UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Igor Dolinka

Slobodni spektri i p_n-nizovi polugrupa

– Magistarski Rad –

Novi Sad, 1999.

Sadržaj

Predgovor

Tema ovog magistarskog rada pripada oblasti algebre i nalazi se na dodiru univerzalne algebre i teorije polugrupa. Mogli bismo reći da se u izučavanju slobodnih spektara i p_n-nizova polugrupa i njihovih varijeteta metode klasične algebarske teorije polugrupa primenjuju na univerzalno-algebarska pitanja. Ključni problem u tom smislu je da se dublje objasni fenomen asocijativnosti u algebri (pa i u nekim širim matematičkim kontekstima), za čiju ulogu u matematici smatramo da još uvek nije dovoljno ispitana. S jedne strane, savremene matematičke discipline koje povezuju algebru sa računarskim naukama i lingvistikom, kao glavni model asocijativnosti ističu apstraktni koncept reči i jezika kao proizvoljne kolekcije reči, među kojima su najznačajniji jezici sa izvesnom strukturnom pravilnošću (npr. regularni jezici). S druge strane, poslednjih godina su intenzivirana istraživanja u teorijskoj matematici koja povezuju univerzalnu algebru kao opštu, ujedinjujuću teoriju apstraktnih algebarskih sistema sa teorijom polugrupa. Ispitivanje konačnih polugrupa, kao i njihovih veza sa konačnim unarnim algebrama (automatima) u tome ima naročit značaj. Takav trend čini temu ovog rada (ponovo) aktuelnom u algebri.

Već nakon prvog susreta sa razmatranom problematikom i osnovnim definicijama, vidi se da jedan od centralnih pojmova jeste pojam term operacija na polugrupi, odnosno njihova kompozicija. Na taj način, predmet ovde izloženog rada se grubo može sažeti kao ispitivanje polugrupnih klonova. Zaista, jake veze sa teorijom klonova, koja u okvirima algebre snažno izrasta u samostalnu disciplinu veoma blisku diskretnoj matematici i višeznačnim logikama, biće isticana u više navrata. S druge strane, ispostavlja se da strukturne osobine polugrupa u velikoj meri utiču na njihove termovske klonove, odnosno da postoji visok nivo povezanosti unutrašnje strukture polugrupa i identiteta (zakona) koje one zadovoljavaju. Ovo najviše dolazi do izražaja kada su u pitanju slobodni spektri kao nizovi kardinalnosti konačno generisanih slobodnih algebri varijeteta, zbog izuzetne uloge slobodnih algebri (u ovom slučaju slobodnih polugrupa) u izgradnji posmatranih varijeteta. Najzad, samo pojavljivanje pojma identiteta upućuje na veze sa univerzalnom algebrom i naročito jednakosnom logikom, kao relevantnim, srodnim oblastima.

Zbog svega navedenog, spisak literature dat na kraju rada uključuje jedinice koje imaju ekspozitorni karakter, bilo da je reč o seminarskim radovima, udžbenicima ili monografijama, a bave se pobrojanim oblastima: teorijom klonova [30, 71, 98], teorijom polugrupa [13, 18, 58, 66, 80], univerzalnom algebrom [16, 45, 70] ili nekim njenim posebnim aspektima [40, 57], odnosno jednakosnom logikom [99]. Napomenimo da su u daljem tekstu na mnogo mesta korišćeni klasični, fundamentalni rezultati iz ovih oblasti, bez toga da su oni na bilo koji poseban način referisani, tj. da se za njih upućuje na neku jedinicu u literaturi. Za sve takve rezultate upućujemo na ovom mestu na upravo pobrojane jedinice, pa ćemo ih nadalje tretirati kao poznate.

Osim toga, posebnu pažnju skrećemo i na dodatak dat na kraju rada, u kome su rezimirani otvoreni problemi u ovoj oblasti postavljeni u toku izlaganja. Naravno, ovo je samo mali deo (koji izražava subjektivna interesovanja autora) lepih i zanimljivih problema koje donosi ispitivanje slobodnih spektara i p_n-nizova polugrupa. Možemo zaključiti da je reč o široko otvorenom polju rada koje krije još mnoge izazove za istraživače u algebri.

Na kraju, koristim priliku da se ovde zahvalim nekolicini dragih ljudi za njihov značajan doprinos u realizaciji ovog magistarskog rada. Na prvom mestu, zahvaljujem se mojim roditeljima, Vojinu i Jeleni, za besprekorne uslove rada i školovanja koje mi pružaju i koje su mi pružali svih proteklih godina. Zatim, tu je moj mentor, dr Siniša Crvenković, redovni profesor PMF-a u Novom Sadu, koji je bio uz mene od mojih prvih koraka u matematičkoj nauci i sa istrajnošću i strpljenjem me uvodio u istraživački rad, između ostalog i u oblasti kojom se ovaj rad bavi. Takođe, moram pomenuti i dr Nikolu Ruškuca, docenta Univerziteta St Andrews u Škotskoj, sa kojim duži niz godina ostvarujemo plodnu naučnu saradnju na temi slobodnih spektara i p_n-nizova polugrupa. Najzad, izražavam zahvalnost članovima Komisije za ocenu teme ovog rada, dr Stojanu Bogdanoviću, redovnom profesoru Ekonomskog fakulteta u Nišu i dr Miroslavu Ćiriću, vanrednom profesoru Filozofskog fakulteta u Nišu, na datoj podršci, kao i pomoći u nalaženju dela neophodne literature.

Novi Sad, 15. mart 1999.

1. Slobodni spektri i p_n-nizovi algebri

U ovoj glavi uvodimo pojmovni aparat koji će nam biti neophodan u izlaganju. Najpre pokazujemo kako ova tema vuče korene iz teorije klonova. Izložene su neke osnovne osobine komponovanja operacija konačne arnosti na proizvoljnim skupovima. Zatim, uvodimo definicije slobodnog spektra i p_n-niza algebre i drugih sa njima povezanih pojmova i dajemo nekoliko tipičnih primera. Najzad, glava se okončava prikazom najznačajnih rezultata iz literature o slobodnim spektrima i p_n-nizovima univerzalnih algebri, kao i nekih problema koji su motivisali rezultate ovog rada.

1.1. Operacije na skupovima i njihova kompozicija

Za proizvoljan skup A i ceo broj $n \geq 0$, **n-arna operacija skupa** A je preslikavanje $f : A^n \to A$ (pri tome po dogovoru uzimamo da je $A^0 = \{\emptyset\}$, pa stoga 0-arnu operaciju f možemo identifikovati sa njenom slikom $f(\emptyset)$, tj. smatrati da je reč o konstanti iz skupa A). Ako je na skupu A data n-arna operacija f i m-arne operacije $g_1, \dots, g_n$, tada možemo definisati **kompoziciju** ovih operacija $h = f(g_1, \dots, g_n)$ sa

$$h(a_1, \dots, a_m) = f(g_1(a_1, \dots, a_m), \dots, g_n(a_1, \dots, a_m))$$

za sve $a_1, \dots, a_m \in A$.

Ambijent u kome se u matematici posmatra kompozicija operacija na datom skupu jeste teorija klonova. Podsetimo, **klon** na skupu A je familija operacija na skupu A koja sadrži sve n-arne projekcije (za sve $n \geq 1$) i koja je zatvorena na kompoziciju. Klonovi, naravno, imaju i svoju apstraktnu definiciju, u odnosu na koju se pokazuje da je svaki klon predstavljiv kao klon operacija na nekom skupu. Istorijski, koncept klona se prvi put nazire tridesetih i četrdesetih godina u radovima W. Sierpińskog (videti npr. [94]). 1941. Post [89] opisuje sve klonove na dvoelementnom skupu, a 1970. Rosenberg [91] daje karakterizaciju maksimalnih klonova na konačnim skupovima. Maksimalni klonovi imaju veliki značaj u generalizacijama pojma kompletnosti za višeznačne logike, vidi [92]. Za detaljan pregled rezultata teorije klonova videti knjigu Á. Szendrei [98]; na našem jeziku, upućujemo na [30].

Primetimo da operacije mogu biti definisane nad određenim brojem promenljivih, ali da pri tome neke od njih uopšte i ne utiču na vrednost operacije. Zato za n-arnu operaciju $f = f(x_1, \dots, x_n)$ na skupu A kažemo da ona **zavisi** od promenljive x_k, gde je $1 \leq k \leq n$, ako postoje $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n, b, c \in A$ tako da je

$$f(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Operacije od n argumenata (gde je $n \geq 1$) koje zavise od svih svojih promenljivih zovemo **esencijalno n-arnim operacijama** na A i skup svih takvih operacija označavamo sa $E_n(A)$. Osim toga, definišemo da je $E_0(A) = A$, u smislu identifikacije konstanti iz A i konstantnih unarnih operacija na A. Ako je arnost operacije jasna iz konteksta, govorimo prosto o **esencijalnim operacijama**.

U načelu, neke n-arne operacije datog skupa mogu biti invarijantne na određene permutacije promenljivih. Sasvim precizno, ako je $f(x_1, \dots, x_n)$ operacija na skupu A, a $\sigma \in S_n$ permutacija skupa $\{1, \dots, n\}$, tada kažemo da operacija f **dopušta** permutaciju σ (ili da je **invarijantna** na σ), ako je

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

Operaciju koja stoji sa desne strane gornje jednakosti često označavamo sa f^σ, pa se tako gornji uslov može kratko iskazati kao $f = f^\sigma$. Skup svih permutacija koje dopušta operacija f označavamo sa $G(f)$. Sada je veoma lako pokazati da važi sledeća

LEMA 1.1.1. *Neka je f n-arna operacija na skupu A. Tada je $\langle G(f), \circ \rangle$ (ovde $\circ$ označava kompoziciju permutacija) podgrupa simetrične grupe S_n.*

Grupu $G(f)$ zovemo **grupa permutacija operacije** f. U slučaju da je $G(f) = S_n$, kažemo da je operacija f **totalno simetrična**.

U vezi sa grupama permutacija operacija na datom skupu, imamo sledeća dva interesantna tvrđenja, koja ćemo kasnije koristiti.

LEMA 1.1.2. *Neka je A konačan skup. Tada postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da je za sve $n \geq n_0$ i za sve n-arne operacije f na A, $G(f) \neq A_n$, gde A_n označava alternativnu grupu stepena n.*

Dokaz. Definišimo $n_0 = |A| + 3$ i pretpostavimo da je $G(f) = A_n$ za neko $n \geq n_0$ i neku n-arnu operaciju f na skupu A. Posmatrajmo sada n-torku $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ $(a_1, \dots, a_n \in A)$. Očito, mora biti $a_i = a_j$ za neka dva indeksa i, j $(3 \leq i < j \leq n)$. Tada je

$$f^{(12)}(\mathbf{a}) = f^{(12)(ij)}(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}),$$

gde druga jednakost važi zbog $(12)(ij) \in A_n$. Sledi da je $(12) \in G(f) = A_n$, što je kontradikcija. ■

LEMA 1.1.3. *Ako je f n-arna operacija na skupu A, tada f ili zavisi od svih promenljivih sa indeksima koji formiraju orbitu grupe permutacija $G(f)$, ili ne zavisi ni od jedne od njih.*

Dokaz. Pretpostavimo da $f = f(x_1, \dots, x_n)$ ne zavisi od promenljive x_k i da k, l $(k \neq l)$ pripadaju istoj orbiti grupe $G(f)$. Ako je $\pi \in G(f)$ takvo da važi $\pi(k) = l$, tada za sve $a_1, \dots, a_n, b \in A$ imamo sledeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} f(a_1, \dots, a_n) &= f(a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(k)}, \dots, a_{\pi(n)}) = f(a_{\pi(1)}, \dots, b, \dots, a_{\pi(n)}) \\ &= f^{\pi^{-1}}(a_{\pi(1)}, \dots, b, \dots, a_{\pi(n)}) = f(a_1, \dots, a_{l-1}, b, a_{l+1}, \dots, a_n). \end{aligned}$$

Tako, f ne zavisi ni od x_l. ■

1.2. Term operacije algebri. Pregled osnovnih pojmova

Neka je data algebra $\mathbf{A} = \langle A, F \rangle$. Tada, jasno, svaki term na jeziku ove algebre interpretacijom indukuje operaciju konačne arnosti na njenom nosaču A. Operacije dobijene na taj način zovemo **term operacije** te algebre. Nije teško videti da term operacije date algebre formiraju klon, šta više, da je taj klon generisan skupom F osnovnih operacija. Zbog toga kolekciju svih term operacija algebre $\mathbf{A}$ nazivamo **termovski klon** i označavamo sa $Clo\,\mathbf{A}$. Specijalno, skup svih n-arnih term operacija algebre $\mathbf{A}$ se označava sa $Clo_n\mathbf{A}$ (pri čemu je $Clo_0\mathbf{A}$ skup svih konstantnih unarnih term operacija na $\mathbf{A}$). Sada je očito $E_n(\mathbf{A}) = E_n(A) \cap Clo_n\mathbf{A}$ skup svih esencijalno n-arnih term operacija algebre $\mathbf{A}$. Najzad, niz kardinalnih brojeva

$$p_n(\mathbf{A}) = |E_n(\mathbf{A})|,$$

gde je $n \geq 0$, zovemo **p_n-niz algebre A**. U slučaju da su u pitanju konačni brojevi, reč je prosto o broju esencijalno n-arnih term operacija posmatrane algebre. To je upravo slučaj koji je i najinteresantniji za proučavanje.

Definicija p_n-niza se može proširiti i na varijetete algebri, na taj način što definišemo da je $\langle p_n(\mathcal{V}) \rangle$ p_n-niz algebre $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\omega)$, slobodne algebre varijeteta $\mathcal{V}$ nad prebrojivim skupom generatora.

Upravo ova prethodna definicija daje motivaciju za uvođenje drugog osnovnog pojma ovog rada. Naime, ako je dat netrivijalan varijetet $\mathcal{V}$, tada on za svaki nenula kardinal κ sadrži **slobodnu algebru** nad skupom od κ slobodnih generatora, $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\kappa)$. Nije teško pokazati da je za sve $\kappa \geq \aleph_0$, $|\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(\kappa)| = \kappa$. Stoga je interesantan samo niz kardinalnosti konačno generisanih slobodnih algebri,

$$f_n(\mathcal{V}) = |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(n)|,$$

$n \geq 1$, koji zovemo **slobodni spektar** varijeteta $\mathcal{V}$ (on se proširuje za $n = 0$ tako što je $f_0(\mathcal{V}) = 0$ ako $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(0)$ ne postoji, u suprotnom $f_0(\mathcal{V}) = |\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(0)|$). Takođe, definišemo i slobodni spektar algebre $\mathbf{A}$ kao slobodni spektar za $\mathsf{HSP}(\mathbf{A})$, varijetet generisan algebrom $\mathbf{A}$.

Nije teško pokazati da je n-generisana slobodna algebra u bilo kom varijetetu izomorfna algebri svih n-arnih term operacija bilo koje algebre koja generiše $\mathcal{V}$. Tako, u poslednjem slučaju, $f_n(\mathbf{A})$ jeste zapravo broj *svih* n-arnih term operacija algebre $\mathbf{A}$.

Slobodni spektar i p_n-niz algebre $\mathbf{A}$ (varijeteta $\mathcal{V}$) su dve njene značajne invarijante, koje sadrže izvesnu količinu informacija o samoj algebri (varijetetu). Međutim, nalaženje familije numeričkih invarijanti koje bi u potpunosti opisale alegbru, odnosno varijetet, je veoma dalek i gotovo neostvariv cilj. Ipak, veze između slobodnih spektara i p_n-nizova s jedne, i strukturnih osobina algebri i varijeteta s druge strane su često veoma jake i daju lepe i zanimljive rezultate. Naravno, informacija koju u sebi nose upravo definisani nizovi je zanemarljiva, ukoliko nije zapravo reč o nizovima *konačnih* kardinala, odnosno prirodnih brojeva. Lako se uočava da je ovaj zahtev ekvivalentan uslovu *lokalne konačnosti* varijeteta. Prema tome, možemo zaključiti da je izučavanje slobodnih spektara i p_n-nizova u stvari jedan način da se ispituju lokalno konačni varijeteti i algebre (pa samim tim i konačne algebre), odnosno identiteti koji važe na njima.

Interesantno je da slobodni spektar i p_n-niz uopšte nisu nezavisni, već naprotiv, oni određuju jedan drugog. Na taj način, kod raznih problema praktično možemo da "biramo" kojim sredstvom ćemo da pristupimo ispitivanju našeg objekta (algebre ili varijeteta). Iz prethodnih redova se već može naslutiti da je njihova veza kombinatornog karaktera.

PROPOZICIJA 1.2.1. *Neka je* $\mathbf{A}$ *proizvoljna lokalno konačna algebra. Tada za sve* $n \geq 0$ *važe sledeće veze:*

$$f_n(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(\mathbf{A}),$$

$$p_n(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f_k(\mathbf{A}).$$

Iste formule važe ako se umesto algebre $\mathbf{A}$ *posmatra proizvoljan lokalno konačan varijetet* $\mathcal{V}$.

Dokaz. Tražene formule se dobijaju direktnom primenom principa uključenja-isključenja (npr. prva za skup $Clo_n\mathbf{A}$, odnosno skupove $E_k(\mathbf{A})$, $0 \leq k \leq n$). ■

Sada možemo preći na primere slobodnih spektara i p_n-nizova algebri koji se najčešće pojavljuju u literaturi i na određeni način čine "gradivni element" teorije.

PRIMER 1.2.2. Neka je S netrivijalna polumreža (komutativna i idempotentna polugrupa). Tada se svaka term operacija sa n promenljivih može zapisati u obliku $x_1x_2\ldots x_n$, i nije teško videti da ona zaista zavisi od svih svojih promenljivih. Dakle, $p_n(S) = 1$ za $n \geq 1$ i $p_0(S) = 0$. Specijalno to znači da je i p_n-niz varijeteta polumreža $\mathcal{SL}$ jednak $\langle 0, 1, 1, 1, \ldots\rangle$. Na osnovu prethodnog tvrđenja sada lako izračunavamo njegov slobodni spektar:

$$f_n(\mathcal{SL}) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1.$$

Polumreže predstavljaju upravo jedan od slučajeva kada p_n-niz locira algebru u do na ekvivalentnost jedinstvenom varijetetu (podsetimo se, dve algebre su **ekvivalentne** ako imaju isti nosač i isti termovski klon). Jedan takav slučaj ćemo razmotriti u sledećem primeru.

PRIMER 1.2.3. Posmatrajmo niz $\langle 0, 1, 1, 1, \ldots\rangle$ i pretpostavimo da je reč o p_n-nizu algebre $\mathbf{A}$. Kako je tada $p_0 = 0$ i $p_1 = 1$, zaključujemo da algebra $\mathbf{A}$ nema konstantnih term operacija, te da je idempotentna, tj. da za svaku njenu osnovnu operaciju f važi $f(x, \ldots, x) = x$ za sve $x \in A$. Dalje, kako je $p_2 = 1$, $\mathbf{A}$ ima jedinstvenu esencijalno binarnu term operaciju; označimo je sa $x * y$. Očito, sada mora biti $x * y = y * x$.

Posmatrajmo ternarnu operaciju $(x * y) * z$. Ako zamenimo $y = x$ dobijamo, zbog idempotentnosti, operaciju $x*z$. Prema tome, uočena operacija zavisi od z i od bar jedne od promenljivih x, y. Ali, ona je simetrična u odnosu na transpoziciju te dve promenljive, pa po Lemi 1.1.3 zavisi od obe do njih. Tako dobijamo da je uočena operacija esencijalno ternarna. Međutim, isto se može zaključiti i za operaciju $x * (y * z)$, pa zbog $p_3(\mathbf{A}) = 1$ mora biti $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Dobili smo da je $x * y$ polumrežna operacija. Međutim, svaka netrivijalna polumreža ima opisani p_n-niz, pa sledi da je algebra $\mathbf{A}$ ekvivalentna polumreži.

S druge strane, postoje i suprotni primeri, u smislu da veoma različite algebre i varijeteti mogu imati iste p_n-nizove.

PRIMER 1.2.4. Booleova grupa je grupa eksponenta 2, tj. grupa koja zadovoljava identitet $x^2 = 1$. Veoma je lako pokazati da je svaka Booleova grupa Abelova, odakle sledi da su sve njene term operacije iscrpljene sa 1 i $x_1x_2\ldots x_n$

za sve $n \geq 1$. To znači da je p_n-niz svake netrivijalne Booleove grupe B konstantan, $p_n(B) = 1$ za sve $n \geq 0$. Za slobodni spektar se dobija $f_n(B) = 2^n$. Međutim, potpuno isti slobodni spektar (a samim tim i p_n-niz) se dobija i za varijetet polumreža sa nulom, kao i za varijetet Booleovih algebri, ali i za varijetet komutativnih polugrupa koje zadovoljavaju identitet $x^2 = 0$. I dok su svi prethodni varijeteti iz ovog primera konačno generisani, to nije slučaj sa poslednjim, polugrupnim varijetetom. Prema tome, varijeteti sa istim slobodnim spektrom (p_n-nizom) mogu da budu veoma različiti u strukturnom pogledu.

U literaturi su od velikog značaja i sledeća dva primera.

PRIMER 1.2.5. Neka je B Booleova grupa (koristićemo aditivnu notaciju, pošto je reč o Abelovim grupama). Tada je njena term operacija $d(x, y, z) = x+y+z$ idempotentna, tj. važi $d(x, x, x) = x$. Algebru $\langle B, d\rangle$ zovemo **idempotentni redukt** grupe B, i označavamo je sa B_I. Imamo da je $p_{2k}(B_I) = 0$ i $p_{2k+1}(B_I) = 1$ za sve $k \geq 0$. Shodno tome, važi $f_0(B_I) = 0$ i $f_n(B_I) = 2^{n-1}$ za sve $n \geq 1$.

PRIMER 1.2.6. Neka je $r \geq 1$ prirodan broj i neka je varijetet $\mathcal{D}_r$ tipa $\langle r\rangle$ definisan sledećim identitetima:

$$\begin{aligned} d(x, x, \ldots, x) &= x, \\ d(d(\mathbf{x}_1), d(\mathbf{x}_2), \ldots, d(\mathbf{x}_r)) &= d(x_1^1, x_2^2, \ldots, x_r^r), \end{aligned}$$

gde je za $1 \leq i \leq r$, $\mathbf{x}_i = \langle x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^r\rangle$. Jasno, svaka n-arna term operacija u $\mathcal{D}_r$ može biti prikazana u obliku

$$d(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}),$$

gde je $i_1, i_2, \ldots, i_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Otuda je $f_n(\mathcal{D}_r) = n^r$ i $p_n(\mathcal{D}_r) = n!S(r, n)$, gde je $S(r, n)$ Stirlingov broj druge vrste (broj particija r-elementnog skupa na tačno n nepraznih podskupova).

Elementi varijeteta $\mathcal{D}_r$ se zovu **dijagonalne algebre**. 1966. J. Płonka [82] je pokazao da je svaka dijagonalna algebra izomorfna algebri oblika

$$\mathbf{A} = \langle A_1 \times \ldots \times A_r, d\rangle,$$

gde su $A_1, \ldots, A_r$ neprazni skupovi, dok je operacija d definisana sa

$$d(\langle a_1^1, \ldots, a_1^r\rangle, \ldots, \langle a_r^1, \ldots, a_r^r\rangle) = \langle a_1^1, \ldots, a_r^r\rangle.$$

Svaka od ovih algebri koja zadovoljava $|A_i| > 1$ za sve $1 \leq i \leq r$ generiše ceo varijetet $\mathcal{D}_r$ i naziva se **r-dimenzionalna dijagonalna algebra**. U slučaju $r = 2$, reč je o pravougaonim trakama (idempotentnim polugrupama koje zadovoljavaju zakon $xyz = xz$).

1.3. Slobodni spektri i p_n-nizovi u univerzalnoj algebri

Pojam p_n-niza prvi je definisao E. Marczewski (inače, učenik Sierpińskog) 1966. u radu [69]. On je kao **osnovni problem** teorije p_n-nizova formulisao problem karakterizacije **predstavljivih** nizova, tj. nizova prirodnih brojeva koji jesu p_n-nizovi nekih (lokalno konačnih) algebri. Krajem 60-tih godina, Marczewski je na Tehničkom Univerzitetu u Wrocławu okupio grupu algebrista koji su se bavili rešavanjem osnovnog problema, kao i drugih povezanih problema (Urbanik, Dudek, Narkiewicz, Fajtlowicz, kasnije i Kisielewicz). Nešto kasnije, od 1968., na Univerzitetu Manitoba, Winnipeg, na ovom problemu je počela da radi još jedna grupa, pod rukovodstvom G. Grätzera i J. Płonke. Prikaz njihovih rezultata dat je u preglednom radu [44]. Kasnije, ova grupa se skoncentrisala na ispitivanje p_n-nizova idempotentnih algebri (pa tako, specijalno, i idempotentnih polugrupa), pošto se pokazalo da se one u pogledu načina njihovog tretmana suštinski razlikuju od neidempotentnih. Kasnije, ove dve grupe će međusobno sarađivati, što će kulminirati značajnim rezultatima početkom i sredinom 80-tih godina, kada se u istraživanja uključuju i drugi matematičari, kao npr. R. McKenzie, J. Berman, S. Seif, S. Crvenković, N. Ruškuc i drugi. Krajem 80-tih godina, ova problematika zapada u krizu, i to zbog velike težine preostalih problema, pri čemu pre svega mislimo na osnovni problem za idempotentne algebre i Bermanovu hipotezu, o kojoj će biti reči kasnije. Rad R. Willarda [105] svakako daje novi podstrek za nastavak istraživanja u ovoj oblasti.

S druge strane, problematika slobodnih spektara je znatno starija i izvorno dolazi iz teorije mreža. Jedan od najpoznatijih algebarskih problema, **Dedekindov problem** [29] (iz 1900. godine) koji traži da se za dati broj promenljivih odredi broj izotonih Booleovih funkcija na 2-elementnoj Booleovoj algebri, može se u savremenoj terminologiji formulisati naprosto kao problem određivanja slobodnog spektra varijeteta distributivnih mreža (reč je o varijetetu generisanom 2-elementim lancem). Jedno rešenje ovog problema je dao Kisielewicz [63], dok je Dudek [32] pokazao da je varijetet distributivnih mreža jednoznačno određen svojim slobodnim spektrom (slično kao što je to slučaj sa varijetetom polumreža, vidi Primer 1.2.3). Kasnije, problematika slobodnih spektara se redovno pojavljuje u kontekstu univerzalne algebre, sve od njenih početaka (Birkhoff [12]), a tako i u novije vreme, unutar njenih najsavremenijih teorija (Hobby, McKenzie [57]).

Verovatno jedan od prvih značajnijih pomaka po pitanju osnovnog problema bio je sledeći rezultat, koji pokazuje da je situacija sasvim jednostavna kada su u pitanju algebre koje imaju bar jednu konstantnu term operaciju.

TEOREMA 1.3.1. (Grätzer, Płonka, Sekanina [53]) *Neka je $\langle p_n \rangle$ proizvoljan niz nenegativnih celih brojeva za koji je $p_0 > 0$ i $p_1 > 0$. Tada je taj niz predstavljiv.*

Dokaz. Uočimo prebrojivo mnogo međusobno disjunktnih prebrojivih skupova

A_i, $i \geq 1$, i odaberimo skup C koji sadrži tačno p_0+1 element, a koji je disjunktan u odnosu na svaki od skupova A_i. Neka je $c_0, c_1 \in C$. Definišimo algebru $\mathbf{A} = \langle A, F\rangle$, gde je

$$A = \bigcup_{i\geq 1} A_i \cup C,$$

dok se F sastoji od konstanti $C \setminus \{c_0\}$ i operacija $f_{i,1}(x)$, $1 \leq i \leq p_1 - 1$, i $f_{i,n}(x_1, \ldots, x_n)$, $1 \leq i \leq p_n$, koje su definisane sa

$$f_{i,n}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} c_0, & a_1, \ldots, a_n \in A_i,\ |\{a_1, \ldots, a_n\}| = n, \\ c_1, & \text{inače.} \end{cases}$$

Nije teško videti da je bilo koja netrivijalna kompozicija elemenata iz F jednaka konstanti, pa su zato navedene operacije, zajedno sa unarnom projekcijom, jedine esencijalne term operacije konstruisane algebre $\mathbf{A}$. Otuda sledi da je $p_n(\mathbf{A}) = p_n$ za sve $n \geq 0$, tj. niz $\langle p_n\rangle$ je predstavljiv. ■

S druge strane, slučaj $p_0 = 0$ ispostavlja se kao veoma težak i složen. Stoga je on izučavan posebno za idempotentne i neidempotentne algebre. Kao prvi korak prema karakterizaciji nizova predstavljivih idempotentnim algebrama, Grätzer i Płonka su u radu [51] postavili hipotezu da je p_n-niz svake idempotentne algebre ili ograničen, ili monotono rastući počev od nekog člana. U istom radu, oni su uspeli da potvrde ovu hipotezu za sve idempotentne algebre koje imaju komutativnu esencijalno binarnu term operaciju. Tri godine kasnije, Grätzer i Płonka [52] su dokazali svoju hipotezu za idempotentne algebre za koje je $p_2(\mathbf{A}) = 0$, ali $p_3(\mathbf{A}) > 0$ i $p_4(\mathbf{A}) > 0$. Naime, tada je $p_n(\mathbf{A}) < p_{n+1}(\mathbf{A})$ za sve $n \geq 3$. U dobijanju ovih tvrđenja, ključnu ulogu su odigrali rezultati Urbanika [100, 101]. Tek je Kisielewicz [60, 64] uspeo da reši preostale slučajeve (prvi rad iz 1981. sadržavao je grešku – zbog koje je jedna klasa algebri ispuštena iz razmatranja – koju je osam godina kasnije primetio G. Grätzer). Tako je Grätzer-Płonkina hipoteza bila dokazana čitavih dvadeset godina nakon njenog postavljanja, pa sada imamo sledeće tvrđenje.

