Vežbe iz Teorije nepokretne tačke

TEOREMA (Banach) Neka je $\langle X, d\rangle$ kompletan metrički prostor i neka je $f : X \to X$ kontrakcija, tj.

$$\exists q \in [0,1)\, \forall x, y \in X\, (d(f(x), f(y)) \leq q d(x, y)).$$

tada postoji jedinstveno $x^* \in X$ da je $x^* = f(x^*)$ i važi da je $x^* = \lim_{n\to\infty} x^n$, gde je $x_0 \in X$ proizvoljno, a $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *(1.)* Neka $F : [a, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, i neka $F \in C^1([a, b] \times \mathbf{R})$. Neka postoje m i M takvi da je $0 < m < M$ sa osobinom:

$$\forall (x, y) \in [a, b] \times \mathbf{R}, \quad m \leq \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \leq M.$$

Na $C[a, b] = \{f | f : [a, b] \to \mathbf{R}, f \text{ je neprekidno}\}$ je data metrika $d(f, g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

a) Dokazati da preslikavanje A koje funkciji f iz $C[a, b]$ pridružuje $A(f)$ dato sa

$$A(f)(x) = f(x) - \frac{2}{m+M} F(x, f(x)), \qquad x \in [a, b]$$

slika $C([a, b])$ u $C([a, b])$ i da je kontrakcija.

b) Dokazati da u $C([a, b])$ postoji jedinstvena funkcija g da važi $\forall x \in [a, b] \quad F(x, g(x)) = 0$.

c) Za $F(x, y) = 2y + \sin y - x$, $a = 0$ i $b = 1$ odrediti prva dva člana niza sukcesivnih aproksimacija i n da važi $d(g_n, g) < 10^{-1}$, ako je $g_0(x) = 0$.

2. *(2.)* Neka je $C([0, 1])0\{f | f : [0, 1] \to \mathbf{R}, f \text{ je neprekidno}\}$, i $d(f, g) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ odgovarajuća metrika.

a) Dokazati da preslikavanje A koje funkciji $f \in C([0, 1])$ pridružuje funkciju $A(f)$ datu sa $A(f)(x) = x + \frac{f(x^2)}{2}, \quad x \in [0, 1]$ slika $C([0, 1])$ u $C([0, 1])$ i da je kontrakcija.

b) Polazeći od $f_0(x_0) = 0, \quad x \in [0, 1]$ naćio nepokretnu tačku preslikavanja A.

3. *(3.)* Neka je $f \in C[0, 1]$ i A preslikavanje koje f slika u $A(f)$ dato sa

$$A(f)(x) = \int_0^x \frac{t + f(t)}{3} dt, \quad x \in [0, 1].$$

a) Pokazati da $A : C[0, 1] \to C[0, 1]$.

b) Pokazati da su ispunjeni uslovi Banahove teoreme o nepokretnoj tački.

c) Konstrukcijom niza sukcesivnih aproksimacija $f_0, f_1, \ldots$ polazeći od funkcije $f_0(x) = 0$, $x \in [0, 1]$ rešiti jednačinu $A(f) = f$.

4. *(4.)* Neka je $\langle X, d\rangle$ kompaktan metrički prostor i neka je $f : X \to X$ neprikidno preslikavanje i za njega važi

$$\forall \varepsilon\, \exists x_\varepsilon \in X\, d(x_\varepsilon, f(x_\varepsilon)) < \varepsilon.$$

Dokazati da tada postoji nepokretna tačka preslikavanja f.

5. *(5.)* Neka je $\langle X, d\rangle$ kompaktan metrički prostor i neka je $f : X \to X$ neprikidno preslikavanje i za njega važi

$$\forall x, y \in X\, (x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)).$$

Dokazati da tada postoji nepokretna tačka preslikavanja f.

6. *(14.)* Neka je X Banahov prostor i neka je Y kompaktan podskup skupa X. Neka $f : Y \to Y$ tako da važi $\|fx - fy\| \leq \|x - y\|$ za svako $x, y \in Y$. Neka postoji $x_0 \in Y$ da za svako $x \in Y$ i svako $t \in [0, 1]$ važi $tx_0 + (1 - t)x \in Y$. Dokazati da tada postoji nepokretna tačka preslikavanja f.

