UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

**Dora Seleši**

# Ekspanzija uopštenih stohastičkih procesa sa primenama u jednačinama

- magistarska teza -

Novi Sad, 2003

*You see things and ask yourself "Why?", but I dream of things that never existed and ask myself "Why not?"*

(George Bernard Shaw)

# Predgovor

Teorija uopštenih stohastičkih procesa je nastala sredinom 50-ih godina u želji da se stvori pogodan matematički alat u okviru kojeg se mogu posmatrati i klasični slučajni procesi, kao i procesi koje nije moguće definisati u klasičnom smislu – na primer proces koji opisuje brzinu polenske čestice koja vrši Brownovo kretanje. Uopšteni stohastički procesi se javljaju i kao rešenja široke klase stohastičkih diferencijalnih jednačina (u daljem tekstu SDJ) koje nemaju rešenje u klasičnom smislu.

Fundamentalni koncept u ovoj tezi je pojam belog šuma kao uopštenog stohastičkog procesa nad beskonačnodimenzionalnim prostorom $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Počev od 80-ih godina teorija belog šuma je doživela brz razvoj upravo zbog širokih mogućnosti primene ove teorije u modeliranju stohastičkih dinamičkih fenomena koji se pojavljuju u fizici, matematici finansija i dr. pri čemu proces belog šuma modelira brze i nagle, ekstremno velike fluktuacije.

Uopšteni stohastički procesi se mogu posmatrati kao uopštene slučajne promenljive sa vremenskim, prostornim, vremensko-prostornim; eventualno sa višedimenzionalnim parametarskim sistemom. Prostori uopštenih slučajnih promenljivih $(S)^*$ su beskonačnodimenzionalni analogoni prostora Schwartzovih temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Procesi koji su na taj način dobijeni kao uopštene stohastičke funkcije tačkasto definisane u vremenu ili $d$-dimenzionalnom parametru $t \in \mathbb{R}^d$ su procesi tipa (O). U ovoj koncepciji za fiksirano $t$ uopštena slučajna promenljiva nema tačkastu vrednost za svako $\omega$, već samo srednju vrednost u odnosu na glatku slučajnu promenljivu iz test-prostora stohastičkih funkcija. Drugim rečima, kod ovih procesa nije poznat ishod neke konkretne realizacije $\omega$, već samo srednja vrednost nad jednim skupom realizacija. Ovo je dovoljno što se tiče primena na SDJ, jer singltoni $\{\omega\}$ imaju verovatnoću (meru) nula.

Drugi pristup jeste da se uopšteni stohastički procesi posmatraju kao linearna neprekidna preslikavanja iz nekog test-prostora $\mathcal{A}$ u prostor uopštenih slučajnih promenljivih. Uopštene procese definisane na ovaj način, analogno načinu na koji su definisane determinističke uopštene funkcije, nazivamo procesima tipa (I). Prema ovoj koncepciji se i vremenski (ili višedimenzionalni) parametar računa kao srednja vrednost u odnosu na neku funkciju $\varphi$ iz test-prostora $\mathcal{A}$. U praksi ova funkcija $\varphi$ predstavlja grešku ili impuls odgovora mernog instrumenta kojim se registruje vrednost procesa u datom trenutku. Klasa procesa tipa (O) se na prirodan način potapa u klasu procesa tipa (I).

Magistarska teza je posvećena ekspanziji (razlaganju u redove) uopštenih stohastičkih procesa tipa (O) i tipa (I) po ortogonalnoj bazi prostora kvadratno integrabilnih slučajnih promenljivih $L^2(\Omega)$ i karakterizaciji raznovrsnih prostora uopštenih stohastičkih funkcija. Moćan matematički aparat Wickovog računa koji je 90-ih razvijen za procese tipa (O) prenosi se i na procese tipa (I) što je posebno značajno sa stanovišta primena u SDJ.

Prva glava *Uvod* posvećena je osnovama matematičkih oblasti na kojima se bazira teorija belog šuma. U ovoj glavi su izloženi poznati rezultati iz oblasti funkcionalne analize i teorije verovatnoće vezani za nuklearne prostore, teoriju operatora, Schwartzovih i Zemanianovih distribucija, klasične slučajne procese, Itôv račun itd.

Druga glava sa naslovom *Uopšteni stohastički procesi* počinje konstrukcijom osnovnog prostora belog šuma $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}, \mu)$ i prostorom kvadratno integrabilnih funkcija $(L)^2$ nad njime. Na samom početku data je teorema o direktnom razlaganju Hilbertovog prostora $(L)^2$ u prostore homogenog haosa koji su razapeti Fourier-Hermiteovim polinomima. Zatim su date konstrukcije prostora različitih test funkcija $(S)$ i uopštenih stohastičkih funkcija $(S)^*$ nad prostorom belog šuma tj. Gel'fandovih trojki tipa $(S) \subseteq (L)^2 \subseteq (S)^*$. Opisane su izvorne konstrukcije Hide i Kondratieva za ove prostore, a uvedeni su i novi prostori $exp(S)_{-1}$. Centralni deo čine teoreme o reprezentaciji klasa procesa tipa (O) i procesa tipa (I) preko njihove haos ekspanzije.