TEOREMA 1.3.2. (Kisielewicz [60, 64]) *Neka je $\mathbf{A}$ (lokalno konačna) idempotentna algebra. Tada je njen p_n-niz ili ograničen (u kom slučaju je $\mathbf{A}$ ekvivalentna polumreži, idempotentnom reduktu Booleove grupe ili dijagonalnoj algebri konačne dimenzije), ili postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ važi nejednakost $p_n(\mathbf{A}) + 1 \leq p_{n+1}(\mathbf{A})$.*

Na žalost, u ovom trenutku se čini da je puna karakterizacija nizova predstavljivih idempotentnim algebrama još uvek dalek cilj.

Međutim, kada su u pitanju neidempotentne algebre, Kisielewicz [62] je uspeo da dobije jedan potpun opis njihovih p_n-nizova, što se i danas smatra kao jedan od najznačajnijih rezultata u ovoj oblasti.

TEOREMA 1.3.3. (Kisielewicz [62]) *Niz nenegativnih celih brojeva $\langle p_n \rangle$ je p_n-niz neke neidempotentne algebre ako i samo ako važi bar jedan od sledećih uslova:*

(1) $p_0 > 0$,

(2) $p_n > 0$ *za sve* $n \geq 2$,

(3) $n|p_n$ *za sve* $n \geq 2$,

(4) $p_{2n-1} > 0$ *za sve* $n \geq 1$ *i postoje nenegativni celi brojevi* $a_1, \dots, a_n$ *za koje je* $p_{2n} = \sum_{k=1}^{n} a_k \binom{2n}{2k-1}$.

U dobijanju gornjeg rezultata korišćene su neke duboke tehnike teorije grupa permutacija; naime, detaljno su razmatrani indeksi određenih podgrupa simetričnih grupa permutacija na konačnom skupu, u čemu su ključnu ulogu odigrale teoreme Bocherta i Manninga.

Dalja istraživanja pokazuju da se pitanje karakterizacije predstavljivih nizova još više usložnjava kada naše razmatranje ograničimo samo na konačne algebre (i to konačnog tipa), koje svakako čine najprirodniju klasu za ispitivanje. Kao prvi korak ka toj karakterizaciji, u ovom domenu je sigurno najpoznatija i "najpopularnija" (u smislu da je privukla najviše pažnje u literaturi) **Bermanova hipoteza**, čija je formulacija inspirisana hipotezom Grätzera i Płonke i njenim rešenjem koje je dao Kisielewicz. Ona, naime, tvrdi da je p_n-niz svake konačne algebre ili ograničen konstantom, ili pak strogo monotono rastući počev od nekog svog člana. Prema izloženom, znamo da je ona tačna za sve idempotentne algebre. Jedan od najzapaženijih pokušaja da se ona dokaže jeste nesumnjivo rad Berman, Kisielewicz [9], gde je Bermanova hipoteza potvrđena za jednu klasu algebri, koja je, kako ćemo to videti, široka sa stanovišta klasične algebre.

Naime, za binarnu operaciju $\cdot$ na skupu A kažemo da je **jako sirjektivna** ako važe sledeća dva uslova:

(1) za sve $a \in A$ postoje $b_1, b_2 \in A$ tako da je $a = b_1 b_2 = b_2 b_1$,

(2) za sve $a, b \in A$ postoje $c, d_1, d_2 \in A$ tako da je $a = cd_1$ i $b = cd_2$ ako i samo ako postoje $c_1, c_2, d \in A$ tako da je $a = c_1 d$ i $b = c_2 d$.

Osim toga, za algebru $\mathbf{A}$ kažemo da je totalno simetrična ako su sve njene term operacije totalno simetrične. Glavni rezultat pomenutog rada sada glasi:

TEOREMA 1.3.4. (Berman, Kisielewicz [9]) *Ako konačna algebra* $\mathbf{A}$ *ima jako sirjektivnu binarnu term operaciju, tada ili za sve* $n \geq |A| + 2$ *važi* $p_n(\mathbf{A}) + 1 \leq p_{n+1}(\mathbf{A})$, *ili je* $\mathbf{A}$ *totalno simetrična algebra, u kom slučaju je* $p_n(\mathbf{A}) \leq |A|^{2^{|A|}}$.

Prema tome, gornja teorema uključuje sve konačne algebre sa komutativnom sirjektivnom binarnom term operacijom, kao i sve algebre sa binarnom term operacijom koja ima neutralni element. Tako, Bermanova hipoteza važi za konačne polugrupe sa jedinicom, monoide, grupe, prstene, mreže, itd.

Tokom samog dokaza navedenog tvrđenja, Berman i Kisielewicz pokazuju, između ostalog, i narednu lemu, koja će biti od koristi u daljim razmatranjima.

LEMA 1.3.5. (Berman, Kisielewicz [9]) *Neka je* $\mathbf{A}$ *konačna algebra. Ako su sve njene esencijano* $(n-1)$*-arne i* n*-arne term operacije totalno simetrične, tada je* $p_n(\mathbf{A}) \leq |A|^{2^{|A|}}$.

Odavde direktno dobijamo sledeće.

LEMA 1.3.6. (Willard [105]) *Neka je* $\mathbf{A}$ *konačna algebra. Tada je njen* p_n*-niz ograničen ako i samo ako postoji* $n_0 \in \mathbf{N}$ *tako da je za sve* $n \geq n_0$ *svaka esencijalno* n*-arna term operacija totalno simetrična.*

Dokaz. $(\Rightarrow)$ Pretpostavimo najpre da za proizvoljno veliko n_0 postoji $n \geq n_0$ i $f_n \in E_n(\mathbf{A})$ tako da operacija f_n nije totalno simetrična. To znači da je $G(f_n) \neq S_n$, a po Lemi 1.1.2 za dovoljno veliko n važi i $G(f_n) \neq A_n$. Ako je još i $n \neq 4$, ovo po poznatom stavu iz teorije grupa povlači da je $[S_n : G(f_n)] \geq n$, pa otuda skup $\{f_n^\sigma : \sigma \in S_n\}$ sadrži bar n različitih esencijalno n-arnih operacija, što znači da je $p_n(\mathbf{A}) \geq n$. Dakle, algebra $\mathbf{A}$ nema ograničen p_n-niz.

$(\Leftarrow)$ Neposredno iz prethodne leme. ■

Međutim, deset godina nakon njenog postavljanja, Bermanova hipoteza se pokazala kao netačna. Dokaz te činjenice je dao Willard u upravo citiranom radu [105]. U narednim redovima prikazujemo ovaj rezultat.

LEMA 1.3.7. (Willard [105]) *Za svaku konačnu algebru konačnog tipa* $\mathbf{A}$ *postoji konačna algebra konačnog tipa* $\mathbf{B}$ *tako da je* $p_n(\mathbf{B}) = p_n(\mathbf{A}) + n$ $(n \geq 0)$.

Dokaz. Proširimo najpre jezik algebre $\mathbf{A}$ novim binarnim simbolom m i proširimo $\mathbf{A}$ do algebre $\mathbf{A}'$ tako što ćemo dodefinisati $m^{\mathbf{A}'}(x,y) = x$ za sve $x, y \in A$. S druge strane, neka je $\mathbf{S} = \langle \{0,1\}, \wedge \rangle$ dvoelementna polumreža, $\wedge = m^{\mathbf{S}}$. Konstruišemo algebru $\mathbf{S}'$ tako što za sve operacijske simbole f iz jezika algebre $\mathbf{A}$ definišemo $f^{\mathbf{S}'}(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Najzad, za $\mathbf{B}$ uzimamo $\mathbf{A}' \times \mathbf{S}'$. Traženo tvrđenje sada sledi iz činjenice (koja se lako proverava) da su sa $\langle x_i, x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \rangle$ i $\langle g, 0 \rangle$ (gde g prolazi svim esencijalno n-arnim term operacijama algebre $\mathbf{A}$) iscrpljene sve term operacije algebre $\mathbf{B}$. ■

TEOREMA 1.3.8. (Willard [105]) *Postoji konačna algebra konačnog tipa čiji* p_n*-niz nije ni ograničen, ni strogo monotono rastući počev od nekog svog člana.*

Dokaz. Neka je, najpre, $\langle B, +\rangle$ netrivijalna Booleova grupa. Definišimo operacije $d(x, y, z) = x + y + z$ i $f_a(x) = x + a$ i posmatrajmo algebru $\mathbf{A} = \langle B, d, f_a\rangle_{a\in B}$ (tj. idempotentni redukt B_I Booleove grupe B proširujemo desnim translacijama f_a). Nije teško pokazati da je $p_{2n}(\mathbf{A}) = 0$ i $p_{2n+1}(\mathbf{A}) = |B|$ za sve $n \geq 0$.

Prema tome, ako pođemo od ove algebre, na osnovu prethodne leme dobijamo konačnu algebru sa p_n-nizom $\langle 0, N + 1, 2, N + 3, 4, N + 5, \ldots\rangle$ (gde je $N = |B|$), koji nije ni ograničen, a ni monotono rastući ni od jednog svog člana. Primetimo da traženi primer možemo konstruisati već za $N = 2$ (polazeći od dvoelementne Booleove grupe, tj. od Z_2), pa dobijamo algebru od četiri elementa sa jednom ternarnom, jednom binarnom i dve unarne operacije, koja predstavlja kontraprimer za Bermanovu hipotezu. Ta algebra ima p_n-niz $\langle 0, 3, 2, 5, 4, 7, 6, 9, 8, \ldots\rangle$. ■

Ono što se može primetiti jeste da upravo prikazani kontraprimer ima "patološki" karakter, tj. ni izbliza ne pripada ni jednoj prirodnoj klasi algebri. S druge strane, većina algebri koje susrećemo u udžbenicima klasične algebre zadovoljavaju Bermanovu hipotezu, odnosno, kako ćemo od sada govoriti, imaju **Bermanovo svojstvo**. Može se primetiti da sa tog spiska nedostaju *polugrupe.* Prema tome, možemo da formulišemo

PROBLEM 1. *Da li sve konačne polugrupe imaju Bermanovo svojstvo?*

Kao što smo već naglasili, ovaj problem je samo prvi korak u rešavanju šireg problema predstavljivosti nizova u klasi (konačnih) polugrupa.

PROBLEM 2. *Opisati nizove nenegativnih celih brojeva koji su predstavljivi kao p_n-nizovi neke (lokalno) konačne polugrupe.*

Kada su u pitanju slobodni spektri, treba još da pomenemo probleme koji su vezani za određivanje (lokalno) konačnih algebri, odnosno varijeteta, čiji slobodni spektri imaju zadatu brzinu rasta, tj. dato asimptotsko ponašanje. U tom pogledu, najmanji slobodni spektri $\langle f_n(\mathcal{V})\rangle$ su oni koji su ograničeni polinomom po n. Svetlo na ovu problematiku baca sledeće tvrđenje.

TEOREMA 1.3.9. (Berman [2]) *Neka je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $f_n(\mathcal{V})$ je ograničeno polinomskom funkcijom po n.

(2) Postoji $q(x) \in \mathbf{Q}[x]$ i $n_0 \geq 0$ tako da je $f_n(\mathcal{V}) = q(n)$ za sve $n \geq n_0$.

(3) Postoji $n_0 \geq 0$ tako da je $p_n(\mathcal{V}) = 0$ za sve $n \geq n_0$.

Urbanik [100] je opisao sve idempotentne algebre koje zadovoljavaju uslove gornje teoreme. Nije teško videti da su, kada su polugrupe u pitanju, gornjom teoremom obuhvaćeni tačno svi lokalno konačni varijeteti sadržani u klasi nilpotentnih proširenja pravougaonih traka (koja je jednaka Maljcevljevom proizvodu klase $\mathcal{N}$ nilpotentnih polugrupa i varijeteta $\mathcal{RB}$ pravougaonih traka), što će se moći videti i iz nekih rezultata u trećoj glavi (bar kada su u pitanju konačno generisani varijeteti polugrupa).

Naredna teorema, dobijena u kontekstu teorije pitomih kongruencija, ukazuje na tip slobodnih spektara koji je "sledeći po veličini" nakon polinomskih.

TEOREMA 1.3.10. (Hobby, McKenzie [57]) *Neka je* $\mathbf{A}$ *konačna algebra. Tada je njen slobodni spektar* $\langle f_n(\mathbf{A})\rangle$ *ili ograničen polinomom po* n*, ili za sve* $n \geq 1$ *važi* $f_n(\mathbf{A}) \geq 2^{n-|A|}$.

Drugim rečima, možemo reći da ako slobodni spektar neke konačne algebre nije polinomski ograničen, tada je $\log f_n(\mathbf{A})$ ograničeno odozdo nekom linearnom funkcijom po n. Tako, naredna klasa slobodnih spektara je ona kod kojih je f_n ili polinom po n, ili se $\log f_n$ ponaša *tačno* kao neka linearna funkcija po n. Varijetete sa ovakvim spektrima zovemo **log-linearni varijeteti**. Sasvim precizno, to su oni varijeteti $\mathcal{V}$ za koje postoji realan broj $c > 0$ tako da za sve $n \geq 0$ važi

$$\log f_n(\mathcal{V}) \leq cn.$$

Jasno, uslov log-linearnosti varijeteta je ekvivalentan uslovu da je njegov slobodni spektar sub-eksponencijalan, tj. da za sve $n \geq 0$ važi

$$f_n(\mathcal{V}) \leq ac^n$$

za neke realne konstante $a, c > 0$. Opštije, možemo posmatrati varijetete kod kojih se $\log f_n(\mathcal{V})$ ponaša kao polinom po n stepena r. Motivacija za to dolazi zapravo iz teorije grupa.

TEOREMA 1.3.11. (Neumann [76], Higman [56]) *Neka je* $\mathcal{V}$ *lokalno konačan varijetet grupa. Tada* $f_n(\mathcal{V}) \sim an^r$ *za neko* $a > 0$ *ako i samo ako je* $\mathcal{V}$ *nilpotentan stepena* r *(specijalno, varijetet grupa je log-linearan ako i samo ako je Abelov). U suprotnom,* $f_n(\mathcal{V}) \geq 2^{2^n}$.

Ovaj "grupni" rezultat poslužio je kasnije kao inspiracija za mnoga uopštenja u univerzalnoj algebri. Teorija komutatora Freesea i McKenziea [40] za kongruencijski modularne varijetete, omogućila je generalizaciju pojma nilpotentnosti i prenos mnogih tehnika teorije grupa na druge klase algebri. Na primer, Berman i Blok [8] pokazuju da postoji kongruencijski permutabilna nilpotentna konačna algebra konačnog tipa koja ne generiše log-linearan varijetet. Zaista bogata bibliografija vezana za probleme log-linearnih varijeteta svakako bi sadržala i reference Berman [4], Berman, McKenzie [10], Smith [95] i Dudek, Kisielewicz [34].

U drugoj glavi ovog rada prikazaćemo potpun opis log-linearnih varijeteta polugrupa, dat u radu Crvenković, Ruškuc [27], čime je bio rešen Problem 29 iz preglednog rada Grätzer, Kisielewicz [47].

Najzad, tu su i konačne algebre sa "velikim" slobodnim spektrom, u smislu da je $f_n(\mathbf{A})$ blisko $|A|^{|A|^n}$ (što predstavlja gornje ograničenje za $f_n(\mathbf{A})$, koje se dostiže za **primalne algebre** – algebre za koje je svaka operacija na njihovom osnovnom skupu term operacija). Problemi ovog tipa izučavani su u radovima Murskog [73] i Bermana [6] iz kojih izdvajamo dva najznačajnija rezultata.

TEOREMA 1.3.12. (Murskiĭ [73]) *Neka je* $\mathbf{A}$ *konačna algebra, takva da važi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(\mathbf{A})}{|A|^{|A|^n}} > 0.$$

Tada je svaka idempotentna operacija na skupu A term operacija algebre $\mathbf{A}$.

Za algebru $\mathbf{A}$ kažemo da je **log-maksimalna**, ukoliko je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_{|A|} f_n(\mathbf{A})}{|A|^n} = 1.$$

Primetimo da su sve algebre obuhvaćene prethodnom teoremom upravo takve. Ispostavilo se da log-maksimalnost algebre povlači neke vrlo jake strukturne osobine.

TEOREMA 1.3.13. (Berman [6]) *Ako je konačna algebra* $\mathbf{A}$ *log-maksimalna, tada je ona funkcionalno kompletna i ima samo trivijalni automorfizam.*

Koristeći prethodnu teoremu, kao i još jedan rezultat opšteg karaktera, u narednoj glavi ćemo pokazati da ne postoje log-maksimalne polugrupe, što je glavni rezultat rada Dolinka [31].

2. Slobodni spektri polugrupa

U drugoj glavi ovog rada pokazujemo dva rezultata vezana za slobodne spektre polugrupa, odnosno varijeteta polugrupa. Reč je (u smislu prethodne glave) o polugrupama i polugrupnim varijetetima koji imaju "ekstremalne" slobodne spektre. Najpre su potpuno opisani log-linearni varijeteti polugrupa, dakle, lokalno konačni polugrupni varijeteti sa malim slobodnim spektrom. Zatim je pokazano da ne postoje konačne polugrupe čiji je slobodni spektar asimptotski maksimalan (tj. log-maksimalan). Kao posledica ovog rezultata, dobija se uopštenje teoreme Maurer-Rhodesa, odnosno opis svih funkcionalno kompletnih konačnih polugrupa. Na kraju glave, postavljeni su neki problemi u vezi sa postojanjem konačnih polugrupa sa raznim tipovima slobodnih spektara, polazeći od poznatih tvrđenja Neumanna i Higmana o slobodnim spektrima varijeteta grupa.

2.1. Log-linearni varijeteti polugrupa

Grätzer i Kisielewicz su u [47] kao Problem 29 postavili pitanje karakterizacije log-linearnih varijeteta polugrupa. Podsetimo, lokalno konačan varijetet *grupa* ima log-linearni slobodni spektar ako i samo ako je on Abelov. Prema tome, prirodno je očekivati da traženi varijeteti polugrupa zadovoljavaju neki zakon (ili zakone) koji u klasi polugrupa predstavlja uopštenje komutativnog zakona za grupe.

PRIMER 2.1.1. Kao što smo ranije videli, varijetet polumreža $\mathcal{SL}$ ima slobodni spektar $f_n(\mathcal{SL}) = 2^n - 1 < 2^n$, pa je on log-linearan. Takođe, nije teško pokazati da za varijetet $\mathcal{NB}$ normalnih traka (idempotentnih polugrupa koje zadovoljavaju **medijalni identitet** $xyzt = xzyt$) važi $p_n(\mathcal{NB}) = n^2$, pa je otuda

$$f_n(\mathcal{NB}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k(\mathcal{NB}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 \leq$$

$$\leq n^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n^2 2^n \leq 3^n 2^n = 6^n.$$

Dakle, $\mathcal{NB}$ je takođe log-linearan varijetet.

Navedeni problem rešili su Crvenković i Ruškuc u radu [27]. Ovde ćemo prikazati to rešenje.

TEOREMA 2.1.2. (Crvenković, Ruškuc [27]) *Neka je $\mathcal{V}$ varijetet polugrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *Varijetet $\mathcal{V}$ je log-linearan.*

(ii) *Postoje prirodni brojevi $k \geq l \geq 1$, $m \geq 2$ i netrivijalna permutacija $\sigma \in S_m$ tako da $\mathcal{V}$ zadovoljava identitete*

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^l, & (1)\\ x_1 x_2 \dots x_m &= x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(m)}. & (2) \end{aligned}$$

(iii) *Postoje prirodni brojevi $k \geq l \geq 1$ i $m > i \geq 1$ tako da $\mathcal{V}$ zadovoljava identitet (1) i*

$$x_1 \dots x_i x_{i+1} \dots x_m = x_1 \dots x_{i+1} x_i \dots x_m. \qquad (3)$$

Dokaz. *(i)⇒(ii)* Neka je $\mathcal{V}$ log-linearni varijetet polugrupa i F njegova slobodna polugrupa nad prebrojivim skupom generatora. Tada je niz $\langle f_n(F) \rangle$ subeksponencijalan, tj. postoje realni brojevi $a, c > 0$ tako da je $f_n(F) \leq ac^n$ za sve $n \geq 0$. Specijalno, $f_1(F)$ je konačan broj, pa F (a tako i $\mathcal{V}$) zadovoljava identitet oblika (1).

Odaberimo sada prirodan broj $m \geq 0$, takav da važi $m! > ac^m$. Po izboru m, term operacije $x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(m)} = l_m^\sigma$, $\sigma \in S_m$ ne mogu biti sve različite, pa postoje različite permutacije $\rho, \tau \in S_m$ tako da u S važi $l_m^\rho = l_m^\tau$, odakle sledi $l_m = l_m^\sigma$ za $\sigma = \rho \circ \tau^{-1}$. To znači da F, odnosno $\mathcal{V}$, zadovoljava identitet tipa (2).

(ii)⇔(iii) Ovo je pokazano u [79], Leme 19 i 20. Takođe, vrlo je lako dokazati ovu ekvivalenciju uz pomoć Teoreme 2 iz rada [90].

(iii)⇒(i) Neka F označava, kao i u prvom delu dokaza, slobodnu polugrupu varijeteta $\mathcal{V}$ nad prebrojivim skupom generatora. Na osnovu identiteta (3) očito sledi da je operacija $z_1 z_2 \dots z_r$ polugrupe F (gde je $r \geq m$ i $z_j \in \{x_1, \dots, x_n\}$

za sve $1 \leq j \leq r$) invarijantna na transpoziciju bilo kojeg para promenljivih iz skupa $\{z_i, \dots, z_{r+i-m+1}\}$. Stoga svaka n-arna term operacija polugrupe F može biti zapisana u obliku

$$y_1 \dots y_{i-1} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} y_{i+2} \dots y_m,$$

gde je $y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+2}, \dots, y_m \in \{x_1, \dots, x_n\}$ i $0 \leq \alpha_j \leq k$ za sve $1 \leq j \leq n$, ili u obliku

$$y_1 y_2 \dots y_p,$$

gde je $p < m$ i $y_1, \dots, y_p \in \{x_1, \dots, x_n\}$. Sada važi

$$f_n(\mathcal{V}) = f_n(F) \leq n^{m-2}(k+1)^n + n + n^2 + \dots + n^{m-1} = A_n.$$

Međutim, niz $\langle A_n \rangle_{n \geq 0}$ je očito sub-eksponencijalan, pošto nastaje sabiranjem i množenjem po komponentama sub-eksponencijalnih nizova $\langle (k+1)^n \rangle_{n \geq 0}$ i $\langle n^q \rangle_{n \geq 0}$ za $q = 1, 2, \dots, m-1$. Prema tome, varijetet $\mathcal{V}$ je log-linearan. ∎

Iz prethodne teoreme imamo sledeću očitu posledicu. Primetimo da se na osnovu nje može konstruisati efektivan algoritam koji za datu konačnu polugrupu proverava da li ona generiše log-linearan varijetet.

POSLEDICA 2.1.3. *Neka je S konačna polugrupa i $q \in \mathbf{N}$ tako da je $S^q = S^{q+1}$. Tada S generiše log-linearan varijetet ako i samo ako važi*

$$abcd = acbd$$

za sve $a, d \in S^q$ i $b, c \in S$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Polugrupa S mora zadovoljavati identitet oblika (3), jer generiše log-linearan varijetet. Kako za sve $k \in \mathbf{N}$ važi $S^q \subseteq S^k$, to sledi $Im(x_1 \dots x_{i-1}) = S^{i-1} \supseteq S^q$ za $i \geq 2$, a takođe i $Im(x_{i+2} \dots x_n) = S^{n-i-1} \supseteq S^q$ za $i \leq n-2$. Sada tvrđenje sledi neposredno, interpretacijom identiteta (3) u polugrupi S.

($\Leftarrow$) Iz uslova konačnosti polugrupe S sledi da ona mora da zadovoljava identitet oblika (1). Dalje, uslov da je $abcd = acbd$ za sve $a, d \in S^q$, $b, c \in S$ je ekvivalentan identitetu

$$x_1 \dots x_q x_{q+1} x_{q+2} x_{q+3} \dots x_{2q+2} = x_1 \dots x_q x_{q+2} x_{q+1} x_{q+3} \dots x_{2q+2},$$

što je upravo (3) za $i = q+1$ i $n = 2q+2$. Po prethodnoj teoremi, S generiše log-linearan varijetet. ∎

Osim toga, konačne polugrupe koje generišu log-linearne varijetete možemo sada, na osnovu prethodne posledice, i strukturno opisati.

POSLEDICA 2.1.4. *Konačna polugrupa S generiše log-linearan varijetet ako i samo ako je S nilpotentno proširenje medijalne polugrupe.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Kako je polugrupa S konačna, to mora biti $S^q = S^{q+1}$ za neko $q \geq 1$. Po prethodnoj posledici, S^q zadovoljava medijalni identitet, tj. reč je o medijalnoj polugrupi. Kako je S uvek nilpotentno proširenje svog ideala S^q indeksa q, to tvrđenje sledi.

($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je konačna polugrupa S nilpotentno proširenje svog medijalnog ideala I (indeksa q). Tada je $S^q \subseteq I$, pa za sve $a, b, c, d \in S^q$ važi $abcd = acbd$. To u stvari znači da S zadovoljava identitet

$$x_1 \dots x_q y_1 \dots y_q z_1 \dots z_q x_{q+1} \dots x_{2q} = x_1 \dots x_q z_1 \dots z_q y_1 \dots y_q x_{q+1} \dots x_{2q},$$

što je za $m = 4q$ očito identitet oblika (2). Kako je S trivijalno periodična polugrupa, ona zadovoljava identitet oblika (1). Po Teoremi 2.1.2 *(ii)*, S generiše log-linearan varijetet. ∎

2.2. Nepostojanje log-maksimalnih polugrupa

Log-maksimalne algebre definisali smo na samom kraju prethodne, prve glave. Reč je, prosto rečeno, o konačnim algebrama čiji je slobodni spektar (tj. broj n-arnih term operacija) asimptotski blizak maksimalnom mogućem, a to je $|A|^{|A|^n}$. Kao što smo rekli, jednakost za sve n se dostiže za primalne algebre. U ovom odeljku izlažemo glavni rezultat rada [31] koji tvrdi da log-maksimalnih polugrupa nema.

U dokazu će, između ostalog, od ključnog značaja biti sledeće univerzalno-algebarsko tvrđenje. Podsetimo, neka algebra je **funkcionalno kompletna** ako su sve operacije konačne arnosti na njenom osnovnom skupu algebarske, tj. ako se mogu predstaviti polinomskim izrazom (termom na jeziku algebre koji je proširen njenim elementima kao konstantama) odgovarajućeg tipa.

TEOREMA 2.2.1. (Werner [104]) *Neka je* $\mathbf{A}$ *proizvoljna netrivijalna algebra koja generiše kongruencijski permutabilan varijetet. Tada je* $\mathbf{A}$ *funkcionalno kompletna ako i samo ako je mreža kongruencija algebre* $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ *izomorfna četvoroelementnoj mreži* $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$, *gde* $\mathbf{2}$ *označava dvoelementni lanac.*

TEOREMA 2.2.2. (Dolinka [31]) *Neka je S konačna polugrupa. Tada S nije log-maksimalna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S log-maksimalna konačna polugrupa. Tada je S po Teoremi 1.3.13 funkcionalno kompletna i stoga i prosta (u smislu da nema netrivijalne kongruencije – nezgodno je što ovaj termin u teoriji polugrupa označava polugrupe koje nemaju pravih ideala, koje, međutim, mogu imati netrivijalne kongruencije). Sada razmatramo tri slučaja.