7. *(9.)* Dati primer metričkog prostora $\langle X, d\rangle$ i neprekidnog preslikavanja $f : X \to X$ za koje važi

$$\forall x, y \in X\, (x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y)),$$

a da preslikavanje f nema nepokretnu tačku.

8. Dati primer kompaktnog metričkog prostora $\langle X, d\rangle$ i neprekidnog preslikavanja $f : X \to X$ za koje važi

$$\forall x, y \in X\,(x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)),$$

a da preslikavanje f nema nepokretnu tačku.

9. *(8.)* Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprikidno preslikavanje na $[a, b]$ i diferencijalno na (a, b) za koje važi da je za svako $x \in (a, b)$ $|f'(x)| \leq \alpha < 1$. Dokazati da iz uslova

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{a+b}{2}\right| \leq (1-\alpha)\frac{b-a}{2}$$

sledi da preslikavanje f ima jedinstvenu nepokretnu tačku.

10. *(7.)* Posmatramo beskonačni sistem linearnih jednača

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}\xi_1 & + & a_{12}\xi_2 & + & \dots & = & b_1 \\
a_{21}\xi_1 & + & a_{22}\xi_2 & + & \dots & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots \\
a_{i1}\xi_1 & + & a_{i2}\xi_2 & + & \dots & = & b_i \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

i neka je $c_{ij} = \delta_{ij} - a_{ij}$ za $i, j \in \mathbb{N}$ (gde je $\delta_{ij} = 1$ za $i = j$ i $\delta_{ij} = 0$ za $i \neq j$). Ako postoje konstante q i B da je za sve $i \in \mathbb{N}$ $|b_i| \leq B$ i $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |c_{ij}| \leq q < 1$ dokazati da sistem ima tačno jedno rešenje$\langle \xi_1^*, \xi_2^*, \dots\rangle$ sa osobinom da postoji $M > 0$ da je za svako $i \in \mathbb{N}$ $|\xi_i^*| \leq M$.

11. *(16.)* Neka je $\langle f_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ niz preslikavanja $f_i : l^\infty \to \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$ tako da važe sledeći uslovi:
1) $\forall x, y \in l^\infty$ $\forall i \in \mathbb{N}$ $|f_i(x) - f_i(y)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}|x_j - y_j|$, gde je $a_{ij} \geq 0$, $x = \langle x_j : j \in \mathbb{N}\rangle$ i $y = \langle y_j : j \in \mathbb{N}\rangle$.
2) $\langle f_i(\langle 0, 0, \dots\rangle) : i \in \mathbb{N}\rangle \in l^{infty}$
3) $\langle \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} : i \in \mathbb{N}\rangle \in l^\infty$
Dokazati da iz uslova $||\langle \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} : i \in \mathbb{N}\rangle|| < 1$ sledi da postoji tačno jedno rešenje sistema

$$\begin{array}{ccl}
x_1 & = & f_1(\langle x_1, x_2, \dots\rangle) \\
x_2 & = & f_2(\langle x_1, x_2, \dots\rangle) \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

12. *(10.)* Odrediti λ tako da integralna jednačina

$$x(s) = \lambda \int_a^b f[s, t, x(t)]dt$$

ima rešenje na skupu $C([a, b])$, $a < b$, pri čemu $f : [a, b] \times [a, b] \times [-h, h] \to \mathbb{R}$, $h > 0$ je neprekidna i zadovoljava Lipšicov uslov po trwćoj komponenti, tj.

$$|f(s, t, u_1) - f(s, t, u_2)| < K|u_1 - u_2|.$$

13. *(11.)* Naći uslove za postojanje rešenja početnog problema $y'(x) = \lambda y(y(x))$, $y(0) = y_0$, gde $x \in [-h, h]$ i $y_o \in (-h.h)$.

14. *(22.)* Neka je $K : [0, T] \times [0, T] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ neprekidno preslikavanje i neka zadovoljava uslov da je

$$|K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq L|x - y|, \text{ za sve } (t, s) \in [0, T] \times [0, T] \text{ i sve } x, y \in \mathbf{R}.$$

