matrice A.

Rešenje. Ako je $D = \operatorname{diag}(k_1, \dots, k_n)$, onda je A slična matrici $D^{-1}AD$ čiji su svi elementi 1. Slične matrice imaju iste karakteristične polinome i korene, pa na osnovu zadataka 306 sledi da su karakteristični koreni matrice A, $\lambda_1 = n$ (jednostruki) i $\lambda_2 = 0$ (višestrukosti $n-1$).

308. Odrediti karakteristične korene matrice AA' ako je

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Rezultat. $\lambda_1 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, \quad \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$

309. Neka je $A = [a_{ij}]$ realna matrica formata $n \times n$ i $a_{ij} = b_i b_j$, gde su b_k, $k = 1, \dots, n$, realni brojevi različiti od 0. Naći karakteristične korene i vektore matrice A.

Rešenje. Odredićemo najpre karakteristični polinom matrice A.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - b_1^2 & -b_1 b_2 & \dots & -b_1 b_n \\ -b_2 b_1 & \lambda - b_2^2 & \dots & -b_2 b_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ -b_n b_1 & -b_n b_2 & \dots & \lambda - b_n^2 \end{vmatrix}$$

$$= b_1 b_2 \dots b_n \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{b_1} - b_1 & -b_2 & \dots & -b_n \\ -b_1 & \dfrac{\lambda}{b_2} - b_2 & \dots & -b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_1 & -b_2 & \dots & \dfrac{\lambda}{b_n} - b_n \end{vmatrix}$$

$$= b_1^2 b_2^2 \dots b_n^2 \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{b_1^2} - 1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \dfrac{\lambda}{b_2^2} - 1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \dfrac{\lambda}{b_n^2} - 1 \end{vmatrix}$$

$$= b_1^2 b_2^2 \dots b_n^2 \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{b_1^2} - 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -\dfrac{\lambda}{b_1^2} & \dfrac{\lambda}{b_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\dfrac{\lambda}{b_1^2} & 0 & \dfrac{\lambda}{b_3^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\dfrac{\lambda}{b_1^2} & 0 & 0 & \dots & \dfrac{\lambda}{b_n^2} \end{vmatrix}$$

$$= b_1^2 b_2^2 \dots b_n^2 \begin{vmatrix} \dfrac{\lambda}{b_1^2} - 1 - \dfrac{b_2^2}{b_1^2} - \dfrac{b_3^2}{b_1^2} - \dots - \dfrac{b_n^2}{b_1^2} & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \dfrac{\lambda}{b_2^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\lambda}{b_3^2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dfrac{\lambda}{b_n^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b_1^2 b_2^2 \dots b_n^2}{b_1^2 b_2^2 \dots b_n^2} \begin{vmatrix} \lambda - b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2 & -b_1^2 & -b_1^2 & \dots & -b_1^2 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^{n-1}(\lambda - b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2).$$

Karakteristična jednačina matrice A je

$$\lambda^{n-1}(\lambda - b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2) = 0,$$

pa su karakteristični koreni $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$.

Za $\lambda = 0$ sistem jednačina $(\lambda E - A)X = O$ se svodi na samo jednu jednačinu

$$b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n = 0,$$

pa je

$$x_1 = -\frac{b_2}{b_1}x_2 - \cdots - \frac{b_n}{b_1}x_n,$$

odakle sledi da su karakteristični vektori

$$[-b_2, b_1, 0, \ldots, 0]', [-b_3, 0, b_1, \ldots, 0]', \ldots, [-b_n, 0, 0, \ldots, b_1]'.$$

Za $\lambda = b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2$ iz $(\lambda E - A)X = O$ sledi

$$\begin{aligned}
(b_2^2 + \cdots + b_n^2)x_1 - b_1b_2x_2 - b_1b_3x_3 - \cdots - b_1b_nx_n &= 0,\\
-b_2b_1x_1 + (b_1^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2)x_2 - b_2b_3x_3 - \cdots - b_2b_nx_n &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
-b_nb_1x_1 - b_nb_2x_2 - b_nb_3x_3 - \cdots + (b_1^2 + \cdots + b_{n-1}^2)x_n &= 0.
\end{aligned}$$

Množenjem prve jednačine sa $-\dfrac{b_i}{b_1}$ i dodavanjem i-toj za $i = 2, \ldots, n$, dobija se

$$\begin{aligned}
-\frac{b_2}{b_1}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)x_1 + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)x_2 &= 0,\\
-\frac{b_3}{b_1}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)x_1 + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)x_3 &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
-\frac{b_n}{b_1}(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)x_1 + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)x_n &= 0.
\end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{b_2}{b_1}x_1,\\
x_3 &= \frac{b_3}{b_1}x_1,\\
&\cdots\cdots\\
x_n &= \frac{b_n}{b_1}x_1,
\end{aligned}$$

pa je karakteristični vektor $[b_1, b_2, \dots, b_n]'$.

310. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -5 & a \\ 13 & -6 & b \\ 13 & -7 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

odrediti a i b tako da matrica A ima karakteristične korene 1 i 2. Za te vrednosti a i b odrediti i preostali karakteristični koren matrice A.

Rešenje. Karakteristični polinom matrice A je

$$|\lambda E - A| = \lambda^3 + \lambda^2 + (7b - 13a - 1)\lambda + 2b + 13a + 44.$$

Da bi $\lambda = 1$ i $\lambda = 2$ bili karakteristični koreni matrice A, tj. nule karakterističnog polinoma, mora biti $b = -5$, $a = -2$.

Pošto je (6.41) $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1$, treći karakteristični koren te matrice je -4.

311. Neka je x karakteristični vektor linearnih transformacija A i B vektorskog prostora $V(F)$. Dokazati da je x karakteristični vektor linearne transformacije $\alpha A + \beta B$, za proizvoljne skalare $\alpha, \beta \in F$.

312. Ako su A i B matrice reda n, dokazati da AB i BA imaju iste karakteristične korene.

Rešenje. Neka je $ABx = \lambda x$, $x \neq 0$. Tada je $BABx = B\lambda x = \lambda Bx$. Ako je $Bx \neq 0$, onda je λ karakteristični koren matrice BA (a odgovarajući karakteristični vektor je Bx).

Ako je $Bx = 0$, onda je $\lambda = 0$, pa je AB singularna matrica (6.43). No, tada je i matrica BA singularna (na osnovu zadatka 290), pa je $\lambda = 0$ karakteristični koren i za matricu BA.

313. Dokazati da matrice A i A' imaju iste karakteristične korene. Navesti primer matrice A takve da A i A' imaju različite karakteristične vektore.

314. Naći matricu čiji je karakteristični polinom

a) $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 5$,

b) $\lambda^4 + 2\lambda^3 - 5\lambda^2 - \lambda + 3$.

Uputstvo. Koristiti 6.34 i 6.35.

315. Neka je x karakteristični vektor koji odgovara jednostrukom karakterističnom korenu λ matrice A. Ako je B matrica takva da je $AB = BA$, dokazati da je onda x karakteristični vektor i za matricu B.

Rešenje. λ je jednostruki karakteristični koren matrice A, pa njemu odgovara jednodimenzionalni invarijantni potprostor generisan vektorom x (6.40). Kako je $Ax = \lambda x$ i $AB = BA$ biće

$$A(Bx) = B(Ax) = B(\lambda x) = \lambda(Bx)$$

što znači da je Bx karakteristični vektor matrice A koji odgovara korenu λ, tj. Bx pripada invarijantnom potprostoru generisanom sa x. Dakle, mora biti

$$Bx = \mu x,$$

pa je x karakteristični vektor i za matricu B.

316. Ako je $[A] \in F^{n,n}$ ranga 1, dokazati da $[A]$ može imati najviše jedan karakteristični koren različit od 0.

Rešenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da $[A]$ ima dva karakteristična korena λ i φ različita od 0.

Neka je A linearna transformacija određena matricom $[A]$. Karakteristični koreni matrice $[A]$ i transformacije A su isti. Kako je $\text{rang}[A] = \text{rang}A = \dim(\operatorname{Im} A) = 1$, sledi da je $\operatorname{Im} A = \{\alpha a \mid \alpha \in F\}$.

Iz $A(x) = \lambda x$ i $A(y) = \varphi y$, s obzirom da je $\operatorname{Im} A$ jednodimenzionalni potprostor generisan vektorom a, mora biti $\lambda x = \alpha a$, i $\varphi y = \beta a$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, pa je

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}\, a\right) = \alpha a, \quad A\left(\frac{\beta}{\varphi}\, a\right) = \beta a,$$

odakle je

$$A(a) = \lambda a, \quad A(a) = \varphi a,$$

tj. $\lambda = \varphi$.

317. Data je matrica $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, gde je $a_{ij} = i$, $i, j = 1, \ldots, n$, tj. A je matrica koja u prvoj vrsti ima sve jedinice, u drugoj dvojke itd. Odrediti karakteristične korene matrice A.

Rešenje. S obzirom da je matrica A očigledno ranga 1, na osnovu zadatka 316 ona ima samo jedan karakteristični koren različit od 0. Kako je zbir karakterističnih korena matrice jednak njenom tragu (6.41), sledi da je karakteristični koren matrice A koji je različit od 0 jednak tragu te matrice.

Dakle, $\lambda_1 = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, a ostali karakteristični koreni su jednaki 0.

318. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$. Ako je $\dim(\operatorname{Im} A) = k$, dokazati da A ima najviše $k+1$ različitih karakterističnih korena.

319. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

izračunati A^3, A^4 i A^{-1} koristeći se Kejli-Hamiltonovom teoremom.

Rešenje. Karakteristični polinom matrice A je

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 3 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 3 & -5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \lambda^2 - 18\lambda + 1,$$

pa je na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme

$$A^3 - A^2 - 18A + E = 0. \tag{11}$$

Odavde je

$$A^3 = A^2 + 18A - E =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & -14 & -1 \\ -7 & 9 & 3 \\ -8 & -3 & 19 \end{bmatrix} + 18 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 26 & 4 & -55 \\ -25 & 8 & 39 \\ -62 & 87 & 18 \end{bmatrix}.$$

A^4 se može dobiti množenjem jednačine (11) sa A:

$$A^4 = A^3 + 18A^2 - A = A^2 + 18A - E + 18A^2 - A = 19A^2 + 17A - E,$$

a A^{-1} množenjem jednačine (11) sa A^{-1} (na osnovu 6.43 iz karakterističnog polinoma matrice A sledi da je A regularna matrica):

$$A^{-1} = -A^2 + A + 18E.$$

320. Izračunati

$$f(A) = A^7 - 2A^6 - 2A^5 + 6A^4 - 3A^3 + A^2 + 2A - 2E$$

koristeći se Kejli-Hamiltonovom teoremom, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Karakteristični polinom matrice A je

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 1.$$

Ako podelimo dati polinom $f(\lambda)$ karakterističnim polinomom $p(\lambda)$, dobija se količnik $q(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + \lambda - 1$ i ostatak $r(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1$, tj.

$$f(\lambda) = p(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda).$$

Stavljajući u prethodnu jednakost matricu A umesto λ, s obzirom da je na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme $p(A) = 0$, sledi

$$f(A) = r(A).$$

Prema tome,

$$f(A) = A^2 + A - E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

321. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

naći A^{100}.

Uputstvo. Karakteristični polinom matrice A je $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1$, pa je na osnovu Kejli-Hamiltonove teoreme

$$A^3 - A^2 - A + E = 0.$$

Polazeći od ove jednakosti indukcijom dokazati da je za svaki prirodan broj n

$$A^{2n} = nA^2 - (n-1)E,$$

a odatle se za $n = 50$ dobija traženi rezultat.

322. Ako je $A \in F^{n,n}$, a $g(\lambda) \in F[\lambda]$ bilo koji polinom, onda postoji polinom $p(\lambda)$ stepena manjeg od n takav da je $g(A) = p(A)$. Dokazati.

Rešenje. Neka je $g(\lambda) = q(\lambda)f(\lambda) + r(\lambda)$, gde je $f(\lambda)$ karakteristični polinom matrice A, a $r(\lambda)$ nula ili polinom stepena manjeg od $n-1$. Stavljajući u prethodnu jednakost $\lambda = A$, sledi $g(A) = r(A)$.

323. Neka je $A \in F^{n,n}$, $f(\lambda)$ njen karakteristični polinom, a $g(\lambda)$ proizvoljan polinom. Dokazati da je $g(A)$ regularna matrica ako i samo ako su $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ relativno prosti polinomi.

Uputstvo. $f(\lambda)$ i $g(\lambda)$ su relativno prosti ako i samo ako su relativno prosti $g(\lambda)$ i minimalni polinom $m_A(\lambda)$ matrice A (6.44).

324. Neka je
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Predstaviti matricu A kao zbir jedne nilpotentne i jedne skalarne matrice.

b) Naći A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje. a) Karakteristični polinom matrice A je $|\lambda E - A| = (\lambda+1)^3$, pa je na osnovu Cayley-Hamiltonove teoreme (6.9) $(A+E)^3 = O$. Matricu A možemo predstaviti na sledeći način $A = (A+E) - E$, pri čemu je $A+E$ nilpotentna, a $-E$ skalarna matrica.

b) Ako uvedemo oznaku $B = A+E$, onda je $A = B - E$, pa je
$$A^n = (B-E)^n = (-1)^n E + n(-1)^{n-1}B + \binom{n}{2}(-1)^{n-2}B^2.$$

325. Ako je A involutorna matrica ($A^2 = E$) reda 3 različita od E i $-E$, dokazati da je njen trag 1 ili -1.

Rešenje. S obzirom da je $A^2 - E = 0$, minimalni polinom $m_A(\lambda)$ matrice A je faktor polinoma $\lambda^2 - 1$. Kako je A različita od E i $-E$ minimalni polinom matrice A ne može biti linearan, pa je
$$m_A(\lambda) = \lambda^2 - 1.$$
To znači da je karakteristični polinom matrice A (koji ima iste korene kao i minimalni polinom (6.44)) $(\lambda+1)^2(\lambda-1)$ ili $(\lambda+1)(\lambda-1)^2$, a karakteristični koreni su $-1,-1,1$ ili $-1,1,1$. Trag matrice je jednak zbiru njenih karakterističnih korena (6.41), odakle sledi traženi zaključak.

326. Da li neka realna matrica A reda 3 zadovoljava jednakost
$$A^2 + E = 0\,?$$

Rezultat. Ne.

327. Neka je A kompleksna matrica reda n takva da je $A^2 = E$. Ako je $\operatorname{tr} A = n$, dokazati da je $A = E$.

Uputstvo. Videti zadatak 325.

328. Karakteristični vektori koji odgovaraju različitim karakterističnim korenima matrice su linearno nezavisni. Dokazati.

Rešenje. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ međusobno različiti karakteristični koreni, a $x_1, x_2, \dots, x_k$ odgovarajući karakteristični vektori matrice A reda n.

Dokazaćemo indukcijom po k da su $x_1, x_2, \dots, x_k$ linearno nezavisni. Tvrđenje očigledno važi za $k = 1$, pretpostavićemo da važi za $k-1$ karakterističnih korena ($k > 1$).

Ako je

$$(*) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0,$$

onda, množeći gornju jednakost sa A, sledi

$$\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \cdots + \alpha_k A x_k = 0,$$

pa je

$$(**) \qquad \alpha_1 \lambda_1 x_1 + \alpha_2 \lambda_2 x_2 + \cdots + \alpha_k \lambda_k x_k = 0.$$

Ako sada iz (*) izrazimo x_k pomoću vektora $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ i to uvrstimo u (**), dobija se

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_k)x_2 + \cdots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0.$$

S obzirom da su $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$ linearno nezavisni, a $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$ za svako $i = 1, 2, \dots, k-1$ mora biti $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$. Dakle, $\alpha_k x_k = 0$, a kako je x_k karakteristični vektor, on je različit od 0, pa je $\alpha_k = 0$. Prema tome, vektori $x_1, x_2, \dots, x_k$ su linearno nezavisni.

329. Neka je A regularna matrica, λ_i njen karakteristični koren, a x karakteristični vektor matrice A koji odgovara tom korenu.

Dokazati da je $\dfrac{1}{\lambda_i}$ karakteristični koren matrice A^{-1}, a x karakteristični vektor matrice A^{-1} koji odgovara korenu $\dfrac{1}{\lambda_i}$.

Rešenje. Iz $Ax = \lambda_i x$, neposredno sledi $A^{-1}x = \dfrac{1}{\lambda_i}x$.