Treća glava *Wickov proizvod* posvećena je operaciji množenja na prostorima uopštenih stohastičkih funkcija. Poznato je da u opštem slučaju nije moguće definisati množenje uopštenih funkcija koje predstavlja proširenje klasičnog množenja realnih brojeva, a to je nepovoljno za rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina. Ovaj nedostatak se prevazilazi snabdevanjem prostora uopštenih stohastičkih funkcija $(S)^*$ tzv. Wickovim proizvodom koji je kompatibilan sa Skorohodovim integralom. Zapravo pravila klasičnog diferencijalnog računa sa proizvodom interpretiranim kao Wickov proizvod, zamenjuju Itôv račun za klasične slučajne procese. Originalan deo teze u ovoj glavi čini proširenje Wickovog proizvoda i na procese tipa (I) datih ekspanzijom preko redova.

Magistarska teza sadrži i primere stohastičkih diferencijalnih jednačina koje opisuju zakone održanja sa belim šumom i evolucionih jednačina čija su rešenja uopšteni stohastički procesi tipa (I) dati u obliku redova. To su primeri fenomena koji se javljaju u prirodi, opisani diferencijalnim jednačinama u kojima se faktor slučajnosti modelira belim šumom, ili nekim drugim uopštenim stohastičkim procesom.

◊ ◊ ◊

Na ovom mestu želim da izrazim svoju zahvalnost svima koji su me podržavali i pomagali mi tokom izrade magistarske teze.

Zahvaljujem se mojim dragim roditeljima i prijateljima koji su mi pružali izuzetnu moralnu podršku i puno pomogli u poslednjoj iteraciji čitanja ovog teksta u potrazi za štamparskim greškama.

Zahvaljujem se svim mojim bivšim profesorima i ujedno sadašnjim kolegama koji su svojim dobrim primerom probudili u meni interesovanje za matematiku i želju za naučnim radom.

Veoma sam zahvalna Danijeli Rajter što je dala niz korisnih sugestija u cilju poboljšanja kvaliteta teze.

Izuzetno sam zahvalna profesorici Zagorki Lozanov-Crvenković sa kojom sam provela mnogo vremena u poučnim diskusijama. Pored moga mentora, ona mi je pružila najviše stručne pomoći tokom studija i pri izradi teze.

Na kraju, posebno bih želela da se zahvalim mome mentoru, profesoru Stevanu Pilipoviću, koji mi je uvek predstavljao neiscrpan izvor znanja i konstantno pružao snažnu podršku tokom čitavih studija. Od njega sam puno naučila tokom proteklih godina i sigurna sam da bez njegovog usmeravanja ova teza ne bi imala sadašnji oblik.

◊ ◊ ◊

Magistarska teza je izrađena u okviru projekta MNTR 1835 *Metode funkcionalne analize, ODJ i PDJ sa singularitetima.*

Novi Sad, 20. decembar 2003. *Dora Seleši*

# Sadržaj

# Glava 1

# Uvod

U ovoj glavi su date osnovne definicije i teoreme iz oblasti funkcionalne analize i klasične teorije verovatnoće koje će biti korišćene u nastavku, a neophodne su za razumevanje teze kao celine. Većina izloženog materjala sadrži dobro poznata tvrđenja, stoga će biti navedena bez dokaza, uz pojedine komentare i upućivanja na detaljniju literaturu.

## 1.1 Osnovi funkcionalne analize

Nuklearni Hilbertovi prostori i Gel'fandove trojke su jedan od osnovnih pojmova koji se koriste u beskonačnodimenzionalnoj analizi i teoriji belog šuma. U prvom odeljku ovog poglavlja su opisane struktura i osobine ovih prostora. Detaljni dokazi ovde izloženih tvrđenja mogu se naći npr. u knjizi [9].

Poglavlje dalje upoznaje čitaoca sa konstrukcijom Fockovih prostora i operatora druge kvantizacije, koji čine važan matematički aparat ove teorije. U narednom odeljku se mogu naći definicija i poznata svojstva Hermiteovih polinoma i funkcija koje su usko, i na vrlo prirodan način povezane sa Gaussovom raspodelom u teoriji verovatnoće, pa i sa teorijom *belog* šuma.

Na kraju, opisane su dve klase prostora koji će se u velikoj meri koristiti u daljem radu. Prvu čine dobro poznat Schwartzov prostor temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ i test-prostor brzoopadajućih funkcija $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, čiju bazu čine upravo ermitske funkcije. Drugu klasu čine prostori Zemaniana $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ kao i njemu srodni prostori $\exp\mathcal{A}$ i $\exp\mathcal{A}'$. Za detaljne dokaze teorema vezanih za prostore Zemaniana, zainteresovanog čitaoca upućujemo na knjigu [52], rad [45] ili monografiju [30].

### 1.1.1 Nuklearni Hilbertovi prostori

**Definicija 1.1.1** *Neka je $E$ vektorski prostor, $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ familija lokalno konveksnih prostora i $\{h_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ familija linearnih preslikavanja takvih da $h_\alpha : E \to E_\alpha$ i $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha^{-1}(0) = 0$. Najgrublja topologija na prostoru $E$ u odnosu na koju su sva preslikavanja $h_\alpha$ neprekidna, naziva se* projektivna topologija.

Prostor $E$ sa projektivnom topologijom je lokalno konveksan prostor. Uslov $\bigcap_{\alpha\in\Lambda} h_\alpha^{-1}(0) = 0$ znači da je prostor $E$ Hausdorffov.

**Definicija 1.1.2** *Neka je $E$ vektorski prostor, $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ familija lokalno konveksnih prostora i $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ familija linearnih preslikavanja takvih da $g_\alpha : E_\alpha \to E$ i $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha(E_\alpha) = E$. Najfinija lokalno konveksna topologija na prostoru $E$ u odnosu na koju su sva preslikavanja $g_\alpha$ neprekidna, naziva se* induktivna topologija.