Tada za svaku funkciju $v \in C[0,T]$ jednačina

$$u(t) = v(t) + \int_0^t K(t,s,u(s))ds, (0 \le t \le T)$$

ima jedinstveno rešenje $u \in C[0,T]$
Uputstvo: Za $u_0 \in C[0,T]$ definisati niz sukcesivnih aproksimacija

$$u_{n+1}(t) = v(t) + \int_0^t K(t,s,u_n(s))ds, n = 0,1,\ldots; 0 \le t \le T$$

i koristi normu

$$|g| = \max_{0 \le t \le T} e^{-Lt}|g(t)|.$$

15. *(24.)* Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ograničena oblast, $C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2)$ skup funkcija koje slikaju $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$ i $C(\overline{\Omega} \times C(\Omega))$ skup funkcija koje slikaju $\overline{\Omega} \times C(\Omega)$ u $\mathbb{R}$. Neka $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^2)$, a $g \in C(\overline{\Omega} \times C(\Omega))$ i neka su zadovoljeni sledeći uslovi

$$\forall x \in \overline{\Omega}\, \forall y, \bar{y}, z, \bar{z} \in \mathbb{R}\, |f(x,y,z) - f(x,\bar{y},\bar{z})| \le L_1|y - \bar{y}| + L_2|z - \bar{z}|,$$

$$\forall x \in \overline{\Omega}\, \forall u, v \in C(\overline{\Omega})\, |g(x,u) - g(x,v)| \le L_3||u - v||_{C(\overline{\Omega})}.$$

Ako je $L_1 + L_2L_3 < 1$ dokazati da postoji tačno jedno rešenje jednačine

$$u(x) = f(x, u(x), g(x, u(x))),$$

za svako $x \in \overline{\Omega}$, gde $u \in C(\overline{\Omega})$.

16. *(6.)* Neka je $\langle X, d\rangle$ kompletan metrički prostor i neka je $f : X \to X$ preslikavanje takvo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ da je f^{n_0} kontrakcija. Dokazati da tada postoji jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja f.

Teorema - Neprekidna zavisnost početnih uslova od parametara Neka je $\langle X, d\rangle$ kompletan metrički prostor i $\emptyset \ne M = \overline{M} \subset X$. Neka je Λ topološki prostor i neka je za svako $\{T_\lambda : M \to M : \lambda \in \Lambda\}$ familija preslikavanja sa osobinama

(1) $\exists q \in [0,1)\ \forall x, y \in M\ \forall \lambda \in \Lambda \quad d(T_\lambda x, T_\lambda y) \le q d(x,y)$

(2) Za svako $x \in M$ preslikavanje koje $\lambda \in \Lambda$ dodeljuje $T_\lambda x$ je neprekidno

Tada postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $x : \Lambda \to M$ sa osobinom da za sve $\lambda \in \Lambda$ važi $x(\lambda) = T_\lambda x(\lambda)$.

17. *(18.)* Neka je $(\mathbf{X}, d)$ kompletan metrički prostor i neka je M zatvoren podskup od $\mathbf{X}$. Neka je dato preslikavanje $T : M \to M$ sa osobinom da

$$d(T^n x, T^n y) \le a_n d(x,y), \;\; x, y \in M, \;\; n \in \mathbf{N},$$

a red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Dokazati da postoji jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T.

18. *(20.)* Neka je $(\mathbf{X}, d)$ metrički prostor i neka je M kompletan podskup skupa $\mathbf{X}$. Neka je Λ topološki prostor, $\langle T_\lambda : \lambda \in Lambda\rangle$ familija neprekidnih preslikavanja iz M u M i važi

a) $(\forall x, y \in M)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall \lambda \in \Lambda)\;\; d(T_\lambda^n x, T_\lambda^n y) \le a_n d(x,y)$.

b) Za svako $x \in M$ preslikavanje koje tački $\lambda \in \Lambda$ dodeljuje $T_\lambda x$ je neprekidno.

Pokazati da ako red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira da onda postoji jedinstveno neprekidno preslikavanje $f : \Lambda \to M$ sa osobinom $f(\lambda) = T_\lambda[f(\lambda)]$.

19. *(12.)* Neka su S i T neprekidna preslikavanja kompletnog metričkog prostora (X,d), $S,T : X \to X$. Dokazati da S i T imaju zajedničku nepokretnu tačku ako i samo ako postoji neprekidno preslikavanje $A : X \to SX \cap TX$ tako da važi $AS = SA, AT = TA$ i $d(Ax, Ay) \le \alpha d(Sx, Ty)$, $x, y \in X$,

$\alpha \in (0,1)$.
Pokazati da je zajednička nepokretna tačka za A, S i T jedinstvena.