330. Neka je λ_i karakteristični koren matrice $A \in F^{n,n}$, a x odgovarajući karakteristični vektor.

a) Za svaki prirodan broj k, λ_i^k je karakteristični koren matrice A^k, a x je odgovarajući karakteristični vektor.

b) Ako je $p(\lambda) \in F[\lambda]$ polinom, onda je $p(\lambda_i)$ karakteristični koren matrice $p(A)$, a x je odgovarajući karakteristični vektor.

Dokazati.

331. Naći polinom čiji su koreni treći stepeni korena polinoma

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Rešenje. Prateća matrica ovog polinoma (6.34, 6.35) je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a treći stepen te matrice je

$$P^3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ako je λ_i karakteristični koren matrice P, onda na osnovu zadataka 330 λ_i^3 mora biti karakteristični koren matrice P^3. Karakteristični polinom matrice P^3 je

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 1,$$

a koreni tog polinoma su treći stepeni korena datog polinoma.

332. Ako je $A \in F^{n,n}$ regularna matrica čiji je karakteristični polinom $f(\lambda)$, odrediti karakteristični polinom $g(\lambda)$ matrice A^{-1}.

Rešenje. Iz

$$A(\lambda E - A^{-1}) = \lambda A - E = -\lambda \left(\frac{1}{\lambda} E - A \right),$$

pošto je $|A| = (-1)^n f(0)$ (6.42), sledi

$$|A(\lambda E - A^{-1})| = |A||\lambda E - A^{-1}| = (-1)^n f(0) g(\lambda),$$

i

$$\left| -\lambda \left(\frac{1}{\lambda} E - A \right) \right| = (-\lambda^n) \left| \frac{1}{\lambda} E - A \right| = (-1)^n \lambda^n f\left(\frac{1}{\lambda} \right).$$

Prema tome, $f(0)g(\lambda) = \lambda^n f\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$, pa je

$$g(\lambda) = \frac{\lambda^n f\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)}{f(0)}.$$

333. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3},$$

odrediti vrednost parametra k tako da matrice A i A^{-1} imaju jedan zajednički karakteristični koren.

334. Dokazati da karakteristični polinom kompleksne matrice A i polinom $p(x)$ imaju zajednički koren ako i samo ako je $|p(A)| = 0$.

Rešenje. Neka je λ_0 karakteristični koren matrice A takav da je $p(\lambda_0) = 0$. Tada je $p(x) = (x - \lambda_0)q(x)$ za neki polinom $q(x)$, pa je

$$|p(A)| = |A - \lambda_0 E||q(A)| = 0.$$

Obratno, neka je $|p(A)| = 0$. S obzirom da je $p(A) = (A - \lambda_1 E) \ldots (A - \lambda_n E)$ za neke $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in C$, sledi da je za neko $i \in \{1, \ldots, n\}$ matrica $A - \lambda_i E$ singularna, a to znači da je λ_i zajednički koren polinoma $p(x)$ i karakterističnog polinoma matrice A.

335. Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrica takva da je za svako $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} j a_{kj} = k.$$

a) Dokazati da je $\lambda = 1$ karakteristični koren matrice A.

b) Dokazati da matrica A^{-1}, kada postoji, ima osobinu (*).

Rešenje. a) Neka je $x = [1, 2, \ldots, n]'$. Tada je $Ax = x$, tj. x je karakteristični vektor matrice A koji odgovara karakterističnom korenu $\lambda = 1$.

b) Na osnovu zadatka 329, x je karakteristični vektor matrice A^{-1} koji odgovara karakterističnom korenu $\dfrac{1}{\lambda} = 1$, a odatle sledi da A^{-1} ima osobinu (*).

336. Neka je λ_0 karakteristični koren kompleksne matrice $A = [a_{ij}]$ reda n. Dokazati da za neki prirodan broj $k \in \{1, \dots, n\}$ važi

$$|a_{kk} - \lambda_0| \leq \sum_{i \neq k} |a_{ki}|.$$

Rešenje. Neka je $x = [x_1, \dots, x_n]'$ karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_0 i neka je $k \in \{1, \dots, n\}$ takvo da je $|x_k| \geq |x_i|$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$. Iz jednakosti $(A - \lambda_0 E)x = 0$, posmatrajući k-tu vrstu matrice $A - \lambda_0 E$ dobijamo

$$a_{k1}x_1 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + (a_{kk} - \lambda_0)x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n = 0,$$

odnosno

$$(a_{kk} - \lambda_0)x_k = -\sum_{i \neq k} a_{ki}x_i.$$

Odatle je

$$|a_{kk} - \lambda_0||x_k| \leq \sum_{i \neq k} |a_{ki}||x_i| \leq \sum_{i \neq k} |a_{ki}||x_k| = |x_k| \sum_{i \neq k} |a_{ki}|,$$

pa je $|a_{kk} - \lambda_0| \leq \sum\limits_{i \neq k} |a_{ki}|$.

Primedba. Rezultat naveden u prethodnom zadatku je poznat kao *Geršgorinova teorema* o lokalizaciji karakterističnih korena kompleksne matrice i ona se obično navodi u sledećem obliku:

Neka je $A = [a_{ij}]$ kompleksna matrica reda n i neka je C_k krug u kompleksnoj ravni sa centrom a_{kk} i poluprečnikom $r_k = \sum_{i \neq k} |a_{ki}|$, $k = 1, \dots, n$, tj.

$$C_k = \{z \mid |z - a_{kk}| \leq r_k\}.$$

Ako je $S = \bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k$, onda svi karakteristični koreni matrice A pripadaju skupu S.

337. Neka je A realna matrica reda 3 i ranga 2 čiji su elementi iznad glavne dijagonale međusobno jednaki. Naći A, ako je $\lambda = 2$ karakteristični koren matrice A kome odgovaraju karakteristični vektori $x_1 = [1, 2, -1]'$ i $x_2 = [3, 0, 1]'$.

Uputstvo. Koristiti 6.43, 6.40, 6.41 a.

338. Neka su A i B realne kvadratne matrice istog formata takve da je $AB = BA$, $|B| \neq 0$ i A je nilpotentna matrica. Dokazati

a) da je $B^{-1}A$ nilpotentna matrica,

b) da je $|A + B| = |B|$.

Rešenje. a) Iz $AB = BA$ množeći sa B^{-1} sledi $B^{-1}A = AB^{-1}$, a iz $A^k = O$ sledi $(B^{-1}A)^k = (B^{-1})^k A^k = O$, pa je $B^{-1}A$ nilpotentna matrica.

b) Kako je $B^{-1}A$ nilpotentna matrica, svi njeni karakteristični koreni su jednaki 0. Odatle sledi da su svi karakteristični koreni matrice $B^{-1}A+E$ jednaki 1 (zadatak 330), pa je i njena determinanta, kao proizvod karakterističnih korena (6.41), jednaka 1.

339. Neka su A i B matrice reda n i $D = \begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix}$. Ako je λ_0 karakteristični koren matrice D, dokazati da je onda i $-\lambda_0$ karakteristični koren matrice D.

Rešenje. Neka je $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$, gde su y i z vektori kolone reda n, karakteristični vektor matrice D koji odgovara karakterističnom korenu λ_0. Tada je

$$\begin{aligned} Ay + Bz &= \lambda_0 y, \\ By - Az &= \lambda_0 z. \end{aligned}$$

Ove jednakosti se mogu zapisati na sledeći način

$$\begin{aligned} Az + B(-y) &= -\lambda_0 z, \\ Bz - A(-y) &= -\lambda_0(-y). \end{aligned}$$

što je drugi zapis za

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix} = -\lambda_0 \begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix},$$

što znači da je $\begin{bmatrix} z \\ -y \end{bmatrix} \neq 0$ karakteristični vektor matrice D koji odgovara karakterističnom korenu $-\lambda_0$.

340. Neka su A i B kvadratne matrice istog reda. Dokazati da je karakteristični polinom blok matrice $C = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix}$ jednak proizvodu karakterističnog polinoma matrice $A+B$ i karakterističnog polinoma matrice $A-B$.

Rešenje. Karakteristični polinom matrice C je

$$|\lambda E - C| = \begin{vmatrix} \lambda E - A & -B \\ -B & \lambda E - A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E - A - B & -B \\ \lambda E - A - B & \lambda E - A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda E - A - B & -B \\ O & \lambda E - A + B \end{vmatrix} = |\lambda E - (A + B)||\lambda E - (A - B)|.$$

341. Linearna transformacija A vektorskog prostora $\mathbb{R}_n[x]$, $n \geq 3$, definisana je sa

$$A(p(x)) = (x^2 - 1)p''(x) + (2x + 1)p'(x).$$

Odrediti karakteristične korene transformacije A. Ako je $p_0(x)$ karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_0, odrediti stepen polinoma $p_0(x)$.

Rešenje. Odredićemo matricu date transformacije A u odnosu na bazu $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$.

Kako je $A(1) = 0$, $A(x) = 2x + 1$ i $A(x^k) = k(k + 1)x^k + kx^{k-1} -k(k - 1)x^{k-2}$, za $k \geq 2$, matrica transformacije A je

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & \ldots & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -(n-1)(n-2) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & (n-1)n \end{bmatrix}.$$

Dobijena matrica je gornja trougaona, pa su karakteristični koreni njeni dijagonalni elementi: $0, 2, 6, \ldots, k(k + 1), \ldots, (n - 1)n$.

Neka je $\lambda_0 = k(k + 1)$ i neka je $p_0(x)$ polinom stepena l sa koeficijentom a_l uz najveći stepen. Iz definicije transformacije A sledi da polinom $A(p_0(x))$ ima koeficijent uz najveći stepen $l(l+1)a_l$. S druge strane, pošto je $p_0(x)$ karakteristični vektor transformacije A, biće $A(p_0(x)) = k(k+1)p_0(x)$, odakle sledi da je uz najveći stepen polinoma $A(p_0(x))$ koeficijent $k(k+1)a_l$. Dakle, $l = k$.

342. Neka je $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ regularna matrica reda n i f preslikavanje vektorskog prostora $\mathbb{R}^{n,n}$ definisano sa $f(X) = P^{-1}XP$ za sve $X \in \mathbb{R}^{n,n}$.

a) Dokazati da je f linearna transformacija sa karakterističnim korenom $\lambda = 1$.

b) Ako je λ realan karakteristični koren transformacije f takav da je $|\lambda| \neq 1$, a X odgovarajući karakteristični vektor, dokazati da je X nilpotentna matrica.

Rešenje. a) f je linearna transformacija jer je za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i $X, Y \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$f(\alpha X + \beta Y) = P^{-1}(\alpha X + \beta Y)P = \alpha P^{-1}XP + \beta P^{-1}YP = \alpha f(X) + \beta f(Y).$$

Kako je $f(P) = P$ i $P \neq O$, P je karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu $\lambda = 1$.

b) Karakteristični koreni transformacije f su različiti od 0, jer iz $P^{-1}XP = O$ sledi $X = O$.

Neka je $\lambda \neq \pm 1$ i $f(X) = P^{-1}XP = \lambda X$. Tada je za svako $k \in \mathbb{N}$ $(P^{-1}XP)^k = P^{-1}X^kP = \lambda^k X^k$. Ako bi bilo $X^k \neq O$ za sve $k \in \mathbb{N}$, tada bi λ^k bio karakteristični koren za svako k, pa bi transformacija f imala beskonačno mnogo karakterističnih korena, što je nemoguće. Dakle, mora biti $X^k = O$ za neko $k \in \mathbb{N}$.

343. Svi karakteristični koreni realne ortogonalne matrice A ($A' = A^{-1}$) su po modulu jednaki 1. Dokazati.

Rešenje. Neka je λ_i karakteristični koren matrice A, a x_i odgovarajući karakteristični vektor. Tada je

$$x_i'x_i = x_i'(A^{-1}A)x_i = (x_i'A')(Ax_i) = (Ax_i)'(Ax_i) = (\lambda x_i)'(\lambda x_i) = \lambda_i^2 x_i'x_i.$$

Kako je karakteristični vektor $x_i \neq 0$, mora biti $x_i'x_i \neq 0$, pa je $\lambda_i^2 = 1$, odnosno $|\lambda_i| = 1$.

344. Dokazati da su karakteristični koreni realne simetrične matrice realni.

Rešenje. Neka je A realna simetrična matrica reda n. Posmatraćemo matricu A kao matricu iz $\mathbb{C}^{n,n}$. Ako je λ karakteristični koren matrice A u polju $\mathbb{C}$, a $x = [x_1, \ldots, x_n]'$ odgovarajući karakteristični vektor, tada je $Ax = \lambda x$. Ako je $\bar{x}$ vektor čije su koordinate konjugovane koordinate vektora x, biće

$$\bar{x}'Ax = \lambda \bar{x}'x.$$

Proizvod $\bar{x}'x = \sum_i \bar{x}_i x_i = \sum_i |x_i|^2$ je realan broj različit od 0, a kako je $(x'A\bar{x})' = x'A\bar{x}$ (jer je $x'A\bar{x}$ matrica formata 1×1), biće

$$\overline{\bar{x}'Ax} = x'A\bar{x} = (x'A\bar{x})' = \bar{x}'A'x = \bar{x}'Ax.$$

Dobili smo da je $\overline{\bar{x}'Ax} = \bar{x}'Ax$, pa je $\bar{x}'Ax$ realan broj, prema tome i

$$\lambda = \frac{\bar{x}'Ax}{\bar{x}'x}$$

je takođe realan broj.

345. Ako su a, b, c, d, e, f realni brojevi, dokazati da su svi koreni jednačine

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca-d^2-e^2-f^2)x+ae^2+bf^2+cd^2-abc-2def = 0$$

realni.

Rešenje. Data jednačina je karakteristična jednačina realne simetrične matrice

$$\begin{bmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{bmatrix},$$

pa su na osnovu zadatka 344 karakteristični koreni ove matrice, tj. koreni date jednačine, realni brojevi.

346. Dokazati da su svi karakteristični koreni realne simetrične matrice A pozitivni ako i samo ako za svako $\alpha \geq 0$ važi $|A + \alpha E| \neq 0$.

Rešenje. Pošto je A simetrična matrica, svi njeni karakteristični koreni su realni (zadatak 344).

Neka je $\alpha \geq 0$ i $|A + \alpha E| = 0$. Tada je i $|-\alpha E - A| = 0$, pa je $-\alpha \leq 0$ karakteristični koren matrice A, tj. nisu svi karakteristični koreni matrice A pozitivni.

Obrnuto, neka je $\lambda \leq 0$ karakteristični koren matrice A. Tada je $|\lambda E - A| = 0$, pa je i $|A + (-\lambda)E| = 0$, pri čemu je $-\lambda \geq 0$.

347. Neka je A realna antisimetrična matrica ($A' = -A$) reda n. Dokazati da je koeficijent uz λ^{n-i} u karakterističnom polinomu $f(\lambda)$ matrice A nula, ako je i neparan broj iz skupa $\{1, \ldots, n-1\}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= |\lambda E - A| = |(\lambda E - A)'| = |\lambda E - A'| = |\lambda E + A| \\ &= |-(-\lambda E - A)| = (-1)^n|-\lambda E - A|, \end{aligned}$$

tj. $f(\lambda) = (-1)^n f(-\lambda)$, pa je

$$\begin{aligned} &\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \\ &= \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} - \cdots + (-1)^{n+1}a_1\lambda + a_0. \end{aligned}$$

Odavde je

$$2(a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-3}\lambda^{n-3} + \dots) = 0$$

za svako λ, pa je $a_{n-1} = a_{n-3} = \cdots = 0$.

348. Neka je A realna, antisimetrična matrica neparnog reda.

a) Dokazati da su karakteristični koreni matrice A nad poljem kompleksnih brojeva nula i čisto imaginarni brojevi.

b) Ako je $z = x + iy$ karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu ik, gde su x i y realni vektori, $k \in \mathbb{R}$, dokazati da su x i y ortogonalni.

Rešenje. a)

$$|A| = |A'| = |-A| = (-1)^n|A| = -|A|,$$

pa je $|A| = 0$, što znači (6.43) da je jedan karakteristični koren matrice A nula.

Ako je z vektor koji odgovara karakterističnom korenu α, tada je

$$\alpha(z,z) = (\alpha z, z) = (Az, z) = (z, A'z) = (z, -Az) = -\bar{\alpha}(z,z),$$

odakle sledi da je $(\alpha+\bar{\alpha})(z,z) = 0$, a kako je $z \neq 0$, $(z,z) \neq 0$, biće $\alpha+\bar{\alpha} = 0$, tj. $\operatorname{Re}\alpha = 0$.

b) Ako je $A(x+iy) = ik(x+iy)$, onda je $Ax = -ky$ i $Ay = kx$, pa je

$$(x,y) = \frac{1}{k}(kx,y) = \frac{1}{k}(Ay,y) = \frac{1}{k}(y,-Ay) = \frac{1}{k}(y,-kx) = -(y,x) = -(x,y),$$

dakle, $(x,y) = 0$.