U daljem radu ćemo se ograničiti na razmatranje lokalno konveksnih prostora koji se mogu konstruisati kao presek odgovarajuće familije Hilbertovih prostora.

**Definicija 1.1.3** *Neka je $V$ realan vektorski prostor sa datim nizom skalarnih proizvoda $(\cdot|\cdot)_n$, $n \in \mathbb{N}$ koji indukuju norme $|\cdot|_n$, redom. Kažemo da je ova familija skalarnih proizvoda* kompatibilna *ako za svako $n, m \in \mathbb{N}$, za svaki niz $\{x_k\}$ u $V$ koji po $|\cdot|_n$ teži nuli i Cauchyjev je po $|\cdot|_m$, teži nuli i po $|\cdot|_m$.*

**Definicija 1.1.4** *Neka su $V$ i $W$ separabilni Hilbertovi prostori. Operator $A : V \to W$ je operator* Hilbert-Schmidt tipa *(ili skraćeno HS-tipa), ako postoje ortonormirane baze $\{e_n\}$ u prostoru $V$ i $\{f_n\}$ u prostoru $W$, i ako postoji niz brojeva $\lambda_n > 0$ sa osobinom $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n^2 < \infty$ tako da je*

$$A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (e_n|x) f_n. \tag{1.1}$$

**Teorema 1.1.1** *Operator $A$ je HS-tipa ako i samo ako za svaku ortonormiranu bazu $\{e_n\}$ u prostoru $V$ važi*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |A(e_n)|^2 < \infty. \tag{1.2}$$

*Korenom leve strane prethodnog izraza definisana je* Hilbert-Schmidtova norma *operatora $A$, u oznaci $\|A\|_{HS}$.*

**Definicija 1.1.5** *Operator $A : V \to W$ je* nuklearan*, ako postoje ortonormirane baze $\{e_n\}$ u prostoru $V$ i $\{f_n\}$ u prostoru $W$, i ako postoji niz brojeva $\lambda_n > 0$ sa osobinom $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n < \infty$ tako da je*

$$A(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n (e_n|x) f_n. \tag{1.3}$$

Poznato je da je svako HS-preslikavanje granična vrednost (po HS-normi) nekih preslikavanja sa konačnodimenzionalnim kodomenom. Svako nuklearno preslikavanje je kompaktno (preslikava ograničen skup u relativno kompaktan skup) i svaki nuklearan operator je HS-tipa. Proizvod dva preslikavanja HS-tipa je nuklearno, a svako nuklearno preslikavanje se može predstaviti kao proizvod dva HS-preslikavanja.

**Definicija 1.1.6** *Neka je $E_0$ separabilan Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $(\cdot|\cdot)_0$ i neka je $(\cdot|\cdot)_p$ prebrojiva familija skalarnih proizvoda. Kažemo da je prostor $E_0$ sa datom familijom skalarnih proizvoda* prebrojiv Hilbertov prostor *ako je kompletan u odnosu na metriku*

$$|x| = \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p} \frac{|x|_p}{1 + |x|_p}.$$

**Teorema 1.1.2** *Prostor $E_0$ iz prethodne definicije je kompletan (prebrojivo Hilbertov) ako i samo ako su skalarni proizvodi kompatibilni.*

Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da su skalarni proizvodi u rastućem poretku tj. niz odgovarajućih normi je rastući:

$$|\cdot|_p \leq |\cdot|_{p+1} \text{ za sve } p \in \mathbb{N}_0.$$

Označimo sa $E_p$ kompletiranje prostora $E_0$ u odnosu na skalarni proizvod $|\cdot|_p$. Jasno, $E_p$ je separabilan Hilbertov prostor, i pri tome važi

$$\ldots E_{p+1} \subseteq E_p \ldots \subseteq E_0$$

Specijalno,

$$E = projlim_{p\to\infty} E_p = \bigcap_{p\in\mathbb{N}_0} E_p.$$

Kompatibilnost niza skalarnih proizvoda ekvivalentna je sa kompletnošću prostora $E$ u projektivnoj topologiji. Kompletan i metrizabilan prostor (kao što je $E$) nazivamo *Frechètov.*

**Definicija 1.1.7** Dualni prostor *vektorsko topološkog prostora $V$, u oznaci $V'$ je prostor svih linearnih neprekidnih funkcioneli nad prostorom $V$. Dualno sparivanje elementa iz $V'$ i elementa iz $V$ označavamo sa $\langle \cdot, \cdot \rangle$.*

**Definicija 1.1.8** *Najgrublja topologija na $V'$ u odnosu na koju je, za fiksirano $x \in V$, svako preslikavanje $V' \to \mathbb{C}$ dato sa $L \mapsto \langle L, x \rangle, \quad L \in V'$ neprekidno naziva se* slaba topologija.