Ako S nema nulu, a ima bar tri elementa, tada po Teoremi III.6.2 iz [58] S mora biti prosta grupa. Kako po Teoremi 1.3.13 S nema netrivijalnih automorfizama, to su svi unutrašnji grupni automorfizmi $\sigma_a(x) = a^{-1}xa$ identička preslikavanja, što je ekvivalentno tvrđenju da je polugrupa S komutativna. Sledi da je S ciklična grupa prostog reda. Jednostavno se pokazuje da $Z_p \times Z_p$ ima pet kongruencija, tačnije da je mreža kongruencija ove grupe dijamant-mreža. Kako je S po pretpostavci funkcionalno kompletna, dobijamo kontradikciju sa Teoremom 2.2.1. Naravno, u prethodnim razmatranjima je potpuno svejedno da li posmatramo S kao polugrupu ili grupu, budući da se, zbog konačnosti S, jedinica i operacija inverza u grupi mogu izraziti preko binarne operacije u S.

Drugi slučaj je kada S ima nulu 0. Ali, tada S sigurno nije funkcionalno kompletna, jer za svaku unarnu polinomsku operaciju f na S mora biti $f(0) = 0$. Na taj način, ni jedna nekonstantna unarna operacija na S koja ne zadovoljava ovaj uslov ne može biti predstavljena polugrupnim polinomom.

Najzad, preostaje da se ispitaju dvoelementne polugrupe. Njih, do na izomorfizam ima samo pet: dvoelementna polumreža ($f_n = 2^n - 1$), polugrupe levih i desnih nula ($f_n = n$), nulta polugrupa ($f_n = n + 1$) i ciklična grupa Z_2 ($f_n = 2^n$). Time je dokaz kompletiran. ∎

Iz gornjeg dokaza se odmah dobija generalizacija poznate teoreme Maurer-Rhodesa o funkcionalno kompletnim konačnim grupama.

POSLEDICA 2.2.3. *Jedine konačne funkcionalno kompletne polugrupe su trivijalna polugrupa i nekomutativne proste grupe.*

S druge strane, postoje konačne polugrupe sa log-eksponencijalnim slobodnim spektrom (reč je o slobodnom spektru za koji je $\log f_n$ ograničeno odozdole eksponencijalnom funkcijom c^n za neko $c > 1$), što dobijamo upravo iz rezultata za varijetete grupa iz prethodne glave, naime, iz Teoreme 1.3.11.

PRIMER 2.2.4. Neka je G proizvoljna konačna grupa koja nije nilpotentna (npr. dijedarska grupa D_3 ili bilo koja nerešiva grupa, kao npr. A_n za $n \geq 5$). Neka je S Reesova matrična polugrupa $\mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$, gde su I, Λ proizvoljni konačni skupovi. Jasno, binarni redukt grupe G se može potopiti u S, pa zato svi binarni redukti grupa iz varijeteta $\mathcal{W} = \mathsf{HSP}(G)$ pripadaju varijetetu $\mathcal{V} = \mathsf{HSP}(S)$. To, naravno, važi i za $\mathcal{W}$-slobodnu grupu $F_{\mathcal{W}}(n)$. Pošto je ova grupa konačna, ona je n-generisana i kao polugrupa, pa je reč o homomorfnoj slici polugrupe $F_{\mathcal{V}}(2n)$. Zbog toga je $f_n(S) \geq f_n(G)$. Iz ove nejednakosti i Teoreme 1.3.11 sledi

$$f_n(S) \geq 2^{2^n}.$$

Na taj način dobijamo beskonačno mnogo neizomorfnih konačnih prostih polugrupa (u smislu ideala), koje nisu redukti grupa, sa log-eksponencijalnim slobodnim spektrom.

Prethodni primer daje motivaciju za sledeći problem.

PROBLEM 3. *Opisati sve konačne polugrupe sa log-eksponencijalnim slobodnim spektrom. Da li postoji donja granica oblika c^n $(c > 1)$ za $\log f_n(S)$ za sve takve polugrupe?*

U prethodnom odeljku smo dali karakterizaciju log-linearnih konačnih polugrupa. Naredni primer pokazuje da postoje lokalno konačni varijeteti polugrupa čini slobodni spektar nije ni log-linearan, ali ni log-eksponencijalan.

PRIMER 2.2.5. Neka je $\mathcal{V}$ varijetet polugrupa definisan identitetom $xyx = z^2$. Lakim kombinatornim argumentom se pokazuje da je $f_n(\mathcal{V})$ zapravo broj svih nizova elemenata skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ sa različitim članovima, tj.

$$f_n(\mathcal{V}) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = [en!].$$

(Ovi brojevi imaju veliki značaj u Ramseyevoj teoriji, pošto $[en!] + 1$ čvorova u kompletnom grafu čije su grane obojene u n boja garantuje postojanje monohromatskog trougla, videti npr. [15]). Po Stirlingovoj formuli imamo da je

$$\log f_n(\mathcal{V}) \sim n \log n.$$

Tako, $\log f_n(\mathcal{V})$ se može ograničiti kvadratnim (ali ne i linearnim) polinomom po n. Međutim, varijetet $\mathcal{V}$ nije konačno generisan (generisan konačnom algebrom), što se između ostalog vidi i izračunavanjem slobodnih spektara konačno generisanih $\mathcal{V}$-slobodnih polugrupa:

$$f_n(F_{\mathcal{V}}(m)) = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} k!,$$

što je za $n > m$ strogo manje od $f_n(\mathcal{V})$.

Na taj način, gornji primer otvara sledeći problem.

PROBLEM 4. *Da li postoji konačna polugrupa čiji slobodni spektar nije ni log-linearan, ni log-eksponencijalan?*

Negativan odgovor na gornje pitanje bi, naravno, trivijalno rešio Problem 3. Međutim, ako je odgovor pozitivan, onda se prethodno pitanje može i detaljnije ispitivati.

PROBLEM 5. *Ako Problem 4 ima pozitivno rešenje, da li postoji konačna polugrupa sa log-polinomskim slobodnim spektrom koja nije log-linearna? Ako da, opisati sve takve polugrupe. Da li postoji konačna polugrupa čiji slobodni spektar nije ni log-polinomski, ni log-eksponencijalan?*

3. Polugrupe i p_n-nizovi

Naredna glava se bavi problemima predstavljivosti nizova u klasi (konačnih) polugrupa. Najpre dajemo prikaz nekih ranijih rezultata u vezi sa p_n-nizovima idempotentnih polugrupa (Gerhardovi rezultati o predstavljivosti nizova u klasi idempotentnih polugrupa [43] i Płonkin opis svih polugrupa koje zadovoljavaju nejednakost $p_n(S) \leq n$ [85, 86]). Zatim izlažemo rešenja dva tipična problema predstavljivosti, za konstantne nizove i za niz potpunih kvadrata. Na kraju, date su dve karakterizacije (u čijem je dobijanju učestvovao i autor ovog rada) polugrupa sa konstantno ograničenim i polinomski ograničenim (dakle, sporo rastućim) p_n-nizom, pri čemu je razmatranje suženo samo na konačne polugrupe.

3.1. O p_n-nizovima idempotentnih polugrupa

Verovatno prvi rezultat uopšte o p_n-nizovima (varijeteta) polugrupa sadržan je u radu Green, Rees [54]. Naravno, budući da je reč o radu iz 1952. godine, originalna formulacija donjeg tvrđenja uopšte ne pominje p_n-nizove i razlikuje se od ove koju dajemo. Međutim, uz terminologiju koju sada koristimo, taj rezultat može da se preformuliše na sledeći način.

TEOREMA 3.1.1. (Green, Rees [54]) *Neka je $\mathcal{B}$ varijetet svih traka (idempotentnih polugrupa). Tada je $p_0(\mathcal{B}) = 0$, $p_1(\mathcal{B}) = 1$ i $p_n(\mathcal{B}) = n^2(p_{n-1}(\mathcal{B}))^2$ za sve $n \geq 2$.*

Kao što je to već rečeno u prvoj glavi, krajem 60-tih i početkom 70-tih godina, jedan od glavnih problema u oblasti p_n-nizova bio je ispitivanje p_n-nizova idempotentnih algebri. U tom kontekstu je nastao i rad Gerharda [43], koji je opisao

p_n-nizove za sve varijetete idempotentnih polugrupa. Taj opis je suštinski zavisio od njegovog prethodnog rada [42] (reč je o rezimeu njegove doktorske teze) u kojem je u potpunosti opisana mreža svih varijeteta idempotentnih polugrupa. Između ostalih, ovi varijeteti imaju sledeće interesantno svojstvo.

TEOREMA 3.1.2. (Gerhard [42]) *Svaki varijetet idempotentnih polugrupa je definisan, sem idempotentnog zakona, samo jednim identitetom.*

Više o problematici mreže varijeteta idempotentnih polugrupa može se naći još i u radovima [11, 38].

Gerhard svoje razmatranje deli u dva slučaja: posebno se posmatraju varijeteti koji sadrže, odnosno ne sadrže varijetet normalnih traka $\mathcal{NB}$. Svi varijeteti traka drugog tipa su dobro poznati (varijeteti trivijalnih polugrupa, polugrupa levih i desnih nula, pravougaonih traka, polumreža, levo i desno normalnih traka i varijeteti traka definisani identitetima $xyx = xy$, odnosno $xyx = yx$), pa tako odmah imamo sledeće tvrđenje.

TEOREMA 3.1.3. (Gerhard [43]) *Neka je $\mathcal{V}$ varijetet idempotentnih polugrupa koji ne sadrži varijetet normalnih traka $\mathcal{NB}$. Tada važi jedno od sledećih šest tvrđenja:*

(1) $p_n(\mathcal{V}) = 0$ *za sve* $n \geq 1$,

(2) $p_1(\mathcal{V}) = 1$ *i* $p_n(\mathcal{V}) = 0$ *za sve* $n \neq 1$,

(3) $p_0(\mathcal{V}) = 0$, $p_1(\mathcal{V}) = 1$, $p_2(\mathcal{V}) = 2$ *i* $p_n(\mathcal{V}) = 0$ *za sve* $n \geq 3$,

(4) $p_0(\mathcal{V}) = 0$ *i* $p_n(\mathcal{V}) = 1$ *za sve* $n \geq 1$,

(5) $p_n(\mathcal{V}) = n$ *za sve* $n \geq 0$,

(6) $p_n(\mathcal{V}) = 0$ *i* $p_n(\mathcal{V}) = n!$ *za sve* $n \geq 1$.

Za polugrupu S sa operacijom $\cdot$, definišemo **dualnu polugrupu** $\widetilde{S}$ nad istim osnovnim skupom S, a sa operacijom $*$ koja je data sa $x * y = y \cdot x$. Za klasu polugrupa $\mathcal{K}$, neka $\widetilde{\mathcal{K}}$ označava klasu svih polugrupa dualnih polugrupama iz $\mathcal{K}$. Klasa $\mathcal{K}$ je **centralna**, ukoliko je $\mathcal{K} = \widetilde{\mathcal{K}}$.

TEOREMA 3.1.4. (Gerhard [43]) *Neka je $\mathcal{V}$ centralan varijetet idempotentnih polugrupa koji sadrži varijetet $\mathcal{NB}$. Tada je niz $p_n(\mathcal{V})$ jednak nekom od nizova $a_n(s)$, $a_n(\bar{s})$ $(s \geq 3)$, koji su za sve $n \geq 0$ dati sa $a_n(3) = n^2$, $a_n(\bar{3}) = (n!)^2$ i sledećim rekurentnim relacijama $(s \geq 4)$:*

(1) $a_n(s) = p_n(\mathcal{B})$ *za* $n < s$ *i*

$$a_n(s) = n^2(p_{s-2}(\mathcal{B}))^2 \prod_{k=s-1}^{n-1} k^2 a_k(s-1)$$

za sve $n \geq s$,

(2) $a_n(\bar{s}) = p_n(\mathcal{B})$ *za* $n < s$ *i*

$$a_n(\bar{s}) = n^2(p_{s-2}(\mathcal{B}))^2 \prod_{k=s-1}^{n-1} k^2 a_k(\overline{s-1})$$

za sve $n \geq s$.

Neka sada za dati varijetet idempotentnih polugrupa $\mathcal{V}$, $\overline{\mathcal{V}}$, odnosno $\underline{\mathcal{V}}$ redom označava najmanji centralan varijetet idempotentnih polugrupa koji sadrži $\mathcal{V}$, odnosno najveći centralan varijetet idempotentnih polugrupa sadržan u $\mathcal{V}$. Uz pomoć ovih oznaka, prethodne i naredne teoreme, možemo opisati p_n-nizove svih varijeteta traka koji sadrže varijetet $\mathcal{NB}$.

TEOREMA 3.1.5. (Gerhard [43]) *Za sve varijetete traka* $\mathcal{V}$ *važi*

$$p_n(\mathcal{V}) = \sqrt{p_n(\overline{\mathcal{V}})p_n(\underline{\mathcal{V}})}$$

za sve $n \geq 0$.

Pažljivom analizom načina na koji se opisani nizovi dobijaju, Gerhard u [43] izvodi jedan interesantan zaključak koji precizira prethodna tvrđenja.

TEOREMA 3.1.6. *Svaki niz* $\langle p_n \rangle$ *predstavljiv u klasi idempotentnih polugrupa je u potpunosti određen parom brojeva* $\langle a, b \rangle$, *gde je* a *najmanji indeks* n *za koji važi* $p_n \neq p_n(\mathcal{B})$ *i* $b = p_{a+1}$.

U kontekstu prethodno izloženog, od interesa je opisati klase polugrupa koje imaju u izvesnom smislu "pravilne" p_n-nizove. Na primer, kao ilustraciju problema ovog tipa možemo tražiti sve polugrupe (odnosno varijetete polugrupa) za koje je $p_n = n$ Imajući u vidu gornje rezultate, reč je o polugrupama sa veoma "sporo" rastućim p_n-nizom (sve takve konačne polugrupe biće opisane u poslednjem odeljku ove glave). Kako je tada specijalno $p_0 = 0$ i $p_1 = 1$, reč je sigurno o idempotentnim polugrupama. Rešenje ovog problema dao je 1971. Płonka u radu [85]. On je, u stvari, opisao sve *algebre* sa ovim svojstvom, odakle se, kao specijalni slučaj, dobija sledeći rezultat za polugrupe. (Naravno, njega smo mogli dobiti i direktno iz prethodnih teorema Gerharda.)

TEOREMA 3.1.7. (Płonka [85]) *Neka je $\mathcal{V}$ varijetet polugrupa. Tada važi $p_n(\mathcal{V}) = n$ za sve $n \geq 0$ ako i samo ako je $\mathcal{V}$ varijetet levih ili desnih normalnih traka (traka koje zadovoljavaju identitete $xyz = yxz$, odnosno $xyz = xzy$). Prema tome, polugrupa S ima p_n-niz $\langle 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \rangle$ ako i samo ako generiše jedan od ova dva varijeteta.*

Primetimo da su varijeteti opisani u prethodnoj teoremi međusobno dualni.

Osim toga, Płonka [86] iste godine daje i karakterizaciju svih algebri za koje je $p_n \leq n$. Prenošenjem tog rezultata za polugrupe, ili, alternativno, iz Teorema 3.1.3, 3.1.4 i 3.1.5 (jer je tada $p_0 = 0$ i $p_1 \leq 1$, znači $p_1 = 1$, pa je ponovo reč o trakama), dobijamo da važi

TEOREMA 3.1.8. (Płonka [86]) *Svi varijeteti polugrupa $\mathcal{V}$ koji za sve $n \geq 0$ zadovoljavaju nejednakost $p_n(\mathcal{V}) \leq n$ su, sem onih opisanih u Teoremi 3.1.7, varijeteti trivijalnih polugrupa, polugrupa levih i desnih nula, polumreža i pravougaonih traka.*

Prirodno, sledeće pitanje koje se postavlja nakon ovih tvrđenja je opis (varijeteta) polugrupa za koje je $p_n = n^2$. Taj opis dajemo u narednom odeljku.

3.2. Polugrupe za koje je $p_n = n^2$

U ranije već pominjanom preglednom radu [47], Grätzer i Kisielewicz su postavili hipotezu da za varijetet polugrupa $\mathcal{V}$ važi $p_n(\mathcal{V}) = n^2$ ako i samo ako je $\mathcal{V}$ varijetet normalnih traka (dakle, varijetet definisan identitetima $x^2 = x$, $xyzt = xzyt$). Ovo je ekvivalentno tvrđenju da je $p_n(S) = n^2$ ako i samo ako polugrupa S generiše opisani varijetet. Ispostavilo se da je ova hipoteza tačna, što su pokazali Crvenković i Ruškuc u radu [25]. Njen dokaz se sastoji iz dve leme.

LEMA 3.2.1. *Neka polugrupa S generiše varijetet normalnih traka. Tada je $p_n(S) = n^2$ za sve $n \geq 0$.*

Dokaz. Po uslovu leme, polugrupa S je idempotentna, pa mora biti $p_0(S) = 0$ i $p_1(S) = 1$. Takođe, sve binarne term operacije polugrupe S su sadržane u skupu $\{xy, yx, xyx, yxy\}$. Kako S generiše varijetet normalnih traka $\mathcal{NB}$, to S zadovoljava tačno one identitete koje važe na celom varijetetu $\mathcal{NB}$. Zato u S mora da važi $xy \neq x$, $xy \neq y$ i $xy \neq yx$.

Ukoliko bi bilo $p_2(S) \neq 4$, tada bismo imali $xyx \in \{x, y, xy, yx, yxy\}$. Sada mogu nastupiti sledeći slučajevi:

$$xyx = x \;\Rightarrow\; xyz = xyzxyz = xyxzyz = xz,$$

$$xyx = y \;\Rightarrow\; xy = xyxy = y^2 = y,$$

$$xyx = xy \;\Rightarrow\; xyz = xyzx = xzyx = xzy,$$

$$xyx = yx \;\Rightarrow\; xyz = zxyz = zyxz = yxz,$$

$$xyx = yxy \;\Rightarrow\; xyx = xyxx = yxyx = yx \;\Rightarrow\; xyz = yxz.$$

U svakom od pet slučajeva dobijamo da S zadovoljava neki identitet koji ne važi na varijetetu $\mathcal{NB}$, što je kontradikcija sa pretpostavkom leme. Prema tome, mora biti $p_2(S) = 4$.

Najzad, neka je $n \geq 3$. Označimo sa l_n term operaciju $x_1x_2\ldots x_n$ na polugrupi S i za $1 \leq i, j \leq n$ posmatrajmo term operacije $x_il_nx_j$. One su sve različite, jer iz pretpostavke $i \neq p$ i

$$x_il_nx_j = x_pl_nx_q$$

sledi (zamenom $x_i = x$ i $x_k = y$ za $k \neq i$) da na S važi $xy = yxy$ ili $xy = yx$, što je nemoguće. Analogno eliminišemo mogućnost da je $j \neq q$. Dalje, sve pobrojane operacije su esencijalno n-arne, jer zamenom $x_r = x$ (gde je $1 \leq r \leq n$) i $x_k = y$ za sve $k \neq r$, operacija $x_il_nx_j$ postaje jedna od xy, yx, xyx, yxy. Na taj način, posmatrana operacija zavisi od promenljive x_r.

Na kraju, vrlo je lako pokazati da je na S svaka esencijalno n-arna term operacija navedenog oblika. Otuda sledi da je $p_n(S) = n^2$. ∎

LEMA 3.2.2. *Neka je S polugrupa sa osobinom da je $p_n(S) = n^2$ za sve $n \geq 0$. Tada važi:*

(i) *Polugrupa S je idempotentna.*

(ii) *Operacije xy, yx, xyx, yxy su esencijalno binarne i različite na S.*

(iii) *$l_4 = x_1x_2x_3x_4$ je esencijalno 4-arna operacija na S.*

(iv) *Ako je $\sigma \in G(l_4)$, tada je $\sigma(1) = 1$ i $\sigma(4) = 4$.*

(v) *S je normalna traka.*

(vi) *Identiteti $x = y$, $xy = x$, $xy = y$, $xy = yx$ i $xyz = xz$ ne važe na S.*

(vii) *Identiteti $xyz = xzy$ i $xyz = yxz$ ne važe na S.*

(viii) *S generiše varijetet normalnih traka.*

Dokaz. *(i)* Očevidno.

(ii) Sledi iz $p_2(S) = 4$, kao i činjenice da su sve binarne term operacije proizvoljne idempotentne polugrupe sadržane u skupu $\{x, y, xy, yx, xyx, yxy\}$.

(iii) Neka je $1 \leq i \leq 4$. Zamenom $x_i = x$, $x_j = y$ za $j \neq i$, operacija l_4 postaje jedna od xy, yx, yxy. Po *(ii)*, sve ove operacije su esencijalno binarne, pa tako l_4 zavisi od x_i.

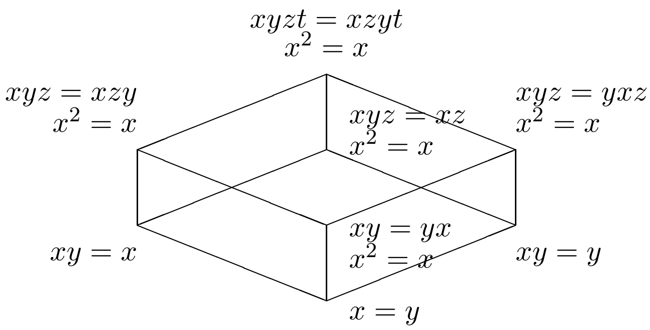
(iv) Pretpostavimo da je $\sigma \in G(l_4)$ i $\sigma(1) \neq 1$. Tada, uz zamenu $x_1 = x$, $x_2 = x_3 = x_4 = y$, sledi da $xy \in \{yx, yxy\}$, što je kontradikcija sa *(ii)*. Analogno pokazujemo da je $\sigma(4) = 4$.

(v) Kako je $p_4(S) = 16$ i $|S_4| = 24$, to postoje dve različite permutacije $\rho, \tau \in S_4$ tako da je $l_4^\rho = l_4^\tau$, odakle je $l_4 = l_4^\sigma$ za $\sigma = \rho \circ \tau^{-1}$ (primetimo da tada σ nije identičko preslikavanje). Kako po *(iv)* mora biti $\sigma(1) = 1$ i $\sigma(4) = 4$, to je $\sigma(2) = 3$ i $\sigma(3) = 2$, pa na S važi identitet $x_1x_2x_3x_4 = x_1x_3x_2x_4$.

(vi) Očevidno.

(vii) Pretpostavimo da S zadovoljava $xyz = xzy$. Tada je $xyx = xxy = xy$, što je kontradikcija sa *(ii)*. Analogno isključujemo mogućnost da na S važi $xyz = yxz$.

(viii) Sledi iz *(v)*, *(vi)* i *(vii)* i poznate činjenice (vidi Evans [36]) da je mreža podvarijeteta varijeteta normalnih traka data sledećim dijagramom:



■

Iz prethodne dve leme se sada direktno dobija

TEOREMA 3.2.3. (Crvenković, Ruškuc [25]) *Neka je $\mathcal{V}$ varijetet polugrupa. Tada je $p_n(\mathcal{V}) = n^2$ ako i samo ako je $\mathcal{V}$ varijetet normalnih traka.*

Napomenimo na kraju da su radu [26] opisani svi grupoidi koji imaju niz potpunih kvadrata kao p_n-niz. Pokazalo se da su to, osim ovde opisanih polugrupa, grupoidi koji generišu varijetete levih, odnosno desnih pravougaonih grupoida (vidi [24]).

3.3. Polugrupe sa konstantnim p_n-nizom

Naš cilj u ovom odeljku je da damo opis svih polugrupa sa konstantnim p_n-nizom. Naravno, kada kažemo "konstantnim", mislimo "konstantnim sa izuzetkom p_0", tako da je problem koji ovde razmatramo u stvari problem predstavljivosti niza $\langle 0, k, k, k, \ldots \rangle$ za ceo broj $k \geq 1$. Naime, ako je $p_0 > 0$, situacija je u slučaju polugrupa znatno olakšana, kao što to pokazuje sledeća

LEMA 3.3.1. *Neka je S polugrupa. Ako je $p_0(S) > 0$, tada je $p_0(S) = 1$, tj. polugrupa može imati najviše jednu konstantnu unarnu term operaciju.*

Dokaz. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju leme, da S ima dve konstantne unarne term operacije. Tada postoje $a, b \in S$ i $m, n \geq 1$ tako da je $x^m = a$ i $x^n = b$ za sve $x \in S$. Ali, tada za proizvoljno $s \in S$ imamo:

$$a = (s^n)^m = s^{mn} = (s^m)^n = b,$$

kontradikcija. ∎

PROBLEM 6. *Opisati sve polugrupe S za koje je $p_0(S) > 0$, tj. $p_0(S) = 1$.*

Dakle, ako razmatramo doslovno konstantne p_n-nizove polugrupa, prethodna lema povlači da je jedini takav niz koji je predstavljiv (u klasi polugrupa) niz $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$. S druge strane, nije teško videti da su jedine polugrupe koje predstavljaju ovaj niz Booleove grupe, vidi Primer 1.2.4.

U onom što sledi, pokazaćemo da je rešenje postavljenog problema dato sledećom teoremom.

TEOREMA 3.3.2. *(1) Niz $\langle 0, 1, 1, 1, \ldots \rangle$ je p_n-niz polugrupe S ako i samo ako je S netrivijalna polumreža.*

(2) Niz $\langle 0, 2, 2, 2, \ldots \rangle$ je p_n-niz polugrupe S ako i samo ako S generiše varijetet definisan identitetima

$$x^3 = x^2, \ xy = yx, \ x^2y = xy^2.$$

(3) Za $k \geq 3$ niz $\langle 0, k, k, k, \ldots \rangle$ nije predstavljiv u klasi polugrupa.

Primetimo da je tačka (1) gornje teoreme već pokazana u Primeru 1.2.3. Dokaz preostalih tačaka biće izložen kroz naredni niz lema i propozicija. Najpre nam je potreban izvestan broj lema opšteg karaktera. Prva od njih se sastoji od nekoliko očitih primedbi, pa je dajemo bez dokaza.

LEMA 3.3.3. *Neka je S polugrupa za koju je $p_0(S) = 0$ i $p_1(S) = k > 0$. Tada važi:*

(1) $x, x^2, \dots, x^k$ su različite esencijalno unarne term operacije na S,

(2) S zadovoljava identitet $x^{k+1} = x^m$ za neko $1 \leq m \leq k$ (tj. polugrupa S je periodična),

(3) S zadovoljava identitet $x^p = x^q$ ako i samo ako je $p, q \geq m$ i

$$p \equiv q (\mathrm{mod}\ k - m + 1),$$

(4) ako su term operacije f i g indukovane rečima (polugrupnim termima) različitih dužina koje nisu veće od k, tada je $f \neq g$; specijalno, term operacije $xy, xy^2, \dots, xy^{k-1}$ su sve različite.

Podsetimo se, term operaciju $x_1x_2 \dots x_n$ označavamo sa l_n.