20. *(13.)* Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i neka $f, g : X \to X$, tako da

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \geq 0, \quad \alpha + 2\beta + 2\gamma < 1.$$

Neka važi

$$d(fx, gy) \leq \alpha d(x, y) + \beta(d(x, fx) + d(y, gy)) + \gamma(d(x, gy) + d(y, fx)), \quad x, y \in X.$$

Pokazati da postoji jedinstveno $x^* \in X$, da je

$$f(x^*) = g(x^*) = x^*.$$

21. *(15.)* Neka je $\langle X, d\rangle$ kompletan metrički prostor i neka je $\langle T_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ familija preslikavanja, gde $T_i : X \to X$, $i \in \mathbb{N}$, sa osobinama:
1) $T_iT_j = T_jT_i$ za svako $i, j \in \mathbb{N}$
2) Postoje $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{N}$ tako da za svako $x, y \in X$ važi

$$d(T_1^{p_1}T_2^{p_2}\ldots T_n^{p_n}x, T_1^{p_1}T_2^{p_2}\ldots T_n^{p_n}y) \leq \alpha d(T_1^{p_1}T_2^{p_2}\ldots T_n^{p_n}x, x) + \beta d(T_1^{p_1}T_2^{p_2}\ldots T_n^{p_n}y, y),$$

gde je $\alpha, \beta > 0$ i $\alpha + \beta < 1$.
Dokazati da postoji zajednika nepokretna tačka za sva preslikavanja iz familije $\langle T_i : i \in \mathbb{N}\rangle$.

22. *(17.)* Neka je (X,d) kompletan metrički prostor. Dat je skup preslikavanja $T_i : X \to X$, $i = 1, 2, \ldots, n$ tako da

$$d(T_1T_2\ldots T_nx, T_nT_{n-1}\ldots T_1y) \leq \alpha d(T_1T_2\ldots T_nx, x) + \beta d(T_nT_{n-1}\ldots T_1y, y),$$

za sve $x, y \in X$, $n \geq 2$ i $\alpha + \beta < 1$.
Dokazati da ako za $i = 1, 2, \ldots, n$ važi da je $T_nT_{n-1}\ldots T_1T_i = T_iT_1T_2\ldots T_n$ tada postoji $\tilde{x} \in X$ tako da $T_i\tilde{x} = \tilde{x}$ za sve $i = 1, 2, \ldots, n$.

23. *(21.)* Neka je $\langle X, d\rangle$ kompletan metrički prostor i neka je $T : X \to X$ preslikavanje sa osobinom

$$\forall x, y \in X \ (x \neq y \Rightarrow d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty)),$$

gde su $a, b > 0$ i $a + b < 1$.
Neka je $x_0 \in X$ proizvoljno i neka je $x_{n+1} = Tx_n$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$. Pokazati
a) $d(x_1, x_2) \leq \frac{a}{1-b} d(x_0, Tx_0)$.
b) $d(x_n, x_{n+1}) \leq \left(\frac{a}{1-b}\right)^n d(x_0, Tx_0)$, za $n = 2, 3, 4, \ldots$.
c) Niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ je Košijev.
d) Ako je $= \lim_{n\to\infty} x_n$, tada za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $d(z, Tz) \leq \frac{1}{1-b}\left(d(z, x_n) + ad(x_{n-1}, x_n)\right)$.
e) $Tz = z$
f) z je jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T.

24. *(23.)* Za metrički prostor $\langle X, d\rangle$ kažemo da je ε-lančast akko za svako $x, y \in X$ postoji konačno tačaka $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ tako da je $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
Neka je $\langle X, d\rangle$ ε-lančast kompletan metrički prostor za $\varepsilon > 0$, $T : X \to X$ neprekidno preslikavanje, $\lambda \in (0,1)$ i neka važi

$$\forall x, y \in X(d(x, y) \leq \varepsilon \to d(Tx, Ty) \leq \lambda d(x, y).$$

a) Pokazati da je za svako $x \in X$ i svako $m \in \mathbb{N}$ $d(T^mx, T^{m+1}x) \leq n \cdot \varepsilon \cdot \lambda^m$, gde je $n = n(x) \in \mathbb{N}$.
b) Pokazati da je niz $\langle T^nx : n \in \mathbb{N}\rangle$ Košijev.
c) Pokazati da je $z = \lim_{n\to\infty} T^nx$ jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja T.