349. Data je realna matrica

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $a, b, c < -\dfrac{1}{2}$. Dokazati da je bar jedan karakteristični koren matrice A negativan.

Rešenje. Pošto je A simetrična matrica, svi njeni karakteristični koreni su realni (zadatak 344). Determinanta matrice A je

$$|A| = 1 + 2abc - a^2 - b^2 - c^2 < 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$$

Kako je determinanta proizvod karakterističnih korena matrice (6.41), bar jedan od njih mora biti negativan.

350. Neka je A realna matrica reda 2 čiji su svi elementi pozitivni. Dokazati da je bar jedan karakteristični koren matrice A pozitivan i da njemu odgovara karakteristični vektor čije su obe koordinate pozitivne.

Rešenje. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ i neka su λ_1 i λ_2 karakteristični koreni matrice A. Iz $\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A = a + d > 0$ direktno sledi da je bar jedan od karakterističnih korena pozitivan. Odredimo λ_1 i λ_2.

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc,$$

pa je $\lambda_{1,2} = \dfrac{a + d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} = \dfrac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$, odakle sledi $\lambda_1 > \dfrac{a + d + a - d}{2} = a$.

Ako je $[x, y]'$ karakteristični vektor koji odgovara karakterističnom korenu λ_1, tada je

$$\begin{aligned} ax + by &= \lambda_1 x, \\ cx + dy &= \lambda_1 y, \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} (a - \lambda_1)x + by &= 0, \\ cx + (d - \lambda_1)y &= 0. \end{aligned}$$

Pošto je ovaj sistem jednačina neodređen, možemo slobodno izabrati vrednost jedne od promenljivih. Na primer, za $x = 1$ dobijamo $y = \dfrac{\lambda_1 - a}{b} > 0$, dakle, jedan karakteristični koren čije su obe koordinate pozitivne je $\left[1, \dfrac{\lambda_1 - a}{b}\right]'$.

351. Neka je λ_0 karakteristični koren matrice A. Dokazati da su nenulte kolone matrice $B = (\lambda_0 E - A)^*$ karakteristični vektori matrice A koji odgovaraju karakterističnom korenu λ_0.

Rešenje. Kako je $\left|\lambda_0 E - A\right| = 0$, sledi (5.54)

$$(\lambda_0 E - A)B = (\lambda_0 E - A)(\lambda_0 E - A)^* = \left|\lambda_0 E - A\right| E = O.$$

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kolone matrice B. Tada je

$$O = (\lambda_0 E - A)B = (\lambda_0 E - A)[X_1, \ldots, X_n]$$

$$= [(\lambda_0 E - A)X_1, \dots, (\lambda_0 E - A)X_n]$$

To znači da je $(\lambda_0 E - A)X_i = O$ za sve $i \in \{1, \dots, n\}$, odakle sledi tvrđenje zadatka.

352. Ako je A realna simetrična matrica, λ i μ, $\lambda \neq \mu$, njeni karakteristični koreni, a x i y odgovarajući karakteristični vektori, dokazati da su x i y ortogonalni.

Rešenje. U zadatku 344 je dokazano da svi karakteristični koreni matrice A moraju biti realni.

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, y) = (Ax, y) = (x, A'y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

Dakle, $(\lambda - \mu)(x, y) = 0$, a kako je $\lambda \neq \mu$, mora biti $(x, y) = 0$.

353. Neka su A i B kompleksne matrice takve da je $AB = BA$ i B je nilpotentna matrica. Dokazati da matrice A i $A + B$ imaju iste karakteristične korene.

Rešenje. Neka je $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Pošto je B nilpotentna matrica, postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da je $B^k x = 0$ i $B^{k-1}x \neq 0$. Iz

$$(A + B)B^{k-1}x = B^{k-1}Ax + B^k x = \lambda B^{k-1}x,$$

zaključujemo da je λ karakteristični koren matrice $A + B$. Slično, ako je $(A + B)x = \lambda x$, $x \neq 0$, tada je

$$AB^{k-1}x = (A + B - B)B^{k-1}x = B^{k-1}(A + B)x - B^k x = \lambda B^{k-1}x.$$

354. Neka je A realna ortogonalna matrica i neka je $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ karakteristični polinom te matrice. Dokazati da je $a_0 = 1$, $a_i = a_{n-i}$, $i = 1, \dots, n-1$ ili je $-a_0 = 1$, $-a_i = a_{n-i}$, $i = 1, \dots, n-1$.

Rešenje.

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = |\lambda AA' - A| = |A(\lambda A' - E)|$$

$$= \left|-\lambda A\left(\frac{1}{\lambda}E - A'\right)\right| = |-\lambda A|\left|\frac{1}{\lambda}E - A'\right| = (-1)^n\lambda^n|A|f\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Iz $AA' = E$ sledi $|A||A'| = |A|^2 = 1$, pa je $|A| = \pm 1$, dakle,

$$f(\lambda) = \pm\lambda^n f\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

odakle sledi traženi rezultat.

355. Odrediti realne brojeve a, b i c tako da matrice A i B budu slične

$$A = \begin{bmatrix} -11 & -8 & 0 \\ 12 & 9 & 0 \\ 24 & 18 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ a & b & c \\ -1 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Karakteristični polinom matrice A je

$$|\lambda E - A| = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 3),$$

a njeni karakteristični koreni su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -3$. S obzirom da matrica A nema višestrukih korena, njen minimalni polinom je jednak karakterističnom, pa su njene invarijante sličnosti $1, 1, (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+3)$. Matrice A i B su slične ako i samo ako i B ima iste invarijante sličnosti, tj. ako i samo ako B ima karakteristične korene $1, -1, -3$.

U tom slučaju je $\operatorname{tr} B = 3 + b + 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 - 1 - 3$, pa je $4 + b = -3$, odnosno, $b = -7$.

Karakteristični polinom matrice B je

$$|\lambda E - B| = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 7) + 4c + 7c(\lambda - 3) - 4a(\lambda - 1).$$

Za $\lambda = 1$, $|\lambda E - B| = 0$, pa je $4c + 7c(1 - 3) = 0$, tj. $c = 0$, a za $\lambda = -1$, $|\lambda E - B| = 0$, pa je $48 + 8a = 0$, tj. $a = -6$.

356. Neka su A i B slične matrice. Dokazati da su tada slične i matrice

a) A', B',

b) A^2, B^2,

c) $p(A)$, $p(B)$, gde je $p(\lambda)$ proizvoljan polinom.

357. Ako su A i B matrice istog reda, a A regularna matrica, onda je matrica AB slična sa BA. Dokazati.

358. Pokazati da matrice koje imaju jednake karakteristične polinome ne moraju biti slične.

Rešenje. Matrice

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{i} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

imaju isti karakteristični polinom $\lambda^2 - 2\lambda + 1$. Kako je za svaku regularnu matricu P reda 2 $P^{-1}EP = E \neq A$, sledi da matrice E i A nisu slične.

359. Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$. Ako je svaki vektor iz V karakteristični vektor transformacije A, dokazati da je tada A skalarni umnožak identičkog preslikavanja.

360. Neka je A kvadratna matrica koja nije slična ni sa jednom drugom matricom. Dokazati da je A skalarna matrica.

361. Dokazati da su u $F^{2,2}$ sve nenula nilpotentne matrice međusobno slične.

Rešenje. Neka je $A \in F^{2,2}$ proizvoljna nilpotentna matrica. To znači da je za neko $k \in \mathbb{N}$, $A^k = O$. Na osnovu 6.32 sledi da minimalni polinom matrice A deli polinom λ^k. Minimalni polinom matrice A je stepena 1 ili 2, ne može biti λ jer je $A \neq O$, dakle, minimalni polinom matrice A je λ^2. To znači da su invarijante sličnosti matrice A 1 i λ^2, i to važi za svaku nenula nilpotentnu matricu reda 2, pa su na osnovu 6.29 sledi da su sve takve matrice slične.

362. Da li je svaka realna kvadratna matrica A koja nije skalarna, slična matrici čiji su svi elementi različiti od 0?

(Mathematics Magazine, Volume 53(1980), Number 2, Problem 1058)

Uputstvo. Jeste. Medu svim matricama sličnim sa A posmatrati onu koja ima najmanje nula. Neka je to matrica $B = [b_{ij}]$. Ona ne može biti dijagonalna (dokazati!). Neka je $b_{pq} \neq 0$ i $p \neq q$. Pretpostavimo da je $b_{rq} = 0$. Posmatrajmo matricu $C = E_{rp}(t)BE'_{pr}(-t)$, gde je t "dovoljno mali" pozitivan realan broj. Ova matrica ima nenula elemente tamo gde ih ima matrica B, dok je $c_{rq} = tb_{pq} \neq 0$.

363. Neka je $A \in F^{n,n}$. Dokazati da je A nilpotentna matrica ako i samo ako je njen karakteristični polinom λ^n.

Rešenje. Ako je karakteristični polinom matrice A $|\lambda E - A| = \lambda^n$, onda je $A^n = O$, pa je A nilpotentna matrica.

Obrnuto, neka je A nilpotentna matrica. Tada je $A^k = O$ za neko $k \in \mathbb{N}$, pa na osnovu 6.32 minimalni polinom $m_A(\lambda)$ matrice A deli λ^k, dakle, $m_A(\lambda) = \lambda^l$ za neko $l \in N$. Kako minimalni i karakteristični polinom matrice imaju iste nesvodljive faktore, mora biti $|\lambda E - A| = \lambda^m$ za neko

$m \geq l$, no pošto je stepen karakterističnog polinoma jednak redu matrice, sledi da je $|\lambda E - A| = \lambda^n$.

364. Neka su $A, B \in F^{n,n}$ nilpotentne matrice jednakog ranga koje imaju iste minimalne polinome. Koja je najveća vrednost n za koju A i B moraju biti slične?

(Mathematics Magazine, Volume 44, March 1971, Number 2, Problem 766.)

Rešenje. Na osnovu prethodnog zadatka A i B imaju isti broj netrivijalnih invarijanata sličnosti. Ako su λ, λ^3, λ^3 netrivijalne invarijante sličnosti matrice A, a λ^2, λ^2, λ^3 netrivijalne invarijante sličnosti matrice B, tada A i B zadovoljavaju uslove zadatka, ali nisu slične. Ovde smo iskoristili jednakosti $7 = 1+3+3 = 2+2+3$. Lako je proveriti da za $n \leq 6$, ne postoje dve različite particije broja n sa istim brojem sabiraka i istim najvećim sabirkom, pa je 6 tražena vrednost za n.

365. Ispitati može li nilpotentna matrica biti slična dijagonalnoj matrici ?

Rešenje. Neka je $A^k = O$ za neko $k \in \mathbb{N}$ i $A \overset{S}{\sim} D$, gde je D dijagonalna matrica. Tada postoji regularna matrica P takva da je $A = PDP^{-1}$, pa je

$$O = A^k = (PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1},$$

i

$$D^k = P^{-1}OP = O,$$

a odatle je $D = O$ i $A = O$.

Dakle, nula-matrica je jedina nilpotentna matrica koja je slična dijagonalnoj matrici.

366. Naći Smitovu kanoničku matricu za matricu

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+2 & \lambda-1 \\ 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2+4\lambda+2 & 2\lambda^2-1 \\ 2\lambda^2-\lambda & \lambda^2+2\lambda & 2\lambda^2-2\lambda \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Polinom $f_1(\lambda)$ Smitove kanoničke matrice je najveći zajednički delitelj za sve elemente matrice $A(\lambda)$ (6.19), dakle, $f_1(\lambda) = 1$. To znači da treba elementarnim transformacijama matricu $A(\lambda)$ svesti na oblik u kome će taj elemenat biti u prvoj vrsti i prvoj koloni, a zatim elementarnim transformacijama anulirati sve preostale elemente prve vrste i prve kolone.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda+2 & \lambda-1 \\ 2\lambda^2+\lambda & \lambda^2+4\lambda+2 & 2\lambda^2-1 \\ 2\lambda^2-\lambda & \lambda^2+2\lambda & 2\lambda^2-2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & \lambda-1 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+4\lambda+2 & 2\lambda^2-1 \\ \lambda & \lambda^2+2\lambda & 2\lambda^2-2\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2+2\lambda & 2\lambda^2-2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda+2 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Ovde smo u prvom koraku $A(\lambda)$ množili zdesna sa $E'_{13}(-1)$, zatim sleva sa $E_{21}(-\lambda-1)$ i $E_{31}(-\lambda)$, a na kraju zdesna sa $E'_{21}(-\lambda-2)$ i $E'_{31}(-\lambda+1)$.

Dalje, isti postupak koji smo primenili na matricu $A(\lambda)$ primenjujemo na blok $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$ te matrice.

Najveći zajednički delitelj svih elemenata matrice $B(\lambda)$ je λ, pa je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) \end{bmatrix} = N(\lambda),$$

a $N(\lambda)$ je tražena Smitova kanonička matrica za matricu $A(\lambda)$.

367. Naći Smitove kanoničke matrice za matrice

a) $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda-1 & \lambda+2 \\ \lambda^2+\lambda & \lambda^2 & \lambda^2+2\lambda \\ \lambda^2-2\lambda & \lambda^2-3\lambda+2 & \lambda^2+\lambda-3 \end{bmatrix}$,

b) $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+2) \end{bmatrix}$,

c) $C(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$.

Rešenje.

a) $N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$,

b) Smitovu kanoničku matricu možemo odrediti i pomoću najvećih zajedničkih delitelja svih minora reda k matrice $B(\lambda)$. Ovaj postupak je posebno podesan za dijagonalne matrice. Za datu matricu $B(\lambda)$,

$$d_1(\lambda) = \text{nzd}(\lambda, \lambda+1, \lambda^2(\lambda+2)) = 1.$$

Postoje samo tri minora reda 2 koji su različiti od nule, tako da je

$$d_2(\lambda) = \text{ nzd}\,(\lambda(\lambda+1), \lambda^3(\lambda+2), \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2)) = \lambda,$$

dok je

$$d_3(\lambda) = |B(\lambda)| = \lambda^3(\lambda+1)(\lambda+2).$$

Sada koristeći 6.19 dobijamo

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= d_1(\lambda) = 1, \\ f_2(\lambda) &= \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = \lambda, \\ f_3(\lambda) &= \frac{d_3(\lambda)}{d_2(\lambda)} = \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2), \end{aligned}$$

pa je

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2(\lambda+1)(\lambda+2) \end{bmatrix}.$$

368. Naći Smitovu kanoničku matricu za karakterističnu matricu matrice

$$A = \begin{bmatrix} -a & -b & -1 & 0 \\ b & -a & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & b & -a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

Odrediti za koje vrednosti a, b je minimalni polinom matrice A različit od njenog karakterističnog polinoma ?

369. Neka je

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in F^{n,n},$$

matrica takva da je $a_{ij} = 0$ za sve $i \geq j+2$, a $a_{ij} \neq 0$ za svako $i = j+1$.

Dokazati da je karakteristični polinom matrice A jednak njenom minimalnom polinomu.

Rešenje. U matrici $\lambda E - A$ minor reda $n-1$ koji se dobija izostavljanjem prve vrste i poslednje kolone je trougaona determinanta čija je vrednost $a_{21}a_{32}\dots a_{n,n-1} \neq 0$. To znači da je (6.19) $d_{n-1,A}(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)\dots f_{n-1}(\lambda)$ $= 1$, pa je i svaka od invarijanata sličnosti $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_{n-1}(\lambda)$ matrice

A jednaka 1. Prema tome, na osnovu 6.30 i 6.33 sledi da su karakteristični i minimalni polinom matrice A jednaki.

370. Naći Smitovu kanoničku matricu $N(\lambda)$ za matricu

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2+2\lambda & 2\lambda^2+3\lambda & 2\lambda^2+\lambda-1 \\ \lambda & 2\lambda & 2\lambda-1 \\ \lambda^2-2\lambda & 3\lambda^2-4\lambda & 4\lambda^2-5\lambda+2 \end{bmatrix}$$

i odrediti matrice $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ tako da bude

$$P(\lambda)N(\lambda)Q(\lambda) = A(\lambda).$$

371. Ispitati da li među matricama

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{bmatrix},$$

ima sličnih.