LEMA 3.3.4. *Neka polugrupa S ima bar jednu esencijalno n-arnu term operaciju (tj. neka je $p_n(S) > 0$). Tada je operacija l_n esencijalno n-arna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je operacija $f = x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_m}$ esencijalno n-arna u S, pri čemu je $\{i_1, i_2, \dots, i_m\} = \{1, 2, \dots, n\}$, ali da $x_1x_2 \dots x_n$ ne zavisi od x_k. Tada postoji $(n-1)$-arni term p, tako da na S važi identitet

$$x_1x_2 \dots x_n = p(x_1, \dots x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n).$$

Jasno, mora biti $m \geq n$. Ali, tada S zadovoljava sledeće identitete:

$$\begin{aligned} f &= x_{i_1} \dots x_{i_{k-1}} (x_{i_k} \dots x_{i_{m-n+k}}) x_{i_{m-n+k+1}} \dots x_{i_m} = \\ &= p(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, x_{i_{m-n+k+1}}, \dots, x_{i_m}), \end{aligned}$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da f zavisi od n promenljivih. ■

LEMA 3.3.5. *Neka je S polugrupa sa osobinom da je $p_0(S) = 0$ i da postoji term operacija oblika $x^l y^m$ koja nije esencijalno binarna. Tada za sve $n \geq 1$ važi: ako je $p_n(S) > 0$, tada je $p_n(S) \geq n$.*

Dokaz. Ako operacija $x^l y^m$ nije esencijalno binarna, tada na S važi $x^l y^m = x^{l+m}$ ili $x^l y^m = y^{l+m}$. Ovde ćemo posmatrati samo prvi slučaj, dok je drugi slučaj sličan. Imamo:

$$x^{lm} y^{lm} = (x^m)^l (x^l)^m = (x^m)^{l+m} = x^{lm+m^2}.$$

Kako je $p_n(S) > 0$, to je operacija l_n esencijalno n-arna na S, po prethodnoj lemi. Zato su i operacije $x_2 \dots x_n x_1$, $x_2 \dots x_n x_1 x_2$, $\dots$, $x_n x_1 \dots x_{n-1}$ takođe esencijalno n-arne. Ako u ovim operacijama za sve $1 \leq i \leq n$ zamenimo x_i redom sa x_i^{lm}, tada po prethodnim razmatranjima dobijamo unarne operacije $x_1^r, \dots, x_n^r$ (gde je $r = lm + m^2$), koje su zbog $p_0(S) = 0$ sve različite. Stoga su i uočene n-arne operacije različite, odakle sledi $p_n(S) \geq n$. ■

Kao direktnu posledicu gornje leme, dobijamo sledeći zaključak.

LEMA 3.3.6. *Ako polugrupa S ima p_n-niz $\langle 0, k, k, k, \ldots \rangle$, tada je svaka njegova term operacija oblika $x^l y^m$ esencijalno binarna.*

Takođe, jednostavan je dokaz naredne leme.

LEMA 3.3.7. *Ako polugrupa S zadovoljava identitete*

$$xy = yx,\ x^2y = xy^2,\ x^{k+1} = x^m$$

za neke $k \geq m \geq 1$, tada je svaka esencijalno n-arna operacija na S jednaka $x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n^r$ za neko $1 \leq r \leq k$.

LEMA 3.3.8. *Ako polugrupa S zadovoljava identitete*

$$x^2y = xy^2 = y^2x = yx^2 = xyx = yxy,\ x^{k+1} = x^m$$

za neke $k \geq m \geq 1$, tada je svaka esencijalno n-arna operacija na S jednaka l_n^σ za neko $\sigma \in S_n$ ili $x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n^r$ za neko $2 \leq r \leq k$.

Dokaz. Neka je f neka esencijalno n-arna term operacija polugrupe S. Tada se korišćenjem datih identiteta f može svesti na oblik $f = x_{i_1}^{k_1}x_{i_2}^{k_2}\ldots x_{i_n}^{k_n}$, pri čemu je $i_1, i_2, \ldots, i_n$ neka permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ako je $k_1 = \ldots = k_n = 1$, reč je o operaciji oblika l_n^σ za neku permutaciju $\sigma \in S_n$.

S druge strane, pretpostavimo da je $k_s > 1$ za neko $1 \leq s \leq n$. Primetimo da za proizvoljno $l \geq 2$, a uz korišćenje datih identiteta, sledi

$$x^l y = x^{l-2}x^2y = x^{l-1}yx = x^{l-3}x^2yx = x^{l-2}yx^2 = \ldots = x^2yx^{l-2} = yx^l,$$

kao i

$$x^l y = x^{l-2}x^2y = x^{l-2}xy^2 = x^{l-1}y^2,$$

odakle se dobija da je f oblika

$$f = x_{j_1}^{m_1}x_{j_2}^{m_2}\ldots x_n^{m_n},$$

gde je $j_1, \ldots, j_{n-1}$ permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ i $m_n \geq 2$. Najzad, ako je $l \geq 2$, tada na S važi

$$xyz^l = xy^2z^{l-1} = yx^2z^{l-1} = yxz^{l-1},$$

pa se f može dovesti u oblik

$$f = x_1^{r_1}x_2^{r_2}\ldots x_n^{r_n}.$$

Sada identiteti $x^2y = xy^2$ i $x^{k+1} = x^m$ daju da je operacija f oblika $x_1x_2\ldots x_{n-1}x_n^r$ za neko $1 \leq r \leq k$, što je i trebalo dokazati. ■

Sada možemo preći na opis polugrupa sa p_n-nizom $\langle 0, 2, 2, 2, \ldots \rangle$.

PROPOZICIJA 3.3.9. *Polugrupa S ima p_n-niz $\langle 0, 2, 2, 2, \ldots \rangle$ ako i samo ako generiše varijetet definisan identitetima*

$$x^3 = x^2, \; xy = yx, \; x^2y = xy^2.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da S zadovoljava identitet $x^3 = x$. Tada $x^2y = xy^2$ (zamenom $y = x^2$) povlači $x^5 = x^4$, tj. $x = x^2$, pa je ili $p_1(S) = 1$, ili su xy, x^2y, xy^2 tri različite esencijalno binarne term operacije na S, u kom slučaju je $p_2(S) \geq 3$. Prema tome, S mora da zadovoljava $x^3 = x^2$. Ako je S nekomutativna polugrupa, tada xy i yx moraju biti jedine njene esencijalno binarne operacije. Dalje, xyz je esencijalno ternarna term operacija (zbog Leme 3.3.4), pa zbog $p_3(S) = 2$ mora biti $xyz = zxy = yzx$, odakle je $xy^2 = yxy = y^2x$. Sledi da na S važi $x^2y^2 = y^2x^2$, što je nemoguće, jer S nema komutativnu binarnu term operaciju. Prema tome, S mora biti komutativna polugrupa. Kako je $p_2(S) = 2$, obe njene esencijalno binarne term operacije moraju biti komutativne. Specijalno, $x^2y = y^2x = xy^2$, pa S pripada varijetetu koji je opisan u formulaciji propozicije.

S druge strane, ako je T proizvoljna polugrupa iz posmatranog varijeteta, tada Lema 3.3.7 povlači da su l_n i $x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n^2$ jedine njene esencijalno n-arne term operacije, tj. da je $p_n(T) \leq 2$ za sve $n \geq 1$. Kako je po pretpostavci $p_n(S) = 2$ za sve $n \geq 2$, to S generiše uočeni varijetet.

($\Leftarrow$) Dovoljno je pokazati da je p_n-niz slobodne polugrupe $F = F_{\mathcal{V}}(\omega)$ jednak $\langle 0, 2, 2, 2, \ldots \rangle$, pri čemu smo sa $\mathcal{V}$ označili dati varijetet polugrupa. Jasno, $p_0(F) = 0$ i $p_1(F) = 2$. Ako bi za neko $n \geq 2$ bilo $p_n(F) \leq 1$, sledilo bi da na F važi identitet

$$x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n = x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n^2,$$

što bi značilo da se on može formalno izvesti iz datih identiteta. Međutim, jasno je da se na $l_n = x_1x_2 \ldots x_n$ može primeniti samo komutativni zakon, čime se dobijaju identiteti oblika $l_n = l_n^\sigma$ za sve permutacije $\sigma \in S_n$. Zato je $p_n(F) = 2$ za sve $n \geq 2$. ∎

U preostalom delu ovog odeljka pokazujemo da ostali konstantni nizovi nisu predstavljivi u klasi polugrupa. Naše razmatranje ćemo podeliti na dva odvojena slučaja: $k \geq 4$ i $k = 3$. Ove slučajeve, opet, delimo na nekoliko podslučajeva koji su obrađeni u narednim lemama.

LEMA 3.3.10. *Neka u polugrupi S važi periodičan identitet $x^{k+1} = x^m$, pri čemu je $m < k$, kao i uslovi $p_0(S) = 0$, $p_1(S) = k \geq 4$. Tada $\langle 0, k, k, k, \ldots \rangle$ nije p_n-niz za S.*

Dokaz. Pretpostavimo, suprotno tvrđenju leme, da postoji polugrupa S sa traženim osobinama i p_n-nizom $\langle 0, k, k, k, \ldots \rangle$, gde je $k \geq 4$. Tada su po Lemama

3.3.3 *(iv)* i 3.3.6 sve operacije $xy, xy^2, \ldots, xy^{k-1}$ esencijalno binarne i različite, a isto to važi i za $x^2y, x^2y^2, \ldots, x^2y^{k-1}$. Ako je $1 \leq m \leq k-1$, tada je operacija x^2y^{m-1} različita od operacije xy^p, ukoliko je $m \neq p$ (zbog Leme 3.3.3 *(iv)*). S druge strane, ako na S važi $xy^m = x^2y^{m-1}$, tada dobijamo kontradikciju sa Lemom 3.3.3 *(iii)*, jer zamenom $x = y^2$ u ovaj identitet sledi $x^{m+3} = x^{m+2}$. Dakle, $p_2(S) \geq (k-1) + (k-2) = 2k - 3 > k$. Kontradikcija. ■

LEMA 3.3.11. *Neka polugrupa S zadovoljava identitet $x^{k+1} = x^m$, $m \leq k$ i uslove $p_0(S) = 0$, $p_1(S) = k \geq 6$. Tada $\langle 0, k, k, k, \ldots \rangle$ nije p_n-niz za S.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji polugrupa S sa datim osobinama i opisanim p_n-nizom. Analogno kao i u prethodnoj lemi, sledi da su operacije $xy, xy^2, \ldots, xy^{k-1}$ esencijalno binarne i različite. Dalje, po Lemi 3.3.6, x^2y je esencijalno binarna operacija, koja je po Lemi 3.3.3 *(iv)* različita od $xy, xy^3, xy^4, \ldots, xy^{k-1}$. Takođe, $x^2y \neq xy^2$, jer u suprotnom (zamenom $y = x^2$) sledi da S zadovoljava identitet $x^5 = x^4$, što je u suprotnosti sa Lemom 3.3.3 *(iii)*, jer je $k \geq 6$. Analogno, x^2y^2 je esencijalno binarna operacija na S, koja je različita od prethodno navedenih, jer identitet $x^2y^2 = xy^3$ ima za posledicu $x^6 = x^5$, što ponovo protivreči Lemi 3.3.3 *(iii)*. Ali, sada sledi da je $p_2(S) \geq k + 1$, kontradikcija. ■

PROPOZICIJA 3.3.12. *Komutativna polugrupa sa p_n-nizom $\langle 0, 4, 4, 4, \ldots \rangle$ ne postoji.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S komutativna polugrupa sa p_n-nizom $\langle 0, 4, 4, 4, \ldots \rangle$. Kao i u prethodnim lemama, xy, xy^2, xy^3 su tri različite esencijalno binarne term operacije na S. Osim toga, S zadovoljava $x^5 = x^4$, po Lemi 3.3.10. Ako je $xy^3 \neq x^2y^2$ na S (tj. $(xy^2)y \neq (x^2y)y$), tada je i $xy^2 \neq x^2y$, pa su $xy, xy^2, xy^3, x^2y, x^2y^2$ pet različitih esencijalno binarnih operacija na S. Zato na S mora da važi identitet $xy^3 = x^2y^2$. Ali, tada na S važi

$$x^3y = yx^3 = y^2x^2 = x^2y^2 = xy^3 = y^3x,$$

pa su sve term operacije na S indukovane rečima dužine 4 jednake. Pokazaćemo indukcijom da su sve netrivijalne binarne term operacije na S indukovane rečima dužine n jednake za sve $n \geq 4$.

Pretpostavimo da ovo tvrđenje važi za reči dužine $n-1$. Neka su p i q dve netrivijalne binarne term operacije na S indukovane rečima dužine n. Tada postoje operacije p_1 i q_1 indukovane rečima dužine $n-1$ tako da je $p = xp_1$ i $q = xq_1$. Tvrđenje je jasno ako su obe operacije p_1 i q_1 netrivijalne (tj. indukovane rečima u kojima se pojavljuju obe promenljive). S druge strane, ako je, na primer, $p_1 = y^{n-1}$, tada imamo

$$p = xp_1 = xy^{n-1} = xy^3y^{n-4} = x^2y^2y^{n-4} = x^2y^{n-2} = x(xy^{n-2}),$$

pa smo ovaj slučaj sveli na prethodni. Sada razmatramo dve mogućnosti.

Prva od njih je kada S zadovoljava identitet $xy^4 = xy^3$. Ali, tada se lako dobija da je za sve $n \geq 4$, $xy^n = xy^3$, pa su po prethodnim razmatranjima sve binarne term operacije na S dužine ne manje od 4 jednake xy^3. Specijalno, to znači da na S važe identiteti $xy^3 = x^2y^2 = x^4y = x^4y^4$. Zbog toga, ako je $f = x_1^{k_1}x_2^{k_2}x_3^{k_3}x_4^{k_4}x_5^{k_5}$ esencijalno 5-arna operacija, gde je bar jedan od k_i veći ili jednak 3, ili su bar dva od njih veći ili jednaki 2, tada je $f = x_1^4x_2^4x_3^4x_4^4x_5^4$. Tako, sve esencijalno 5-arne term operacije na S su jednake jednoj od $f_1 = x_1x_2x_3x_4x_5$, $f_2 = x_1^2x_2x_3x_4x_5$, $f_3 = x_1x_2^2x_3x_4x_5$, $f_4 = x_1x_2x_3^2x_4x_5$, $f_5 = x_1x_2x_3x_4^2x_5$, $f_6 = x_1x_2x_3x_4x_5^2$, $f_7 = x_1^4x_2^4x_3^4x_4^4x_5^4$. Primetimo da su operacije f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 ili jednake, ili sve različite. Takođe, one su ili istovremeno sve esencijalno 5-arne, ili to nije nijedna od njih, po Lemi 1.1.3. Zato je u ovom slučaju $p_5(S) \leq 3$ ili $p_5(S) \geq 5$. U oba slučaja imamo kontradikciju.

Razmotrimo slučaj kada je $xy^4 \neq xy^3$ na S. Tada je xy^4 četvrta esencijalno binarna term operacija na S. Kako po Lemi 3.3.3 *(iv)* operacija x^2y nije nijedna od xy, xy^3, xy^4, to je $x^2y = xy^2$. Sada po Lemi 3.3.7 svaka ternarna term operacija na S može biti predstavljena u jednom od oblika xyz, xyz^2, xyz^3, xyz^4. Ali, na S tada važi i sledeći niz identiteta:

$$xyz^2 = (xy)^2z = x^2y^2z = xy^4z = xy^2z^2 = xyz^4,$$

pa je $p_3(S) \leq 3$. Kontradikcija. ∎

PROPOZICIJA 3.3.13. *Ne postoji nekomutativna polugrupa čiji je p_n-niz $\langle 0, 4, 4, 4, \ldots \rangle$.*

Dokaz. Neka je S nekomutativna polugrupa sa p_n-nizom $\langle 0, 4, 4, 4, \ldots \rangle$. Slično kao i u prethodnoj propoziciji, dolazimo do zaključka da S zadovoljava identitet $x^5 = x^4$, i da su, osim toga, xy, yx, xy^2, xy^3 četiri različite esencijalno binarne operacije na S. Po Lemi 3.3.6, operacije x^2y, yx^2, y^2x su esencijalno binarne, dok su operacije xyx i yxy esencijalno binarne zbog toga što $xyx = x^3$ povlači $x^4 = x^3$, dok $xyx = y^3$ povlači $y^5 = y^3$. I jedno i drugo je nemoguće zbog Leme 3.3.3 *(iii)*. Kako je $p_2(S) = 4$, Lema 3.3.3 *(iv)* daje da na S važi

$$xy^2 = x^2y = yx^2 = y^2x = xyx = yxy.$$

Po Lemi 3.3.8, svaka esencijalno ternarna term operacija na S je neka od $(xyz)^\sigma$ ($\sigma \in S_3$), xyz^2, xyz^3, xyz^4. Međutim, sada imamo sledeće identitete:

$$xyz^2 = (xy)^2z = xyxyz = xy^2yz = xyy^2z = xyyz^2 = xy^2z^2 = xyz^4,$$

kao i

$$xyz^3 = (xyz^2)z = xyz^4z = xyz^4.$$

Tako, među operacijama $(xyz)^\sigma$ mora biti bar tri različite, ali i bar dve jednake, što znači da postoji transpozicija σ za koju je $xyz = (xyz)^\sigma$.

Na sličan način se pokazuje da su sve esencijalno n-arne term operacije na S $(n \geq 3)$ jednake nekoj od $(x_1x_2 \dots x_n)^\tau$ $(\tau \in S_n)$, $x_1x_2 \dots x_n^4$.

Neka najpre S zadovoljava $xyz = xzy$ (identitet $xyz = yxz$ se analogno diskutuje). Tada se lako vidi da ovaj identitet implicira identitete $(x_1x_2x_3x_4x_5)^\pi = x_1x_2x_3x_4x_5$ za sve $\pi \in S_5$ sa osobinom $\pi(1) = 1$. Ali, kako su po Lemi 3.3.4 sve ove operacije esencijalno 5-arne, S (zbog $p_5(S) = 4$) mora da zadovoljava identitet oblika $(x_1x_2x_3x_4x_5)^\rho = x_1x_2x_3x_4x_5$, pri čemu je $\rho(1) \neq 1$. Zbog identiteta $xyz = xzy$ smemo bez ograničenja opštosti pretpostaviti da je $\rho(5) \neq 5$, pa je po Lemi 4.1.5 operacija $l_n = x_1x_2 \dots x_n$ totalno simetrična za dovoljno veliko n. Međutim, za takvo n po prethodnim razmatranjima važi $p_n(S) \leq 2$, što je kontradikcija.

S druge strane, ako S zadovoljava identitet $xyz = zyx$, tada prethodni zaključak sledi odmah, ponovo primenom Leme 4.1.5. ∎

PROPOZICIJA 3.3.14. *Ne postoji polugrupa čiji je p_n-niz $\langle 0, 5, 5, 5, \dots \rangle$.*

Dokaz. Neka je S polugrupa sa p_n-nizom $\langle 0, 5, 5, 5, \dots \rangle$. Po Lemi 3.3.10, na S važi $x^6 = x^5$, a po Lemama 3.3.3 *(iv)* i 3.3.6, xy, xy^2, xy^3, xy^4 su četiri različite esencijalno binarne operacije na S. Osim toga, esencijalno binarna operacija x^2y je po Lemi 3.3.3 *(iv)* različita od xy, xy^3, xy^4, dok je identitet $x^2y = xy^2$ nemoguć, jer povlači $x^5 = x^4$, što protivreči Lemi 3.3.3 *(iii)*. Tako, S mora biti komutativna polugrupa, jer bi u suprotnom yx bila šesta esencijalno binarna term operacija na S.

Komutativnost i Lema 3.3.6 daju da je svaka netrivijalna binarna term operacija na S esencijalno binarna. Dalje, $p_2(S) = 5$ i Lema 3.3.3 *(iv)* daju da su sve netrivijalne binarne term operacije indukovane rečima dužine 4 jednake xy^3, dok sve reči duže od 4 indukuju operaciju koja je jednaka xy^4. Sada identiteti

$$xyz^3 = (xy)^3z = x^3y^3z = (x^5y^5)z = x^5(y^5z) = x^5y^5z^5$$

i

$$xy^2z^2 = xyz^3 = x^5y^5z^5$$

analogno kao i u dokazu Propozicije 3.3.12 povlače da su sve esencijalno 6-arne term operacije na S jednake nekoj od $f_1 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6$, $f_2 = x_1^2x_2x_3x_4x_5x_6$, $f_3 = x_1x_2^2x_3x_4x_5x_6$, $f_4 = x_1x_2x_3^2x_4x_5x_6$, $f_5 = x_1x_2x_3x_4^2x_5x_6$, $f_6 = x_1x_2x_3x_4x_5^2x_6$, $f_7 = x_1x_2x_3x_4x_5x_6^2$, $f_8 = x_1^5x_2^5x_3^5x_4^5x_5^5x_6^5$ i da su $f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ sve različite ili jednake, kao i da su one ili istovremeno esencijalno 6-arne, ili istovremeno neesencijalne. U svakom slučaju imamo da je $p_6(S) \leq 3$ ili $p_6(S) \geq 6$, tj. dobili smo kontradikciju. ∎

POSLEDICA 3.3.15. *Ako je $k \geq 4$, tada ne postoji polugrupa čiji je p_n-niz $\langle 0, k, k, k, \ldots \rangle$.*

Dokaz. Direktna posledica Leme 3.3.11 i Propozicija 3.3.12, 3.3.13 i 3.3.14. ∎

Preostaje da pokažemo nepredstavljivost niza $\langle 0, 3, 3, 3, \ldots \rangle$. To je učinjeno u naredne dve leme.

LEMA 3.3.16. *Ako polugrupa S zadovoljava identitet $x^4 = x^m$ za neko $m \leq 2$, tada $\langle 0, 3, 3, 3, \ldots \rangle$ nije njen p_n-niz.*

Dokaz. Neka S zadovoljava identitet $x^4 = x^m$, $m \leq 2$ i pretpostavimo da je $\langle 0, 3, 3, 3, \ldots \rangle$ njen p_n-niz. Tada su po Lemi 3.3.6 operacije xy, x^2y, xy^2, xy^3 esencijalno binarne. Međutim, po Lemi 3.3.3 *(iv)*, među ovim operacijama samo x^2y i xy^2 mogu biti jednake. Ali, identitet $x^2y = xy^2$ implicira $x^5 = x^4$, što je po Lemi 3.3.3 *(iii)* nemoguće. Otuda je $p_2(S) \geq 4$, kontradikcija. ∎

LEMA 3.3.17. *Ne postoji polugrupa koja zadovoljava identitet $x^4 = x^3$ čiji je p_n-niz $\langle 0, 3, 3, 3, \ldots \rangle$.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji polugrupa S sa navedenim osobinama. Razlikujemo dva slučaja.

Pretpostavimo najpre da je S komutativna polugrupa. Operacije xy i x^2y^2 su različite, esencijalno binarne i komutativne na S. Kako je $p_2(S) = 3$, to su sve esencijalno binarne term operacije na S komutativne. Specijalno, $x^2y = xy^2$. Dalje, po Lemi 3.3.7, sve esencijalno ternarne term operacije na S su jednake jednoj od xyz, xyz^2, xyz^3. Međutim, sada na S važi

$$xyz^2 = (xy)^2z = x^2y^2z = xy^4z = xy^2z^2 = xyz^4 = xyz^3,$$

što implicira da je $p_3(S) \leq 2$. Kontradikcija.

Posmatrajmo sada slučaj kada je S nekomutativna polugrupa. Tada su po Lemama 3.3.3 *(iv)* i 3.3.6 xy, yx, xy^2 njene tri esencijalno binarne term operacije. Po istim lemama, na S mora da važi

$$xy^2 = x^2y = yx^2 = y^2x.$$

Zatim, operacije xyx i yxy moraju biti esencijalno ternarne, jer u suprotnom $xyx = x^3$ daje $x^3y^3x^3 = x^3$, odakle je

$$x^3 = x^3y^3x^3 = x^3(y^3)^2y^3(x^3)^2 = y^3(x^3)^2(x^3)^2y^3 = y^3x^3y^3 = y^3,$$

dok u slučaju $xyx = y^3$ imamo $x^3y^3x^3 = y^3$, što daje

$$y^3 = x^3y^3x^3 = y^3x^3y^3 = x^3.$$

U oba slučaja, reč je o kontradikciji sa uslovom $p_0(S) = 0$. Sada Lema 3.3.3 *(iv)* povlači

$$xyx = yxy = xy^2.$$

Iz Leme 3.3.8 dobijamo da su sve esencijalno n-arne term operacije na S (gde je $n \geq 3$) jednake nekoj od $(x_1x_2\ldots x_n)^\sigma$ $(\sigma \in S_n)$, $x_1x_2\ldots x_n^2$, $x_1x_2\ldots x_n^3$. Primetimo da na S važe identiteti

$$xyz^2 = (xy)^2y = xyxyz = xy^2yz = xy^3z = xy^4z = xy^2z^2 = xyz^4 = xyz^3.$$

Zamenom $z = y$ operacija xyz^3 daje operaciju xy^4 koja je po Lemi 3.3.6 esencijalno binarna, pa zato ona zavisi od promenljive x. Gornji identiteti, zajedno sa $xyz^3 = x^3y^3z^3$ i $x^3y^3 = y^3x^3$ daju da je u stvari reč o esencijalno ternarnoj operaciji. Osim toga, na osnovu istih argumenata se vidi da bi identitet $xyz^3 = (xyz)^\sigma$ za neko $\sigma \in S_3$ imao za posledicu da operacija xyz bude totalno simetrična (u kom bi slučaju bilo $p_3(S) \leq 1$). Dakle, među operacijama oblika $(xyz)^\sigma$ $(\sigma \in S_3)$, koje su po Lemi 3.3.4 sve esencijalno ternarne, postoje tačno dve različite.

To, međutim, znači da na S mora biti $xyz = yzx = zxy$. Već korišćena Lema 4.1.5, ili naprosto Lema 3.4.3, obezbeđuje postojanje dovoljno velikog n za koje je operacija l_n totalno simetrična. Ali, za takvo n je $p_n(S) \leq 2$, kontradikcija. ∎

POSLEDICA 3.3.18. *Ne postoji polugrupa čiji je p_n-niz $\langle 0, 3, 3, 3, \ldots\rangle$.*

Dokaz. Direktna posledica Lema 3.3.16 i 3.3.17. ∎

Na taj način smo kompletirali dokaz Teoreme 3.3.2. Preostaje da uočimo dve njene interesantne posledice.

POSLEDICA 3.3.19. *Konačna polugrupa S ima p_n-niz $\langle 0, k, k, k, \ldots\rangle$ ako i samo ako je $k = 1$, pri čemu je S netrivijalna polumreža.*

Dokaz. Impikacija $(\Leftarrow)$ sledi iz tačke (1) Teoreme 3.3.2, pa zato pretpostavimo da je S konačna polugrupa sa p_n-nizom oblika $\langle 0, k, k, k, \ldots\rangle$. Po Teoremi 3.3.2, mora biti $k = 1$ ili $k = 2$. Ako je $k = 1$, tada je S netrivijalna polumreža i tvrđenje je dokazano. Zato pretpostavimo da je $k = 2$. U tom slučaju, S zadovoljava identitete $x^3 = x^2$, $xy = yx$ i $x^2y = xy^2$. Neka je $n = |S|$. Tada u proizvoljnom nizu $s_1, \ldots, s_n, s_{n+1} \in S$ postoje dva jednaka elementa, recimo $s_i = s_j$ za $i < j$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}
s_1s_2\ldots s_i\ldots s_j\ldots s_{n+1} &= s_1s_2\ldots s_{i-1}s_{i+1}\ldots s_{j-1}s_{j+1}\ldots s_i^2s_{n+1} = \\
&= s_1s_2\ldots s_{i-1}s_{i+1}\ldots s_{j-1}s_{j+1}\ldots s_i^3s_{n+1} = \\
&= s_1s_2\ldots s_{i-1}s_{i+1}\ldots s_{j-1}s_{j+1}\ldots s_i^2s_{n+1}^2 = \\
&= s_1s_2\ldots s_{i-1}s_is_{i+1}\ldots s_{j-1}s_is_{j+1}\ldots s_ns_{n+1}^2 = \\
&= s_1s_2\ldots s_ns_{n+1}^2.
\end{aligned}$$

Tako, S zadovoljava identitet $x_1x_2\dots x_{n+1} = x_1x_2\dots x_{n+1}^2$, zbog čega je, na osnovu dokaza Propozicije 3.3.9, $p_{n+1}(S) < 2$. Kontradikcija. ∎

POSLEDICA 3.3.20. *Varijetet polugrupa dat identitetima*

$$x^3 = x^2,\ xy = yx,\ x^2y = xy^2$$

je lokalno konačan, ali nije konačno generisan.

Dokaz. Ako bi dati varijetet bio generisan konačnom polugrupom S, tada bi njen p_n-niz bio $\langle 0, 2, 2, 2, \dots\rangle$, što je kontradikcija sa Posledicom 3.3.19. ∎

3.4. Konačne polugrupe sa p_n-nizom koji je ograničen konstantom

U ovom odeljku dajemo karakterizaciju svih konačnih polugrupa S za koje postoji $c \in \mathbf{N}$ tako da je $p_n(S) \leq c$ za sve $n \in \mathbf{N}$. Ovde izložene rezultate dobili su Crvenković, Dolinka i Ruškuc u radu [21].

PRIMER 3.4.1. Neke polugrupe sa ograničenim p_n-nizom se odmah mogu lako uočiti. U daljem ćemo videti da su polugrupe, opisane u (1)–(4) ovog primera, u izvesnom smislu "gradivni materijal" od kojih dobijamo sve konačne polugrupe sa traženom osobinom.