25. KVAZIKONTRAKVCIJA I ORBITALNA KOMPLETNOST

Definicija. Neka je $M \neq \emptyset$. Preslikavanje $T : M \to M$ je kvazikontrakcija ako i samo ako postoji $q \in [0, 1)$ tako da

$$d(Tx, Ty) \leq q \cdot \max\{d(x, Tx), d(y, Ty), d(Tx, y), d(x, Ty), d(x, y)\}.$$

Definicija. Neka je $M \neq \emptyset$ i $x \in M$.

$$\mathcal{O}(x, n) = \{x, Tx, T^2x, \dots, T^nx\},\ n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{O}(x, \infty) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{O}(x, n)$$

Definicija. prostor $\langle M, d\rangle$ je orbitalno kompletan ako i samo ako za svako $x \in M$ svaki Košijev niz iz skupa $\mathcal{O}(x, \infty)$ konvergira u M.

Lema 1. Neka je T kvazikontrakcija na M i $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno. Tada

$$i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow d(Tx, T^jx) \leq \delta[\mathcal{O}(x, n)],$$

gde δ označava dijametar skupa.

Lema 2. $\forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists k \in \{q, 2, \dots, n\}\ \delta[\mathcal{O}(x, n)] = d(x, T^kx)$.

Lema 3. Ako je T kvazikontrakcija na M onda je za svako $x \in M$

$$\delta[\mathcal{O}(x, \infty)] \leq \frac{1}{1-q} d(x, Tx).$$

Teorema. Neka je T kvazikontrakcija na metričkom orbitalno-kompletnom prostoru $\langle M, d\rangle$. Tada

a) T ima jedinstvenu nepokretnu tačku $u \in M$.

b) Važi $\lim_{n\to\infty} T^nx = u$, za proizvoljno $x \in M$.

c) Važi ocena $d(T^nx, u) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, Tx)$.

26. RUB U UNUTRAŠNJOST

Teorema. Neka je $\langle m, d\rangle$ konveksan i kompletan metrički prostor, $\emptyset \neq K = \overline{K} \subset M$ i $f : K \to M$ preslikavanje sa osobinama

$$f[\partial K] \subset K$$

$$\exists q \in [0, 1)\, \forall x, y \in K\ \ d(fx, fy) \leq qd(x, y).$$

Tada postoji nepokretna tačka preslikavanja f.

Teorema za višeznačna preslikavanja. Neka je $\langle m, d\rangle$ konveksan i kompletan metrički prostor, $\emptyset \neq K = \overline{K} \subset M$ i $f : K \to BC(M)$ (neprazni, zatvoreni i ograničeni podskupovi skupa M) preslikavanje sa osobinama

$$f[\partial K] \subset BC(K)$$

$$\exists q \in [0, 1)\, \forall x, y \in K\ \ d(fx, fy) \leq qd(x, y).$$

Tada postoji nepokretna tačka preslikavanja f, tj. postoji $p^* \in K$ da važi $p^* \in f(p^*)$.

27. TEOREMA CARISTI-KIRK

Teorema. neka je $\langle X, d\rangle$ kompletan metrički prostor i neka su $f : X \to X$ i $G : X \to \mathbb{R}$ preslikavanja sa osobinama

(1) postoji $\inf_{x\in X} G(x)$

(2) Skup $\{z \in X : d(x, z) \leq G(x) - G(z)\}$ je zatvoren za svako $x \in X$

(3) $\forall x \in X\ d(x, f(x)) \leq G(x) - G(f(x))$.

Tada postoji nepokretna tačka preslikavanja f.

Posledica. Teorema banacha je specijalni slučaj teoreme Caristi-Kirk za $G(x) = \dfrac{d(x, f(x))}{1-q}$.

28. MANOV I EKSTRAPOLIRANI ITERATIVNI POSTUPAK

Terema - Manov iterativni postupak. Neka je $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ i neka je $g : D \to \mathbb{R}$ preslikavanje za koje važi

$$\forall x, y \in D \; |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

i $g(a), g(b) \in D$. Neka je $x_0 \in \{a, b\}$ i $x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n g(x_n)$ za $n = 0, 1, \ldots$. Ako je $0 \leq \alpha_n < \frac{1}{1+L}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ divergentan, tada postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ i $x^* = g(x^*)$.