Uputstvo. Na osnovu 6.27 dovoljno je ispitati da li su polinomne matrice $\lambda E - A$, $\lambda E - B$ i $\lambda E - C$ ekvivalentne (svođenjem na Smitovu kanoničku matricu).

372. Pokazati da matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

imaju isti spektar, ali nisu slične.

373. Ispitati da li su sledeće matrice ekvivalentne

$$\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda+1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda^2+1 & \lambda-1 & \lambda^2 \\ \lambda^3+\lambda & \lambda^2+1 & \lambda^3 \\ \lambda^3-\lambda^2 & -2\lambda & \lambda^3-\lambda^2+1 \end{bmatrix}.$$

Rezultat. Invarijantni faktori za obe matrice su $1,\ \lambda+1,\ \lambda^3+1$, pa su one ekvivalentne.

374. Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$.

a) Ako su $\lambda E - A$ i $\lambda E - B$ ekvivalentne matrice nad $\mathbb{C}[\lambda]$, tada su i $\lambda E - A^2$ i $\lambda E - B^2$ ekvivalentne. Dokazati.

b) Ako su A i B ekvivalentne matrice nad $\mathbb{C}^{n,n}$, da li matrice A^2 i B^2 moraju biti ekvivalentne ?

Rešenje. a) A i B su slične matrice (6.27), tj. $P^{-1}AP = B$, kvadriranjem poslednje jednakosti dobija se da su i matrice A^2 i B^2 slične, pa su $\lambda E - A^2$ i $\lambda E - B^2$ ekvivalentne.

b) Matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

su istog ranga 2, pa su ekvivalentne, međutim, $\operatorname{rang}(A^2) = 2$, $\operatorname{rang}(B^2) = 1$, pa matrice A^2 i B^2 nisu ekvivalentne.

375. Odrediti minimalni polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Rešenje. Do minimalnog polinoma može se doći na više raznih načina, pa ćemo ovde prikazati neke od njih.

a) Minimalni polinom je jednak invarijanti sličnosti najvećeg stepena (6.33), pa ćemo zato odrediti Smitovu kanoničku matricu za matricu $\lambda E - A$ i odatle naći invarijantu sličnosti najvećeg stepena matrice A.

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 2 & -2 \\ 5 & \lambda - 7 & 5 \\ 6 & -6 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 6 & -6 & \lambda + 4 \\ 5 & \lambda - 7 & 5 \\ \lambda - 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & -\lambda + 1 & \lambda - 1 \\ 5 & \lambda - 7 & 5 \\ \lambda - 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6\lambda - 12 & \lambda - 2 \\ \lambda - 4 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 6\lambda - 12 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 6\lambda - 12 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 5\lambda + 6 \end{bmatrix}.$$

Invarijanta sličnosti najvećeg stepena matrice A je $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ i to je minimalni polinom matrice A.

b) Karakteristični polinom matrice A je $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$, a karakteristični koreni su $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$. Pošto minimalni polinom ima iste korene kao karakteristični (6.44), minimalni polinom $m_A(\lambda)$ date matrice je $(\lambda-2)(\lambda-3)$ ili je jednak karakterističnom polinomu. Proverom (stavljajući u polinom $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ matricu A umesto λ) dobijamo da je

$$A^2 - 5A + 6E = 0,$$

pa je $m_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

c) Za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ očigledno je $\alpha A \neq E$, pa minimalni polinom nije linearan. Stavimo $A^2 = \alpha A + \beta E$, tj.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 14 & -10 & 10 \\ -25 & 29 & -25 \\ -30 & 30 & -26 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odavde dobijamo 9 jednačina sa po dve nepoznate α i β. Rešavajući dve od tih jednačina dobićemo da je $\alpha = 5,\ \beta = -6$, a zatim ćemo proveriti da li ta rešenja zadovoljavaju i svih preostalih 7 jednačina. U našem slučaju dobijena rešenja zadovoljavaju sve jednačine, pa je, prema tome, jednačina najmanjeg stepena koju matrica A zadovoljava $A^2 = 5A - 6E$, odnosno minimalni polinom matrice A je

$$m_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

376. U unitarnom vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ neka je $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ i $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, gde je

$$T(x) = 2\frac{(x,a)}{(a,a)}a - x, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dokazati da je T regularna linearna transformacija prostora $\mathbb{R}^n$ i odrediti karakteristični polinom i minimalni polinom transformacije T.

Rešenje. T je linearna transformacija jer je za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ i svako $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= 2\frac{(\alpha x + \beta y, a)}{(a,a)}a - (\alpha x + \beta y) = 2\frac{\alpha(x,a) + \beta(y,a)}{(a,a)}a - \alpha x - \beta y \\ &= \alpha\left(2\frac{(x,a)}{(a,a)}a - x\right) + \beta\left(2\frac{(y,a)}{(a,a)}a - y\right) = \alpha T(x) + \beta T(y). \end{aligned}$$

Postoji ortogonalna baza prostora $\mathbb{R}^n$ koja sadrži vektor a. Neka je $\mathcal{B} = (a, a_2, \dots, a_n)$ jedna takva baza. Odredimo matricu linearne transformacije

T u odnosu na bazu $\mathcal{B}$. Kako je $T(a) = a$ i $T(a_i) = -a_i$, $i = 2, \ldots, n$, ta matrica je

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & -1 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice $[T]$ je $(\lambda - 1)(\lambda + 1)^{n-1}$. lako se proverava da je $([T] - E)([T] + E) = O$, pa je $(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ minimalni polinom transformacije T.

377. Neka su A i B regularne realne matrice takve da je $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$. Dokazati da je $m(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ minimalni polinom matrice $A^{-1}B$.

Rešenje. Iz $A^{-1} + B^{-1} = (A + B)^{-1}$ sledi $E = (A^{-1} + B^{-1})(A + B) = 2E + B^{-1}A + A^{-1}B = 2E + (A^{-1}B)^{-1} + A^{-1}B$.

Odatle je $A^{-1}B + (A^{-1}B)^{-1} + E = 0$, pa množenjem te jednakosti sa $A^{-1}B$ dobijamo

$$(A^{-1}B)^2 + A^{-1}B + E = 0.$$

Dakle, matrica $A^{-1}B$ zadovoljava dati polinom $m(\lambda)$, a kako on nema realne nule, to je ujedno i minimalni polinom matrice $A^{-1}B$.

378. Neka je A linearna transformacija vektorog prostora $\mathbb{R}_n[x]$ data sa

$$A(p(x)) = p(1) + p(2)x.$$

a) Odrediti karakteristični polinom linearne transformacije A.

b) Dokazati da je $\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda$ minimalni polinom transformacije A.

Rešenje. a) Najpre ćemo odrediti matricu linearne transformacije A u nekoj bazi prostora $\mathbb{R}_n[x]$. Uzmimo bazu $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$, kako je

$$\begin{aligned} A(1) &= 1 + x, \\ A(x) &= 1 + 2x, \\ A(x^2) &= 1 + 4x, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A(x^{n-1}) &= 1 + 2^{n-1}x \end{aligned}$$

matrica transformacije A je

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 4 & \dots & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom transformacije A je karakterističn polinom njene matrice u bilo kojoj bazi, pa je

$$\left|\lambda E - [A]\right| = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -4 & \dots & -2^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Razvijanjem determinante po poslednjoj vrsti $n-2$ puta uzastopno dobijamo

$$\left|\lambda E - [A]\right| = \lambda^{n-2} \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda^{n-2}(\lambda^2 - 3\lambda + 1).$$

b) Minimalni polinom matrice A je oblika $\lambda^k(\lambda^2-3\lambda+1)$, $1 \le k \le n-2$ (6.44). Polinom najmanjeg stepena koji dolazi u obzir je $\lambda^3-3\lambda^2+\lambda$, pa ako važi $A^3 - 3A^2 + A$, onda je taj polinom minimalni polinom transformacije A.

Kako je

$$\begin{aligned} A^2(p(x)) &= A(p(1) + p(2)x) = p(1) + p(2) + (p(1) + 2p(2))x, \\ A^3(p(x)) &= A(A^2(p(x))) = A(p(1) + p(2) + (p(1) + 2p(2))x) \\ &= 2p(1) + 3p(2) + (3p(1) + 5p(2))x \end{aligned}$$

biće

$$(A^3 - 3A^2 + A)(p(x)) = A^3(p(x)) = A^3(p(x)) - 3A^2(p(x)) + A(p(x)) = 0$$

pa je $\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda$ minimalni polinom transformacije A.

379. Neka su A i B kvadaratne matrice reda n gde je

$A = [a_{ij}]$, $a_{ij} = 1$ za $i, j \in \{1, \dots, n\}$;

$B = [b_{ij}]$, $b_{11} = n$, $b_{ij} = 0$ za sve ostale i, j.

a) Odrediti karakteristične i minimalne polinome matrica A i B.

b) Da li su matrice A i B slične ?

Rešenje. a) Karakteristični polinom matrice A je

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & \lambda-1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & \dots & \lambda-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & \dots & -1 \\ -\lambda & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda-n & -1 & \dots & -1 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-n)\lambda^{n-1}.$$

Minimalni polinom matrice A ima iste nesvodljive faktore kao i njen karakteristični polinom, pa je $m_A(\lambda)$ oblika $(\lambda-n)\lambda^k$, $1 \le k \le n-1$. Direktnom proverom dobija se da je $(A-nE)A = O$, pa je $(\lambda-n)\lambda$ minimalni polinom matrice A.

Karakteristični polinom matrice B je očigledno $(\lambda-n)\lambda^{n-1}$, pa se i ovde direktnom proverom dobija da je $(\lambda-n)\lambda$ minimalni polinom matrice B.

b) Matrice A i B su slične, jer imaju redom jednake invarijante sličnosti. U ovom slučaju karakteristični i minimalni polinom jednoznačno određuju sve invarijante sičnosti, a te invarijante sličnosti matrica A i B moraju biti $1, \lambda, \dots, \lambda, \lambda(\lambda-n)$.

380. Neka je A realna kvadratna matrica čiji je minimalni polinom $m_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$. Dokazati da je $B = A - E$ regularna matrica i izraziti B^{-1} pomoću A i E.

Rešenje. Ako pretpostavimo da je B singularna matrica, onda je $|A-E| = 0$, pa je 1 nula karakterističnog polinoma matrice A. To znači da je 1 i nula minimalnog polinoma $m_A(\lambda)$, što očigledno nije tačno. Dakle, B je regularna matrica.

Iz $A^2 + A + E = O$, zamenjujući A sa $B + E$ sledi $B^2 + 3B + 3E = O$. Množenjem poslednje jednakosti sa B^{-1} dobijamo $B^{-1} = -\frac{1}{3}(B+3E) = -\frac{1}{3}A - \frac{2}{3}E$.

381. Neka je A kvadratna matrica reda n takva da je $A^n = O$ i $A^{n-1} \neq O$. Dokazati da su matrice A i $A + A^2$ slične.

Rešenje. Iz uslova zadataka odmah sledi da je minimalni polinom matrice A $m_A(\lambda) = \lambda^n$.

Dalje je

$$(A + A^2)^n = (A(E + A))^n = A^n(E + A)^n = O,$$

i

$$(A + A^2)^{n-1} = A^{n-1}(E + A)^{n-1}.$$

Kako je A nilpotentna matrica svi njeni karakteristični koreni su jednaki 0. To znači da su svi karakteristični koreni matrice $E + A$ jednaki 1 (zadatak 330), pa je $E + A$ regularna matrica (6.43), a tada iz $A^{n-1} \neq O$ sledi $(A + A^2)^{n-1} \neq O$.

Dakle, minimalni polinom matrice $A + A^2$ takođe je λ^n. S obzirom da su matrice A i $A + A^2$ reda n i njihovi minimalni polinomi stepena n, sledi da su ti minimalni polinomi ujedno i karakteristični polinomi tih matrica. Dakle, λ^n je minimalni i karakteristični polinom matrica A i $A + A^2$, pa su invarijante sličnosti tih matrica $1, \dots, 1, \lambda^n$ što znači da su te matrice slične (6.30, 6.33, 6.29).

382. Neka je $m(\lambda)$ minimalni polinom matrice $A \in F^{n,n}$ i $p(\lambda) \in F[\lambda]$. Dokazati da je $p(A)$ regularna matrica ako i samo ako su $m(\lambda)$ i $p(\lambda)$ uzajamno prosti polinomi.

Rešenje. Neka je $p(A)$ regularna matrica, a $d(\lambda)$ najveći zajednički delitelj polinoma $m(\lambda)$ i $p(\lambda)$. Ako je $p(\lambda) = d(\lambda)p_1(\lambda)$, tada je $p(A) = d(A)p_1(A)$, pa je $d(A)$ regularna matrica. S druge strane, kako je $m(\lambda) = d(\lambda)m_1(\lambda)$, biće $O = m(A) = d(A)m_1(A)$, pa iz regularnosti matrice $d(A)$ sledi $m_1(A) = O$. No, kako je $m(\lambda)$ minimalni polinom matrice A, polinom $d(\lambda)$ mora biti stepena nula.

Obrnuto, ako su $m(\lambda)$ i $p(\lambda)$ uzajamno prosti polinomi, tada postoje polinomi $u(\lambda)$ i $v(\lambda)$ takvi da je $u(\lambda)m(\lambda) + v(\lambda)p(\lambda) = 1$. Stavljajući u prethodnu jednakost $\lambda = A$, dobija se $v(A)p(A) = E$, pa je $p(A)$ regularna matrica.

383. Neka je A linearna transformacija n-dimenzionalnog vektorskog prostora V nad poljem kompleksnih brojeva. Dokazati da postoji potprostor W prostora V dimenzije $n - 1$ takav da je $A(W) \subseteq W$.

Rešenje. Ako je linearna transformacija A singularna, onda je $\dim(\operatorname{Im} A) \leq n - 1$, pa postoji potprostor W prostora V takav da je $\operatorname{Im} A \subseteq W$, $\dim W = n - 1$. No, tada je $A(W) \subseteq \operatorname{Im} A \subseteq W$.

Ako je transformacija A regularna, onda postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ tako da je $A - \lambda E$ singularna matrica (λ je karakteristični koren matrice A), pa na osnovu prethodnog sledi da postoji potprostor W dimenzije $n-1$ takav da je

$(A-\lambda E)(W) \subseteq W$. Ako je x proizvoljan vektor iz W, onda je $(A-\lambda E)(x) = A(x) - \lambda x = w \in W$, pa je $A(x) = w + \lambda x \in W$, dakle, $A(W) \subseteq W$.

384. Neka je A realna matrica reda 4 čiji je karakteristični polinom

$$f(\lambda) = \lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1.$$

Dokazati da je $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^*$.

Rešenje. Na osnovu 6.42 sledi da je $|A| = 1$, pa je A regularna matrica i $A^* = A^{-1}$. Na osnovu Cayley-Hamiltonove teoreme (6.9) je

$$A^4 + aA^3 + bA^2 + aA + E = O,$$

pa množeći poslednju jednakost sa A^{-4} sledi

$$(A^*)^4 + a(A^*)^3 + b(A^*)^2 + a(A^*) + E = O.$$

Dakle, karakteristični polinom matrice A^* je

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + b\lambda^2 + a\lambda + 1,$$

pa na osnovu 6.42 sledi $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A^*$.

385. Ako je A matrica reda 3, dokazati da je karakteristični polinom matrice A

$$f(\lambda) = \lambda^3 - (\operatorname{tr} A)\lambda^2 + (\operatorname{tr} A^*)\lambda - |A|.$$

386. Ako su matrice $A, B \in F^{3,3}$ takve da je $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} A^* = \operatorname{tr} B^*$ i $|A| = |B|$, dokazati da su karakteristični polinomi matrica A i B jednaki.

Uputstvo. Koristiti zadatak 385.

387. Neka je A realna matrica reda n koja ima n karakterističnih korena koji su svi celi brojevi. Ako je $\operatorname{tr} A = |A| = 3$, dokazati da je $n = 4k + 1$ za neki prirodan broj k.

Rešenje. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristični koreni matrice A. Tada je

$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 3,$$

$$|A| = \lambda_1 \ldots \lambda_n = 3.$$

Iz druge jednakosti sledi da je tačno jedan karakteristični koren po modulu jednak 3, neka je to $|\lambda_1| = 3$, a za sve ostale korene mora biti $|\lambda_i| = 1$.

Razmotrićemo dva slučaja.

1) $\lambda_1 = 3$.