(1) Neka je S nilpotentna polugrupa, pri čemu je $q \in \mathbf{N}$ takvo da je $S^q = 0$. Očito, tada je za sve $n \geq q$, $p_n(S) = 0$, pa S ima ograničen p_n-niz.

(2) Neka je S netrivijalna polumreža. Po Primeru 1.2.2, p_n-niz za S je sledeći: $\langle 0, 1, 1, 1, \dots\rangle$.

(3) Neka je S Booleova grupa. U Primeru 1.2.4 smo videli da je tada $p_n(S) = 1$ za sve $n \geq 0$.

(4) Neka je S netrivijalna pravougaona traka (polugrupa koja zadovoljava zakone $x^2 = x$, $xyz = xz$, tj. 2-dimenzionalna dijagonalna algebra). Tada p_n-niz za S izgleda ovako: $\langle 0, 1, 2, 0, 0, \dots\rangle$ (vidi Teoremu 3.1.3).

Podsetimo se, za n-arnu operaciju f smo rekli da je totalno simetrična ako je $G(f) = S_n$, tj. ako je invarijantna na sve permutacije promenljivih. U odnosu na term operacije l_n na polugrupama, svojstvo totalne simetričnosti je u izvesnom smislu "nasledno", kao što to pokazuje prva lema ovog odeljka.

LEMA 3.4.2. *Neka je operacija l_n totalno simetrična na polugrupi S za neko $n \geq 2$. Tada su sve operacije l_r, $r \geq n$ takođe totalno simetrične na S.*

Dokaz. Po pretpostavci leme, u S važi $l_n = l_n^{(12)}$. Stoga, S zadovoljava identitete

$$l_{n+1} = l_n x_{n+1} = l_n^{(12)} x_{n+1} = l_{n+1}^{(12)},$$

Zato je $(12) \in G(l_{n+1})$. Takođe, $x_2 \dots x_n x_{n+1}$ je totalno simetrična operacija, pa $(23 \dots n+1) \in G(l_{n+1})$. Iz poznate činjenice da je

$$S_{n+1} = \langle (12), (23 \dots n+1) \rangle,$$

zaključujemo da je $G(l_{n+1}) = S_{n+1}$. Na osnovu gornjih razmatranja je sada lako sprovesti induktivni dokaz leme. ■

LEMA 3.4.3. *Sledeća dva uslova su ekvivalentna za svaku polugrupu S:*

(i) postoji $n \geq 2$ tako da je operacija l_n totalno simetrična na S,

(ii) S zadovoljava identitet

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_2 \dots x_{n-1} x_n x_1$$

za neko $n \geq 2$.

Dokaz. *(i)⇒(ii)* Trivijalno. *(ii)⇒(i)* Ukoliko l_n dopušta permutaciju $(12 \dots n)$ u S, tada se lako pokazuje da za sve $m \geq n$, l_m dopušta permutaciju $(12 \dots m)$. Otuda $G(l_{n+1})$ sadrži cikluse $(12 \dots n)$ i $(12 \dots n+1)$. Kako je, međutim,

$$(n \;\; n+1) = (12 \dots n)^{-1}(12 \dots n+1)$$

i $S_{n+1} = \langle (12 \dots n+1), (n \;\; n+1) \rangle$, to je $G(l_{n+1}) = S_{n+1}$. ■

Sada možemo preći na prvi glavni rezultat ovog odeljka. Konačne polugrupe sa konstantno ograničenim p_n-nizom su najpre opisane preko identiteta koje te polugrupe zadovoljavaju.

TEOREMA 3.4.4. (Crvenković, Dolinka, Ruškuc [21]) *Neka je S konačna polugrupa. S ima ograničen p_n-niz ako i samo ako ispunjava bar jedan od sledeća tri uslova:*

(i) S zadovoljava identitete

$$x_1 x_2 \dots x_m = x_2 \dots x_m x_1, \tag{4}$$
$$x_1^2 x_2 x_3 \dots x_n = x_1 x_2^2 x_3 \dots x_n, \tag{5}$$

za neke $m, n \geq 2$.

(ii) *S zadovoljava identitet (4) za neko $m \geq 2$ i*

$$x_1^2 x_2 x_3 \ldots x_n = x_2^3 x_3 \ldots x_n, \tag{6}$$

za neko $n \geq 2$.

(iii) *S zadovoljava identitet*

$$x_1 \ldots x_k y x_{k+1} \ldots x_n = x_1 \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_n, \tag{7}$$

za neko $n \geq 1$ i neko k takvo da je $0 \leq k \leq n$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) U dokazu ove implikacije, razmatramo četiri slučaja u odnosu na esencijalnost term operacija $x_1 \ldots x_n$ i $x_1^2 x_2 \ldots x_n$.

1. slučaj: za sve $n \in \mathbf{N}$, $x_1 \ldots x_n$ i $x_1^2 x_2 \ldots x_n$ (za $n = 1$ reč je o x_1^2) su esencijalno n-arne operacije na S.

Po Lemi 1.3.6, nabrojane operacije su totalno simetrične za dovoljno veliko n. Zato S zadovoljava (4) i (5) za neko n (ovo sledi redom primenom ciklusa $(12\ldots n)$ i transpozicije (12)), pa važi *(i)*.

2. slučaj: za sve $m \in \mathbf{N}$, $x_1 \ldots x_m$ je esencijalno m-arna operacija, ali postoje $q, k \geq 2$ tako da $x_1^2 x_2 \ldots x_q$ ne zavisi od x_k.

Kao i u prvom slučaju, identitet (4) mora važiti u S za neko $m \geq 2$. Očito, tada $x_1^2 x_2 \ldots x_r$ ne zavisi od x_k za sve $r \geq n$. S druge strane, po Lemi 1.3.6, $l_m = x_1 x_2 \ldots x_m$ je totalno simetrična operacija za dovoljno veliko m. To povlači da je operacija $x_1^2 x_2 \ldots x_r$ za dovoljno veliko r invarijantna na sve permutacije indeksa $2, \ldots, r$. Po Lemi 1.1.3, za takvo r, $x_1^2 x_2 \ldots x_r$ ne zavisi ni od jedne od promenljivih $x_2, \ldots, x_r$. Tako, za dovoljno veliko k, S zadovoljava sledeći niz identiteta:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 \ldots x_{k-1} x_k &= x_1^2 x_2 \ldots x_{k-1}(x_2 x_k) = x_1^2 x_2^2 x_3 \ldots x_k = \\ &= x_1 x_2^2 x_3 \ldots x_{k-1}(x_1 x_k) = x_1 x_2^2 x_3 \ldots x_{k-1} x_k, \end{aligned}$$

tj. S je ponovo tipa *(i)*.

3. slučaj: za sve $m \in \mathbf{N}$, $x_1 \ldots x_m$ je esencijalno m-arna operacija, ali postoji $q \geq 1$ tako da $x_1^2 x_2 \ldots x_q$ ne zavisi od x_1.

Kao i u prethodnim slučajevima, dobijamo da S zadovoljava (4) za neko $m \geq 2$. Ako sada odaberemo $n \geq \max(q, 2)$ i u $x_1^2 x_2 \ldots x_n$ izjednačimo x_1 i x_2, dobijamo (6).

4. slučaj: postoje $n \in \mathbf{N}$ i k $(1 \leq k \leq n)$ tako da $x_1 \ldots x_n$ ne zavisi od x_k.

Tada na S važi identitet

$$x_1 \ldots x_{k-1}(x_k y) x_{k+1} \ldots x_n = x_1 \ldots x_{k-1} x_k x_{k+1} \ldots x_n,$$

što je upravo (7).

($\Leftarrow$) Ovde ćemo posebno razmatrati slučajeve *(i)*, *(ii)* i *(iii)* date u formulaciji teoreme.

(i) Po Lemama 3.4.2 i 3.4.3, identitet (4) povlači da je operacija l_k totalno simetrična za dovoljno veliko k. Zato se za takvo k svaka esencijalno k-arna term operacija polugrupe S može prikazati u obliku

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k},$$

za neke $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 1$. Takođe, koristeći (5) i totalnu simetričnost za l_k, za veliko k (npr. za $k \geq \max(m, n)$) možemo izvesti identitete

$$x_1 \dots x_i x_{i+1}^2 \dots x_k = x_1 \dots x_i^2 x_{i+1} \dots x_k$$

za sve $1 \leq i \leq k - 1$, koji, opet, impliciraju sledeće:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k} = x_1^{\beta} x_2 \dots x_k,$$

gde je $\alpha_1, \dots, \alpha_k \geq 1$ i $\beta = \alpha_1 + \dots + \alpha_k - k + 1$.

Zamenjujući $x_1 = x^2$, $x_2 = \dots = x_n = x$ u (5), dobijamo da S zadovoljava identitet

$$x^{n+3} = x^{n+2}.$$

Ako definišemo $N = \max(k_0, (n+1)|S|+1)$, tada među elementima $s_1, \dots, s_N \in S$ uvek možemo naći bar $n + 2$ jednaka: $s_{i_1} = \dots = s_{i_{n+2}} = s_0$. Tako dobijamo sledeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
s_1 s_2 \dots s_{i_1} \dots s_{i_{n+2}} \dots s_N &= s_1 s_0^{n+2} s_2 \dots s_{i_1-1} s_{i_1+1} \dots s_{i_{n+2}-1} s_{i_{n+2}+1} \dots s_N \\
&= s_1 s_0^{n+3} s_2 \dots s_{i_1-1} s_{i_1+1} \dots s_{i_{n+2}-1} s_{i_{n+2}+1} \dots s_N \\
&= s_1^2 s_0^{n+2} s_2 \dots s_{i_1-1} s_{i_1+1} \dots s_{i_{n+2}-1} s_{i_{n+2}+1} \dots s_N \\
&= s_1^2 s_2 \dots s_N.
\end{aligned}$$

Stoga, S zadovoljava

$$x_1^2 x_2 \dots x_n = x_1 x_2 \dots x_n$$

za sve $n \geq N$, pa je $p_n(S) \leq 1$.

(ii) Polazeći od pretpostavke da je l_m totalno simetrično za dovoljno veliko m, zaključujemo da postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ tako da je za sve $k \geq k_0$, l_k totalno simetrično i da

$$x_1^2 x_2 x_3 \dots x_k = x_2^3 x_3 \dots x_k$$

važi u S. Odavde se lako vidi da u S važi

$$x_1^3 x_2 \dots x_k = x_1 x_2^3 \dots x_k = \dots = x_1 x_2 \dots x_k^3.$$

Kao i u slučaju *(i)*, za $k \geq k_0$, svaka esencijalno k-arna term operacija na S može biti predstavljena u sledećem obliku:

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k},$$

gde je $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \geq 1$. Ako je pri tome npr. α_j paran broj, tada iz

$$x_1^{\alpha_1} \ldots x_j^{\alpha_j} \ldots x_k^{\alpha_k} = x_j^{\alpha_j} x_1^{\alpha_1} \ldots x_{j-1}^{\alpha_{j-1}} x_{j+1}^{\alpha_{j+1}} \ldots x_k^{\alpha_k}$$

i (6) sledi da posmatrana operacija ne zavisi od promenljive x_j. Zato, ako je zaista u pitanju esencijalno k-arna operacija polugrupe S, tada su svi brojevi $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ neparni.

Primetimo sada da (6) implicira da na S važi zakon

$$x^{2n+1} = x^{2n-1}$$

(zamenom $x_1 = x^2$, $x_2 = \ldots = x_n = x$). Neka je $N = \max(k_0, (2n-2)|S| + 1)$. Naravno, za bilo koji izbor elemenata $s_1, \ldots, s_N \in S$ nalazimo $2n-1$ jednakih, na primer $s_{i_1} = \ldots = s_{i_{2n-1}} = s_0$. Uz slično rezonovanje kao i u tački *(i)*, dobijamo:

$$\begin{aligned} s_1 s_2 \ldots s_N &= s_1 s_0^{2n-1} s_2 \ldots s_{i_1-1} s_{i_1+1} \ldots s_{i_{2n-1}-1} s_{i_{2n-1}+1} \ldots s_N \\ &= s_1 s_0^{2n+1} s_2 \ldots s_{i_1-1} s_{i_1+1} \ldots s_{i_{2n-1}-1} s_{i_{2n-1}+1} \ldots s_N \\ &= s_1^3 s_0^{2n-1} s_2 \ldots s_{i_1-1} s_{i_1+1} \ldots s_{i_{2n-1}-1} s_{i_{2n-1}+1} \ldots s_N \\ &= s_1^3 s_2 \ldots s_N. \end{aligned}$$

Odavde sledi zaključak da za sve $n \geq N$, S zadovoljava identitet

$$x_1^3 x_2 \ldots x_n = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

tj. za dovoljno veliko n imamo $p_n(S) \leq 1$.

(iii) Po uslovu (7), l_q nije esencijalno q-arna operacija za $q \geq n+1$. Po Lemi 3.3.4, sledi da je $p_q(S) = 0$ za $q \geq n+1$. ∎

Na osnovu gornjeg dokaza je odmah očito sledeće tvrđenje.

POSLEDICA 3.4.5. *Neka je S konačna polugrupa sa ograničenim p_n-nizom. Tada je ili $p_n(S) = 0$ za dovoljno veliko n, ili $p_n(S) = 1$ za dovoljno veliko n.*

Napomenimo da gornja posledica nije tačna za beskončne polugrupe. U radu [33] je, na primer, opisana beskonačna polugrupa čiji je p_n-niz $\langle 0, 4, 3, 3, 3, \ldots \rangle$.

Naš naredni cilj je da damo alternativnu karakterizaciju konačnih polugrupa sa ograničenim p_n-nizom, i to preko njihovih strukturnih osobina. U tome će nam kao "prelaz" biti neophodna sledeća

LEMA 3.4.6. *Neka je S konačna polugrupa i broj $q \in \mathbf{N}$ takav da važi $S^{q+1} = S^q$. Tada S ima ograničen p_n-niz ako i samo ako važi bar jedan od uslova:*

(i) $sa = as$, $s^2 ta = st^2 a$ *za sve* $s, t \in S$, $a \in S^q$,

(ii) $sa = as$, $s^2ta = t^3a$ *za sve* $s, t \in S$, $a \in S^q$,

(iii) $asb = ab$ *za sve* $s \in S$, $a, b \in S^q$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Kako bismo pokazali ovu implikaciju, dovoljno je primetiti da po datim uslovima važi $S^q \subseteq S^k$ za sve $k \in \mathbf{N}$, kao i da je $Im(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = S^k$ za različite $i_1, \dots, i_k$. Sada se lako vidi da uslovi *(i)–(iii)* ove leme slede iz odgovarajuće označenih uslova Teoreme 3.4.4.

($\Leftarrow$) Uslov da je $sa = as$ za sve $s \in S$, $a \in S^q$ je ekvivalentan identitetu

$$x_1x_2 \dots x_{q+1} = x_2 \dots x_{q+1}x_1,$$

što je upravo (4) za $n = q + 1$. Na sličan način su i druge jednakosti u uslovima *(i)* i *(ii)* povezani redom sa identitetima (5) i (6) za $n = q + 2$. Najzad, uslov *(iii)* je ekvivalentan identitetu (7) za $n = 2q$ i $k = q$. Tako, tvrđenje leme sledi iz Teoreme 3.4.4. ■

Najzad, strukturu posmatranih konačnih polugrupa opisujemo preko nilpotentnih proširenja polugrupa koje smo razmotrili u Primeru 3.4.1.

TEOREMA 3.4.7. (Crvenković, Dolinka, Ruškuc [21]) *Neka je S konačna polugrupa. Njen p_n-niz je ograničen ako i samo ako je S proširenje polugrupe I nilpotentnom polugrupom, pri čemu je I polumreža, Booleova grupa ili pravougaona traka.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je S konačna polugrupa sa ograničenim p_n-nizom i neka za $q \in \mathbf{N}$ važi $S^q = S^{q+1}$ (jasno, takvo q mora da postoji, pošto je opadajući niz ideala $S \supseteq S^2 \supseteq \dots \supseteq S^n \supseteq \dots$ konačan zbog konačnosti polugrupe S). Označimo takvo S^q sa I. Jasno, I je ideal polugrupe S za koji važi $I^2 = I$ i pri tome je faktor S/I nilpotentan. Preostaje nam da pokažemo da I mora biti polumreža, Booleova grupa ili pravougaona traka.

Po Teoremi 3.4.4, S zadovoljava bar jedan od uslova *(i)–(iii)*, datih u toj teoremi. Ti uslovi su, respektivno, ekvivalentni uslovima *(i)–(iii)* Leme 3.4.6. Sada posebno razmatramo svaki od tih slučajeva.

(i) Po Lemi 3.4.6, važi $sa = as$ za sve $s \in S$, $a \in I$, odakle je I očito komutativna polugrupa. Takođe, iz dokaza Teoreme 3.4.4 vidimo da S zadovoljava identitet oblika

$$x_1^2x_2 \dots x_N = x_1x_2 \dots x_N$$

za dovoljno veliko N. Zato je $s^2a = sa$ za sve $s \in S$, $a \in I$. Ako se sada ograničimo na slučaj $s \in I$, dobijamo

$$(sa)^2 = s^2a^2 = sa^2 = a^2s = as = sa.$$

Stoga, iz $I^2 = I$ sledi da se I sastoji isključivo od idempotentnih elemenata, tj. da je I polumreža.

(ii) U ovom slučaju, na osnovu dokaza Teoreme 3.4.4 imamo da S za dovoljno veliko N zadovoljava identitet

$$x_1^3 x_2 \ldots x_N = x_1 x_2 \ldots x_N.$$

Tako, važi $s^3 a = sa$ za sve $s \in S$, $a \in I$. Kao i u slučaju *(i)*, I je komutativno. Osim toga, za sve $a, b \in I$ je

$$(ab)^3 = a^3 b^3 = ab^3 = b^3 a = ba = ab.$$

Ovo, zajedno sa $I^2 = I$ daje da važi $a^3 = a$ za sve $a \in I$. Po Lemi 3.4.6, slučaj *(ii)*, zaključujemo da za sve $a, b, c \in I$ važi

$$bca^2 = a^2 bc = a^2 bc^3 = b^3 c^3 = (bc)^3 = bc.$$

Ovo povlači da je za sve $a \in I$, a^2 jedinični element u I, pa je zato I Booleova grupa.

(iii) Direktna primena Leme 3.4.6, slučaj *(iii)*, daje

$$(ab)^2 = abab = ab$$

za sve $a, b \in I$, pa je I idempotentna polugrupa. Takođe, imamo $abc = ac$ za sve $a, b, c \in I$, pa je otuda I pravougaona traka.

($\Leftarrow$) Kako je S/I nilpotentna polugrupa i $I^2 = I$, to sledi $I = S^q = S^{q+1}$ za neko q. Sada posmatramo tri slučaja.

1. slučaj: I je polumreža.

Kako je I komutativno, to za sve $s \in S$, $a, b \in I$ sledi

$$sab = bsa = abs$$

pošto je $sa, bs \in I$. Zajedno sa $I^2 = I$, ovo povlači da je $sa = as$ za sve $s \in S$, $a \in I$. Sada imamo

$$s^2 ta = s^2 (ta)^2 = s^2 t^2 a^2 = t^2 a^2 s^2 = t^2 (as)^2 = t^2 as = st^2 a$$

za sve $s, t \in S$, $a \in I$, pa S zadovoljava uslov *(i)* Leme 3.4.6.

2. slučaj: I je Booleova grupa.

Tada je I komutativno, pa dobijamo da je $sa = as$ za sve $s \in S$, $a \in I$, na isti način kao i u prethodnom slučaju. Pošto je $s^q, s^{q+1} \in I$, sledi $s^{2q} = s^{2q+2} = e$, (e je jedinični element u I), a otuda $es^2 = se^2 = e$. Sada mora biti

$$s^2 ta = s^2 eta = eta = t^2 eta = t^3 a,$$

za sve $s, t \in S$, $a \in I$, zbog čega S zadovoljava uslov *(ii)* Leme 3.4.6.

3. slučaj: I je pravougaona traka.

Tada je za sve $s \in S$, $a, b \in I$,

$$asb = a^2sb = a(as)b = ab,$$

jer je $as \in I$, što je upravo uslov *(iii)* Leme 3.4.6. ■

3.5. Konačne polugrupe sa p_n-nizom koji je ograničen polinomom po n

Za p_n-niz polugrupe S kažemo da je **polinomski ograničen** ako postoji polinomska funkcija $f(x)$ tako da za sve $n \geq 1$ važi nejednakost $p_n(S) \leq f(n)$. Jasno, ovaj uslov se može ekvivalentno iskazati i ovako: postoje $c > 0$ i $r \in \mathbf{N}$ tako da je $p_n(S) \leq cn^r$ za sve $n \geq 1$ ($n = 0$ je ispušteno iz razmatranja, kako ne bismo eliminisali polugrupe S za koje je $p_0(S) > 0$).

Ispitivanje konačnih polugrupa sa polinomski ograničenim p_n-nizom inspirisano je Problemom 10 iz [47] koji traži da se opišu sve idempotentne algebre čiji je p_n-niz polinomski ograničen. Po rezultatima iz prvog odeljka ove glave, vidimo da su takve idempotentne polugrupe iscrpljene onima iz tačaka *(1)–(5)* Teoreme 3.1.3 i normalnim trakama (specijalno, to znači da za $k \geq 3$ ne postoje polugrupe za koje je $p_n = n^k$). Prema tome, kao uopštenje ovog problema, imamo

PROBLEM 7. *Opisati sve polugrupe sa polinomski ograničenim p_n-nizom.*

Ovde dajemo rešenje za slučaj konačnih polugrupa koje je dobijeno u radu [20].

U prvoj lemi ovog odeljka ispituju se neki identiteti koje konačne polugrupe sa polinomski ograničenim p_n-nizom moraju da zadovolje. U njoj je već urađen značajan deo posla potrebnog za dobijanje glavnih rezultata.

LEMA 3.5.1. *Neka je S konačna polugrupa sa polinomski ograničenim p_n-nizom. Tada važi:*

(1) Postoje $p, q \in \mathbf{N}$ tako da za sve $m \geq 2$ i sve permutacije $\sigma \in S_m$, S zadovoljava identitet

$$x_1 \dots x_p y_1 \dots y_m z_1 \dots z_q = x_1 \dots x_p y_{\sigma(1)} \dots y_{\sigma(m)} z_1 \dots z_q. \tag{8}$$

(2) Postoje $k, p, q \in \mathbf{N}$ tako da na S važi ili

$$x_1 \dots x_p y z^k u_1 \dots u_q = x_1 \dots x_p y^2 z^k u_1 \dots u_q, \tag{9}$$

ili

$$x_1 \dots x_p y z^k u_1 \dots u_q = x_1 \dots x_p y^3 z^k u_1 \dots u_q. \tag{10}$$

Dokaz. *(1)* Koristeći Propoziciju 1.2.1, nije teško pokazati da polugrupa ima p_n-niz ograničen eksponencijalnom funkcijom po n ako i samo ako ima log-linearan (tj. sub-eksponencijalan) slobodni spektar. Teorema 2.1.2 daje da S zadovoljava identitet

$$x_1 \dots x_p y_1 y_2 z_1 \dots z_q = x_1 \dots x_p y_2 y_1 z_1 \dots z_q$$

za neko $p, q \in \mathbf{N}$. Za iste vrednosti p i q, svi identiteti oblika (8) su očite posledice gornjeg identiteta.

(2) Neka su $c > 0$ i $r \in \mathbf{N}$ takvi da važi $p_n(S) \leq cn^r$ za sve $n \geq 1$. Posmatrajmo term operacije koje su na S indukovane rečima

$$x_1 \dots x_p y_1^{\alpha_1} \dots y_m^{\alpha_m} x_{p+1} \dots x_{p+q},$$

pri čemu su p i q odabrani kao u tački *(1)* i $\alpha_i \in \{1, 2\}$ za $1 \leq i \leq m$. Ove operacije imaju arnost $n = p + m + q$. Razlikujemo dva slučaja.

Pretpostavimo prvo da su za sve $m \geq 1$ sve pobrojane operacije esencijalne. Tada, ukoliko je n dovoljno veliko, bar dve od ovih 2^{n-p-q} operacija moraju biti jednake, pošto je $p_n(S) \leq cn^r$. Ali, vrednosti eksponenata α_i u dve reči koje indukuju ove operacije se moraju razlikovati bar za jedno $1 \leq i \leq m$ i tačka *(1)* ove leme dopušta da pretpostavimo da je to slučaj za $i = 1$. Na taj način dobijamo da na S važi identitet

$$x_1 \dots x_p y_1 y_2^{\alpha_2} \dots y_m^{\alpha_m} x_{p+1} \dots x_{p+q} = x_1 \dots x_p y_1^2 y_2^{\beta_2} \dots y_m^{\beta_m} x_{p+1} \dots x_{p+q},$$

koji zamenom $y_1 = y$, $y_2 = \dots = y_m = z$ daje

$$x_1 \dots x_p y z^a x_{p+1} \dots x_{p+q} = x_1 \dots x_p y^2 z^b x_{p+1} \dots x_{p+q},$$

gde je $a = \alpha_2 + \dots + \alpha_m$ i $b = \beta_2 + \dots + \beta_m$. Najzad, neka S zadovoljava periodični identitet $x^{l+s} = x^l$ (takav identitet postoji zbog konačnosti polugrupe S). Odaberimo $d \in \mathbf{N}$ tako da je $sd \geq l$. Tada u S važi $x^{st} = x^{sd}$ za sve $t \geq d$. Zamenimo z^{sd} umesto z u gornjem identitetu. Tada je lema u ovom slučaju dokazana, pošto

$$z^{sda} = z^{sd} = z^{sdb}$$

važi u S, pa je dovoljno staviti $k = sd$ da bismo dobili (9).

Drugi slučaj dobijamo kada postoji $m \geq 1$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \{1, 2\}$ tako da operacija $x_1 \dots x_p y_1^{\alpha_1} \dots y_m^{\alpha_m} x_{p+1} \dots x_{p+q}$ nije esencijalna na S. Po Lemi 4.1.3, S je tada nilpotentno proširenje proste polugrupe. Kako je S konačna, ta prosta polugrupa je u stvari kompletno prosta i stoga izomorfna nekoj matričnoj polugrupi $\mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$. Ako je G trivijalna grupa, tada je S nilpotentno proširenje pravougaone trake, pa tada po Teoremi 3.4.4 *(iii)*, S zadovoljava i (9) i (10) za neko p, q i proizvoljno k.

Dakle, stvarno interesantan slučaj je kada je G netrivijalna grupa. Kako uočena matrična polugrupa sadrži $|I \times \Lambda|$ izomorfnih kopija grupe G, to možemo posmatrati G kao podgrupu polugrupe S. Sada je jasno da posmatrana operacija zavisi od svih promenljivih x_i, $q \leq i \leq p+q$ i od onih promenljivih y_j za koje je $\alpha_j = 1$, pošto možemo svim ostalim promenljivim dodeliti za vrednost jedinicu grupe G i pustiti uočenu promenljivu da uzima (bar dve) različite vrednosti iz G. Prema tome, naša operacija ne zavisi od neke promenljive y_j za koju je $\alpha_j = 2$. Ponovo postavljajući vrednosti svih ostalih promenljivih na jedinicu grupe G, zaključujemo da y_j^2 nije esencijalna operacija na grupi G. To je moguće samo ako je G Booleova grupa. Ali, u tom slučaju grupa G zadovoljava identitet $x^3 = x$, pa su zato sve operacije oblika

$$x_1 \dots x_p y_1^{\delta_1} \dots y_m^{\delta_m} x_{p+1} \dots x_{p+q},$$

gde je $\delta_i \in \{1, 3\}$ za sve $1 \leq i \leq m$, esencijalne na G, a time i na S. Sada samo preostaje da se ponovi razmatranje iz prvog slučaja primenjeno na ove operacije, kako bismo dobili (10). ■

Prva glavna teorema u vezi sa konačnim polugrupama sa polinomski ograničenim p_n-nizom je sledeća. U njoj su posmatrane polugrupe karakterisane preko identiteta koje zadovoljavaju.

