

# M185: TEORIJA AUTOMATA

22. JUN 2012.

1. Kao što je poznato, po definiciji je  $L^* = \{\lambda\} + L + L^2 + \dots + L^n + \dots$  za svaki jezik  $L$ . Medjutim, za neke jezike  $L$  može da se dogodi da već prvih nekoliko sabiraka sume sa desne strane daju ceo jezik  $L^*$ . Za svaki prirodan broj  $n \geq 2$  naći primer jezika  $L_n$  sa osobinom da je

$$L_n^* = \{\lambda\} + L_n + L_n^2 + \dots + L_n^{n-1} + L_n^n$$

ali da pri tome imamo da je

$$L_n^* \neq \{\lambda\} + L_n + L_n^2 + \dots + L_n^{n-1}.$$

2. 16. oktobra 1843., irski matematičar Ser Vilijam R. Hamilton smislio je čuvenu grupu kvaterniona  $Q_8$  koja se sastoji od osam elemenata  $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$  za koje važi  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ , zatim  $(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x$  (obe relacije za proizvoljno  $x$ ), kao i

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

(ovaj poslednji niz jednakosti je Hamilton uklesao na ogradu mosta Brum u Dublinu pomenutog dana, i on se može videti još i danas).

- (a) Na osnovu datih informacija rekonstruisati kompletnu tablicu množenja grupe  $Q_8$ .
- (b) Konstruisati poluautomat čiji je monoid izomorfan grupi  $Q_8$  (*uputstvo*: uočiti što je moguće manji generatorni skup za  $Q_8$ , pa primeniti modifikovani algoritam).
3. Neka je  $A$  beskonačan podskup skupa prirodnih brojeva  $\mathbb{N}$ . Za prirodan broj  $k$ , neka je

$$A_k = \{m \in A : m \leq k\}$$

skup svih elemenata skupa  $A$  koji nisu veći od  $k$ , i neka je  $\alpha(k) = |A_k|$  ( $\alpha(k)$  zapravo broji koliko  $A$  ima elemenata  $\leq k$ ). Ako je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\alpha(k)}{k} = 0$$

dokazati da jezik  $L_A = \{a^m : m \in A\}$  (nad azbukom  $\Sigma = \{a\}$ ) nije regularan.

4. Konstruisati automat nad azbukom  $\Sigma = \{a, b\}$  koji ima tačno 2012 stanja i koji je minimalan. Obrazložiti konstrukciju.

RAD TRAJE **180** MINUTA.

SVAKI ZADATAK VREDI **10** POENA.

REZULTATI I UPISIVANJE OCENA: **PONEDELJAK, 25.6. U 11:00.**