Označimo sa s broj karakterističnih korena koji su jednaki 1, a sa t broj karakterističnih korena koji su jednaki -1. Iz prve od gornjih jednakosti dobijamo da je $s = t$, a iz druge da je t paran broj. Dakle, $s = t = 2k$, pa je $n = 1 + s + t = 4k + 1$.

2) $\lambda_1 = -3$.

Iz prve jednakosti dobijamo da je $s = t + 6$, a iz druge da je t neparan broj. Dakle, $n = 1+s+t = 1+2t+6 = 7+2(2k+1) = 4k+9 = 4(k+2)+1$.

GLAVA 7

Kanoničke forme sličnosti

7.1. Matrica $A \in F^{n,n}$ je slična sa dijagonalnom matricom ako i samo ako A ima n linearno nezavisnih vektora.

7.2. Matrica $A \in F^{n,n}$ je slična sa dijagonalnom matricom ako i samo ako se minimalni polinom matrice A može faktorizovati u proizvod različitih linearnih faktora.

7.3. Neka matrica $A \in F^{n,n}$ ima n linearno nezavisnih vektora $x_1, \ldots, x_n \in F^{n,1}$ kojima odgovaraju karakteristični koreni $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ako je P matrica čije su kolone karakteristični vektori matrice A, $P = [x_1, \ldots, x_n] \in F^{n,n}$, onda je

$$P^{-1}AP = D,$$

gde je $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

7.4. Matrica oblika

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{k1} & A_{k2} & \ldots & A_{kk} \end{bmatrix}, \qquad k > 1,$$

gde su A_{ii}, $i = 1, \ldots, k$ kvadratne matrice, a A_{ij}, $i \neq j$, nula matrice, naziva se kvazidijagonalna matrica.

7.5. Ako su dijagonalni blokovi kvazidijagonalne matrice $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$ redom slični odgovarajućim blokovima matrice $B = \operatorname{diag}(B_1, \ldots, B_k)$, tj. ako je

$$A_i = P_i^{-1} B_i P_i, \qquad i = 1, \ldots, k,$$

onda su A i B slične matrice i pritom je

$$A = P^{-1}BP,$$

gde je $P = \operatorname{diag}(P_1, \ldots, P_k)$.

7.6. Kvazidijagonalna matrica $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$ je slična sa matricom $B = \operatorname{diag}(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k})$, gde je $i_1, \ldots, i_k$ proizvoljna permutacija indeksa $1, \ldots, k$.

7.7. Neka je $A \in F^{n,n}$ matrica čije su netrivijalne invarijante sličnosti polinomi $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$. Matrica A je slična sa matricom

$$B = \operatorname{diag}(C(f_1(\lambda)), \dots, C(f_k(\lambda))).$$

Matrica B naziva se prva kanonička forma klase matrica sličnih sa A.

7.8. Ako je $A = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k) \in F^{n,n}$ kvazidijagonalna matrica i ako je $m_i(\lambda)$ minimalni polinom matrice A_i, $i = 1, \dots, k$, onda je minimalni polinom matrice A jednak najmanjem zajedničkom sadržaocu za polinome $m_1(\lambda), \dots, m_k(\lambda)$.

7.9. Neka je $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$, a $f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ njeni invarijantni faktori, pri čemu su $f_i(\lambda) \neq 0$, $i = 1, \dots, r$, a $f_j(\lambda) = 0$, $j = r + 1, \dots, n$. Ako je svaki od polinoma $f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ razložen

$$f_i(\lambda) = p_{i1}^{e_{i1}}(\lambda) \dots p_{ik_i}^{e_{ik_i}}(\lambda), \qquad i = 1, \dots, r,$$

gde su $p_{i1}, \dots, p_{ik_i}$ različiti, nesvodljivi nad F normalizovani polinomi, a svi eksponenti $e_{i1}, \dots, e_{ik_i}$ različiti od nule, onda se polinomi

$$p_{i1}^{e_{i1}}(\lambda), \dots, p_{ik_i}^{e_{ik_i}}(\lambda)$$

nazivaju elementarnim deliteljima polinoma $f_i(\lambda)$. Elementarni delitelji svih nenula invarijantnih faktora matrice $A(\lambda)$ čine sistem elementarnih delitelja te matrice. U tom sistemu svaki elementarni delitelj se pojavljuje onoliko puta koliko puta se pojavljuje kao faktor u invarijantnim faktorima matrice.

Elementarni delitelji matrice $A \in F^{n,n}$ su elementarni delitelji nad F njene karakteristične matrice $\lambda E - A$. Sistem elementarnih delitelja matrice A je sistem elementarnih delitelja matrice $\lambda E - A$.

7.10. Dve matrice $A, B \in F^{n,n}$ su slične ako i samo ako imaju iste sisteme elementarnih delitelja.

7.11. Ako je $A \in F^{n,n}$ matrica čiji je sistem elementarnih delitelja nad F

$$g_1(\lambda), \dots, g_s(\lambda),$$

onda je matrica A slična sa matricom

$$B = \operatorname{diag}(C(g_1(\lambda)), \dots, C(g_s(\lambda))).$$

Matrica B naziva se druga kanonička forma klase matrica sličnih sa A.

7.12. Matrica $A \in F^{n,n}$ koja nije slična ni sa jednom kvazidijagonalnom matricom naziva se nerazloživa. U suprotnom matrica je razloživa.

7.13. Matrica $A \in F^{n,n}$ je nerazloživa nad F ako i samo ako su njen minimalni i karakteristični polinom jednaki i oblika $p^k(\lambda)$, gde je $p(\lambda)$ normalizovan, nesvodljiv nad F polinom.

7.14. Matrica $A \in F^{n,n}$ čija je jedina netrivijalna invarijanta sličnosti polinom $p^k(\lambda)$, gde je $p(\lambda)$ normalizovan, nesvodljiv nad F polinom, slična je sa matricom

$$B = \begin{bmatrix} C(p(\lambda)) & N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(p(\lambda)) & N & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p(\lambda)) & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p(\lambda)) \end{bmatrix},$$

gde se na glavnoj dijagonali matrice B nalazi k blokova $C(p(\lambda))$, a N je matrica istog formata kao $C(p(\lambda))$, koja u donjem levom uglu ima jedinicu, a ostali elementi su joj 0.

Matrica B naziva se hiper-prateća matrica polinoma $p^k(\lambda)$.

7.15. Matrica $A \in F^{n,n}$ čiji je sistem elementarnih delitelja $g_1(\lambda), \dots, g_s(\lambda)$, slična je sa matricom

$$B = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_s),$$

gde je B_i hiper-prateća matrica elementarnog delitelja $g_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, s$.

Matrica B naziva se racionalna kanonička forma klase matrica sličnih sa A.

7.16. U specijalnom slučaju, kada je polje F polje kompleksnih brojeva, racionalna kanonička forma ima posebno jednostavan oblik. S obzirom da se nad poljem kompleksnih brojeva svaki polinom može faktorizovati u proizvod linearnih faktora, svi elementarni delitelji matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ su oblika $(\lambda - a)^k$, pa su sve hiper-prateće matrice elementarnih delitelja oblika

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Matrice ovog oblika nazivaju se Žordanovi (Jordan) blokovi, a racionalna kanonička forma kompleksne matrice A naziva se Žordanova kanonička forma i to je kvazidijagonalna matrica koja na dijagonali ima Žordanove blokove svih elementarnih delitelja iz sistema elementarnih delitelja matrice A.

Z A D A C I

388. Neka je A matrica reda n koja ima n različitih karakterističnih korena. Dokazati da je A slična sa dijagonalnom matricom.

Pokazati primerom da ne važi obrnuto tvrđenje.

Rešenje. Svakom od n karakterističnih korena odgovara karakteristični vektor. Kako su karakteristični vektori koji odgovaraju različitim karakterističnim korenima linearno nezavisni (zadatak 328), matrica A ima n linearno nezavisnih karakterističnih vektora, pa je slična sa dijagonalnom matricom (7.1).

Primer matrice reda n koja je slična sa dijagonalnom matricom a nema n različitih karakterističnih korena, je jedinična matrica E koja je dijagonalna, a svi njeni karakteristični koreni su međusobno jednaki.

389. Odrediti A^n, $n \in \mathbb{Z}$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ \dfrac{1}{a} & 0 & a \\ \dfrac{1}{a^2} & \dfrac{1}{a} & 0 \end{bmatrix},$$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Rešenje. Kako je $|\lambda E - A| = (\lambda+1)^2(\lambda-2)$, karakteristični koreni su -1 i 2. Karakterističnom korenu -1 odgovaraju linearno nezavisni karakteristični vektori $[-a, 1, 0]'$ i $[-a^2, 0, 1]'$, a karakterističnom korenu 2 odgovara karakteristični vektor $[a^2, a, 1]'$.

To znači da je (7.3) $A = PDP^{-1}$, gde je

$$P = \begin{bmatrix} -a & -a^2 & a^2 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

pa je

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} P^{-1}.$$

390. Odrediti A^n, $n \in \mathbb{N}$, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Ako je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, onda se A može pisati u obliku $A = \begin{bmatrix} B & 2B \\ O & -B \end{bmatrix}$.

S obzirom da je $A^2 = \begin{bmatrix} B^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{bmatrix}$, lako je videti da je $A^{2k} = \begin{bmatrix} B^{2k} & 0 \\ 0 & B^{2k} \end{bmatrix}$, i $A^{2k+1} = \begin{bmatrix} B^{2k+1} & 2B^{2k+1} \\ 0 & -B^{2k+1} \end{bmatrix}$, za sve $k \in \mathbb{N}$.

Preostaje da se odredi B^n, $n \in \mathbb{N}$. Karakteristični polinom matrice B je $\lambda^2 + \lambda - 6$, a njeni karakteristični koreni su -3 i 2. Karakteristični vektori matrice B koji odgovaraju tim korenima su $[1, -2]'$ i $[2, 1]'$ dakle, B je slična sa dijagonalnom matricom $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, pri čemu je $B = TDT^{-1}$, gde je $T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Dakle, $B^n = (TDT^{-1})^n = TD^nT^{-1} = T \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} T^{-1}$.

391. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrica koja ima n realnih, različitih, pozitivnih karakterističnih korena. Dokazati da postoji realna matrica B takva da je $B^2 = A$.

Rešenje. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristični koreni matrice A. Pošto su karakteristični koreni različiti, matrica A je slična sa dijagonalnom matricom $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, tj. $A = PDP^{-1}$ za neku regularnu matricu P (328,7.1,7.3).

Neka je $D_1 = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ i $B = PD_1P^{-1}$. Matrica B je realna jer su D_1 i P realne matrice i za nju važi $B^2 = PD_1^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

392. Dokazati da je realna matrica

$$A = \begin{bmatrix} b & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \end{bmatrix}$$

za svako $a, b \in \mathbb{R}$ slična sa dijagonalnom matricom i naći matricu T takvu da je $T^{-1}AT$ dijagonalna matrica.

Rešenje. Karakteristični polinom matrice A je

$$|\lambda E - A| = (\lambda - a)(\lambda - b - a)(\lambda - b + a),$$

a karakteristični koreni su $a,\ b+a,\ b-a$. Sistem $(\lambda E - A)[x,y,z]' = O$ za $\lambda = a$ postaje

$$\begin{aligned}(a-b)x - az &= 0,\\ -ax + (a-b)z &= 0,\end{aligned}$$

a jedno rešenje ovog sistema je vektor $[0,1,0]'$.

Slično, za $\lambda = b+a$ jedno rešenje je vektor $[1,0,1]'$, a za $\lambda = b-a$ jedno rešenje je vektor $[1,0,-1]'$. Karakteristični vektori $[0,1,0]'$, $[1,0,1]'$, $[1,0,-1]'$ su linearno nezavisni, pa je matrica A slična sa dijagonalnom matricom za svako $a, b \in \mathbb{R}$ (7.1,7.3). Pri tome je

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b+a & 0 \\ 0 & 0 & b-a \end{bmatrix}.$$

393. Ispitati da li je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

slična sa dijagonalnom matricom i ako jeste, naći matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica.

Rezultat. $P^{-1}AP = D$,

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

394. Ispitati za koje vrednosti realnog parametra k je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & k \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

slična sa dijagonalnom matricom nad poljem realnih brojeva i za te vrednosti k odrediti matricu P takvu da je $P^{-1}AP$ dijagonalna matrica.

395. Neka su A i B realne matrice reda n čiji su karakteristični polinomi jednaki. Ako postoji baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ koja se sastoji od karakterističnih vektora matrice A i baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ koja se satoji od karakterističnih vektora matrice B, tada su matrice A i B slične. Dokazati.

Rešenje. Pošto matrice A i B imaju iste karakteristične polinome one imaju i iste karakteristične korene. Dalje, matrica A (a isto tako i matrica B) ima n linearno nezavisnih karakterističnih vektora, pa je slična sa dijagonalnom matricom koja na dijagonali ima karakteristične korene matrica A i B. Dakle, $A \overset{S}{\sim} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ i $B \overset{S}{\sim} \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, pa je $A \overset{S}{\sim} B$.

396. Neka je $A \in F^{n,n}$ matrica koja ima n različitih karakterističnih korena i B matrica koja komutira sa A. Dokazati da je matrica B slična sa dijagonalnom matricom.

Rešenje. Ako je D dijagonalna matrica čiji su svi dijagonalni elementi međusobno različiti, onda je svaka matrica koja komutira sa D dijagonalna (dokazano u zadatku 229).

Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ karakteristični koreni matrice A. Karakteristični vektori koji odgovaraju ovim korenima su linearno nezavisni (328), pa je matrica A slična sa dijagonalnom matricom $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (7.1,7.3). Ako je $A = PDP^{-1}$, tada je $PD = AP$ i $P^{-1}A = DP^{-1}$. Matrica $C = P^{-1}BP$ je slična sa B i ona komutira sa D. Zaista,

$$CD = P^{-1}BPD = P^{-1}BAP = P^{-1}ABP = DP^{-1}BP = DC.$$

Kako su dijagonalni elementi matrice D međusobno različiti, sledi da je C dijagonalna matrica slična sa B.

397. Naći bar jedno rešenje matrične jednačine $X^3 = A$, gde je

$$A = \begin{bmatrix} 35 & -54 & 18 \\ 18 & -28 & 9 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Karakteristični polinom matrice A je $|\lambda E - A| = (\lambda+1)^2(\lambda-8)$. Karakterističnom korenu -1 odgovara invarijantni potprostor $S_A(-1) = L([1,0,-2]', [0,1,3]')$, a korenu 8 odgovara invarijantni potprostor $S_A(8) = L([2,1,0]')$. Karakteristični vektori $[1,0,-2]', [0,1,3]', [2,1,0]'$ su linearno nezavisni, pa je $A = PDP^{-1}$ (7.1,7.3), gde je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ako je

$$D_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

onda je $D_1^3 = D$. Stavljajući $X = PD_1P^{-1}$ sledi

$$X^3 = (PD_1P^{-1})^3 = PD_1^3P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

398. Nad poljem kompleksnih brojeva matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je slična sa dijagonalnom matricom, a $f(\lambda) \in \mathbb{C}[\lambda]$ je polinom pozitivnog stepena. Dokazati da je jednačina $f(X) = A$ rešiva po X.

Rešenje. Neka je T matrica takva da je $A = T^{-1}\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)T$ i neka su $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{C}$ takvi da je

$$f(\alpha_1) = \lambda_1, \ldots, f(\alpha_n) = \lambda_n.$$

Matrica $X = T^{-1}\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)T$ je traženo rešenje date jednačine.