TEOREMA 3.5.2. (Crvenković, Dolinka [20]) *Neka je S konačna polugrupa. Njen p_n-niz je polinomski ograničen ako i samo ako važi bar jedan od sledeća dva uslova:*

(i) Postoje $p, q, s \in \mathbf{N}$ tako da S zadovoljava identitete:

$$x_1 \dots x_p y z x_{p+1} \dots x_{p+q} = x_1 \dots x_p z y x_{p+1} \dots x_{p+q}, \tag{11}$$
$$x_1 \dots x_p y^2 x_{p+1} \dots x_{p+q+s} = x_1 \dots x_p y x_{p+1} \dots x_{p+q+s}. \tag{12}$$

(ii) Postoje $p, q, s, t \in \mathbf{N}$ tako da S zadovoljava identitet (11), kao i sledeće identitete:

$$x_1 \dots x_p y^3 x_{p+1} \dots x_{p+q+s} = x_1 \dots x_p y x_{p+1} \dots x_{p+q+s}, \tag{13}$$
$$x_1 \dots x_p (y_1 \dots y_t)^2 x_{p+1} \dots x_{p+q+s} = x_1 \dots x_p x_{p+1} \dots x_{p+q+s}. \tag{14}$$

Dokaz. ($\Rightarrow$) Najpre, primetimo da je egzistencija $p, q \in \mathbf{N}$ takvih da S zadovoljava (11) obezbeđena tačkom *(1)* Leme 3.5.1.

Pretpostavimo prvo da S zadovoljava identitet oblika (9). Tada na S važi i

$$x_1 \dots x_p y z^k x_{p+1} \dots x_{p+s} \dots x_{p+q+s} = x_1 \dots x_p y^2 z^k x_{p+1} \dots x_{p+s} \dots x_{p+q+s}$$

za sve $s \geq 0$. Odaberimo $s = (k-1)|S| + 1$ i posmatrajmo proizvoljan niz

$$\langle a_1, \dots, a_p, b, c_1, \dots, c_s, a_{p+1}, \dots, a_{p+q} \rangle$$

elemenata polugrupe S. Po Dirichletovom pricipu, među $c_1, \dots, c_s$ postoji bar k jednakih elemenata. Posmatrajmo proizvod

$$a_1 \dots a_p b c_1 \dots c_s a_{p+1} \dots a_{p+q}.$$

Po (11), faktori c_i, $1 \leq i \leq s$, se mogu permutovati tako da uočenih k jednakih (recimo, $c_{i_1} = \dots = c_{i_k} = c$) dođu odmah do b, i to sa desne strane. Dobijamo

$$a_1 \dots a_p b c^k c_1 \dots c_{i_1 - 1} c_{i_1 + 1} \dots a_{p+1} \dots a_{p+q}.$$

Po (9), gornji proizvod je jednak

$$a_1 \dots a_p b^2 c^k c_1 \dots c_{i_1 - 1} c_{i_1 + 1} \dots a_{p+1} \dots a_{p+q}.$$

Najzad, primenimo permutaciju faktora koja je inverzna malopređašnjoj. Rezultat je

$$a_1 \dots a_p b^2 c_1 \dots c_s a_{p+1} \dots a_{p+q}.$$

Pošto smo pošli od proizvoljnog niza elemenata iz S (tj. proizvoljne valuacije), time smo upravo pokazali da na S važi (12).

U suprotnom, S zadovoljava (10), ali ne i (9). Tada možemo pokazati da na S važi (13) na potpuno isti način kao što smo to učinili za (12) malopre, sa jedinom razlikom što se b zamenjuje sa b^3 umesto sa b^2. Štaviše, videli smo u dokazu tačke *(2)* Leme 3.5.1 da S ima neesencijalnu operaciju oblika

$$x_1 \dots x_p y_1^{\alpha_1} \dots y_t^{\alpha_t} x_{p+1} \dots x_{p+q},$$

gde je $\alpha_1, \dots, \alpha_t \in \{1, 2\}$ i pri tome neesencijalne promenljive mogu biti samo one y_i za koje je $\alpha_i = 2$. Ali, tada je jasno da operacija

$$x_1 \dots x_p y_1^2 \dots y_t^2 x_{p+1} \dots x_{p+q+s},$$

koja je jednaka

$$x_1 \dots x_p (y_1 \dots y_t)^2 x_{p+1} \dots x_{p+q+s},$$

takođe nije esencijalna, pri čemu su sve neesencijalne promenljive među $y_1, \dots, y_t$. Po Lemi 1.1.3, gornja operacija ne zavisi ni od jedne od njih (pošto je invarijantna na sve permutacije promenljivih $y_1, \dots, y_t$), pa tako S zadovoljava identitet

$$x_1 \dots x_p (y_1 \dots y_t)^2 x_{p+1} \dots x_{p+q+s} = x_1 \dots x_p x_{p+1}^{2t+1} x_{p+2} \dots x_{p+q+s}$$

Uzimajući $s = (k-1)|S|+2$ i primenjujući (13) na desnu stranu gornjeg identiteta, dobijamo upravo (14), kao što se i tražilo.

($\Leftarrow$) U ovom delu dokaza, naš zadatak se sastoji u tome da nađemo polinomno ograničenje za $p_n(S)$ na osnovu sistema identiteta (11), (12), odnosno (11), (13), (14), respektivno.

Pođimo najpre od pretpostavke da S zadovoljava identitete (11) i (12) za neke $p, q, s \in \mathbf{N}$. Kao posledicu (11) imamo da je svaka reč sa $n \geq p+q$ slova ekvivalentna nad S nekoj reči oblika

$$x_{i_1} \dots x_{i_p} x_1^{\gamma_1} \dots x_n^{\gamma_n} x_{j_1} \dots x_{j_q}, \tag{15}$$

gde je $\gamma_i \geq 0$ za sve $1 \leq i \leq n$ (x^0 označava praznu reč). Jasno, najviše $p+q$ od brojeva γ_i može biti jednako 0, jer u suprotnom posmatrana reč sadrži manje od n različitih slova. Kombinovani efekat identiteta (11) i (12) je taj da možemo smatrati da je $\gamma_i \leq 1$, ukoliko je $n \geq p+q+s$. Stoga broj reči neekvivalentnih nad S koje sadrže promenljive $x_1, \dots, x_n$ nije veći od

$$n^{p+q} \sum_{m=0}^{p+q} \binom{n}{m},$$

što je polinom po n stepena $2(p+q)$. Zato, ako je $n \geq p+q+s$, tada imamo polinomsku gornju granicu za $p_n(S)$, pa tako postoji i polinomsko gornje ograničenje za $p_n(S)$ za sve $n \geq 1$.

Razmatrajmo sada slučaj kada S zadovoljava identitete (11), (13) i (14) za neke $p, q, s, t \in \mathbf{N}$. Kao i malopre, svaka n-arna reč je S-ekvivalentna reči oblika (15). Međutim, za $n \geq p+q+s$ identitet (13) implicira slabiju restrikciju $\gamma_i \leq 2$ za $1 \leq i \leq n$. S druge strane, identitet (14) povlači da za $n \geq p+q+s+t$ možemo smatrati da je strogo manje od t od brojeva γ_i jednako 2 i da je, naravno, ne više od $p+q$ od njih jednako 0. Tako, za $n \geq p+q+s+t$ dobijamo

$$p_n(S) \leq n^{p+q} \sum_{m=0}^{p+q} \sum_{l=0}^{t-1} \binom{n}{m} \binom{n-m}{l}.$$

Očito, desna strana gornje nejednakosti je polinomska funkcija po n stepena $2(p+q)+t-1$. ■

Analogno kao i u prethodnom odeljku, polugrupe koje ovde razmatramo se mogu i strukturno opisati. Njihova struktura će ponovo biti data u terminima nilpotentnih proširenja. Prethodno nam je potrebno pomoćno tvrđenje, čija je uloga da učini gornju teoremu operativnijom za dalji rad.

LEMA 3.5.3. *Neka je S konačna polugrupa i $m \in \mathbf{N}$ takvo da je $S^m = S^{m+1}$. Tada S ima polinomski ograničen p_n-niz ako i samo ako važi bar jedan od sledeća dva uslova:*

(i) za sve $a, d \in S^m$ i $b, c \in S$ važi $abcd = acbd$ i $ab^2d = abd$,

(ii) za sve $a, d, e \in S^m$ i $b, c \in S$ važi $abcd = acbd$, $ab^3d = abd$ i $ad^2e = ae$.

Dokaz. Činjenica da je bar jedan od data dva uslova potreban sledi iz prethodne teoreme, $S^k = Im(x_{i_1} \dots x_{i_k})$ za različite $i_1, \dots, i_k$ i inkluzije $S^k \supseteq S^m$ za sve $k \in \mathbf{N}$. Dokaz obratne implikacije se sastoji od očevidne transkripcije datih uslova *(i)* i *(ii)* u odgovarajuće uslove Teoreme 3.5.2 za $p = q = s = t = m$. ∎

TEOREMA 3.5.4. (Crvenković, Dolinka [20]) *Neka je S konačna polugrupa. Njen p_n-niz je polinomski ograničen ako i samo ako je S nilpotentno proširenje medijalne polugrupe M (polugrupe koja zadovoljava identitet $xyzt = xzyt$) koja još zadovoljava ili $xy^2z = xyz$, ili $xy^2z = xz$.*

Dokaz. ($\Rightarrow$) Neka je $m \in \mathbf{N}$ takvo da važi $S^m = S^{m+1}$. Tada je polugrupa S nilpotentno proširenje (indeksa m) svog ideala S^m, pa ova implikacija sledi neposredno iz Leme 3.5.3.

($\Leftarrow$) Najpre pretpostavimo da je S nilpotentno proširenje medijalne polugrupe M koja zadovoljava identitet $xy^2z = xyz$. Tada je $S^m \subseteq M$ i stoga $\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\gamma\beta\delta$ i $\alpha\beta^2\gamma = \alpha\beta\gamma$ važi za sve $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in S^m$. Pokazaćemo da ovo povlači uslov *(i)* Leme 3.5.3. Neka je $a, c, d \in S^m$ i $b \in S$. Tada postoje $a_1, a_2 \in S^m$ tako da je $a = a_1a_2$, budući da je $S^m = S^{2m} = (S^m)^2$. Tako, imamo

$$abcd = a_1a_2bcd = a_1ca_2bd = a_1a_2cbd = acbd.$$

(Naravno, ovde i u narednim redovima koristimo činjenicu da ako $u \in S^m$ i $v \in S$, tada $uv, vu \in S^m$.) Sada uz pretpostavku $a, d \in S^m$ i $b, c \in S$, gde je $a = a_1a_2$ i $d = d_1d_2$, dobijamo

$$abcd = a_1a_2bcd_1d_2 = a_1cd_1a_2bd_2 = a_1ca_2d_1bd_2 = a_1a_2cd_1bd_2 = a_1a_2cbd_1d_2 = acbd,$$

što je tačno prvi deo tačke *(i)* Leme 3.5.3. Neka je sada $a, c \in S^m$, $b \in S$ i $a = a_1a_2$. Primenom identiteta $xy^2z = xyz$ sledi

$$ab^2c = a_1a_2(b^2c) = a_1a_2^2b^2c = a_1(a_2b)^2c = a_1a_2bc = abc,$$

što se i tražilo.

Pođimo sada od pretpostavke da je M medijalna polugrupa koja zadovoljava identitet $xy^2z = xyz$. Identično kao i u prethodnom pasusu pokazujemo da važi $abcd = acbd$ za sve $a, d \in S^m$ i $b, c \in S$. Primetimo da je identitet $xy^3z = xyz$ direktna posledica identiteta $xy^2z = xz$. Zato za $a, c \in S^m$, $b \in S$ i $a = a_1a_2$ važi

$$ab^3c = a_1a_2(b^3c) = a_1a_2^3b^3c = a_1(a_2b)^3c = a_1a_2bc = abc$$

i

$$ab^2c = a_1a_2(b^2c) = a_1a_2^3b^2c = a_1a_2(a_2b)^2c = a_1a_2c = ac,$$

tj. dobijamo tačku *(ii)* Leme 3.5.3. Dokaz je time kompletiran. ∎

PRIMER 3.5.5. Polugrupe sa konstantno ograničenim p_n-nizom, opisane u Teoremama 3.4.4 i 3.4.7 trivijalno imaju polinomski ograničen p_n-niz. I zaista, lako možemo videti da one stvarno zadovoljavaju uslove gornje teoreme. Naime, polumreže i Booleove grupe su komutativne (i stoga medijalne), dok za pravougaone trake važe identiteti $xyzt = xt = xzyt$. Polumreže i pravougaone trake su idempotentne, pa zadovoljavaju $xy^2z = xyz$, dok je u Booleovim grupama $y^2 = 1$, odakle je $xy^2z = xz$. Takođe, ako je S normalna traka, po Teoremi 3.2.3 sledi $p_n(S) \leq n^2$. Ali, sada svako konačno nilpotentno proširenje normalne trake ima polinomski ograničen p_n-niz, pošto normalne trake zadovoljavaju medijalni identitet i $xy^2z = xyz$, kao posledicu idempotentnog zakona.

PRIMER 3.5.6. Videli smo u prethodnim dokazima da se slučaj *(ii)* Teoreme 3.5.2 može pojaviti samo ako je S nilpotentno proširenje matrične polugrupe $\mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$, gde je G Booleova grupa (možemo pretpostaviti da je netrivijalna, jer je u suprotnom reč o nilpotentnom proširenju pravougaone trake, što je raspravljeno u prethodnom primeru). Postavlja se pitanje koje od ovih polugrupa imaju polinomski ograničen p_n-niz. Odgovor daje Teorema 3.5.4. Najpre, $\mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ mora biti medijalna polugrupa, što znači da za sve $a, b, c, d \in G$, $i, j, k, l \in I$ i $\kappa, \lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ važi

$$\langle a, i, \kappa\rangle\langle b, j, \lambda\rangle\langle c, k, \mu\rangle\langle d, l, \nu\rangle = \langle a, i, \kappa\rangle\langle c, k, \mu\rangle\langle b, j, \lambda\rangle\langle d, l, \nu\rangle.$$

Lako se pokazuje da je gornji uslov ekvivalentan sa

$$ap_{\kappa j}bp_{\lambda k}cp_{\mu l}d = ap_{\kappa k}cp_{\mu j}bp_{\lambda l}d,$$

što se zbog komutativnosti u G svodi na

$$p_{\kappa j}p_{\lambda k}p_{\mu l} = p_{\kappa k}p_{\lambda l}p_{\mu j} \tag{16}$$

za sve $j, k, l \in I$ i $\kappa, \lambda, \mu \in \Lambda$. Ako je $|G| > 1$, tada $\mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ ne može da zadovoljava identitet $xy^2z = xyz$, pa na njoj mora da važi $xy^2z = xz$. To je, na sličan način kao i malopre, ekvivalentno jednakostima

$$p_{\lambda j}p_{\mu j} = p_{\lambda k}p_{\mu k} \tag{17}$$

za sve $j, k \in I$ i $\lambda, \mu \in \Lambda$. Ali, kako elementi sendvič matrice pripadaju Booleovoj grupi, nije teško pokazati da je uslov (17) ekvivalentan uslovu (16). Stoga, tražene matrične polugrupe su tačno one za koje P zadovoljava uslov (17).

4. Bermanova hipoteza za konačne polugrupe

U poslednjoj glavi ovog rada dajemo parcijalno rešenje Problema 1, koje, međutim, obuhvata neke od najznačajnijih i u literaturi najviše izučavanih klasa polugrupa (kao npr. regularne, komutativne, desno (levo) reduktivne, itd.). Podsetimo, reč je o Bermanovoj hipotezi za polugrupe, koja tvrdi da je p_n-niz svake konačne polugrupe ili ograničen, ili strogo monotono rastući počev od nekog člana. Konačne polugrupe sa ograničenim p_n-nizom su u potpunosti opisane u odeljku 3.4 prethodne glave. U ovoj glavi najpre dokazujemo da sve konačne sirjektivne polugrupe (polugrupe S za koje je $S^2 = S$, tj. kod kojih se svi njeni elementi pojavljuju u tablici) imaju Bermanovo svojstvo. Zatim pokazujemo da ovo svojstvo imaju kako određeni tipovi konačnih nilpotentnih proširenja sirjektivnih polugrupa (npr. retraktivna proširenja), tako i konačna nilpotentna proširenja nekih specijalnih klasa sirjektivnih polugrupa. Naravno, nilpotentna idealska proširenja polugrupa se nalaze u samom središtu istraživanja u ovoj oblasti zbog proste činjenice da je svaka konačna polugrupa nilpotentno proširenje (konačne) sirjektivne polugrupe.

4.1. Slučaj sirjektivnih polugrupa

Za polugrupu S kažemo da je **sirjektivna** ako važi $S^2 = S$ (negde se koristi i termin **globalno idempotentna polugrupa**). U slučaju da je reč o konačnoj polugrupi, ova osobina se lako može vizuelizovati: naime, tada se svi elementi iz S pojavljuju u tablici polugrupe S. Sirjektivne polugrupe, na primer, obuhvataju sve regularne polugrupe i sve polugrupe sa jedinicom. U ovom odeljku dajemo glavni rezultat rada [22] u kojem je pokazano da sve konačne sirjektivne polugrupe imaju Bermanovo svojstvo. Kako bismo mogli da dokažemo ovo tvrđenje, biće nam neophodan naredni niz lema. Prve dve od njih pokazuju da konačne sirjektivne polugrupe imaju izvesne sličnosti sa regularnim polugrupama.

LEMA 4.1.1. *Neka je S konačna sirjektivna polugrupa. Tada su sve njene maksimalne $\mathcal{D}$-klase regularne.*

Dokaz. Neka je D maksimalna $\mathcal{D}$-klasa u S. Posmatrajmo restrikcije parcijalnih uređenja $\mathcal{L}$- i $\mathcal{R}$-klasa u S redom na skupove takvih klasa koje su sadržane u D (reč je o skupovima $D/\mathcal{L}$ i $D/\mathcal{R}$, respektivno). U tim uređenjima, odaberimo po jedan maksimalni element: neka su to L, odnosno R (zapravo, poznato je da je svaka $\mathcal{R}$-klasa iz $D/\mathcal{R}$ maksimalna u $D/\mathcal{R}$ i analogno za $\mathcal{L}$-klase, vidi [66], Propozicija 3.7). Najzad, definišimo $H = L \cap R$ i uočimo proizvoljan element $a \in H$.

Pošto je $S^2 = S$, to postoje $b, c \in S$ tako da je $a = bc$. Sledi $S^1bS^1 \supseteq S^1aS^1$, pa je $D_b \geq D_a = D$. Kako je D maksimalna $\mathcal{D}$-klasa, to je $a\mathcal{D}b$, tj. $b \in D$. Takođe, $bS^1 \supseteq aS^1$, odakle je $bS^1 = aS^1$. Zaključujemo da je $b = as$ za neko $s \in S$. Na analogan način, $c = ta$ za neko $t \in S$. Dakle, imamo da je

$$a = asta,$$

pa je element a regularan, a time i cela klasa D. ■

LEMA 4.1.2. *Neka je S konačna sirjektivna polugrupa koja nije unija grupa. Tada postoji $a \in S$ i idempotent $e \in S$ tako da H_a nije grupa i važi $ea = a$ ili $ae = a$.*

Dokaz. Kako S nije unija grupa, u S postoje $\mathcal{D}$-klase koje sadrže $\mathcal{H}$-klase koje nisu grupe. Neka je D maksimalna $\mathcal{D}$-klasa u S sa gornjom osobinom (koja postoji zbog konačnosti S).

Ako je D regularna, neka je tada $H \subseteq D$ jedna od $\mathcal{H}$-klasa koja nije grupa i odaberimo $a \in H$ na proizvoljan način. Očito, element a je regularan, pa postoje idempotenti $e, f \in D$ tako da je $ea = af = a$.

U suprotnom slučaju, klasa D nije regularna, pa ne sadrži grupne $\mathcal{H}$-klase. Na isti način kao i u Lemi 4.1.1, posmatrajmo $\mathcal{H}$-klasu H koja je presek po jedne maksimalne $\mathcal{L}$- i $\mathcal{R}$-klase sadržane u D i neka je $a \in H$. Kako je polugrupa S sirjektivna, to je $a = bc$ za neke $b, c \in S$. Jasno, $R_a \leq R_b$ i $L_a \leq L_c$. Ako bi u oba slučaja važile jednakosti, tada bi bilo $b = ab'$, $c = c'a$ za neke $b', c' \in S^1$, odakle bismo dobili $a = a^2$ ili $a = axa$ za neko $x \in S$. U oba slučaja bi element a bio regularan, što je u suprotnosti sa pretpostavkom o neregularnosti klase D. Zato mora biti $R_a < R_b$ ili $L_a < L_c$. Po konstrukciji, ovo znači da je $D = D_a < D_b$ ili $D = D_a < D_c$, pa je bar jedna od klasa D_b, D_c regularna. Ukoliko je D_b regularna klasa, nalazimo idempotent $e \in D_b$ tako da je $eb = b$, odnosno $ea = a$. Slično, ako je klasa D_c regularna, tada je $af = a$ za odgovarajući idempotent $f \in D_c$. ■

LEMA 4.1.3. *Neka je S konačna polugrupa, $m \in \mathbf{N}$ takvo da je $S^{m+1} = S^m$ i f njena n-arna term operacija indukovana termom u kome figurišu sve promenljive $x_1, \ldots, x_n$. Ako polugrupa S^m nije prosta, tada je operacija f esencijalno n-arna.*

Dokaz. Najpre primetimo da je dovoljno dokazati lemu za slučaj kada je S sirjektivna polugrupa, odnosno kada je $m = 1$, pošto se u opštem slučaju umesto S može posmatrati ideal S^m (koji je po datom uslovu sirjektivan) i restrikcija $f|_{S^m}$. Dakle, neka je $S^2 = S$.

Po pretpostavci leme, S ima bar dve $\mathcal{D}$-klase. Među njima postoji bar jedna maksimalna (jer je polugrupa S konačna), recimo D. Takođe, konačnost S povlači da je klasa D regularna, po Lemi 4.1.1. D tada mora da sadrži idempotentan element, recimo $e \in D$. Dalje, odaberimo proizvoljan element $a \in S \setminus D$. Tada važi

$$f(e, \ldots, e) = e.$$

Međutim,

$$f(e, \ldots, e, a, e, \ldots, e) \neq e,$$

jer bi u suprotnom bilo $e \in S^1 a S^1$ i stoga $S^1 e S^1 \subseteq S^1 a S^1$, što bi, zbog maksimalnosti D, impliciralo $a \in D$. To je nemoguće, pa zato f zavisi od svih svojih promenljivih. ■

Sledeće tvrđenje je očito, ali ga ipak izdvajamo kao posebnu lemu.

LEMA 4.1.4. *Ako je S nekomutativna sirjektivna polugrupa, tada operacija l_n nije totalno simetrična ni za jedno $n \geq 2$.* ■

Takođe, biće nam potreban jedan od rezultata rada [90].

LEMA 4.1.5. (Putcha, Yaqub [90]) *Neka za $k \geq 2$ postoji $\sigma \in G(l_k)$ tako da je $\sigma(1) \neq 1$ i $\sigma(k) \neq k$. Tada je operacija l_n totalno simetrična za dovoljno veliko n.*

Primetimo da je Lema 3.4.3 zapravo specijalni slučaj gornjeg tvrđenja za ciklus $\sigma = (12 \ldots k)$.

Najzad, poslednja lema u ovom nizu je tehničkog karaktera i opisuje izvesne formalne odnose među polugrupnim identitetima. Međutim, ona će biti od ključnog značaja kasnije, kada budemo ustanovljavali strogu monotonost posmatranih p_n-nizova.

LEMA 4.1.6. *Neka je S polugrupa koja zadovoljava identitet oblika*

$$x_1 \ldots x_k = W, \tag{18}$$

pri čemu prvo slovo reči $W = W(x_1, \ldots, x_k)$ nije x_1 i postoji slovo koje se bar dva puta pojavljuje u W. Tada za dovoljno veliko n postoji reč $W_0 = W_0(x_1, \ldots, x_n)$ tako da na S važi identitet

$$x_1 \ldots x_n = x_1^2 W_0.$$

Dokaz. Ako operacija $x_1x_2\dots x_k$ ne zavisi od x_1, tada za sve $n \geq k$ važi

$$x_1x_2\dots x_n = x_1^2x_2\dots x_n.$$

Zbog toga u daljem pretpostavljamo da $x_1x_2\dots x_k$ zavisi od promenljive x_1. U tom slučaju, W mora da sadrži bar jedno pojavljivanje x_1. Dokaz leme sada teče preko tri pomoćna tvrđenja.

Tvrđenje 1. Za sve $L \in \mathbf{N}$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ postoje reči W_1 i W_2 za koje S zadovoljava identitet

$$x_1x_2\dots x_n = W_1x_1W_2$$

i $|W_1|, |W_2| \geq L$.

Dokaz Tvrđenja 1. Neka je $n \geq n_0 = k+2L-1$ i neka je x_i $(i \neq 1)$ prvo slovo reči W. Neka su $y_1, \dots, y_k$ reči za koje je $x_1x_2\dots x_n = y_1y_2\dots y_k$, $y_1 = x_1x_2\dots x_{L+1}$ i $|y_i| \geq L$. Tvrđenje sada sledi iz identiteta (18) primenjenog na $y_1y_2\dots y_k$, imajući u vidu da reč W sadrži x_1.

Tvrđenje 2. Za sve $L \in \mathbf{N}$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$ postoje reči W_3, W_4 i W_5 za koje S zadovoljava identitet

$$x_1x_2\dots x_n = W_3x_1W_4x_1W_5$$

i $|W_3|, |W_4|, |W_5| \geq L$.

Dokaz Tvrđenja 2. Neka je x_j proizvoljno slovo koje se pojavljuje bar dvaput u W i neka je n_0 takvo da na S za sve $n \geq n_0$ važi

$$x_1x_2\dots x_n = W_1x_1W_2$$

za neke reči W_1 i W_2 za koje je $|W_1|, |W_2| \geq \max(L+j-1, L+k-j)$ (takvo n_0 postoji po Tvrđenju 1). Pišimo $W_1x_1W_2 = y_1y_2\dots y_k$, gde su $y_1, \dots, y_k$ proizvoljne neprazne reči sa jedinim ograničenjem da je $y_j = y_j'x_1y_j''$ i $|y_j'|, |y_j''| \geq L$. Tvrđenje sada sledi primenom identiteta (18) na $y_1y_2\dots y_k$.

Tvrđenje 3. Neka je x_i prvo slovo reči W. Ako su U i V reči za koje važi $|U| \geq i-1$ i $|V| \geq k-i$, tada postoji reč Z takva da identitet

$$Ux_1V = x_1Z$$

važi na S.

Dokaz Tvrđenja 3. Napišimo $Ux_1V = y_1y_2\dots y_k$, gde je $y_i = x_1$, i primenimo identitet (18).

Sada smo u mogućnosti da dokažemo tvrđenje leme. Kao i ranije, neka je x_i prvo slovo reči W. Po Tvrđenju 2, postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n \geq n_0$, S zadovoljava

$$x_1 x_2 \dots x_n = W_3 x_1 W_4 x_1 W_5$$

za neke reči W_3, W_4 i W_5 za koje je $|W_3|, |W_4|, |W_5| \geq 2\max(i-1, k-i)$. Napišimo $W_4 = W_4' W_4''$, gde je $|W_4'|, |W_4''| \geq \max(i-1, k-i)$. Po Tvrđenju 3, postoje reči Z_1 i W_0 tako da na S važi

$$W_3 x_1 W_4' = x_1 Z_1, \ \ Z_1 W_4'' x_1 W_5 = x_1 W_0.$$

Sada imamo niz identiteta

$$x_1 x_2 \dots x_n = W_3 x_1 W_4' W_4'' x_1 W_5 = x_1 Z_1 W_4'' x_1 W_5 = x_1^2 W_0,$$

koji okončavaju dokaz leme. ∎

Dokaz najavljenog glavnog rezultata ovog odeljka se sada deli na dva suštinski različita slučaja, i to prema tome da li je S unija grupa ili ne. Upravo zato ćemo ih izdvojiti u dve posebne teoreme, koje zajedno daju traženi rezultat. Prvo razmatramo drugi od navedena dva slučaja.

TEOREMA 4.1.7. (Crvenković, Dolinka, Ruškuc [22]) *Neka je S konačna sirjektivna polugrupa koja nije unija grupa. Tada je p_n-niz polugrupe S strogo monotono rastući počev od nekog člana.*

Dokaz. Ako je polugrupa S komutativna, tada je njena operacija množenja strogo sirjektivna u smislu Bermana i Kisielewicza [9] (vidi odeljak 1.3), pa po Teoremi 1.3.4 sledi da je p_n-niz polugrupe S ili strogo monotono rastući od nekog svog člana, ili ograničen konstantom. Po Teoremi 3.4.7, drugi slučaj se javlja ako i samo ako je S ili polumreža, ili Booleova grupa ili pravougaona traka, tj. samo ako je S unija grupa. Zato u preostalom delu dokaza ove teoreme možemo pretpostaviti da polugrupa S nije komutativna.

