I152: ANALIZA ALGORITAMA

26. JANUAR 2015.

[16] **1.** Kao što je poznato, svaki prirodni broj $x \geq 2$ se na jedinstven način prikazuje kao proizvod svojih prostih faktora: $x = 2^{\alpha_0}3^{\alpha_1}\cdots p_m^{\alpha_m}$.

(a) Za dato $x \geq 2$, neka $M(x)$ označava indeks najvećeg prostog faktora od x, tj. maksimalno m tako da $p_m \mid x$ (odnosno, da je $\alpha_m \neq 0$). Neka je, dalje, $M(0) = M(1) = 0$. Dokazati da je $M(x)$ prosto rekurzivna funkcija. [**4 poena**]

(b) Neka je $z(0) = z(1) = 0$, dok je za $x \geq 2$, $z(x)$ zbir svih (nenula) eksponenata u gornjem razlaganju x na proste faktore: $z(x) = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ (gde je $m = M(x)$). Dokazati da je $z(x)$ prosto rekurzivna funkcija. [**4 poena**]

(c) Za prirodan broj x kažemo da je *nerastući* ako je $x \in \{0,1\}$ ili je $x \geq 2$ i njegovi eksponenti u razlaganju na proste faktore čine nerastući niz: $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_m$ (gde je $m = M(x)$). Dokazati da je skup svih nerastućih brojeva prosto rekurzivan. [**4 poena**]

(d) Niz $(a_1, \ldots, a_k)$ je *particija* prirodnog broja $n \geq 1$ ako važi

$$a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 1 \qquad \text{i} \qquad a_1 + \cdots + a_k = n.$$

Drugim rečima, skup svih particija nekog broja predstavlja sve načine (ignoršući poredak sabiraka) da se neki broj napiše kao zbir nenula prirodnih brojeva. Neka je $p(n)$ broj svih particija broja $n \geq 1$ (pri tome je $p(0) = 0$). Na primer,

$$4 = 1+1+1+1 = 2+1+1 = 3+1 = 2+2 = 4,$$

pa je zato $p(4) = 5$. Dokazati, koristeći tačke (a), (b) i (c), da je $p(n)$ prosto rekurzivna funkcija. [**4 poena**]

[8] **2.** Konstruisati Tjuringovu mašinu koja za dato x, y, z izračunava vrednost funkcije

$$f(x,y,z) = \left\lfloor \frac{x^2+y^2}{z!} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{y+z}{x+1} + \frac{z+x}{y+1} \right\rfloor.$$

[8] **3.** Konstruisati Tjuringovu mašinu koja za dato x izračunava vrednost funkcije $M(x)$ iz prvog zadatka, tačka (a).

[8] **4.** Konstruisati iskaznu formulu koja se dobija od 3-KNF

$$\varphi(x,y,z,t) = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (y \vee z \vee \neg t)$$

u postupku redukcije problema 3-SAT na problem $\neq$-SAT.

RAD TRAJE **180** MINUTA.

PRVI ZADATAK VREDI **16** POENA, A OSTALI PO **8** POENA.

REZULTATI I UPISIVANJE OCENA: **SREDA, 28.1.** U **10:30** (KLUB NA II SPRATU).