399. Naći sistem elementarnih delitelja nad poljem racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva matrice $A(\lambda)$ čiji su invarijantni faktori

a)
$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= 1, \\ f_2(\lambda) &= \lambda^2 + 1, \\ f_3(\lambda) &= \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1, \\ f_4(\lambda) &= \lambda^6 + 2\lambda^5 - 2\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda - 2. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \lambda + 1, \\ f_2(\lambda) &= \lambda^2 - 1, \\ f_3(\lambda) &= \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda - 1, \\ f_4(\lambda) &= \lambda^5 - \lambda^3 - \lambda^2 + 1. \end{aligned}$$

Rešenje. a) Koristeći osobinu da je $f_i(\lambda) \mid f_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$, invarijantni faktori se lako mogu faktorizovati u proizvod nesvodljivih faktora nad poljem racionalnih brojeva

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = \lambda^2 + 1, \quad f_3(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1),$$
$$f_4(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)^2(\lambda^2 - 2),$$

pa je sistem elementarnih delitelja nad poljem racionalnih brojeva

$$\lambda^2 + 1, \quad \lambda^2 + 1, \quad \lambda^2 + 1, \quad \lambda + 1, \quad (\lambda + 1)^2, \quad \lambda^2 - 2.$$

Rastavljajući invarijantne faktore u proizvod nesvodljivih polinoma nad poljem realnih brojeva dobija se sistem elementarnih delitelja nad tim poljem

$$\lambda^2 + 1, \quad \lambda^2 + 1, \quad \lambda^2 + 1, \quad \lambda + 1, \quad (\lambda + 1)^2, \quad \lambda - \sqrt{2}, \;\; \lambda + \sqrt{2}.$$

Sistem elementarnih delitelja nad poljem kompleksnih brojeva je

$$\lambda + i, \;\; \lambda + i, \;\; \lambda + i, \quad \lambda - i, \;\; \lambda - i, \;\; \lambda - i,$$

$\lambda+1, \quad (\lambda+1)^2, \quad \lambda-\sqrt{2}, \quad \lambda+\sqrt{2}.$

400. Za matrice

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+1 & \lambda^2+1 & 2\lambda^2-2 \\ \lambda^2+2 & \lambda^2+1 & 3\lambda^2-5 \end{bmatrix},$$

$$B(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda^2+2 & 2\lambda+1 & \lambda^2+1 \\ \lambda^2+4\lambda+4 & 2\lambda+3 & \lambda^2+4\lambda+3 \\ \lambda^2-4\lambda+3 & 2\lambda-1 & \lambda^2-4\lambda+2 \end{bmatrix}$$

naći sistem elementarnih delitelja nad poljem racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva.

Rezultat. Sistem elementarnih delitelja matrice $A(\lambda)$ nad poljem racionalnih brojeva je λ^2+1, λ^2-3, nad poljem relanih brojeva λ^2+1, $\lambda-\sqrt{3}$, $\lambda+\sqrt{3}$, a nad poljem kompleksnih brojeva $\lambda-i$, $\lambda+i$, $\lambda-\sqrt{3}$, $\lambda+\sqrt{3}$.

Sistem elementarnih delitelja matrice $B(\lambda)$ je prazan jer $B(\lambda)$ nema netrivijalne invarijantne faktore (Smitova kanonička matrica matrice $B(\lambda)$ je jedinična matrica).

401. Za matrice iz zadatka 367 naći sisteme elementarnih delitelja nad poljem realnih brojeva.

402. Matrica $A(\lambda)\in\mathbb{R}[\lambda]^{7,7}$ je ranga 5, a njen sistem elementarnih delitelja je

$$\lambda,\ \ \lambda^2,\ \ \lambda+1,\ \ (\lambda+1)^2,\ \ (\lambda+1)^3,\ \ \lambda-1.$$

Odrediti Smitovu kanoničku matricu $N(\lambda)$ za matricu $A(\lambda)$.

Rešenje. Odredićemo invarijantne faktore $f_1(\lambda),\ldots,f_7(\lambda)$ matrice $A(\lambda)$. S obzirom da je $A(\lambda)$ reda 7 i ranga 5, mora biti $f_6(\lambda)=f_7(\lambda)=0$.

Iz definicije Smitove kanoničke matrice i definicije sistema elementarnih delitelja sledi da je invarijantni faktor $f_5(\lambda)$ najmanji zajednički sadržalac za sve elementarne delitelje, dakle,

$$f_5(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^3(\lambda-1).$$

Ako sada elementarne delitelje koje smo upotrebili za formiranje $f_5(\lambda)$ izostavimo iz sistema elementarnih delitelja i odredimo najmanji zajednički sadržalac za preostale elementarne delitelje

$$\lambda,\ \lambda+1,\ (\lambda+1)^2,$$

dobićemo

$$f_4(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2.$$

Produžujući ovaj postupak dobijamo

$$f_3(\lambda) = \lambda + 1.$$

Kako je na ovaj način iscrpen sistem elementarnih delitelja, preostali invarijantni faktori su

$$f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1.$$

Prema tome, Smitova kanonička matrica matrice $A(\lambda)$ je

$$N(\lambda) = \operatorname{diag}(1, 1, \lambda + 1, \lambda(\lambda + 1)^2, \lambda^2(\lambda + 1)^3(\lambda - 1), 0, 0).$$

403. Za matricu $A \in \mathbb{R}^{9,9}$ čije su netrivijalne invarijante sličnosti $f_1(\lambda) = \lambda - 1,\ f_2(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1,\ f_3(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda^4 - 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 2$, nad poljem realnih brojeva naći prvu, drugu i racionalnu kanoničku formu.

Rešenje. Prateće matrice netrivijalnih invarijanata sličnosti su

$$C(f_1(\lambda)) = [1], \qquad C(f_2(\lambda)) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(f_3(\lambda)) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa je prva kanonička forma A_I matrice A

$$A_I = \operatorname{diag}(C(f_1(\lambda)), C(f_2(\lambda)), C(f_3(\lambda))).$$

Kako je

$f_1(\lambda) = \lambda - 1,\ \ f_2(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)^2,$

$f_3(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2(\lambda + 2),$

sistem elementarnih delitelja matrice A nad poljem realnih brojeva je

$g_1(\lambda) = \lambda - 1,\ \ g_2(\lambda) = \lambda - 1,\ \ g_3(\lambda) = (\lambda - 1)^2,$

$g_4(\lambda) = (\lambda + 1)^2,\ \ g_5(\lambda) = (\lambda + 1)^2,\ \ g_6(\lambda) = \lambda + 2,$

a prateće matrice elementarnih delitelja su

$$C(g_1(\lambda)) = [1],\ \ C(g_2(\lambda)) = [1],\ \ C(g_3(\lambda)) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(g_4(\lambda)) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \ C(g_5(\lambda)) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ \ C(g_6(\lambda)) = [-2],$$

pa je matrica

$$A_{II} = \operatorname{diag}\left(C(g_1(\lambda)), \ldots, C(g_6(\lambda))\right)$$

druga kanonička forma matrice A.

Da bismo odredili racionalnu kanoničku formu formiraćemo hiper-prateće matrice elementarnih delitelja

$$B_1 = [1], \quad B_2 = [1], \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_6 = [-2],$$

pa je matrica

$$A_R = \operatorname{diag}\left(B_1, \ldots, B_6\right)$$

racionalna kanonička forma matrice A.

404. Odrediti prvu, drugu i racionalnu kanoničku formu za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

nad poljem kompleksnih brojeva.

Rešenje. Invarijante sličnosti matrice A su $f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = f_3(\lambda) = 1$, $f_4(\lambda) = (\lambda - 1)^4$. Prema tome, prva kanonička forma je

$$A_I = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

druga kanonička forma je jednaka prvoj, a racionalna kanonička forma (koja se u ovom slučaju naziva i Žordanova kanonička forma, jer je reč o polju kompleksnih brojeva (7.16)) je

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

405. Nad poljem realnih brojeva naći prvu, drugu i racionalnu kanoničku formu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \\ -6 & -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rezultat. Invarijante sličnosti su $1, 1, \lambda - 3, (\lambda + 2)(\lambda - 3)^2$,

$$A_I = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -18 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{II} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_R = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

406. Pod kojim uslovima su jednake

a) prva i druga kanonička forma,

b) druga i racionalna kanonička forma,

c) sve tri kanoničke forme ?

407. Nad poljem realnih brojeva koliko ima različitih klasa međusobno sličnih matrica reda 5 čiji je karakteristični polinom $(\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)^3$?

Za svaku klasu naći sve tri kanoničke forme.

Rešenje. Svaka od klasa određena je invarijantama sličnosti matrica koje joj pripadaju. Pošto je proizvod invarijanata sličnosti jednak karakterističnom polinomu i invarijante sličnosti moraju zadovoljavati uslove deljivosti iz 6.17, jedine tri mogućnosti su:

$f_5(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1),\ f_4(\lambda) = \lambda + 1,\ f_3(\lambda) = \lambda + 1, f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1;$

$f_5(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)^2,\ f_4(\lambda) = \lambda + 1,\ f_3(\lambda) = f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1;$

$f_5(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)^3,\ f_4(\lambda) = f_3(\lambda) = f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1.$

408. Matrica $A \in F^{n,n}$ je slična sa dijagonalnom matricom ako i samo ako se minimalni polinom matrice A može faktorizovati u proizvod različitih linearnih faktora. Dokazati.

Rešenje. Ako je minimalni polinom matrice A proizvod različitih linearnih faktora, onda su svi elementarni delitelji te matrice linearni, pa je druga kanonička forma matrice A dijagonalna matrica.

Obrnuto, neka je matrica A slična sa dijagonalnom matricom D, $P^{-1}AP = D$. Pošto su A i D slične matrice njihovi minimalni polinomi su jednaki. Ako sa $d_{n-1}(\lambda)$ i $d_n(\lambda)$ označimo najveći zajednički delitelj svih minora formata $(n-1) \times (n-1)$ i $n \times n$ matrice $\lambda E - D$ respektivno, onda je minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice D, $m(\lambda) = \dfrac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)}$ (6.19, 6.33). Ako se na dijagonali matrice D nalaze različiti elementi $d_1, \ldots, d_m$, pri čemu se d_i pojavljuje na toj dijagonali k_i puta, $i = 1, \ldots, m$, onda je $d_{n-1}(\lambda) = (\lambda - d_1)^{k_1-1}(\lambda - d_2)^{k_2-1} \ldots (\lambda - d_m)^{k_m-1}$, a $d_n(\lambda) = (\lambda - d_1)^{k_1}(\lambda - d_2)^{k_2} \ldots (\lambda - d_m)^{k_m}$, pa je $m(\lambda) = (\lambda - d_1)(\lambda - d_2) \ldots (\lambda - d_m)$.

409. Neka je $A \in F^{n,n}$ matrica takva da je $A^3 = E$ i $A \neq E$. Ispitati da li je matrica slična sa dijagonalnom matricom, ako je

a) $F = \mathbb{R}$, b) $F = \mathbb{C}$.

Rešenje. a) Pošto je $A^3 = E$, minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice A je delitelj polinoma $\lambda^3 - 1$. $m(\lambda) \neq \lambda - 1$ jer je $A \neq E$, dakle

$$m(\lambda) = \lambda^3 - 1 \quad \text{ili} \quad m(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

Kako nijedan od gornjih polinoma nije proizvod različitih linearnih faktora, na osnovu zadatka 408 sledi da A nije slična sa dijagonalnom matricom nad poljem realnih brojeva.

b) Nad poljem kompleksnih brojeva oba gornja polinoma se mogu faktorizovati u proizvod različitih linearnih faktora, pa je matrica A nad poljem kompleksnih brojeva slična sa dijagonalnom matricom.

410. Neka je $A \in F^{n,n}$ matrica takva da je njen minimalni polinom jednak karakterističnom polinomu. Ako je $\operatorname{tr} A = 0$, dokazati da je matrica A slična sa matricom koja na dijagonali ima sve elemente jednake 0.

Rešenje. Pošto je minimalni polinom $m_A(\lambda)$ matrice A jednak njenom karakterističnom polinomu, na osnovu 6.30, 6.33 sledi da su invarijante sličnosti matrice A $1, \ldots, 1, m_A(\lambda)$. Matrica A je slična sa svojom prvom kanoničkom formom A_I, gde je

$$A_I = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ -a_1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako je $0 = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A_I = -a_{n-1}$, matrica A_I, koja je slična sa A, ima na dijagonali sve elemente jednake 0.

411. a) Dokazati da su dve nilpotentne matrice reda 3 slične ako i samo ako imaju iste minimalne polinome.

b) Pokazati primerom da gornje tvrđenje ne mora da važi za matrice reda 4.

Rešenje. a) Ako je A nilpotentna matrica reda 3, treba dokazati da njen minimalni polinom jednoznačno određuje ostale invarijante sličnosti. To će značiti da dve matrice koje imaju jednake minimalne polinome imaju jednake redom sve odgovarajuće invarijante sličnosti, pa su slične (6.29).

Na osnovu zadatka 363 minimalni polinom matrice A može da bude λ, λ^2 ili λ^3.

Ako je $m_A(\lambda) = \lambda$, tada su invarijante sličnosti $\lambda, \lambda, \lambda$.

Ako je $m_A(\lambda) = \lambda^2$, tada su invarijante sličnosti $1, \lambda, \lambda^2$.

Ako je $m_A(\lambda) = \lambda^3$, tada su invarijante sličnosti $1, 1, \lambda^3$.

U sva tri slučaja invarijante sličnosti su jednoznačno određene.

b) Neka je A matrica reda 4 čiji je minimalni polinom λ^2. Ta matrica je nilpotentna ($A^2 = O$) i postoje samo dve mogućnosti za njene invarijante sličnosti

$$1, 1, \lambda^2, \lambda^2 \qquad \text{i} \qquad 1, \lambda, \lambda, \lambda^2.$$

Predstavnike ovih dveju klasa matrica možemo dobiti tako što odredimo neku (recimo prvu) kanoničku formu sličnosti za date invarijante sličnosti. Tako dobijamo matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

koje su nilpotentne, imaju iste minimalne polinome, ali nisu slične.

412. Neka je $A \in F^{n,n}$ nilpotentna matrica reda n koja ima k netrivijalnih invarijanata sličnosti. Dokazati da je $\operatorname{rang}(A) = n - k$.

Rešenje. Pošto je λ^n karakteristični polinom matrice A, sve netrivijalne invarijante sličnosti su oblika λ^m, $m \in \mathbb{N}$. To znači da je druga kanonička forma matrice A oblika $A_{II} = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$, gde su A_i matrice oblika

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica A_{II} je ranga $n-k$, jer ima $n-k$ nenula kolona koje su linearno nezavisne. Kako su A i A_{II} slične, $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_{II}) = n-k$.

413. Neka je A realna matrica reda 4 takva da je $A^2+E=O$. Dokazati da je A slična sa matricom

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rešenje. Matrica A zadovoljava polinom λ^2+1, pa je $m_A(\lambda) \mid \lambda^2+1$ (6.32). Pošto λ^2+1 nema realne netrivijalne faktore, $m_A(\lambda)$ je baš λ^2+1. Ostale invarijante sličnosti matrice A su delitelji polinoma λ^2+1, dakle, mogu biti samo 1 ili λ^2+1. Pošto je A reda 4, invarijante sličnosti matrice A su $1, 1, \lambda^2+1, \lambda^2+1$, pa je prva kanonička forma matrice A

$$A_I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

414. Neka je $A \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dokazati da je $A = A^{-1}$ ako i samo ako postoji $m \leq n$ i regularna matrica P tako da je

$$A = P^{-1} \begin{bmatrix} E_m & O \\ O & -E_{n-m} \end{bmatrix} P,$$

gde su E_m i E_{n-m} jedinične matrice reda m i $n-m$ respektivno.

Uputstvo. Koristiti Žordanovu kanoničku formu matrice A.

415. Neka je A kompleksna matrica reda n takva da je $A + A^* = E$.

a) A ima najviše dva različita karakteristična korena λ_1 i λ_2.

b) Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, A je slična sa dijagonalnom matricom.

c) Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$ i λ_1 je višestrukosti m, tada je $\lambda_1^{m-1}\lambda_2^{n-m-1} = 1$.

Dokazati.

Rešenje. a) Iz $A + A^* = E$ sledi $A^2 + AA^* = A$, odnosno (5.54)

$$A^2 - A + |A|E = O.$$

Odavde sledi da je polinom $\lambda^2 - \lambda + |A|$ deljiv minimalnim polinomom $m_A(\lambda)$ matrice A (6.32). To znači da $m_A(\lambda)$, a samim tim (6.44) i karakteristični polinom matrice A, ima najviše dva različita korena.

b) Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, onda je $m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$, pa su $\lambda - \lambda_1$ i $\lambda - \lambda_2$ jedini elementarni delitelji (koji se eventualno mogu ponavljati) matrice A. To znači da je druga kanonička forma matrice A dijagonalna matrica.

c) Ako je $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tada je $m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \lambda + |A|$, pa je $\lambda_1\lambda_2 = |A|$. Kako je determinanta matrice jednaka proizvodu njenih karakterističnih korena (6.41), sledi

$$\lambda_1^m \lambda_2^{n-m} = |A|,$$

pa je

$$\lambda_1^{m-1}\lambda_2^{n-m-1} = \lambda_1^m \lambda_2^{n-m} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} = |A|\frac{1}{|A|} = 1.$$

416. Naći jednu realnu matricu reda 5 i ranga 3, čiji je minimalni polinom $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$.