Ekvivalentno, slaba topologija ima bazu okolina nule datu familijom skupova oblika

$$B(x_1, \ldots, x_k; \varepsilon) = \{L \in V' : |\langle L, x_j \rangle| < \varepsilon, \, j = 1, \ldots, k\}$$

gde su $x_1, \ldots, x_k \in V$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

U lokalno konveksnom prostoru $E$, kažemo da je skup $A$ *ograničen*, ako za svaku okolinu nule $\mathcal{N}$ postoji $c > 0$ tako da je $A \subseteq c\mathcal{N}$. Specijalno, ako je prostor $E$ prebrojiv Hilbertov, skup $A$ je ograničen akko je $sup_{x \in E} |x|_n < \infty$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

**Definicija 1.1.9** *Na dualnom prostoru prebrojivo Hilbertovog prostora, $E'$ je* jaka topologija *definisana bazom okolina nule koju čini familija skupova*

$$B(A; \varepsilon) = \{L \in E' : \, sup_{x \in A} |\langle L, x \rangle| < \varepsilon\}$$

*gde skup $A$ prolazi familijom ograničenih skupova i $\varepsilon > 0$.*

Jasno, jaka topologija na $E'$ je finija od slabe topologije. Inkluzije $E'_n \subseteq E'$ su neprekidne i $E'_n$ je gust po jakoj topologiji u $E'$.

Specijalno, u normiranom prostoru $V$, jaka topologija na $V'$ je indukovana normom

$$\|L\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle L, x \rangle|. \tag{1.4}$$

**Teorema 1.1.3** *Dual prebrojivog Hilbertovog prostora je kompletan u jakoj topologiji.*

**Teorema 1.1.4** *Prebrojiv Hilbertov prostor je refleksivan.*

Sa $E_{-p}$ označavamo dualni prostor od $E_p$. Time dobijamo rastući lanac Hilbertovih prostora

$$E_0 \subseteq E_{-1} \subseteq \ldots E_{-p} \subseteq E_{-(p+1)} \cdots,$$

pri čemu za svako $p \in \mathbb{N}_0$ imamo neprekidne inkluzije oblika $E_p \subseteq E_0 \subseteq E_{-p}$. Označimo sa $E'$ njihovu uniju $E' = \bigcup_{p \in \mathbb{N}_0} E_{-p}$ snabdevenu induktivnom topologijom. Kako je $E$ gust u svakom $E_p$, dual od $E$ je u algebarskom smislu jednak sa $E'$ i pri tome važi:

**Teorema 1.1.5** *Induktivna topologija na $E'$ je ekvivalentna jakoj topologiji na* $\left(\bigcap_{p\in\mathbb{N}_0}^{\infty} E_p\right)'$.

**Teorema 1.1.6** *Preslikavanje $f : X \to E'$ je linearno i neprekidno ako i samo ako je za neko $p \in \mathbb{N}_0$ preslikavanje $f : X \to E_{-p}$ linearno i neprekidno.*

**Definicija 1.1.10** *Prebrojiv Hilbertov prostor $E$ je* nuklearan, *ako važi da za svako $p \in \mathbb{N}$ postoji prirodan broj $q \geq p$ takav da je operator inkluzije $E_q \to E_p$ nuklearan.*

U prethodnoj definiciji se može zahtevati i slabiji uslov da je operator inkluzije Hilbert-Schmidt tipa (pa će kompozicija dve takve inkluzije biti nuklearnog tipa). Ekvivalentno, inkluzija $E_q \to E_p$ je nuklearna ako postoji baza $\{e_k\}$ u prostoru $E_q$ tako da je

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |e_k|_p^2 < \infty.$$

Schwartzovi prostori $\mathcal{S}$ i $\mathcal{D}$ su primeri nuklearnih prostora. Takođe i prostori klase $\mathcal{A}$ koji će kasnije biti uvedeni su nuklearni uz odgovarajuće pretpostavke.

Naredna teorema iskazuje da su nuklearni prostori i njihovi duali *Montelovi prostori.*

**Teorema 1.1.7** *U nuklearnom prebrojivom Hilbertovom prostoru $E$ važi:*

1. *Skup je kompaktan u $E$ ako i samo ako je zatvoren i ograničen.*
2. *Skup je kompaktan u $E'$ sa jakom topologijom ako i samo ako je zatvoren i ograničen.*
3. *U prostoru $E$ i u dualu $E'$ su ekvivalentne slaba i jaka konvergencija nizova.*

Na primer, beskonačnodimenzionalni Banachov prostor nije nuklearan, jer su zatvorene lopte u njemu ograničene ali nisu kompaktne. Konačnodimenzionalni prostori su nuklearni.

Dual nuklearnog prebrojivo Hilbertovog prostora je nuklearan vektorsko topološki prostor (familija normi koja definiše topologiju je neprebrojiva).

**Definicija 1.1.11** *Neka je $V$ nuklearan prostor i $V'$ njegov dual. Ako postoji Hilbertov prostor $H$ takav da je $V$ gust u $H$ (u odnosu na normu prostora $H$), tada se trojka*

$$V \subseteq H \subseteq V'$$

*naziva* Gel'fandova trojka.

Ovde smo u stvari po Rieszovoj teoremi identifikovali dual $H'$ sa samim prostorom $H$. Primetimo da je $H$ gust u $V'$ u odnosu na slabu topologiju prostora $V'$.