Primenjujući Lemu 4.1.2, možemo (bez umanjenja opštosti) pretpostaviti da postoji $a \in S$ i idempotent $e \in S$ tako da H_a nije grupa i da je $ae = a$.

Definišimo preslikavanje $\varphi : E_n(S) \to E_{n+1}(S)$ (podsetimo se, $E_n(S)$ označava skup svih esencijalno n-arnih term operacija polugrupe S) tako da je:

$$(\varphi f)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}).$$

Po Lemi 4.1.3, gornja definicija je logički korektna. Reč je o injektivnom preslikavanju, jer ako je $f \neq g$ i $a_1, \dots, a_n \in S$ takvi da je

$$f(a_1, \dots, a_n) \neq g(a_1, \dots, a_n),$$

tada je $a_n = bc$ za neke $b, c \in S$, pa je zato

$$(\varphi f)(a_1, \ldots, a_{n-1}, b, c) \neq (\varphi g)(a_1, \ldots, a_{n-1}, b, c),$$

tj. $\varphi f \neq \varphi g$.

Preostaje da se pokaže da za dovoljno veliko n postoji $g \in E_{n+1}(S)$ tako da je $\varphi f \neq g$ za sve $f \in E_n(S)$. Naime, dokazaćemo da ovo važi za $g = x_{n+1}x_1 \ldots x_n$.

Zaista, pretpostavimo da za neko $f \in E_n(S)$ važi

$$x_{n+1}x_1 \ldots x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}).$$

Primetimo da prvo slovo reči koja indukuje operaciju $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1})$ ne može biti x_{n+1}, kao što ni njeno poslednje slovo ne može biti x_n. Po Lemama 4.1.4 i 4.1.5, $f \neq l_n^\sigma$ za sve $\sigma \in S_n$. Zato reč koja indukuje operaciju f sadrži bar dva pojavljivanja neke promenljive, pa Lema 4.1.6 povlači da za dovoljno veliko m, S zadovoljava identitet oblika

$$x_{m+1}x_1 \ldots x_m = x_{m+1}^2 W(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1})$$

za neku $(m+1)$-arnu reč W. Ako je w njoj odgovarajuća term operacija, zamenom $x_1 = \ldots = x_m = e$, $x_{m+1} = a$ dobijamo

$$a = a^2 w(e, \ldots, e, a) = a^r,$$

za neko $r \geq 2$, što povlači da je $L_a = L_{a^2}$ i $R_a = R_{a^2}$. Sledi da $a^2 \in H_a$, što je kontradikcija sa Greenovom teoremom, pošto H_a nije grupa. ■

Sada nam još preostaje da ispitamo ponašanje p_n-nizova konačnih unija grupa (one su sve regularne i stoga sirjektivne), čime će naše razmatranje biti kompletirano. Primetimo da je u narednoj teoremi pretpostavka o konačnosti polugrupe S irelevantna.

TEOREMA 4.1.8. (Crvenković, Dolinka, Ruškuc [22]) *Neka je polugrupa S unija grupa. Ukoliko S nije ni polumreža, ni Booleova grupa, ni pravougaona traka, tada postoji nenegativan ceo broj n_0 takav da za sve $n \geq n_0$ važi $p_{n+1}(S) \geq p_n(S) + 1$.*

Dokaz. Neka je S unija grupa. Po Cliffordovoj teoremi imamo da je S polumreža kompletno prostih polugrupa. Tačnije, Greenova ekvivalencija $\mathcal{J}$ je kongruencija na S i njene klase su kompletno proste potpolugrupe od S. Označimo ih sa S_α, $\alpha \in Y$, gde je Y polumreža.

Po Teoremi Suškeviča i Reesa, svaka od ovih polugrupa je izomorfna nekoj matričnoj polugrupi, tj. za sve $\alpha \in Y$ imamo

$$S_\alpha \cong \mathcal{M}[G_\alpha; I_\alpha, \Lambda_\alpha; P_\alpha].$$

Sada razlikujemo tri slučaja.

1. slučaj: postoje $\alpha, \beta \in \Sigma$ (ne obavezno različiti) tako da S_α nije grupa i S_β nije pravougaona traka.

Sledi da mora biti $|I_\alpha| \geq 2$ ili $|\Lambda_\alpha| \geq 2$ (razmatrajmo, bez umanjenja opštosti, samo drugi slučaj), kao i $|G_\beta| \geq 2$. Najpre, primetimo da ako je $|\Lambda| \geq 2$ i ako na matričnoj polugrupi $\mathcal{M}[G; I, \Lambda; P]$ važi identitet

$$x_{i_1} \dots x_{i_n} = x_{j_1} \dots x_{j_k},$$

tada je $i_n = j_k$ (u suprotnom, identitet ne važi ako stavimo $x_{i_n} = \langle g, i, \lambda_1 \rangle$, $x_{j_k} = \langle g, i, \lambda_2 \rangle$ za proizvoljno $g \in G$, $i \in I$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$). Isto se može reći i za S, pošto svaki identitet koji važi na S mora važiti na svim polugrupama S_α, $\alpha \in Y$.

Tako, za sve $f \in E_n(S)$ možemo logički ispravno definisati $l(f)$ kao indeks poslednje promenljive bilo koje reči koja indukuje operaciju f. Za datu operaciju $f \in E_n(S)$, definišimo operaciju φf na sledeći način:

$$(\varphi f)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n) x_{n+1} x_{l(f)}.$$

Ako je $\varphi f = \varphi g$ za neke $f, g \in E_n(S)$, tada na S važi

$$f(x_1, \dots, x_n) x_{n+1} x_{l(f)} = g(x_1, \dots, x_n) x_{n+1} x_{l(g)}.$$

Kao što smo videli, ovo povlači $l(f) = l(g) = l$.

Neka su sada $a_1, \dots, a_n \in S$ proizvoljni elementi. Jasno, svaka kompletno prosta polugrupa je regularna, pa to važi i za S. Neka je a_{n+1} bilo koji inverzni element za a_l. Sledi:

$$f(a_1, \dots, a_n) = f(a_1, \dots, a_n) a_{n+1} a_l = g(a_1, \dots, a_n) a_{n+1} a_l = g(a_1, \dots, a_n),$$

tj. $f = g$. Stoga je preslikavanje φ injektivno.

Kako je $|\Lambda_\alpha| \geq 2$, to lako sledi da φf zavisi od $x_{l(f)}$. Takođe, ako je $1 \leq k \leq n$, $k \neq l(f)$ i ako su $a_1, \dots, a_{k-1}, a, b, \dots, a_n \in S$ takvi da važi

$$f(a_1, \dots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n),$$

tada zamenjujući x_{n+1} bilo kojim inverznim elementom za $a_{l(f)}$, a ostale promenljive kao u gornjoj relaciji, zaključujemo da φf zavisi od x_k. Najzad, stavimo

$$x_1 = \dots = x_n = \langle p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda \rangle, \; x_{n+1} = \langle g, i, \lambda \rangle$$

za proizvoljno odabrane $g \in G_\beta$, $i \in I_\beta$, $\lambda \in \Lambda_\beta$. Za ove argumente, φf ima vrednost

$$\langle p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda \rangle \langle g, i, \lambda \rangle \langle p_{\lambda i}^{-1}, i, \lambda \rangle = \langle g, i, \lambda \rangle.$$

Na taj način, φf zavisi i od x_{n+1}, jer je $|G_\beta| \geq 2$. Da bismo dobili nejednakost $p_{n+1}(S) \geq p_n(S)+1$, dovoljno je uočiti da je $\varphi f \neq x_1 \dots x_n x_{n+1}$ za sve $f \in E_n(S)$, jer je

$$f(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}x_{l(f)} \neq x_1 \dots x_n x_{n+1}.$$

2. slučaj: S je polumreža pravougaonih traka.

Tada je polugrupa S idempotentna, pa je S ili polumreža, ili pravougaona traka, ili njen p_n-niz strogo monotono raste počev od nekog člana, na osnovu rezultata Kisielewicza [60, 64].

3. slučaj: S je polumreža grupa.

U ovom slučaju sve $\mathcal{J}$-klase od S su grupe i S je Cliffordova polugrupa, što znači da su svi njeni idempotenti centralni (tj. komutiraju sa svim elementima polugrupe S). Neka e_a označava jedinični element $\mathcal{J}$-klase J_a.

Za $f \in E_n(S)$, definišimo

$$(\psi f)(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}.$$

Ako je $\psi f = \psi g$ za neke $f, g \in E_n(S)$ i $a_1, \dots, a_n \in S$, tada zbog centralnosti svih idempotenata u S lako sledi da je

$$f(a_1, \dots, a_n)e_{a_1} = f(a_1, \dots, a_n).$$

Tako, stavljajući bilo koje vrednosti za $x_1, \dots, x_n$ i e_{a_1} umesto x_{n+1} (gde je a_1 vrednost promenljive x_1), dobijamo $f = g$, pa zaključujemo da je preslikavanje ψ injektivno.

Sada posmatrajmo $a_1, \dots, a_{k-1}, a, b, a_{k+1}, \dots, a_n \in S$ tako da je

$$f(a_1, \dots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \dots, a_n) \neq f(a_1, \dots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \dots, a_n).$$

Ako je $n \geq 2$, tada možemo odabrati $1 \leq m \leq n$ tako da je $m \neq k$. Ako zamenimo $x_{n+1} = e_{a_m}$ (a ostalim promenljivama dodelimo vrednosti kao i malopre), dobijamo da ψf zavisi od x_k za sve $1 \leq k \leq n$. Bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $|J_a| \geq 2$ za neko $a \in S$, jer je u suprotnom S idempotentna polugrupa, pa tada postupamo kao i u drugom slučaju. Dakle, ako je $a' \in J_a$, $a' \neq a$, tada je

$$f(e_a, \dots, e_a)a = e_a a = a \neq a' = e_{a'}a' = e_a a' = f(e_a, \dots, e_a)a',$$

pa ψf zavisi od x_{n+1}. Tako, $f \in E_n(S)$ za $n \geq 2$ povlači da je $\psi f \in E_{n+1}(S)$.

Na kraju, ostaje nam da pokažemo da, sem u slučajevima koje možemo lako razrešiti, važi $\psi f \neq x_1 \dots x_n x_{n+1}^2$ za sve $f \in E_n(S)$. Zaista, ako bi bilo $\psi f = x_1 \dots x_n x_{n+1}^2$ za neku esencijalno n-arnu term operaciju f na S, tada je za sve $a \in S$,

$$a = f(e_a, \dots, e_a)a = e_a^n a^2 = a^2,$$

tj. S je ponovo idempotentna polugrupa.

Preostaje da se pokaže da je $x_1 \dots x_n x_{n+1}^2$ zaista esencijalno $(n+1)$-arna operacija na S. Očito, ona zavisi od $x_1, \dots, x_n$ na svakoj netrivijalnoj $\mathcal{J}$-klasi J_a. Dakle, treba još ispitati da li zavisi i od x_{n+1}.

Možemo pretpostaviti da S ima bar dve $\mathcal{J}$-klase, jer je u suprotnom S grupa koja nije Booleova, pa stoga očito ima strogo monotono rastući p_n-niz. Neka je, dakle, $J_a \neq J_b$. Tada je $e_a \neq e_b$. Pošto je S Cliffordova polugrupa, imamo

$$e_a e_b = e_b e_a.$$

Međutim, gornji proizvod se razlikuje od bar jednog od elemenata e_a, e_b. Na primer, neka je $e_a e_b \neq e_a$ (drugi slučaj je analogan). Tada stavimo $x_1 = \dots = x_n = e_a$ i, redom, $x_{n+1} = e_a$ i $x_{n+1} = e_b$, pa otuda odmah uočavamo da je $x_1 \dots x_n x_{n+1}^2 \in E_n(S)$, čime je dokaz završen. ∎

4.2. Slučajevi raznih drugih tipova konačnih polugrupa dobijenih putem nilpotentnih proširenja

Kao što smo to već više puta naglasili, pretpostavka o konačnosti polugrupe S ima za posledicu da je niz njenih ideala $S \supseteq S^2 \supseteq \dots \supseteq S^n \supseteq \dots$ konačan, tj. on se stabilizuje za neko $m \in \mathbf{N}$. Drugim rečima, imamo $S^m = S^{m+1}$, pa je ideal S^m sirjektivan. Tako je svaka konačna polugrupa nilpotentno proširenje neke sirjektivne polugrupe, pa je prirodno da se rešenje Bermanove hipoteze za polugrupe traži kroz razmatranje strukture raznih nilpotentnih proširenja.

U tom smislu, rešavanju Bermanove hipoteze za nesirjektivne polugrupe se može pristupiti na dva načina. Jedan je da se posmatraju *određeni tipovi* konačnih nilpotentnih proširenja proizvoljnih sirjektivnih polugrupa, dok je drugi da se analiziraju proizvoljna konačna nilpotentna proširenja *nekih klasa* sirjektivnih polugrupa. U oba ova pravca su u radovima [22, 23] dobijeni izvesni parcijalni rezultati, koje ovde prikazujemo.

Najpre, na početku ovog odeljka dajemo osvrt na neke rezultate prvog tipa. Za ideal I polugrupe S kažemo da je **retraktivan** ako postoji S-endomorfizam η tako da je $\eta(S) = I$ i $\eta^2 = \eta$ (tj. $\eta(a) = a$ za sve $a \in I$). U tom slučaju, za S kažemo da je **retraktivno (idealsko) proširenje** polugrupe I (odnosno proizvoljne polugrupe izomorfne sa I). Nilpotentno retraktivno proširenje S polugrupe T, pri čemu je nilpotentna polugrupa S/T indeksa m, zovemo (usvajajući terminologiju iz [14]) m-**inflacija** polugrupe T. Primetimo da se za $m = 2$ ova definicija poklapa sa dobro poznatim pojmom inflacije polugrupa. U vezi sa retraktivnim proširenjima imamo sledeće značajno tvrđenje. Podsetimo, **poddirektan proizvod** polugrupa S_1 i S_2 je potpolugrupa direktnog proizvoda $S_1 \times S_2$ čije su projekcije redom celo S_1, odnosno S_2.

TEOREMA 4.2.1. (Petrich [80, Posledica III.6.7]) *Neka je polugrupa S retraktivno proširenje od T polugrupom $Q \cong S/T$. Tada je S poddirektan proizvod polugrupa T i Q.*

Gornja teorema upućuje na ispitivanje poddirektnih proizvoda polugrupa, pri čemu neki od faktora imaju Bermanovo svojstvo.

TEOREMA 4.2.2. (Crvenković, Dolinka, Ruškuc [22]) *Neka je T konačna polugrupa, a Q polugrupa sa osobinom da postoji $m \in \mathbf{N}$ tako da za sve $n \geq m$, Q zadovoljava sve identitete sa n promenljivih koji važe na T. Ako je S poddirektan proizvod T i Q, tada za sve $n \geq m$ važi $p_n(S) = p_n(T)$. Prema tome, ako T ima Bermanovo svojstvo, onda to svojstvo ima i S.*

Dokaz. Neka je operacija $f \in E_n(T)$ indukovana termom (polugrupnom reči) W. Tada W indukuje esencijalno n-arnu operaciju na S, jer ako su $a_1, \ldots, a_{i-1}, a, b, a_{i+1}, \ldots, a_n \in T$ takvi da je

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

tada postoje $q_1, \ldots, q_{i-1}, q, r, q_{i+1}, \ldots, q_n \in Q$ tako da je

$$\langle a_1, q_1 \rangle, \ldots, \langle a_{i-1}, q_{i-1} \rangle, \langle a, q \rangle, \langle b, r \rangle, \langle a_{i+1}, q_{i+1} \rangle, \ldots, \langle a_n, q_n \rangle \in S,$$

pa je stoga dovoljno za sve $j \neq i$ promenljivama x_j dodeliti redom vrednosti $\langle a_j, q_j \rangle$ i za x_i uzeti redom $\langle a, q \rangle$ i $\langle b, r \rangle$.

S druge strane, pretpostavimo da f ne zavisi od x_i. Tada postoji reč W' koja ne sadrži x_i tako da na T važi identitet $W = W'$. Ali, ako je pri tome $n \geq m$, tada po uslovima teoreme Q takođe zadovoljava ovaj identitet, pa zato ni operacija koju W indukuje na Q ne zavisi od x_i. Tako, W ne indukuje esencijalno n-arnu operaciju ni na S.

Najzad, posmatrajmo reči W_1 i W_2 koje sadrže promenljive $x_1, \ldots, x_n$, pri čemu smo pretpostavili da je $n \geq m$. Ako one indukuju istu operaciju na S, tada one jasno indukuju istu operaciju i na T, jer je prva projekcija poddirektnog proizvoda celo T. Obratno, ako ove reči indukuju istu operaciju na T, tada T zadovoljava identitet $W_1 = W_2$. Ali, tada i Q zadovoljava taj identitet, odakle sledi da on važi u S, tj. da W_1 i W_2 indukuju istu operaciju na S.

Sada su gornja razmatranja dovoljna kako bismo zaključili da za sve $n \geq m$ važi $p_n(S) = p_n(T)$. ■

POSLEDICA 4.2.3. *Sve konačne m-inflacije sirjektivnih polugrupa imaju Bermanovo svojstvo za sve $m \in \mathbf{N}$.*

Dokaz. Najpre, svaka nilpotentna polugrupa indeksa m trivijalno zadovoljava sve regularne identitete (identitete u kojima se sve promenljive pojavljuju sa obe strane) sa bar m promenljivih. Dakle, ako posmatrana sirjektivna polugrupa zadovoljava samo regularne identitete, onda tvrđenje sledi direktno iz Teoreme 4.2.2. U suprotnom, sirjektivna polugrupa koju razmatramo mora biti prosta, po Lemi 4.1.3. Pošto je ona konačna, reč je o kompletno prostoj polugrupi i stoga, o uniji grupa. U tom slučaju, tvrđenje je posledica Teoreme 4.2.5 date niže. ∎

POSLEDICA 4.2.4. *Neka je polugrupa S poddirektan proizvod konačne sirjektivne polugrupe T i polumreže Y. Tada S ima Bermanovo svojstvo.*

Dokaz. Slično kao i u prethodnoj posledici, Lema 4.1.3 povlači da ako T nije prosta polugrupa, tada T zadovoljava samo regularne identitete. Međutim, svaka polumreža zadovoljava sve regularne identitete, pa u ovom slučaju tvrđenje sledi neposredno iz Teoreme 4.2.2.

U suprotnom, S je poddirektan proizvod konačne (i stoga periodične) kompletno proste polugrupe i polumreže, odakle po Zadatku IV.5.7.1 iz [80] sledi da je S regularna (pa time i sirjektivna) polugrupa. Tvrđenje sada sledi iz Teorema 4.1.7 i 4.1.8. ∎

Primetimo da je u Teoremi 4.2.2, kao i u prethodnoj posledici, konačnost polugrupe Q, odnosno polumreže Y nebitna.

Kasnije ćemo videti da smo gornju Posledicu 4.2.3 mogli dobiti i na drugi način, u kontekstu *strogih* nilpotentnih proširenja (vidi Posledicu 4.2.10).

Sada prelazimo na rezultate drugog tipa, opisane u uvodu ovog odeljka, kada se restrikcije nameću na sirjektivne polugrupe, pa se onda razmatraju njihova proizvoljna konačna nilpotentna proširenja. Jedan u klasi tih rezultata je i sledeći; na njega smo se već pozvali u Posledici 4.2.3, pa je pogodno da ga što pre i dokažemo.

TEOREMA 4.2.5. (Crvenković, Dolinka, Ruškuc [23]) *Neka je konačna polugrupa S nilpotentno proširenje unije grupa T. Ako T nije ni polumreža, ni Booleova grupa, ni pravougaona traka, tada postoji nenegativan ceo broj n_0 tako da za sve $n \geq n_0$ važi $p_{n+1}(S) \geq p_n(S) + 1$.*

Dokaz. Neka je S konačno nilpotentno proširenje unije grupa T indeksa m, što znači da za sve $a_1, \ldots, a_m \in S$ važi $a_1 \ldots a_m \in T$, tj. $S^m = S^{m+1}$ i $T = S^m$.

Zbog konačnosti S, možemo pretpostaviti da postoji $r \in \mathbf{N}$ tako da važi $x^{r+1} = x$ za sve $x \in T$ (na primer, r se može odrediti kao n.z.s. redova maksimalnih podgrupa od T). Ako je $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ esencijalno n-arna operacija na S, definišimo operaciju φf na sledeći način:

$$(\varphi f)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f^r x_{n+1} f.$$

Očito je da je $(\varphi f)(x_1, \ldots, x_n, f^r) = f$.

Primetimo da za sve $n \geq m$, $f(a_1, \ldots, a_n) \in T$ za sve $a_1, \ldots, a_n \in S$. Zbog toga, odaberimo $n_0 = m$. Sada dokazujemo da za $n \geq n_0$, φf zavisi od svih svojih promenljivih.

Ako φf ne zavisi od x_{n+1}, tada je T po Lemi 4.1.3 prosta polugrupa. Takođe, polugrupa T tada mora biti idempotentna, jer bismo u suprotnom mogli da kao vrednost promenljivama $x_1, \ldots, x_n$ dodelimo jedinicu neke od netrivijalnih podgrupa od T i da pustimo x_{n+1} da uzima vrednosti u toj istoj podgrupi. Zaključujemo da je T pravougaona traka, što je nemoguće po uslovima teoreme. Zato φf zavisi od x_{n+1}.

Sada pokazujemo da φf zavisi i od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Po pretpostavci, f zavisi od svih svojih promenljivih, pa za sve $1 \leq k \leq n$ postoje $a_1, \ldots, a_{k-1}, a, b, a_{k+1}, \ldots, a_n \in S$ tako da je

$$f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \ldots, a_n) \neq f(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n).$$

Označimo levu i desnu stranu gornje nejednakosti sa f_a i f_b, respektivno. Pretpostavimo da za sve $x \in S$ važi

$$f_a^r x f_a = f_b^r x f_b.$$

Tada za $x = f_a^r$ imamo

$$f_a = f_b^r f_a^r f_b,$$

pa sledi $L_{f_a} \leq L_{f_b}$ i $R_{f_a} \leq R_{f_b}$. Zamenjujući $x = f_b^r$ dobijamo obratne nejednakosti, pa f_a i f_b pripadaju istoj grupnoj $\mathcal{H}$-klasi od S, koja je sadržana u T zbog $n \geq n_0$. Najzad, zamenimo $x = e_H$, gde je e_H jedinični element u $H_{f_a} = H_{f_b} = H$. Sledi $f_a = f_b$, što je kontradikcija. Zato mora biti $f_a^r x f_a \neq f_b^r x f_b$ za neko $x \in S$, a time i

$$(\varphi f)(a_1, \ldots, a_{k-1}, a, a_{k+1}, \ldots, a_n, x) \neq (\varphi f)(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n, x).$$

Okrenimo se sada ispitivanju injektivnosti preslikavanja φ. U tome će nam od pomoći biti u suštini iste ideje kao i malopre. Zaista, pretpostavimo da je $\varphi f = \varphi g$, gde su f i g esencijalno n-arne term operacije na S i $n \geq n_0$. Neka su $a_1, \ldots, a_n \in S$ proizvoljni elementi. Pišimo kraće $u = f(a_1, \ldots, a_n)$ i $v = g(a_1, \ldots, a_n)$. Sledi

$$u = v^r u^r v,$$

pa imamo $L_u \leq L_v$ i $R_u \leq R_v$. Slično se iz $v = u^r v^r u$ izvode suprotne nejednakosti, pa je $H_u = H_v = H$. Kako je $u^{r+1} = u$, to mora biti $u^2 \mathcal{H} u$, pa je H grupa; neka je njena jedinica e. Sada zamenimo $x_{n+1} = e$. Dobijamo $u = u^r e u = v^r e v = v$, odakle je $f = g$, tj. φ je injektivno preslikavanje.

Kako bismo kompletirali dokaz, sada je dovoljno dokazati da za sve $n \geq n_0$ postoji $(n+1)$-arna term operacija na S koja nije oblika φf ni za jednu n-arnu term operaciju f na S.

Po Cliffordovoj teoremi, T je polumreža Y kompletno prostih polugrupa, recimo T_α, $\alpha \in Y$. Ako neka od njih nije grupa (pa ima, na primer, bar dve $\mathcal{L}$-klase), tada na njoj očito ne važi

$$(f(x_1, \ldots, x_n))^r x_{n+1} f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \ldots x_n x_{n+1}$$

za proizvoljno f, pa je $\varphi f \neq x_1 \ldots x_n x_{n+1}$.

Drugi slučaj nastupa kada je T polumreža grupa. Tada imamo u potpunosti istu situaciju kao u trećem slučaju dokaza Teoreme 4.1.8: klase Greenove ekvivalencije $\mathcal{J}$ su grupe, pri čemu možemo pretpostaviti da je za neko $a \in T$, $|J_a| \geq 2$ (jer je u suprotnom T polumreža, što je nemoguće). U ovom slučaju pokazujemo da je $\varphi f \neq x_1 \ldots x_n x_{n+1}^2$. Ako ovo ne bi bilo tačno za neku n-arnu term operaciju f, stavimo $x_1 = \ldots = x_n = e_a$ i $x_{n+1} = a$, gde je e_a jedinični element grupe J_a. Imali bismo $a = a^2$, što povlači $|J_a| = 1$. Kontradikcija.

Preostaje samo da se vidi da li je $x_1 \ldots x_n x_{n+1}^2$ esencijalno $(n+1)$-arna operacija na S. Ali, može se pokazati da je ona esencijalno $(n+1)$-arna već na T, i to na potpuno isti način kako je to učinjeno na kraju dokaza Teoreme 4.1.8. Time je dokaz završen. ∎

Polugrupa S je **desno (levo) reduktivna** ako za sve $a, b \in S$ iz pretpostavke da je $ax = bx$ $(xa = xb)$ za sve $x \in S$ sledi da je $a = b$. Ako govorimo o konačnim polugrupama, ovo je ekvivalentno tvrđenju da se u tablici polugrupe S ne pojavljuju dve iste vrste (kolone). Sada pokazujemo da sva konačna nilpotentna proširenja desno (levo) reduktivnih polugrupa imaju Bermanovo svojstvo. Zapravo, tvrđenje koje ćemo dokazati je čak nešto opštije.

TEOREMA 4.2.6. (Crvenković, Dolinka, Ruškuc [23]) *Neka je S konačna polugrupa. Ako postoji $m \in \mathbf{N}$ tako da je njen ideal S^m desno (levo) reduktivan, tada S ima Bermanovo svojstvo.*

Dokaz. Neka je S^m desno reduktivni ideal polugrupe S (slučaj sa levom reduktivnošću se razmatra analogno). Ako je $n \geq m$ i $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ je esencijalno n-arna operacija na S, definišimo $(n+1)$-arnu operaciju ϕf sa

$$(\phi f)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n) x_{n+1}.$$

Ako ϕf ne zavisi od neke od svojih promenljivih, tada je S nilpotentno proširenje proste polugrupe (po Lemi 4.1.3) i stoga (zbog konačnosti S) nilpotentno proširenje unije grupa, pa rezultat sledi iz Teoreme 4.2.5. U suprotnom, operacija ϕf je esencijalno $(n+1)$-arna. Osim toga, ako je $\phi f = \phi g$, tada za sve $a_1, \ldots, a_n \in S$ imamo

$$f(a_1, \ldots, a_n) x = g(a_1, \ldots, a_n) x,$$

za sve $x \in S$. Kako $f(a_1, \ldots, a_n), g(a_1, \ldots, a_n) \in S^m$, to mora biti $f(a_1, \ldots, a_n) = g(a_1, \ldots, a_n)$, pa sledi $f = g$. Zato je ϕ injektivno preslikavanje.

Preostaje da se nađe esencijalno n-arna operacija na S koja nije oblika ϕf. Posmatrajmo, najpre, operaciju $x_{n+1}x_1 \dots x_n$ i pretpostavimo da na S važi

$$x_{n+1}x_1 \dots x_n = f(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}$$

za neku esencijalno n-arnu operaciju f. Ako reč koja indukuje f sadrži bar dva pojavljivanja neke promenljive, tada po Teoremi 1 rada Ćirić, Bogdanović [28] sledi da je S nil-proširenje unije grupa. U stvari, reč je o nilpotentnom proširenju unije grupa, pošto je dobro poznato da je svaka konačna nil-polugrupa nilpotentna, pa tvrđenje ponovo sledi iz Teoreme 4.2.5.