Rešenje. Neka je A jedna od matrica koje ispunjavaju date uslove. Prva kanonička forma A_I matrice A takođe ispunjava te uslove. Pokušaćemo da odredimo A_I pod pretpostavkom da matrica A ima dve netrivijalne invarijante sličnosti $f_1(\lambda)$ i $f_2(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Tada je

$$C(f_2(\lambda)) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \operatorname{rang}(C(F_2(\lambda)) = 2.$$

Kako je $A_I = \begin{bmatrix} C(f_1(\lambda)) & O \\ O & C(f_2(\lambda)) \end{bmatrix}$, ako može da se odredi $f_1(\lambda)$ tako da bude $\operatorname{rang}(C(f_1(\lambda))) = 1$, onda će A_I biti tražena matrica.

Jedna mogućnost za $f_1(\lambda)$ je $f_1(\lambda) = \lambda^2 - \lambda.$, tada je $C(f_1(\lambda)) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pa je

$$A_I = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tražena matrica reda 5, ranga 3, čiji je minimalni polinom $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda$.

417. Neka je $A = [a_{ij}]$ realna kvadratna matrica reda n takva da je $a_{ij} = 1$ za $i = j$, $a_{ij} = -1$ za $j = i + 1$ i $a_{ij} = 0$ za sve ostale vrednosti i, j. Odrediti prvu, drugu i racionalnu kanoničku formu matrice A.

Rešenje. Karakteristična matrica matrice A je

$$|\lambda E - A| = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda - 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}.$$

Minor reda $n - 1$ gornje matrice koji se dobija izostavljanjem prve kolone i poslednje vrste je jednak 1. To znači da je $d_{n-1}(\lambda) = 1$, gde je d_{n-1} najveći zajednički delitelj svih minora reda $n-1$ matrice $|\lambda E - A|$. Kako je $d_{n-1} = f_1(\lambda) \dots f_{n-1}(\lambda)$ (6.19), sledi da su sve invarijante sličnosti $f_1(\lambda), \dots, f_{n-1}(\lambda)$ matrice A jednake 1, a pošto je $|\lambda E - A| = (\lambda - 1)^n$, invarijante sličnosti matrice A su $1, \dots, 1, (\lambda - 1)^n$. Prema tome,

$$A_I = A_{II} = \begin{bmatrix} \binom{n}{1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\binom{n}{2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \binom{n}{3} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{n-1}\binom{n}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

418. Neka je A realna matrica reda n takva da je $A^2 = E$ i $\operatorname{rang}(E+A)=k$. Dokazati da je $|\lambda E - A| = (\lambda-1)^k(\lambda+1)^{n-k}$.

Rešenje. Iz $A^2 - E = O$ sledi $m_A(\lambda) \mid \lambda^2 - 1$. Pošto su $\lambda - 1$ i $\lambda + 1$ jedini delitelji minimalnog polinoma $m_A(\lambda)$, svi elementarni delitelji matrice A su jednaki $\lambda - 1$ ili $\lambda + 1$. To znači da je druga kanonička forma matrice A

$$A_{II} = \operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{l}, \underbrace{-1,\ldots,-1}_{n-l}).$$

Neka je P matrica takva da je $P^{-1}AP = A_{II}$. No tada je

$$P^{-1}(A+E)P = P^{-1}AP + E = A_{II} + E = \operatorname{diag}(\underbrace{2,\ldots,2}_{l}, \underbrace{0,\ldots,0}_{n-l}).$$

Iz $\operatorname{rang}(E+A) = k$ zaključujemo da je $l = k$. Dakle, $|\lambda E - A| = |\lambda E - A_{II}| = (\lambda-1)^k(\lambda+1)^{n-k}$.

419. Za realnu matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 3 & 3 & 3 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n & n \end{bmatrix}$$

odrediti drugu i racionalnu kanoničku formu.

Rešenje. Determinanta $|\lambda E - A|$ se lako izračunava

$$|\lambda E - A| = (\lambda-1)(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+2)\lambda(\lambda-2n+1).$$

Kako karakteristični polinom nema višestrukih nula, invarijante sličnosti matrice A su $1,\ldots,1,|\lambda E - A|$. Odatle je

$$A_{II} = A_R = \operatorname{diag}(1,2,\ldots,n-2,0,2n-1).$$

420. Neka je $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Odrediti racionalnu kanoničku formu matrice A^2 ako je

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

matrica reda n.

Rešenje.

$$A^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & 2a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a^2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a^2 \end{bmatrix}$$

i $|\lambda E - A^2| = (\lambda - a^2)^n$. To znači da je minimalni polinom matrice A^2 oblika $(\lambda - a^2)^m$, $1 \leq m \leq n$ (6.44). Dakle, $(A^2 - a^2 E)^m = O$, a m je najmanji prirodan broj takav da je prethodna jednakost zadovoljena. Pokušaćemo da odredimo m.

Kako je $(A^2 - a^2E)^m = (A - aE)^m (A + aE)^m$, a $A + aE$ je regularna matrica (jer je $|A + aE| = (2a)^n \neq 0$), sledi da je $(A^2 - a^2E)^m = O$ ako i samo ako je $(A - aE)^m = O$. S obzirom da je

$$(A - aE)^{n-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O,$$

a $(A - aE)^n = O$, dobijamo da je $m = n$, pa je minimalni polinom matrice A^2 jednak $(\lambda - a^2)^n$. To znači da su invarijante sličnosti matrice A^2

$1, \ldots 1, (\lambda - a^2)^n$ i

$$(A^2)_R = \begin{bmatrix} a^2 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a^2 \end{bmatrix}.$$

GLAVA 8

Kvadratne i hermitske forme

8.1. Polinom po promenljivim $x_1, \dots, x_n$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

sa koeficijentima a_{ij} iz polja F naziva se kvadratna forma nad F.

8.2. Ako je

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

kvadratna forma nad poljem F karakteristike različite od 2, onda se simetrična matrica

$$A = \left[\frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} \right]$$

reda n naziva matrica kvadratne forme.

Rang kvadratne forme je rang njene matrice.

8.3. Kvadratna forma $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ može se zapisati u obliku

$$f(x_1, \dots, x_n) = x' A x$$

gde je A matrica te kvadratne forme, a $x = [x_1, \dots, x_n]'$.

8.4. Ako je

$$f(x_1, \dots, x_n) = x' A x$$

kvadratna forma po promenljivim $x_1, \dots, x_n$ nad poljem F, onda transformacija $x = Py$, gde je $P \in F^{n,n}$ regularna matrica, a $y = [y_1, \dots, y_n]'$, prevodi kvadratnu formu $x'Ax$ u kvadratnu formu po promenljivim $y_1, \dots, y_n$

$$x'Ax = (Py)'APy = y'P'APy = y'Qy,$$

gde je $Q = P'AP$ simetrična matrica.

8.5. Kvadratna forma $x'Ax$ je ekvivalentna formi $y'By$ nad poljem F ako i samo ako postoji regularna matrica P nad F takva da transformacija $x = Py$ prevodi formu $x'Ax$ u formu $y'By$, tj.

$$x'Ax = (Py)'APy = y'P'APy = y'By.$$

8.6. Preslikavanje koje svakoj kvadratnoj formi od n promenljivih $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ nad poljem F karakteristike različite od 2, pridružuje njenu matricu je bijekcija između skupa svih kvadratnih formi od n promenljivih nad poljem F i skupa svih simetričnih matrica reda n nad poljem F.

Napomena. U daljem ćemo raditi isključivo sa poljima karakteristike različite od 2, pa to nećemo stalno naglašavati. Dakle, ubuduće kada kažemo „polje F" podrazumeva se da je reč o polju karakteristike različite od 2.

8.7. Matrica $A \in F^{n,n}$ je kongruentna sa matricom $B \in F^{n,n}$ ako postoji regularna matrica P takva da je

$$A = P'BP.$$

Da je matrica A kongruentna sa B zapisivaćemo sa $A \overset{C}{\sim} B$.

Svake dve matrice koje su kongruentne su i ekvivalentne (5.44).

8.8. Kongruencija matrica je relacija ekvivalencije na skupu $F^{n,n}$.

8.9. Svaka matrica kongruentna sa simetričnom matricom je simetrična.

8.10. Dve kvadratne forme su ekvivalentne nad poljem F ako i samo ako su njihove matrice kongruentne nad F.

8.11. Dve matrice su kongruentne ako i samo ako se jedna može dobiti od druge vršenjem konačnog broja parova elementarnih transformacija, a svaki par se sastoji od jedne elementarne transformacije na vrstama i takve iste elementarne transformacije na kolonama. U svakom paru svejedno je koju transformaciju najpre vršimo.

8.12. Za svaku simetričnu matricu $A \in F^{n,n}$ ranga r postoji njoj kongruentna dijagonalna matrica koja na glavnoj dijagonali ima tačno r elemenata različitih od nule.

8.13. Realna simetrična matrica A ranga r kongruentna je sa matricom

$$D = \begin{bmatrix} E_p & O & O \\ O & -E_{r-p} & O \\ O & O & O \end{bmatrix},$$

gde su E_p i E_{r-p} jedinične matrice reda p i $r-p$ respektivno, a nenegativan ceo broj p je jednoznačno određen matricom A.

Broj p naziva se indeks realne simetrične matrice A, odnosno indeks kvadratne forme $x'Ax$ određene matricom A.

Matrica D naziva se kanonička matrica za klasu matrica kongruentnih sa A.

8.14. Svaka realna kvadratna forma $x'Ax$ je ekvivalentna sa kvadratnom formom

$$y'By = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2, \qquad (*)$$

gde je p indeks, a r rang matrice A.

$(*)$ se naziva kanonički oblik kvadratne forme $x'Ax$.

8.15. Dve realne simetrične matrice istog reda su kongruentne ako i samo ako imaju isti indeks i isti rang.

8.16. Dve kvadratne forme sa po n promenljivih su ekvivalentne ako i samo ako imaju isti indeks i isti rang.

8.17. Realna simetrična matrica A reda n, ranga r i indeksa p je

- pozitivno definitna ako je $p = n$,
- pozitivno semidefinitna ako je $p = r < n$,
- negativno definitna ako je $p = 0$, $r = n$,
- negativno semidefinitna ako je $p = 0$, $r < n$.

Kvadratna forma $x'Ax$ je

- pozitivno definitna ako je matrica A pozitivno definitna,
- pozitivno semidefinitna ako je matrica A pozitivno semidefinitna,
- negativno definitna ako je matrica A negativno definitna,
- negativno semidefinitna ako je matrica A negativno semidefinitna.

8.18. Vrednosti realne kvadratne forme $f(x_1, \ldots, x_n) = x'Ax$ za svaki vektor $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, su

- pozitivne, ako je kvadratna forma pozitivno definitna,
- nenegativne, ako je kvadratna forma pozitivno semidefinitna,
- negativne, ako je kvadratna forma negativno definitna,
- nepozitivne, ako je kvadratna forma negativno semidefinitna.

8.19. Realna simetrična matrica $A = [a_{ij}]$ je pozitivno definitna ako i samo ako je

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \ \ldots\ , |A| > 0.$$

8.20. Realna simetrična matrica $A = [a_{ij}]$ reda n je negativno definitna ako i samo ako je

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \ \ldots \ , (-1)^n |A| > 0.$$

8.21. Realna simetrična matrica je pozitivno definitna ako i samo ako su svi njeni karakteristični koreni pozitivni.

8.22. Realna simetrična matrica A je pozitivno definitna ako i samo ako postoji inverzna matrica A^{-1} koja je pozitivno definitna.

8.23. Ako je realna simetrična matrica A pozitivno definitna, onda je i A^p za svako $p \in \mathbb{Z}$ pozitivno definitna matrica.

8.24. Ako je $A = [a_{ij}]$ kompleksna matrica, onda sa $\bar{A} = [\bar{a}_{ij}]$ označavamo matricu čiji su elementi konjugovani elementi matrice A.

8.25. Kompleksna matrica $A = [a_{ij}]$ naziva se hermitska ako je $\bar{A}' = A$ (tj. ako je $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$).

8.26. Forma nad poljem kompleksnih brojeva

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}' A x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_i x_j$$

gde je $A = [a_{ij}]$ hermitska matrica, $x = [x_1, \ldots, x_n]'$, naziva se hermitska forma.

8.27. Vrednosti hermitske forme su realni brojevi.

8.28. Matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitski kongruentna matrici B ako postoji regularna matrica P takva da je

$$A = \bar{P}' B P.$$

8.29. Svaka matrica hermitski kongruentna sa hermitskom matricom je hermitska.

8.30. Matrica $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ je hermitska ako i samo ako su vrednosti forme $\bar{x}' A x$ realne za svako $x \in \mathbb{C}^{n,1}$.

8.31. Ako je $\bar{x}' A x$ hermitska forma, onda transformacija $x = Py$, gde je $P \in \mathbb{C}^{n,n}$ regularna matrica, $y = [y_1, \ldots, y_n]'$, prevodi hermitsku formu $\bar{x}' A x$ u hermitsku formu

$$\bar{x}' A x = \overline{(Py)}' A P y = \bar{y}' \bar{P}' A P y = \bar{y}' B y,$$

gde je $B = \bar{P}' A P$ hermitska matrica.

8.32. Za hermitske forme važe teoreme analogne teoremama 8.13–8.18, pri čemu se u navedenim teoremama reči „kvadratna" zamenjuju sa „hermitska", „realni" sa „kompleksni", „kvadratna" sa „hermitska", „kongruentna" sa „hermitski kongruentna", a „$x'Ax$" i „$y'By$" se redom zamenjuju sa „$\bar{x}'Ax$" i „$\bar{y}'By$".

Z A D A C I

421. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

odrediti regularnu matricu P i dijagonalnu matricu D tako da bude $P'AP = D$.

Rešenje. Regularna matrica P' se može prikazati kao proizvod elementarnih matrica, $P' = E_1E_2 \dots E_k$. U tom slučaju je

$$D = P'AP = E_k(\dots(E_2(E_1AE_1')E_2')\dots)E_k'.$$

Prema tome, da bismo našli dijagonalnu matricu D kongruentnu matrici A vršićemo elementarne transformacije na matrici A u parovima, pri čemu svaka elementarna transformacija na vrstama treba da bude propraćena odgovarajućom elementarnom transformacijom na kolonama.

Kako je, pored toga,

$$P' = E_k \dots E_2E_1E,$$

onda sve promene koje smo vršili na vrstama matrice A kada smo je transformisali u D, istim redom treba izvršiti na matrici E i dobićemo P'.

Ovo se može najbrže izvesti ako matrice A i E pišemo kao dva bloka jedne matrice $[A|E]$ i elementarnim transformacijama na vrstama i kolonama svedemo A na dijagonalnu matricu. Ako elementarne transformacije vrsta matrice A vršimo istovremeno i na matrici E, matrica E će na kraju biti transformisana u P'. Pri tome, elementarne transformacije kolona matrice A ne utiču na promenu matrice E.

$$[A|E] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 18 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 18 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 18 & -6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

Ovde smo najpre vršili elementarne transformacije $E_{21}(3)$ i $E'_{21}(3)$, zatim $E_{31}(-4)$, $E'_{31}(-4)$ i $E_{32}(2)$, $E'_{32}(2)$.

Tražene matrice su

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P'AP = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

422. Za matricu A iz zadatka 421 naći kanoničku kongruentnu matricu i odrediti rang i indeks matrice A.

Rešenje. U zadatku 421 odredili smo dijagonalnu matricu kongruentnu matrici A. Produžujući navedeni postupak dobija se

$$[A|E] =\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & -9 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right].$$

Dakle, $Q'AQ = F$, gde je $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ tražena kanonička matrica, a $Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{30}} & 1 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{30}} & 0 \end{bmatrix}$. Matrica A je ranga 3 i indeksa 2.

423. Realnu kvadratnu formu

$$f = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$$

napisati u matričnom obliku.

Rešenje.

$$f = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

tj. $f = x'Ax$, gde je $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

424. Kvadratnu formu iz zadatka 423 transformacijom $x = Py$, gde je P regularna matrica, transformisati u oblik $\alpha y_1^2 + \beta y_2^2 + \gamma y_3^2$.