U slučaju nuklearnih prostora imamo Gel'fandovu trojku oblika

$$E \subseteq E_0 \subseteq E'.$$

### 1.1.2 Proizvod i direktna suma prostora

**Definicija 1.1.12** *Neka je* $\{(X_j, \tau_j)\}$, $j \in J$ *familija lokalno konveksnih prostora.* Kartezijski proizvod *ovih prostora, u oznaci* $X = \prod_{j\in J} X_j$ *je skup preslikavanja*

$$X = \{x : J \to \bigcup_{j\in J} X_j | x(j) \in X_j,\ j \in J\}. \tag{1.5}$$

Koristimo konvenciju $x_j = x(j)$. Vektorska struktura na $X$ je definisana po komponentama: $(\lambda x)_j = \lambda x_j$, $(x + y)_j = x_j + y_j$. Preslikavanje $\pi_j : X \to X_j$ dato sa $\pi_j(x) = x_j$ nazivamo *j-ta projekcija.*

**Definicija 1.1.13** *Topologija na kartezijskom proizvodu* $X$ *je proizvod topologija* $\tau_j$*; baza ove topologije data je familijom skupova*

$$\{\bigcap_{i\in K} \pi^{-1}(O_i) | O_i \in \tau_i, K \subseteq J, |K| < \aleph_0\}. \tag{1.6}$$

Proizvod topologija na $X = \prod_{j\in J} X_j$ je u stvari *projektivna topologija* tj. najgrublja topologija za koju su sve projekcije $\pi_j : X \to X_j$ neprekidne.

Niz u $X$ konvergira (respektivno Cauchyjev je) ako konvergira (respektivno Cauchyjev je) po komponentama. Specijalno, $X$ je kompletan ako su sve komponente $X_j$ kompletni prostori.

**Definicija 1.1.14** *Neka je* $\{(X_j, \tau_j)\}$, $j \in J$ *familija lokalno konveksnih prostora.* Algebarska direktna suma *ovih prostora, u oznaci* $\sum_{j\in J} X_j$ *je skup*

$$\{x \in \bigcup_{j\in J} X_j | x = \sum_{j\in K} x_j, x_j \in X_j, j \in K \subseteq J, |K| < \aleph_0\}. \tag{1.7}$$

*Na algebarskoj direktnoj sumi prostora je data* induktivna topologija *tj. najfinija lokalno konveksna topologija u odnosu na koju su sva prirodna potapanja* $X_j \to \sum_{j\in J} X_j$ *neprekidna.*

Familiju seminormi u $\sum_{j\in J} X_j$ čine $p(x) = \sum_j p_j(x_j)$, za $x = \sum_{j\in K} x_j$ (suma je konačna), a $p_j$ prolazi familijom seminormi koje definišu topologiju prostora $X_j$.

Posmatrajmo podprostor kartezijskog proizvoda $\widetilde{X_j} = \{x \in X | x_k = \delta_{kj} x_j\,, k \in J\}$ gde je $\delta_{kj}$ Kroneckerov simbol. Jasno, $X_j$ i $\widetilde{X_j}$ su izomorfni, pa je algebarska direktna suma $\sum_{j\in J} X_j$ u stvari podprostor od kartezijskog proizvoda $\prod_{j\in J} X_j$. Ovi prostori su jednaki ako i samo ako je $J$ konačan skup indeksa; tada su i njihove topologije ekvivalentne.

**Teorema 1.1.8** *Važi*

$$(\prod_{j\in J} X_j)' = \sum_{j\in J} (X_j)' \tag{1.8}$$

*gde je veza data sa*

$$\langle (L_j), (x_j) \rangle = \sum_{j\in J} \langle L_j, x_j \rangle \tag{1.9}$$

*za* $(L_j) \in \sum_{j\in J} (X_j)'$, $\quad (x_j) \in \prod_{j\in J} X_j$.

**Teorema 1.1.9** *Prebrojiva direktna suma nuklearnih prostora je nuklearan prostor.*

U specijalnom slučaju kada su prostori $\{X_j\}$ međusobno ortogonalni Hilbertovi prostori, direktnu sumu označavamo sa $\bigoplus_{j\in J} X_j$ i nazivamo *ortogonalna suma* prostora. Skalarni proizvod elemenata $x, y \in \bigoplus_{j\in J} X_j$ je dat sa $(x|y) = \sum_{j\in J} (x_i|y_i)_i$, gde je $(\cdot|\cdot)_i$ skalarni proizvod u prostoru $X_i$.

## 1.1.3 Fockovi prostori

Neka su $H_1, H_2$ Hilbertovi prostori sa skalarnim proizvodima $(\cdot|\cdot)_1$ i $(\cdot|\cdot)_2$, respektivno. Dualne prostore označavamo sa $H_i', i = 1, 2$ a dualno sparivanje sa $\langle \cdot, \cdot \rangle_i, i = 1, 2$.

**Definicija 1.1.15** *Neka su $\varphi \in H_1, \psi \in H_2$ fiksirani elementi.* Tenzorski proizvod $\varphi \otimes \psi$ *je bilinearna forma nad* $H_1' \times H_2'$ *data sa*

$$\varphi \otimes \psi(f, g) = \langle f, \varphi \rangle_1 \langle g, \psi \rangle_2 \tag{1.10}$$

*za* $(f, g) \in H_1' \times H_2'$.

Prostor $H_1 \tilde{\otimes} H_2$, lineal tenzorskih proizvoda elemenata $\varphi \in H_1$ i $\psi \in H_2$ je podprostor prostora bilinearnih formi nad $H_1' \times H_2'$. On je pre-Hilbertov sa skalarnim proizvodom definisanim kao

$$(\varphi \otimes \psi | \xi \otimes \eta)_\otimes = (\varphi|\xi)_1 (\psi|\eta)_2 \tag{1.11}$$

za $\varphi \otimes \psi, \xi \otimes \eta \in H_1 \tilde{\otimes} H_2$.