Posledica - ekstrapolirani iterativni postupak. Neka je $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ i neka je $g : D \to \mathbb{R}$ preslikavanje za koje važi

$$\forall x, y \in D \; |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|$$

i $g(a), g(b) \in D$. Neka je $\lambda = \frac{1}{1+L}$, $x_0 \in \{a, b\}$ i $x_{n+1} = (1 - \lambda)x_n + \lambda g(x_n)$ za $n = 0, 1, \ldots$. Tada postoji $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ i $x^* = g(x^*)$.

29. *(25.)* Neka je $r > 0$ i neka su data neprekidna preslikavanja

$$g_i : B(0, r) \to \mathbf{R}, \quad B(0, r) \subseteq \mathbf{R}^n, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

tako da je zadovoljen uslov

$$x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n, \quad ||x|| = r \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} g_i(x)\xi_i \geq 0$$

Dokazati da tada postoji bar jedno rešenje sistema

$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

30. *(26.)* Neka je X konačno-dimenzionalan Banahov prostor i neka $f : B(0, r) \to X$ neprekidno preslikavanje koje zadovoljava uslov:

$$(\exists \lambda \in \mathbf{R})((x \in \partial B(0, r) \wedge f(x) = \alpha x) \Rightarrow (\alpha \leq \lambda)).$$

Dokazati da tada postoji rešenje jednačine $f(x) - \lambda x = 0$.

31. *(27.)* Neka su P i Q neprekidne realne funkcijenad $\mathbb{R}^2$. Dokazati da, ako su funkcije P i Q ograničene, sistem

$$x = P(x, y) \quad y = Q(x, y)$$

ima bar jedno rešenje.

32. *(28.)* Neka su P i Q neprekidne i realne funkcije definisane nad $\mathbf{R}^2$, tj. $P, Q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Dokazati da sistem

$$x = P(x, y), \quad y = Q(x, y)$$

ima bar jedno rešenje ukoliko je zadovoljen uslov

$$\lim_{|x|+|y|\to\infty} \frac{P(x, y)}{|x| + |y|} = \lim_{|x|+|y|\to\infty} \frac{Q(x, y)}{|x| + |y|} = 0.$$

33. *(29.)* Neka je X metrički prostor, E Banahov prostor i neka je $F : X \to E$ neprekidno preslikavanje, $\overline{F[X]}$ kompaktan skup, $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ konačna ε-mreža skupa $\overline{F[X]}$ i neka je E_m vektorski prostor nad $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

a) Pokazati da postoji neprekidno konačno-dimenziono preslikavanje $F_\varepsilon : X \to E_m$ sa osobinom $||F(x) - F_\varepsilon(x)|| < \varepsilon$ za sve $x \in X$.

b) Pokazati da postoji niz neprekidnih konačno dimenzionih preslikavanja $\langle F_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ da $F_n : X \to E_{s_n}$, da je$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, za sve $x \in X$ i $||F_n(x)|| \leq \frac{1}{2^n}$, za sve $x \in X$ i sve $n \in \mathbb{N}$.

34. PERON FROBENIUS

Definicija. Rećićemo da topološki prostor X ima osobinu nepokretne tačke ako i samo ako svako neprekidno preslikavanje $f : X \to X$ ima nepokretnu tačku.

Lema. Osobina nepokretne tačke je topološka osobina.

Teorema Peron Frobenius. Neka je $A = [a_{ij}]$ realna kvadratna matrica reda n sa pozitivnim elementima. Dokazati da postoji nenegativan karakterističan koren i njemu odgovarajući nenegativan karakterističan vektor.

35. KKM PRINCIP I UOPŠTEN KKM PRINCIP

Definicija. Neka je $\langle X, d\rangle$ vektorsko-topološki prostor i $\emptyset K \subset X$. Preslikavanje $G : K \to P(X) \setminus \{\emptyset\}$ je KKM preslikavanje ako i samo ako

$$\forall\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset K \;\; conv\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} G(x_i).$$

Teorema KKM princip. Neka je $\langle X, d\rangle$ vektorsko-topološki prostor i $\emptyset K \subset X$ i neka je $G : K \to P(X) \setminus \{\emptyset\}$ KKM preslikavanje sa osobinom da je za svako $x \in X$ $G(x)$ zatvoren skup. Pokazati da

$$\forall\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset K \;\; \bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) \neq \emptyset.$$