Preostali slučaj je kada je f oblika $x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$ za neku permutaciju $\sigma \in S_n$. To znači da S zadovoljava permutacijski identitet u kome se ni prve, ni poslednje promenljive njegove leve i desne strane, respektivno, ne poklapaju. Po Lemi 4.1.5, S tada zadovoljava sve permutacijske identitete nad k promenljivih za dovoljno veliko k, tj. S je nilpotentno proširenje komutativne (sirjektivne) polugrupe T. U tom slučaju, posmatrajmo operaciju $x_1 \dots x_n x_{n+1}^2$. Po Lemi 4.1.2 (polazeći od pretpostavke da T nije unija grupa), postoji $a \in T$ i idempotent $e \in E(T)$ tako da važi bar jedan od uslova $ae = a$ i $ea = a$, pri čemu H_a ($\mathcal{H}$-klasa elementa a) nije grupa. Ali, ova dva uslova su ekvivalentna zbog komutativnosti T, pa pretpostavka da na S za neku esencijalno n-arnu operaciju f važi

$$x_1 \dots x_n x_{n+1}^2 = f(x_1, \dots, x_n)x_{n+1}$$

povlači (nakon zamene $x_1 = \dots = x_n = e$, $x_{n+1} = a$)

$$a^2 = e^n a^2 = f(e, \dots, e)a = ea = a,$$

što protivreči uslovu da H_a nije grupa. Tako, operacija $x_1 \dots x_n x_{n+1}^2$ u ovom slučaju nije oblika ϕf, pa je teorema dokazana. ■

Na primer, desno (levo) inverzne polugrupe (vidi [1]) su desno (levo) reduktivne, što je pokazao Venkatesan [102] (stoga su sve inverzne polugrupe istovremeno i levo i desno reduktivne). Takođe, na osnovu Zadatka III.1.14.2 iz [80] vidimo da je komutativna polugrupa sirjektivna ako i samo ako su sve njene homomorfne slike **slabo reduktivne**, što znači da za sve $a, b \in S$ pretpostavka da je $ax = bx$ i $xa = xb$ za sve $x \in S$ povlači $a = b$. Jasno, za komutativnu polugrupu su pojmovi slabe, desne i leve reduktivnosti ekvivalentni, pa su sve konačne sirjektivne komutativne polugrupe desno (levo) reduktivne. Primedbe iznesene u ovom pasusu pokazuju da prethodna teorema ima, između ostalog, sledeće dve posledice.

POSLEDICA 4.2.7. *Sva konačna nilpotentna proširenja desno (levo) inverznih polugrupa imaju Bermanovo svojstvo.*

POSLEDICA 4.2.8. *Sva konačna nilpotentna proširenja komutativnih polugrupa (specijalno, sve konačne komutativne polugrupe) imaju Bermanovo svojstvo.*

Naravno, sada bi bilo moguće izvesti dokaze analogne dokazu Teoreme 4.2.6, i to za sve polugrupe S koje imaju esencijalno binarnu term operaciju $g(x, y)$ koja je desno reduktivna, tj. osobinu da za sve $a, b \in S$ iz $g(a, x) = g(b, x)$ za sve $x \in S$ sledi $a = b$. Bermanovo svojstvo se, dakle, može pokazati za sva konačna nilpotentna proširenja takvih polugrupa, posmatrajući preslikavanje ψ koje esencijalno n-arnoj operaciji f dodeljuje operaciju $\psi f = g(f, x_{n+1})$. Nije teško videti da sve polugrupe sa opisanom binarnom operacijom $g(x, y)$ moraju biti slabo reduktivne. Postavlja se pitanje kada je tačan obrat, tj. kada slabo reduktivna polugrupa ima desno reduktivnu esencijalno binarnu term operaciju. Ukoliko bi to uvek bilo tačno, tada bi Bermanovo svojstvo bilo pokazano za sva konačna nilpotentna proširenja slabo reduktivnih polugrupa.

Najzad, poslednja teorema ovog rada jeste ponovo rezultat prvog tipa: dakle, reč je opet o specijalnom tipu nilpotentnih proširenja. Za proširenje S polugrupe T kažemo da je **strogo** ako za sve $s \in S$ postoji $t \in T$ tako da za sve $x \in T$ važi $\lambda_s(x) = \lambda_t(x)$ i $\rho_s(x) = \rho_t(x)$, gde su λ_a i ρ_a redom leva, odnosno desna translacija koja odgovara elementu $a \in S$ ($\lambda_a(x) = ax$ i $\rho_a(x) = xa$). Drugim rečima, imamo da svaki element iz S indukuje na T neku njegovu levu, odnosno desnu translaciju. Sada imamo sledeće tvrđenje.

TEOREMA 4.2.9. (Crvenković, Dolinka, Ruškuc [23]) *Neka je S konačno strogo nilpotentno proširenje polugrupe T takvo da je $T \subseteq S^2$. Tada S ima Bermanovo svojstvo.*

Dokaz. Pretpostavimo da je S/T nilpotentna polugrupa indeksa m. Lako sledi da je u tom slučaju $S^m \subseteq T$. Za proizvoljnu esencijalno n-arnu operaciju $f(x_1, \ldots, x_n)$ na S, posmatraćemo $(n+1)$-arnu operaciju ξf definisanu sa

$$(\xi f)(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, \ldots, x_n x_{n+1}).$$

Jasno je da se svaka reč koja na S indukuje operaciju f može zapisati u obliku

$$w_0 x_n w_1 \ldots w_{k-1} x_n w_k,$$

gde reči $w_0, w_1, \ldots, w_{k-1}, w_k$ ne sadrže pojavljivanja promenljive x_n i w_0, w_k mogu biti prazne reči (u daljem ćemo pretpostaviti da to nije slučaj, dok u suprotnom dokaz koji sledi podleže neznatnim i isključivo tehničkim modifikacijama). Zapravo, u gornjem zapisu su naprosto istaknuta sva pojavljivanja promenljive x_n u posmatranoj reči. Dalje, ako je $n \geq 2m + 1$, tada mora biti ili $|w_0| \geq m$, ili $|w_1 \ldots w_{k-1} x_n w_k| \geq m$. Stoga, bar jedna od ove dve reči indukuje na S operaciju čije vrednosti leže u S^m za sve moguće vrednosti promenljivih $x_1, \dots, x_n$. Ako za $1 \leq i \leq n$, x_i ima vrednost $a_i \in S$ i ako je $w_j^S(a_1, \dots, a_{n-1}) = b_j$ za $0 \leq j \leq k$, tada sledi da je

$$f(a_1, \dots, a_n) = b_0 a_n b_1 \dots b_{k-1} a_n b_k =$$
$$= b_0 \lambda_{a_n}(b_1 \dots b_{k-1} a_n b_k) = \rho_{a_n}(b_0) b_1 \dots b_{k-1} a_n b_k.$$

Po datim uslovima, postoji element $t \in T$ tako da je $\lambda_{a_n}(x) = \lambda_t(x)$ i $\rho_{a_n}(x) = \rho_t(x)$ za sve $x \in T$. Zaključujemo da je

$$b_0 a_n b_1 \dots b_{k-1} a_n b_k = b_0 t b_1 \dots b_{k-1} a_n b_k.$$

Očito, gornji proizvod se može napisati i kao

$$\rho_{a_n}(\rho_{a_n}(\dots \rho_{a_n}(b_0 t b_1) \dots) b_{k-1}) b_k.$$

Kako je $b_0 t b_1 \in T$, induktivnim putem se lako pokazuje da je

$$\rho_t(\rho_t(\dots \rho_t(b_0 t b_1) \dots) b_{k-1}) b_k = b_0 t b_1 \dots b_{k-1} t b_k = f(a_1, \dots, a_{n-1}, t).$$

Budući da je $T \subseteq S^2$, postoje $s_1, s_2 \in S$ za koje je $t = s_1 s_2$. Time smo pokazali da za sve $a_1, \dots, a_n \in S$ postoje $s_1, s_2 \in S$ tako da važi

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, s_1 s_2).$$

Stoga na S važi $\xi f = \xi g$ za neke term operacije f i g ako i samo ako je $f = g$, tj. ξ je injektivno preslikavanje. Zbog Leme 4.1.3 i Teoreme 4.2.5, možemo pretpostaviti da ξf zavisi od svih svojih promenljivih. Najzad, ako je operacija $x_{n+1} x_1 \dots x_n$ jednaka nekoj operaciji oblika ξf za neku n-arnu term operaciju f na S, tada se lako zaključuje da S ili zadovoljava permutacijski identitet i da je stoga reč o nilpotentnom proširenju komutativne polugrupe (što je rešeno Posledicom 4.2.8), ili reč koja na S indukuje operaciju f ima bar dva pojavljivanja neke promenljive. U poslednjem slučaju, dokaz se završava na potpuno identičan način kao i dokaz Teoreme 4.1.7, na osnovu Lema 4.1.2 i 4.1.6. ∎

POSLEDICA 4.2.10. *Sva konačna stroga nilpotentna proširenja sirjektivnih polugrupa imaju Bermanovo svojstvo.*

Kako je u Propoziciji III.4.4 [80] dokazano da je svako retraktivno proširenje strogo, to Posledica 4.2.3 o m-inflacijama sirjektivnih polugrupa, kao što smo to i ranije najavili, sledi neposredno iz gornjeg tvrđenja.

Pregled otvorenih problema

Radi preglednosti, još jednom dajemo spisak otvorenih problema u vezi sa slobodnim spektrima i p_n-nizovima polugrupa koji su postavljeni u radu.

PROBLEM 1. *Da li sve konačne polugrupe imaju Bermanovo svojstvo?*

PROBLEM 2. *Opisati nizove nenegativnih celih brojeva koji su predstavljivi kao p_n-nizovi neke (lokalno) konačne polugrupe.*

PROBLEM 3. *Opisati sve konačne polugrupe sa log-eksponencijalnim slobodnim spektrom. Da li postoji donja granica oblika c^n $(c > 1)$ za $\log f_n(S)$ za sve takve polugrupe?*

PROBLEM 4. *Da li postoji konačna polugrupa čiji slobodni spektar nije ni log-linearan, ni log-eksponencijalan?*

PROBLEM 5. *Ako Problem 4 ima pozitivno rešenje, da li postoji konačna polugrupa sa log-polinomskim slobodnim spektrom koja nije log-linearna? Ako da, opisati sve takve polugrupe. Da li postoji konačna polugrupa čiji slobodni spektar nije ni log-polinomski, ni log-eksponencijalan?*

PROBLEM 6. *Opisati sve polugrupe S za koje je $p_0(S) > 0$, tj. $p_0(S) = 1$.*

PROBLEM 7. *Opisati sve polugrupe sa polinomski ograničenim p_n-nizom.*

Literatura

[1] G. L. Bailes: *Right inverse semigroups.* J. Algebra **26** (1973), 492–507.

[2] J. Berman: *Algebraic properties of k-valued logics.* Proc. 10th Int. Symp. on Multiple-Valued Logics (Evanston, 1980), pp. 195–204, IEEE, Long Beach, 1980.

[3] J. Berman: *Free spectra of 3-element algebras.* Proc. 4th Int. Conf. on Universal Algebra and Lattice Theory (Puebla, 1982), Lecture Notes in Math. Vol. 1004, pp. 10–53, Springer-Verlag, 1983.

[4] J. Berman: *Varieties with log-linear free spectra.* Rukopis, 1984.

[5] J. Berman: *Lecture notes: Free spectra of finite algebras.* Rukopis, 1986.

[6] J. Berman: *Finite algebras with large free spectra.* Algebra Universalis **26** (1989), 149–165.

[7] J. Berman: *On the combinatorics of free algebras.* U: "Lattices, Semigroups and Universal Algebra" (Lisbon, 1988), pp. 13–20, Plenum Press, 1989.

[8] J. Berman, W. J. Blok: *Free spectra of nilpotent varieties.* Algebra Universalis **24** (1987), 279–282.

[9] J. Berman, A. Kisielewicz: *On the number of operations in a clone.* Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 359–369.

[10] J. Berman, R. McKenzie: *Clones satisfying the term condition.* Discrete Math. **52** (1984), 7–29.

[11] A. P. Birjukov: *Varijeteti idempotentnih polugrupa* (Ruski). Algebra i Logika **9** (1970), 255–273.

[12] G. Birkhoff: *On the structure of abstract algebras.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **31** (1935), 433–454.

[13] S. Bogdanović, M. Ćirić: “Polugrupe”. Prosveta, Niš, 1993.

[14] S. Bogdanović, S. Milić: *Inflations of semigroups.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **41 (55)** (1987), 63–73.

[15] J. A. Bondy, U. S. R. Murty: “Graph Theory with Applications”. Macmillan Press, 1976.

[16] S. Burris, H. P. Sankappanavar: “A Course in Universal Algebra”. Springer-Verlag, 1981.

[17] A. H. Clifford: *Semigroups admitting relative inverses.* Ann. of Math. **42** (1941), 1037–1049.

[18] A. H. Clifford, G. B. Preston: “Algebraic Theory of Semigroups”. Amer. Math. Soc., Vol. I, 1961., Vol. II, 1967.

[19] S. Crvenković: *Word problems for varieties of algebras – a survey.* Proc. Int. Conf. on Algebra, Logic & Discrete Math. (eds. S. Bogdanović, M. Ćirić, Ž. Perović), Filomat (Niš) **9:3** (1995), 427–448.

[20] S. Crvenković, I. Dolinka: *Finite semigroups with slowly growing p_n-sequences.* U štampi.

[21] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc: *Finite semigroups with few term operations.* U štampi.

[22] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc: *The Berman conjecture is true for finite surjective semigroups.* U štampi.

[23] S. Crvenković, I. Dolinka, N. Ruškuc: *Notes on the number of operations of finite semigroups.* U štampi.

[24] S. Crvenković, J. Dudek: *Rectangular groupoids.* Czechoslovak Math. J. **35 (110)** (1985), 405–414.

[25] S. Crvenković, N. Ruškuc: *On semigroups having n^2 essentially n-ary polynomials.* Algebra Universalis **30** (1993), 269–271.

[26] S. Crvenković, N. Ruškuc: *On groupoids having n^2 essentially n-ary polynomials.* Rew. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad Ser. Math. **23** (1) (1993), 287–312.

[27] S. Crvenković, N. Ruškuc: *Log-linear varieties of semigroups.* Algebra Universalis **33** (1995), 370–374.

[28] M. Ćirić, S. Bogdanović: *Nil-extensions of unions of groups induced by identities.* Semigroup Forum **48** (1994), 303–311.

[29] R. Dedekind: *Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe.* Math. Ann. **53** (1900), 371–403.

[30] I. Dolinka: *Primitivni pozitivni klonovi.* Seminarski rad, Institut za matematiku, Novi Sad, 1995.

[31] I. Dolinka: *Log-maximal finite semigroups do not exist.* Filomat (Niš), u štampi.

[32] J. Dudek: *Dedekind's numbers characterize distributive lattices.* Algebra Universalis **28** (1991), 36–39.

[33] J. Dudek, A. Kisielewicz: *Totally commutative semigroups.* J. Austral. Math. Soc. Ser. A **51** (1991), 381–399.

[34] J. Dudek, A. Kisielewicz: *Idempotent algebras with log-linear free spectra.* Algebra Universalis **28** (1991), 119–127.

[35] A. Ehrefeucht, J. Kahn, R. Maddux, J. Mycielski: *On the dependence of functions on their variables.* J. Comb. Theory Ser. A **33** (1982), 106–108.

[36] T. Evans: *The lattice of semigroup varieties.* Semigroup Forum **2** (1971), 1–43.

[37] S. Fajtlowicz: *On algebraic operations in binary algebras.* Colloq. Math. **21** (1970), 23–26.

[38] C. Fennemore: *All varieties of bands.* Semigroup Forum **1** (1970), 172–179.

[39] A. L. Foster: *On the finiteness of free algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 1011–1013.

[40] R. Freese, R. McKenzie: "Commutator theory for congruence modular varieties". London Math. Soc. Lecture Notes Ser. Vol. 125, Cambridge University Press, 1987.

[41] J. Galuszka: *Algebras with unique essentially n-ary operations.* Algebra Universalis **27** (1990), 243–247.

[42] J. A. Gerhard: *The lattice of equational classes of idempotent semigroups.* J. Algebra **15** (1970), 195–224.

[43] J. A. Gerhard: *The number of polynomials of idempotent semigroups.* J. Algebra **18** (1971), 366–376.

[44] G. Grätzer: *Compostition of functions.* U: "Proceedings of the Conference on Universal Algebra" (Kingston, 1969), pp. 1–106, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, Vol. 25, 1970.

[45] G. Grätzer: "Universal Algebra". Springer-Verlag, 1979.

[46] G. Grätzer: *Universal algebra and lattice theory: a story and three research problems.* U: "Universal Algebra and Its Links with Logic, Algebra, Combinatorics and Computer Science" (Darmstadt, 1983), pp. 1–13, Heldermann Verlag, 1984.

[47] G. Grätzer, A. Kisielewicz: *A survey of some open problems on p_n-sequences and free spectra of algebras and varieties.* U: "Universal Algebra and Quasigroup Theory" (eds. A. Romanowska, J. D. H. Smith), pp. 57–88, Heldermann Verlag, 1992.

[48] G. Grätzer, R. Padmanabhan: *On idempotent, commutative and non-associative groupoids.* Proc. Amer. Math. Soc. **28** (1971), 75–80.

[49] G. Grätzer, J. Płonka: *On the number of polynomials of a universal algebra II.* Colloq. Math. **22** (1970), 13–19.

[50] G. Grätzer, J. Płonka: *A characterization of semilattices.* Colloq. Math. **22** (1970), 21–24.

[51] G. Grätzer, J. Płonka: *On the number of polynomials of an idempotent algebra I.* Pacific J. Math. **32** (1970), 697–709.

[52] G. Grätzer, J. Płonka: *On the number of polynomials of an idempotent algebra II.* Pacific J. Math. **47** (1973), 99–113.

[53] G. Grätzer, J. Płonka, A. Sekanina: *On the number of polynomials of a universal algebra I.* Colloq. Math. **22** (1970), 9–11.

[54] J. A. Green, D. Rees: *On semigroups in which $x^r = x$.* Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **48** (1952), 35–40.

[55] P. A. Grillet, M. Petrich: *Ideal extensions of semigroups.* Pacific J. Math. **26** (1968), 493–508.

[56] G. Higman: *The orders of relatively free groups.* Proc. Int. Conf. on Theory of Groups (Canberra, 1963), pp. 153–165, Gordon & Breach, New York, 1965.

[57] D. Hobby, R. McKenzie: "The structure of finite algebras". Contemporary Math. Ser. Vol. 76, Amer. Math. Soc., 1988.

[58] J. M. Howie: "An Introduction to Semigroup Theory". Academic Press, 1976.

[59] C. S. Johnson Jr., F. R. McMorris: *Retractions and S-endomorphisms.* Semigroup Forum **9** (1974), 84–87.

[60] A. Kisielewicz: *The p_n–sequences of idempotent algebras are strictly increasing.* Algebra Universalis **13** (1981), 233–250.

[61] A. Kisielewicz: *On idempotent algebras with $p_n(A) = 2n$.* Algebra Universalis **23** (1986), 313–323.

[62] A. Kisielewicz: *Characterization of p_n-sequences for nonidempotent algebras.* J. Algebra **108** (1987), 102–115.

[63] A. Kisielewicz: *A solution of Dedekind's problem on the number of isotone Boolean functions.* J. Reine Angew. Math. **386** (1988), 139–144.

[64] A. Kisielewicz: *The p_n–sequences of idempotent algebras are strictly increasing, II.* Algebra Universalis **28** (1991), 453–458.

[65] K. M. Koh: "On the Number of Essentially n-ary Polynomials of Idempotent Algebras". Doktorska disertacija, Unversity of Manitoba, Winnipeg, 1971.

[66] G. Lallement: "Semigroups and Combinatorial Applications". John Wiley & Sons, 1979.

[67] S. M. Lee: *On the sequences representable by idempotent algebras.* Math. Sem. Notes Kobe Univ. **8** (1980), 287–294.

[68] R. Madarász, V. Mihajlović: *Some remarks on p_n-sequences of algebras.* Rew. Res. Fac. Sci. Univ. Novi Sad Ser. Math. **14** (1984), 223–232.

[69] E. Marczewski: *Independence in abstract algebras. Results and problems.* Colloq. Math. **14** (1966), 169–188.

[70] R. McKenzie, G. McNulty, W. Taylor: "Algebras, Lattices, Varieties Vol. I". Wadsworth & Brooks/Cole, 1987.

[71] R. McKenzie, G. McNulty, W. Taylor: "Algebras, Lattices, Varieties Vol. II". Rukopis.

[72] D. McLean: *Idempotent semigroups.* Amer. Math. Monthly **61** (1954), 110–113.

[73] V. L. Murskiĭ: *Postojanje konačne baze identiteta i druge osobine "skoro svih" konačnih algebri* (Ruski). Probl. Kibernet. **30** (1975), 43–56.

[74] W. Narkiewicz: *Remarks on abstract algebras having bases with different number of elements.* Colloq. Math. **15** (1966), 11–17.

[75] H. Neumann: "Varieties of Groups". Springer-Verlag, 1963.

[76] P. Neumann: *Some indecomposable varieties of groups.* Quart. J. Math. (Oxford) **14** (1963), 46–50.

[77] W. D. Neumann: *The orders of free algebras and ranks of operations.* Arch. Math. (Basel) **20** (1969), 132–133.

[78] A. Ju. Oljšanskiĭ: *Redovi slobodnih grupa u lokalno konačnim varijetetima* (Ruski). Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **37** (1973), 89–94.

[79] P. Perkins: *Bases of equational theories of semigroups.* J. Algebra **11** (1969), 298–314.

[80] M. Petrich: "Introduction to Semigroups". Merrill, 1973.

[81] M. Petrich, P. A. Grillet: *Extensions of an arbitrary semigroup.* J. Reine Angew. Math. **244** (1970), 97–107.

[82] J. Płonka: *Diagonal algebras.* Fund. Math. **58** (1966), 309–321.

[83] J. Płonka: *On the number of independent elements in finite abstract algebras.* Colloq Math. **14** (1966), 189–201.

[84] J. Płonka: *On the number of polynomials of a universal algebra III.* Colloq. Math. **22** (1970), 177–180.

[85] J. Płonka: *On algebras with n distinct n-ary operations.* Algebra Universalis **1** (1971), 73–79.

[86] J. Płonka: *On algebras with at most n distinct n-ary operations.* Algebra Universalis **1** (1971), 80–85.

[87] J. Płonka: *On the number of polynomials of a universal algebra IV.* Colloq. Math. **25** (1972), 11–14.

[88] Gy. Pollák: *On permutation identities in varieties of semigroups.* Abstracts of the Mini-Conf. on Semigroup Theory, pp. 44–46, Szeged, 1972.

[89] E. L. Post: *The two-valued iterative systems of mathematical logic.* Ann. Math. Studies No. 5, Princeton Univ. Press, 1941.

[90] M. S. Putcha, A. Yaqub: *Semigroups satisfying permutation identities.* Semigroup Forum **3** (1971), 68–73.

[91] I. G. Rosenberg: *Über die funktionalen Vollständigkeit in dem mehrwertigen Logiken.* Rozpravy Českoslov. Akad. Věd, Rada Mat. Prirod. Věd **80** (1970), 3–93.

[92] I. G. Rosenberg: *Completeness properties of multiple-valued logic algebra.* U: "Computer Science and Multiple-Valued Logic. Theory and Applications", pp. 144–246, North-Holland, 1977.

[93] A. Salomaa: *On essential variables of functions, especially in the algebra of logic.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. **339** (1963), 3–11.

[94] W. Sierpiński: *Sur les fonctions de plusieurs variables.* Fund. Math. **33** (1945), 169–173.

[95] J. D. H. Smith: "Malcev Varieties". Lecture Notes in Math. Vol. 554, Springer-Verlag, 1976.

[96] J. D. H. Smith: *Two enumeration principles for free algebras.* Acta Univ. Carolinæ Math. Phys. **25** (1984), 53–58.

[97] I. Stojmenović, M. Miyakawa: *Symmetric functions in many-valued logics.* Note on Multiple-Valued Logic in Japan **6** (1986), 1–26.

[98] Á. Szendrei: "Clones in Universal Algebra". Presses de l'Université de Montréal, 1986.

[99] W. Taylor: *Equational logic.* Houston J. Math., Survey Issue (1979), 1–83.

[100] K. Urbanik: *On algebraic operations in idempotent algebras.* Colloq. Math. **13** (1965), 129–157.

[101] K. Urbanik: *Remarks on symmetrical operations.* Colloq. Math. **15** (1966), 1–9.

[102] P. S. Venkatesan: *Right (left) inverse semigroups.* J. Algebra **31** (1974), 209–217.

[103] Ju. N. Vološin: *Enumeration of function compositions.* J. Comb. Theory Ser. A **12** (1972), 202–216.

[104] H. Werner: *Congruences on products of algebras and functionally complete algebras.* Algebra Universalis **4** (1974), 99–105.

[105] R. Willard: *Essential arities of term operations in finite algebras.* Discrete Math. **149** (1996), 239–259.

[106] M. Yamada, N. Kimura: *Note on idempotent semigroups, II.* Proc. Japan Acad. Ser. Math. **34** (1958), 110–112.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: magistarski rad
VR

Autor: Igor Dolinka
AU

Mentor: dr Siniša Crvenković, redovni profesor
MN

Naslov rada: "Slobodni spektri i p_n-nizovi polugrupa"
NR

Jezik publikacije: srpski
JP

Jezik izvoda: srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: SR Jugoslavija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 1999.
GO

Izdavač: autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Institut za matematiku, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 4/iv+72/106/0/1/0/1
(broj poglavlja/strana/lit.citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: matematika
NO

Naučna disciplina: algebra
ND

Predmetna odrednica/ključne reči: slobodni spektri i p_n-nizovi; polugrupa, varijetet, identitet, slobodna algebra, term operacija
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Instituta za matematiku, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
ČU

Važna napomena: nema
VN

Izvod: Ako je $\mathbf{A}$ algebra, tada $p_n(\mathbf{A})$ predstavlja (kardinalni) broj svih njenih n-arnih term operacija koje zavise od svih svojih promenljivih, dok je $p_0(\mathbf{A})$ broj svih konstantnih unarnih term operacija na $\mathbf{A}$. S druge strane, slobodni spektar varijeteta predstavlja niz kardinalnosti njegovih konačno generisanih algebri. Ovi nizovi se sastoje od konačnih brojeva, ukoliko su razmatrane algebre (odnosno varijeteti) lokalno konačni. U radu su ispitivani razni problemi vezani za slobodne spektre i p_n-nizove (varijeteta) polugrupa. Između ostalog, opisani su varijeteti polugrupa sa ekstremalnim slobodnim spektrima i razmatrani razni problemi predstavljivosti p_n-nizova polugrupama. Takođe, dokazana je Bermanova hipoteza za široke klase konačnih polugrupa.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 11.03.1999.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
Predsednik:
Mentor:
Član:
(naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
Key words documentation

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Documentation type: monograph documentation
DT

Type of record: textual printed material
TR

Content code: M.Sc. Thesis
CC

Author: Igor Dolinka
AU

Mentor: Siniša Crvenković, Ph.D., Full Professor
MN

Title: "Free Spectra and p_n-sequences of Semigroups"
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: F. R. of Yugoslavia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 1999
PY

Publisher: author's reprint
PU

Publication place: Novi Sad, Faculty of Science, Institute of Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/iv+72/106/0/1/0/1
(chapters/pages/ref.items/tables/pictures/graphs/add.lists)
PD

Scientific field: mathematics
SF

Scientific discipline: algebra
SD

Subject/key words: free spectra and p_n-sequences; semigroup, variety, identity, free algebra, term operation
SKW

UC:

Holding data: Library of the Institute of Mathematics, Faculty of Science, Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
HD

Notes: none
N

Abstract: If $\mathbf{A}$ is an algebra, then $p_n(\mathbf{A})$ denotes the (cardinal) number of its term operations which depend on all of their variables, while $p_0(\mathbf{A})$ is the number of constant unary term operations of $\mathbf{A}$. On the other hand, the free spectrum of a variety is the sequence of cardinalities of finitely generated free algebras of that variety. These sequences consist of finite numbers, provided that the considered algebras (and varieties) are locally finite. In the present thesis, different problems concerning free spectra and p_n-sequences of semigroups are investigated. For example, semigroup varieties having extremal free spectra are described and various problems of representability of p_n-sequences by semigroups are examined. Also, the Berman conjecture is proved to be true for some wide classes of finite semigroups.
AB

Accepted by the Scientific Board of the Faculty on: 03/11/1999
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
President:
Mentor:
Member:
(name and surname/degree/title/faculty)
DB