**Definicija 1.1.16** Tenzorski proizvod *Hilbertovih prostora, u oznaci* $H_1 \otimes H_2$ *je kompletiranje prostora* $H_1 \tilde{\otimes} H_2$ *u odnosu na normu* $\| \cdot \|_{\otimes}$.

Indukcijom se lako može definisati tenzorski proizvod konačno mnogo Hilbertovih prostora.

**Definicija 1.1.17** *Za proizvoljno* $n \in \mathbb{N}$ *definišemo* n-ti tenzorski stepen *kompleksnog Hilbertovog prostora kao*

$$\mathcal{F}^{(n)}(H) = \underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_{n} = H^{\otimes n} \tag{1.12}$$

*pri čemu usvajamo da je* $\mathcal{F}^{(0)}(H) = \mathbb{C}$. *Odgovarajuću tenzorsku normu označavamo sa* $\| \cdot \|_{\mathcal{F}^{(n)}(H)}$.

Specijalno, ako je $H$ separabilan, $\mathcal{F}^{(n)}(H)$ se može definisati kao prostor $n$-multilinearnih formi $F$ nad $H$ sa konačnom Hilbert-Schmidtovom normom. Hilbert-Schmidtova norma elementa $F \in \mathcal{F}^{(n)}(H)$ je data sa

$$\|F\|_{HS}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}^n} |F(e_{k_1}, \ldots, e_{k_n})|^2,$$

gde je $\{e_k\}$ potpun ortonormirani sistem prostora $H$. Važi da je

$$\|F\|_{HS}^2 = \|F\|_{\mathcal{F}^{(n)}(H)}. \tag{1.13}$$

**Definicija 1.1.18** *Neka su* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H$. Simetrizacija tenzorskog proizvoda *je data sa*

$$\varphi_1 \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} \varphi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in Perm(n)} \varphi_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes \varphi_{\pi(n)} \tag{1.14}$$

*gde je* $Perm(n)$ *grupa permutacija prvih* $n$ *prirodnih brojeva.*

**Definicija 1.1.19** *Za proizvoljno* $n \in \mathbb{N}$ *definišemo* n-ti simetrični tenzorski stepen *kompleksnog Hilbertovog prostora* $H$

$$\Gamma^{(n)}(H) = \underbrace{H \widehat{\otimes} \cdots \widehat{\otimes} H}_{n} = H^{\widehat{\otimes} n} \tag{1.15}$$

*kao kompletiranje lineala simetričnih tenzorskih proizvoda elemenata iz* $H$ *u normi* $\| \cdot \|_{\Gamma^{(n)}(H)}$ *indukovanoj skalarnim proizvodom*

$$(\widehat{\otimes}_{i=1}^n \varphi_i | \widehat{\otimes}_{i=1}^n \psi_i)_{\Gamma^{(n)}(H)} = \sum_{\pi \in Perm(n)} (\varphi_1 | \psi_{\pi(1)}) \cdots (\varphi_n | \psi_{\pi(n)}). \tag{1.16}$$

Prostor $\Gamma^{(n)}(H)$ se nekad naziva i *n-ti homogeni haos* Hilbertovog prostora $H$.

**Teorema 1.1.10** *Prostor $\Gamma^{(n)}(H)$ je podprostor od $\mathcal{F}^{(n)}(H)$ i važi veza između njihovih normi*

$$\|\cdot\|_{\Gamma^{(n)}(H)} = \sqrt{n!}\|\cdot\|_{\mathcal{F}^{(n)}(H)}. \tag{1.17}$$

**Definicija 1.1.20** *1.* Fockov prostor *nad Hilbertovim prostorom $H$ je definisan sa*

$$\mathcal{F}(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(H). \tag{1.18}$$

*2.* Simetrični Fockov prostor *nad Hilbertovim prostorom $H$ je definisan sa*

$$\Gamma(H) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Gamma^{(n)}(H). \tag{1.19}$$

**Teorema 1.1.11** *Dual Fockovog prostora nad $H$ je jednak Fockovom prostoru nad dualom od $H$ tj.*

$$(\Gamma(H))' = \Gamma(H') \tag{1.20}$$

### Ortonormirana baza Fockovog prostora

Pretpostavimo da je $H$ separabilan i da je familija vektora $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ potpun ortonormiran sistem ovog prostora. Tada je familija $n$-torki $\{e_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbb{N}^n\}$ oblika $e_{\mathbf{k}} = \otimes_{i=1}^n e_{k_i}$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ potpun ortonormiran sistem prostora $\mathcal{F}^{(n)}(H)$.

Potpun ortonormiran sistem Fockovog prostora $\mathcal{F}(H)$ čini familija nizova oblika $(0, 0, \ldots, e_{\mathbf{k}}, \ldots)$, $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}$ u kojima se vektor $e_{\mathbf{k}}$ nalazi na $(n+1)$-om mestu u nizu.

Označimo sa $I_n \subseteq \mathbb{N}^n$ rastući uređen skup $n$-torki, a za proizvoljno $\alpha \in I_n$ neka $n_i(\alpha)$ označava broj komponenti jednakih sa "$i$" u $n$-torci $\alpha$. Definišimo $n(\alpha)! = \prod_{i=1}^{\infty} n_i(\alpha)!$ (proizvod je uvek konačan) i neka je $e_\alpha = \widehat{\otimes}_{i=1}^n e_{\alpha_i}$. Tada familija $n$-torki $\{e_\alpha, \alpha \in I_n\}$ čini potpun ortogonalan sistem prostora $\Gamma^{(n)}(H)$.