Rešenje. Na osnovu zadataka 423 je

$$f = x' \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} x,$$

pa ćemo za matricu ove kvadratne forme odrediti kongruentnu dijagonalnu matricu:

$$[A|E] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right].$$

Dobili smo da je $P'AP = D$, gde je

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

Transformacijom $x = Py$, tj.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

dobija se

$$f = x'Ax = (Py)'APy = y'(P'AP)y = y'Dy = y_1^2 + 4y_2^2 - 9y_3^2,$$

gde je

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_2 + \tfrac{5}{2}y_3 \\ x_2 &= \phantom{y_1 -{}} y_2 - \tfrac{1}{2}y_3 \\ x_3 &= \phantom{y_1 - y_2 - \tfrac{1}{2}} y_3 \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 - 2x_3 \\ y_2 &= \phantom{x_1 +{}} x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 \\ y_3 &= \phantom{x_1 + x_2 +{}} x_3 \;. \end{aligned}$$

425. Kvadratnu formu iz zadataka 423 svesti na kanonički oblik.

Rešenje. Matricu ove kvadratne forme svešćemo na kanoničku kongruentnu matricu. Nastavićemo transformacije iz zadatka 424

$$[A|E] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right].$$

U ovom slučaju transformacijom $x = Qz$, gde je

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

kvadratna forma f svodi se na

$$f = x'Ax = z'(Q'AQ)z = z' \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} z = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

gde je

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 - \tfrac{1}{2}z_2 + \tfrac{5}{6}z_3 \\ x_2 &= \phantom{z_1 -{}} \tfrac{1}{2}z_2 - \tfrac{1}{6}z_3 \\ x_3 &= \phantom{z_1 - \tfrac{1}{2}z_2 -{}} \tfrac{1}{3}z_3 \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} z_1 &= x_1 + x_2 - 2x_3 \\ z_2 &= \phantom{x_1 +{}} 2x_2 + x_3 \\ z_3 &= \phantom{x_1 + x_2 +{}} 3x_3 \;. \end{aligned}$$

Pokazaćemo kako se ovaj isti zadatak može rešiti bez korišćenja kongruentnih matrica (Lagranžovim algoritmom).

Krenemo od jedne promenljive (u ovom slučaju krećemo od x_1) i formiramo polinom čiji kvadrat sadrži sva pojavljivanja te promenljive u datoj kvadratnoj formi. Na „ostatak” kvadratne forme primenjujemo isti postupak, dok nam ne ostanu samo kvadratni članovi. Važno je primetiti da kvadrate ne smemo formirati proizvoljno, već se moramo dosledno pridržavati opisanog postupka. U suprotnom, verovatno ćemo dobiti kvadratnu formu koja se ne može svesti na početnu formu linearnim preslikavanjem (najčešće će imati više promenljivih od početne forme).

$$\begin{aligned}
f &= x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + 5x_2^2 - 4x_3^2 \\
&= x_1^2 + 2x_1(x_2 - 2x_3) + (x_2 - 2x_3)^2 - (x_2 - 2x_3)^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 + 4x_2x_3 - 4x_3^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 - 9x_3^2 \\
&= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + (2x_2 + x_3)^2 - (3x_3)^2.
\end{aligned}$$

426. Kvadratnu formu

$$f = x_1x_2 + 3x_1x_3 - x_2x_3$$

svesti na kanonički oblik Lagranžovim algoritmom (opisanim u rešenju zadatka 425).

Rešenje. S obzirom da u datoj kvadratnoj formi nema članova x_1^2, x_2^2, x_3^2 ne može se direktno primeniti Lagranžov algoritam. Zato ćemo najpre smenom

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_3 = y_3.$$

kvadratnu formu f transformisati u formu u kojoj postoji član y_1^2:

$$\begin{aligned}
f &= (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) + 3(y_1 + y_2)y_3 - (y_1 - y_2)y_3 \\
&= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 4y_2y_3.
\end{aligned}$$

Dalje se može primeniti uobičajeni postupak.

$$\begin{aligned}
f &= y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2 - y_2^2 + 4y_2y_3 \\
&= (y_1 + y_3)^2 - (y_2^2 - 4y_2y_3 + 4y_3^2) + 3y_3^2 \\
&= (y_1 + y_3)^2 - (y_2 - 2y_3)^2 + (\sqrt{3}y_3)^2.
\end{aligned}$$

Kako je

$$y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2), \quad y_3 = x_3,$$

sledi

$$f = \left(\frac{x_1 + x_2 + 2x_3}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2 - 4x_3}{2}\right)^2 + (\sqrt{3}\,x_3)^2.$$

427. Kvadratnu formu

$$f = x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4$$

svesti na kanonički oblik.

Rezultat.

$$f=\left(\frac{x_1+x_6}{2}\right)^2-\left(\frac{x_1-x_6}{2}\right)^2+\left(\frac{x_2+x_5}{2}\right)^2$$
$$-\left(\frac{x_2-x_5}{2}\right)^2+\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2-\left(\frac{x_3-x_4}{2}\right)^2.$$

428. Naći linearno preslikavanje koje kvadratnu formu

$$f=5x^2+y^2+z^2+4xy-2xz-2yz$$

prevodi u ekvivalentnu formu

$$g=2x^2+5y^2+2z^2+4xy+4xz-2yz.$$

Rešenje. Kongruentnim transformacijama (8.11) svešćemo matrice ovih kvadratnih formi na kanonički oblik:

$$[F|E]=\left[\begin{array}{rrr|rrr} 5 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{rrr|rrr} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{-1}{4} & 0 & \frac{-1}{4} & 1 & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & -1 & 0 & \frac{-1}{2} & 2 & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & \frac{-1}{2} & 2 & \frac{3}{2}\end{array}\right]$$

$$[G|E]=\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -3 & -2 & 1 & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0\\ 0 & 0 & -1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right].$$

Dakle, važi $Q'FQ = D$ i $R'GR = D$, gde je

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Odatle je $Q'FQ = R'GR$, pa je

$$G = (R')^{-1}Q'FQR^{-1} = (R^{-1})'Q'FQR^{-1} = (QR^{-1})'FQR^{-1}.$$

Prema tome, QR^{-1} je matrica traženog preslikavanja, tj. smenom

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = QR^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

kvadratna forma f se transformiše u kvadratnu formu

$$g = 2u^2 + 5v^2 + 2w^2 + 4uv + 4uw - 2vw.$$

429. Odrediti $k \in \mathbb{R}$ za koje je kvadratna forma

$$f = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

ekvivalentna sa kvadratnom formom

$$g = kx_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Rezultat. $k > 1$.

430. a) Ispitati definitnost realne kvadratne forme

$$f = ax^2 + bz^2 + ayz + bxy.$$

b) Za koje vrednosti parametara a i b je forma f ekvivalentna sa formom

$$g = x^2 - y^2 + 4yz - 4z^2?$$

Rezultat. a) Za sve vrednosti a i b forma f je indefinitna (nema određenu definitnost).

b) Za $a = -b \neq 0$.

431. Date su realne kvadratne forme

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 8x_3^2 + 2kx_1x_2 + 6x_1x_3 + 10x_2x_3,$$
$$g = 5x_1^2 + x_2^2 + kx_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Ispitati za koje vrednosti realnog parametra k je forma f ekvivalentna sa formom g.

Rezultat. $k \in (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{9}{4}, 26)$.

432. Ako je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ simetrična, regularna matrica indeksa k takva da je $n-k$ paran broj , onda je $|A| > 0$. Dokazati.

Rešenje. Na osnovu 8.13 sledi da postoji regularna matrica P tako da je $P'AP = D$, gde je $D = \begin{bmatrix} E_k & O \\ O & -E_{n-k} \end{bmatrix}$, a E_k i E_{n-k} su jedinične matrice reda k i $n-k$ respektivno. Tada iz $P'AP = D$ sledi $|P'||A||P| = |D| = 1$, pa je $|A| = \dfrac{1}{|P|^2} > 0$.

433. Dokazati da je realna simetrična matrica A pozitivno definitna ako i samo ako postoji regularna matrica C takva da je $A = C'C$.

434. Ako su A i B realne simetrične matrice i A je pozitivno definitna, tada su sva rešenja jednačine $|B - xA| = 0$ realna. Dokazati.

Rešenje. A je pozitivno definitna, pa postoji regularna matrica P takva da je $P'AP = E$. Neka je x_0 rešenje date jednačine. Iz $|B - x_0A| = 0$ sledi $|P'||B - x_0A||P| = 0$, odnosno, $|P'BP - x_0P'AP| = 0$. Odatle se dobija $|P'BP - x_0E| = 0$, pa je x_0 karakteristični koren matrice $P'BP$. No, matrica $P'BP$ je simetrična (8.9), pa su svi njeni karakteristični koreni realni (344).

435. Neka je A realna simetrična regularna matrica, a k proizvoljan ceo broj.

a) Dokazati da je A^{2k} pozitivno definitna matrica.

b) Dokazati da je A^{2k+1} pozitivno definitna matrica ako i samo ako je A pozitivno definitna matrica.

Rešenje. a) $A^{2k} = A^kEA^k = (A^k)'EA^k$, ($A$ je simetrična matrica, pa je i A^k simetrična matrica). Dakle, $A \overset{C}{\sim} E$.

b) $A^{2k+1} = A^kAA^k = (A^k)'AA^k$, pa je $A^{2k+1} \overset{C}{\sim} A$.

436. Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ pozitivno definitna simetrična matrica. Dokazati da je $|E + A| > 1 + |A|$.

Rešenje. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ karakteristični koreni matrice A (pri čemu su u pretodnom nizu višestruki koreni navedeni onoliko puta kolika im je višestrukost). Oni su svi pozitivni, jer je A pozitivno definitna (8.21). Karakteristični koreni matrice $E + A$ su $1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, \ldots, 1 + \lambda_n$. Kako je determinanta matrice jednaka proizvodu njenih karakterističnih korena (6.41), sledi

$$|E + A| = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) \ldots (1 + \lambda_n) > 1 + \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n = 1 + |A|.$$

437. Neka je A realna pozitivno definitna matrica. Dokazati:

a) Svi elementi glavne dijagonale matrice A su pozitivni.

b) Svi karakteristični koreni matrice A su pozitivni.

Rešenje. a) Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$. Dokažimo da je proizvoljni element a_{ii} sa glavne dijagonale matrice A pozitivan. Na matrici A izvršimo kongruentnu transformaciju (8.11): zamenimo prvu i i-tu vrstu, a zatim prvu i i-tu kolonu. Na taj način dobijamo matricu A_1 kongruentnu sa A kod koje se element a_{ii} nalazi u prvoj vrsti i prvoj koloni. A_1 je takođe pozitivno definitna, pa su svi njeni glavni minori pozitivni (8.19), dakle, i $a_{ii} > 0$.

b) Neka je λ_0 karakteristični koren matrice A i x_0 njemu odgovarajući karakteristični vektor. Pošto je $x'Ax > 0$ za sve $x \neq 0$, mora biti i $x_0'Ax_0 > 0$. Odatle sledi

$$0 < x_0'Ax_0 = x_0'\lambda_0 x_0 = \lambda_0 x_0' x_0 = \lambda_0(x_0, x_0),$$

pa iz $(x_0, x_0) > 0$ zaključujemo da je $\lambda_0 > 0$.

438. Neka je P realna simetrična idempotentna matrica. Dokazati da je $P + kE$ pozitivno definitna matrica za svako $k > 0$.

Rešenje. Neka je $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Tada je

$$x'(P + kE)x = x'Px + kx'x = x'P^2x + kx'x$$

$$= x'P'Px + kx'x = (Px)'Px + kx'x = (Px, Px) + k(x, x) > 0,$$

jer je $k > 0$ i $(x, x) > 0$.

439. Ispitati definitnost kvadratne forme

$$f = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 \cdots + 2x_{n-1}^2 + mx_n^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + \cdots + 2x_{n-1}x_n.$$

Rešenje. Lagranžovim postupkom dobijamo

$$f = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1} + x_n)^2 + (m - 1)x_n^2.$$

Dakle, forma f je pozitivno definitna za $m > 1$, a pozitivno semidefinitna za $m = 1$.

440. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definisano je na sledeći način. Za svaka dva vektora $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ iz $\mathbb{R}^3$

$$f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + y_1x_2 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 - x_2y_3 - y_2x_3 + k(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Odrediti sve realne brojeve k za koje je $f(x,y)$ unutrašnji proizvod na $\mathbb{R}^3$.

Rešenje. Lako se proverava da važe prva tri aksioma iz definicije unutrašnjeg proizvoda (1, 2. i 3. iz 3.1).

Aksiomi 4. i 5. važe ako i samo ako je kvadratna forma

$$f(x,x) = x_1^2 + (2+2k)x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_2x_3$$

pozitivno definitna. Matrica ove kvadratne forme je

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1+k & 0 \\ 1+k & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

a zamenom druge i treće vrste i kolone matrica F se svodi na kongruentnu matricu

$$F_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+k \\ 0 & 2 & 1 \\ 1+k & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu 8.19 matrica F_1 (a to znači i F) je pozitivno definitna ako i samo ako su svi njeni glavni minori pozitivni. Kako je

$$|1| = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \quad |F_1| = 1 - 4k - 2k^2,$$

matrica F_1 je pozitivno definitna ako i samo ako je $|F_1| > 0$, a to važi ako je $k \in (-1 - \frac{\sqrt{6}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{6}}{2})$.

441. Neka je A realna, simetrična, pozitivno semidefinitna matrica reda n. Dokazati da za sve $x \in \mathbb{R}^n$ važi

$$x'Ax = 0 \Rightarrow Ax = O.$$

Rešenje. Neka je $x'Ax = 0$. Matrica A je pozitivno semidefinitna, pa je kongruentna sa matricom $D = \begin{bmatrix} E_k & O \\ O & O \end{bmatrix}$, $1 \le k \le n-1$, dakle, $A = P'DP$, gde je P regularna matrica. Odatle je $x'P'DPx = (Px)'DPx = 0$. Ako je $Px = y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]'$, onda je $y'Dy = y_1^2 + y_2 + \cdots + y_k^2 = 0$, pa je $y_1 = y_2 = \cdots = y_k = 0$. No, tada je $Dy = O$, odakle sledi $Ax = P'DPx = P'Dy = O$.

442. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i & 2i \\ 1-i & 4 & 2-3i \\ -2i & 2+3i & 7 \end{bmatrix},$$

odrediti regularnu matricu P i dijagonalnu matricu D tako da bude $\bar{P}'AP = D$.

Rešenje. Kao i kod kongruentnih transformacija simetričnih matrica, svođenje hermitske matrice na hermitski kongruentnu dijagonalnu matricu može se vršiti elementarnim transformacijama matrice $[A|E]$ u parovima (8.11). Za razliku od simetričnih matrica, u slučaju hermitskih matrica transformaciji $E_{ij}(z)$ odgovara transformacija $E'_{ij}(\overline{z})$, a transformaciji $E_i(z)$ transformacija $E'_i(\overline{z})$. Kada matricu A svedemo na dijagonalnu matricu, matrica E će biti transformisana u $\bar{P}'$.

Vršenjem parova transformacija $E_{21}(i-1)$ i $E'_{21}(-i-1)$, $E_{31}(2i)$ i $E'_{31}(-2i)$, $E_3(2)$ i $E'_3(2)$ (da izbegnemo razlomke) i $E_{32}(-5i)$ i $E'_{32}(5i)$, dobijamo matricu

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -38 & 5+9i & -5i & 2 \end{array}\right].$$

Tražene matrice su

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1-i & 5-9i \\ 0 & 1 & 5i \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -38 \end{bmatrix}.$$

443. Ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -i & 3+i \\ i & 2 & 1-2i \\ 3-i & 1+2i & 3 \end{bmatrix}$$

Odrediti regularnu matricu P i dijagonalnu matricu D tako da bude $\bar{P}'AP = D$. Odrediti rang i indeks matrice A.

444. Neka su $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$. Dokazati da je $(\bar{A}\,)' = \overline{A'}$ i $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

445. Neka je A regularna kompleksna matrica. Dokazati da je $B = \bar{A}'A$ hermitska pozitivno definitna matrica.

Rešenje. Na osnovu zadatka 444 je

$$\bar{B}' = \overline{(\bar{A}'A)'} = \overline{A'\bar{A}} = \bar{A}'A = B,$$

pa je B hermitska matrica.

Dalje, postoji regularna matrica P takva da je

$$\bar{P}'BP = \bar{P}'\bar{A}'AP = (\overline{AP})'AP = D,$$

gde je D dijagonalna matrica. Kako su za svaku matricu C dijagonalni elementi matrice $\bar{C}'C$ nenegativni (dokazati!), elementi matrice D su nenegativni. Iz regularnosti matrica A i P sledi da je D regularna matrica, pa njeni dijagonalni elementi moraju biti pozitivni. Odatle sledi da je B pozitivno definitna matrica.

446. Dokazati da je hermitska kongruencija matrica relacija ekvivalencije na $\mathbb{C}^{n,n}$.