Definicija. Neka je $\langle X, d\rangle$ vektorsko-topološki prostor i $\emptyset K \subset X$. Preslikavanje $G : K \to P(X) \setminus \{\emptyset\}$ je uopšteno KKM preslikavanje ako i samo ako

$$\forall\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset K \, \exists\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset K \, \forall J \subset \{1, 2, \dots, n\} \; conv\{y_j : j \in J\} \subset \bigcup_{j=J} G(x_j).$$

Teorema uopšten KKM princip. Neka je $\langle X, d\rangle$ vektorsko-topološki prostor i $\emptyset K \subset X$ i neka je $G : K \to P(X) \setminus \{\emptyset\}$ uopšteno KKM preslikavanje sa osobinom da je za svako $x \in X$ $G(x)$ zatvoren skup. Pokazati da

$$\forall\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset K \;\; \bigcap_{i=1}^{n} G(x_i) \neq \emptyset.$$

36. *(32.)* Neka je X Banachov prostor i $T, F : X \to X$ neprekidna preslikavanja takva da važi

a) T je linearno preslikavanje,
b) $\forall n \in \mathbb{N} \, \forall x \in X \; ||T^n x|| \leq a_n ||x||$,
c) red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,
d) $\overline{F[X]}$ je kompaktan skup.

Dokazati da postoji $x \in X$ da je $x = Tx + Fx$.

37. *(33.)* Neka je X Banahov prostor i M zatvoren i konveksan podskup skupa X. Neka su $T : M \to X$ i $G : M \times \overline{T[M]} \to M$ neprekidna preslikavanja i neka važi:

1) $(\exists q \in [0, 1)) \, (\forall x_1, x_2 \in M) \, (\forall y \in \overline{T[M]}) \quad ||G(x_1, y) - G(x_2, y)|| \leq q||x_1 - x_2||$.
2) $\overline{T[M]}$ je kompaktan.

Pokazati da postoji $x \in M$ da je $x = G(x, Tx)$.

38. *(34.)* Neka je X Banahov prostor i $T : X \to X$ neprekidno preslikavanje koje preslikava svaki ograničen podskup od X u relativno kompaktan podskup skupa X. Ako postoji $r > 0$ tako da važi implikacija:

$$x = tT(x), \;\; 0 < t < 1 \Rightarrow \|x\| \leq r$$

dokazati da postoji bar jedno rešenje jednačine $x = Tx$.

39. *(35.)* Neka su X i Y Banachovi prostori i neka su $A, B : X \to Y$ linearna preslikavanja sa osobinom da je za svako $f \in Y$ jednačina $Bu = f$ jednoznačno rešiva.

Neka je za svako $t \in [0,1]$ $p_t : t \cdot Au + (1-t)Bu = f$ i neka važi sledeća implikacija:

Ako je u rešenje jednačine p_t, za neko $t \in [0,1]$ i proizvoljno $f \in Y$, onda je $||u|| \leq C||f||$, gde je $C > 0$ i ne zavisi od t.

Pokazati da jednačina $Au = f$ ima jedinstveno rešenje za svako $f \in F$.

Uputstvo: 1. Neka je $N = \{t \in [0,1] : p_t \text{ je jednoznačno rešiva}\}$. Pokazati da ako za t_0 važi $Ct_0(||A|| + ||B||) < 1$ tada $[0,t] \subset N \Rightarrow [0, t+t_0] \subset N$.

2. $1 \in N$.

40. *(36.)* (Uopštenje teoreme Šaudera) Neka je $\langle X, ||\cdot|| \rangle$ normiran prostor i $\emptyset \neq M \subset X$ kompaktan i konveksan i $T : M \to M$ neprekidno preslikavanje. Dokazati da postoji funkcija $\phi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ sa osobinom

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x_\varepsilon \in M\, ||x_\varepsilon - Tx_\varepsilon|| \leq \phi(\varepsilon) \text{ i } \lim_{\varepsilon \to 0} \phi(\varepsilon) = 0.$$

Uputstvo: 1. Konstruisati simplicijalne aproksimacije T_ε preslikavanja T.

2. Dokazati da iz $x_\varepsilon = T_\varepsilon x_\varepsilon$, za $\varepsilon > 0$, sledi $||x_\varepsilon - Tx_\varepsilon|| \leq \phi(\varepsilon)$ i $\lim_{\varepsilon \to 0} \phi(\varepsilon) = 0$.