Potpun ortonormiran sistem simetričnog Fockovog prostora $\Gamma(H)$ čini familija nizova oblika $\frac{1}{\sqrt{n(\alpha)!}}(0, 0, \ldots, e_\alpha, \ldots)$, $\alpha \in I_n, n \in \mathbb{N}$ u kojima se vektor $e_\alpha$ nalazi na $(n+1)$-om mestu u nizu.

**Definicija 1.1.21** *Sa $\Gamma^{\maltese}(H)$ označavamo podprostor simetričnog Fockovog prostora $\Gamma(H)$ koji čine nizovi sa konačno mnogo elemenata različitih od nule.*

Skup $\Gamma^{\maltese}(H)$ je gust u Fockovom prostoru $\Gamma(H)$. Proizvoljan element $F \in \Gamma^{\maltese}(H)$ može se prikazati u obliku $F = \sum_{n=0}^{m} F^{(n)}$ gde su $F^{(n)} \in \Gamma^{(n)}(H)$ elementi $n$-tog homogenog haosa, pa se i oni mogu predstaviti kao $F^{(n)} = \sum_{\alpha\in I_n} F_\alpha^{(n)} e_\alpha$, $F_\alpha^{(n)} \in \mathbb{C}$. Dakle,

$$F = \sum_{n=0}^{m} \sum_{\alpha\in I_n} F_\alpha^{(n)} e_\alpha.$$

**Definicija 1.1.22** *Neka su dati* $F^{(n)} = \sum_{\alpha\in I_n} F_\alpha^{(n)} e_\alpha \in \Gamma^{(n)}(H)$ *i* $G^{(m)} = \sum_{\beta\in I_m} G_\beta^{(m)} e_\beta \in \Gamma^{(m)}(H)$, *za* $F_\alpha^{(n)}, G_\beta^{(m)} \in \mathbb{C}$. *Njihov tenzorski proizvod je elemenat Fockovog prostora* $\Gamma^{(n+m)}(H)$ *definisan sa*

$$F^{(n)} \widehat{\otimes} G^{(m)} = \sum_{\alpha\in I_n} \sum_{\beta\in I_m} F_\alpha^{(n)} G_\beta^{(m)} e_\alpha \widehat{\otimes} e_\beta. \tag{1.21}$$

**Teorema 1.1.12** *Važi*

$$F^{(n)} \widehat{\otimes} F^{(m)} = \sum_{\gamma\in I_{n+m}} \frac{n!m!}{(n+m)!} \sum_{\alpha+\beta=\gamma} F_\alpha^{(n)} G_\beta^{(m)} e_\gamma. \tag{1.22}$$

Sada možemo proširiti pojam tenzorskog proizvoda i na elemente Fockovog prostora $\Gamma^{\maltese}(H)$:

**Definicija 1.1.23** *Neka su dati* $F, G \in \Gamma^{\maltese}(H)$. *Njihov tenzorski proizvod je elemenat prostora* $\Gamma^{\maltese}(H)$ *dat preko (konačnog) niza*

$$F \widehat{\otimes} G = \{(F \widehat{\otimes} G)^{(n)}; n \in \mathbb{N}_0\} \tag{1.23}$$

*čija je* $n$*-ta komponenta data sa*

$$(F \widehat{\otimes} G)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} F^{(n-m)} \widehat{\otimes} G^{(m)}. \tag{1.24}$$

Važi da je $F \widehat{\otimes} G = G \widehat{\otimes} F$, odnosno $(\Gamma^{\maltese}(H), \widehat{\otimes})$ je komutativna algebra.

### Operatori anihilacije i kreacije

**Definicija 1.1.24** *Neka je* $F^{(n)} \in \Gamma^{(n)}(H)$ *oblika* $F^{(n)} = \widehat{\otimes}_{i=1}^{n} f_i$, *gde su* $f_1, \dots, f_n \in H$. Operator anihilacije *datog vektora* $f \in H$, *je operator* $\partial(f) : \Gamma^{(n)}(H) \to \Gamma^{(n-1)}(H)$ *definisan sa*

$$\partial(f) F^{(n)} = \sum_{j=1}^{n} (f|f_j) \widehat{\otimes}_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{n} f_i \tag{1.25}$$

**Teorema 1.1.13** *Norma operatora anihilacije je data sa* $\|\partial(f)\| = \sqrt{n}\|f\|_H$.

Definiciju operatora anihilacije lako možemo proširiti i na Fockov prostor konačnih nizova $\Gamma^{\maltese}(H)$. Kako je $\Gamma^{\maltese}(H)$ gust podprostor od $\Gamma(H)$, sledi egzistencija adjungovanog operatora sa domenom $\Gamma(H)$.

**Definicija 1.1.25** *Adjungovani operator operatora anihilacije označavamo sa* $\partial^*(f)$ *i nazivamo* operator kreacije.

**Teorema 1.1.14** *Za proizvoljan element* $F^{(n)} \in \Gamma^{(n)}(H)$ *operator kreacije ima osobinu*

$$\partial^*(f)F^{(n)} = f\widehat{\otimes}F^{(n)} \tag{1.26}$$

*i pri tome* $\partial^*(f)F^{(n)} \in \Gamma^{(n+1)}(H)$.

Za proizvoljna dva operatora $A, B$ sa $[A, B]$ označavamo tzv. *komutator* definisan kao $[A, B] = AB - BA$.

**Teorema 1.1.15** *Za operatore anihilacije i kreacije važe osobine kanoničke komutacije:*

1. $[\partial^*(f), \partial^*(g)] = [\partial(f), \partial(g)] = 0$.
2. $[\partial(f), \partial^*(g)] = (f|g)$.

**Teorema 1.1.16** *Operator anihilacije* $\partial(f)$ *je derivacija na algebri* $(\Gamma^{\maltese}(H), \widehat{\otimes})$ *tj. važi pravilo*

$$\partial(f)(F\widehat{\otimes}G) = \partial(f)F\widehat{\otimes}G + F\widehat{\otimes}\partial(f)G. \tag{1.27}$$

### Operator druge kvantizacije

U ovom delu opisujemo kako se od operatora $A$ sa Hilbertovog prostora $H$ može konstruisati tzv. operator *druge kvantizacije* $\Gamma(A)$ nad Fockovim prostorom $\Gamma(H)$.

Neka je $D$ gust skup u separabilnom Hilbertovom prostoru $H$. Označimo sa $D^{\tilde{\otimes} n}$ skup konačnih linearnih kombinacija elemenata oblika $h_1 \otimes \cdots \otimes h_n$, gde su $h_1, \ldots, h_n \in H$. Tada je za svako $n \in \mathbb{N}$ skup $D^{\tilde{\otimes} n}$ gust u prostoru $H^{\otimes n} = \mathcal{F}^{(n)}(H)$. Označimo sa $\mathcal{F}^{\maltese}(D)$ skup nizova koji na $(n{+}1)$-oj koordinati imaju element iz $D^{\tilde{\otimes} n}$ i najviše konačno mnogo elemenata različitih od nule. Tada je skup $\mathcal{F}^{\maltese}(D)$ gust u Fockovom prostoru $\mathcal{F}(H)$.

Analognom konstrukcijom za simetrični tenzorski proizvod, dobijamo skupove $D^{\tilde{\widehat{\otimes}} n}$ (skup konačnih linearnih kombinacija elemenata oblika $h_1\widehat{\otimes}\cdots\widehat{\otimes}h_n$) i skup $\Gamma^{\maltese}(D)$ koji je gust u simetričnom Fockovom prostoru $\Gamma(H)$.

Neka su $H_1, H_2$ Hilbertovi prostori, $A_1, A_2$ gusto definisani zatvoreni operatori na $H_1, H_2$ respektivno sa domenima $Dom(A_1), Dom(A_2)$. Njihove konjugovane operatore označavamo sa $A_1', A_2'$, pri čemu $Dom(A_i') \subseteq H_i'$, $i = 1, 2$ i važi da je $Dom(A_1')\tilde{\otimes}Dom(A_2')$ gust u $H_1' \otimes H_2' = (H_1 \otimes H_2)'$.

**Definicija 1.1.26** Tenzorski proizvod konjugovanih operatora *je definisan sa*

$$(A_1'\tilde{\otimes}A_2')h_1 \otimes h_2 = A_1'h_1 \otimes A_2'h_2 \tag{1.28}$$

*za proizvoljne elemente* $h_i \in Dom(A_i'), i = 1, 2$ *i on se može po linearnosti proširiti na* $Dom(A_1')\tilde{\otimes}Dom(A_2')$.

**Definicija 1.1.27** *Operator* $A_1'\tilde{\otimes}A_2'$ *je gusto definisan nad* $(H_1 \otimes H_2)'$ *i ima jedinstveni zatvoreni konjugovani operator, koji označavamo sa* $A_1 \otimes A_2$ *i nazivamo* tenzorski proizvod operatora.

Važi da je $Dom(A_1)\tilde{\otimes}Dom(A_2) \subseteq Dom(A_1 \otimes A_2)$, pa je $A_1 \otimes A_2$ takođe gusto definisan.

Indukcijom se lako proširuje definicija tenzorskog proizvoda konačno mnogo operatora i njima konjugovanih operatora.

**Definicija 1.1.28** *Za proizvoljan zatvoren operator A Hilbertovog prostora H definišemo* n-ti tenzorski stepen operatora *kao*

$$A^{\otimes n} = \underbrace{A \otimes \cdots \otimes A}_{n} \tag{1.29}$$

*na prostoru* $H^{\otimes n}$.

Svaki Hilbertov prostor $H$ po Rieszovoj teoremi možemo identifikovati sa njegovim dualom $H'$, pa u tom smislu se mogu identifikovati i konjugovani i adjungovani operator. Tačnije, ako su $H_i, i = 1, 2$ Hilbertovi prostori, $J_i$ izomorfizmi između $H_i$ i $H_i'$, operator $A : H_1 \to H_2$, njemu adjungovani operator $A^* : H_2 \to H_1$ i konjugovani operator $A' : H_2' \to H_1'$, tada važi veza $A^* = J_1^{-1}A'J_2$. U tom smislu ćemo konjugovani operator nekada i nazivati adjungovanim operatorom.

**Teorema 1.1.17** *Ako je operator A samoadjungovan, onda je i* $A^{\otimes n}$ *samoadjungovan.*

Sada konstruišemo operator na Fockovom prostoru, polazeći od operatora $A$ na $H$.

**Definicija 1.1.29** *Operator $\Gamma^{\maltese}(A')$ je definisan nad skupom $\Gamma^{\maltese}(Dom(A'))$ koji je gust u prostoru $\Gamma(H')$ kao linearna ekstenzija operatora čija je restrikcija data sa*

$$\Gamma^{\maltese}(A') \restriction_{Dom(A')^{\tilde{\otimes} n}} = \underbrace{A'\tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} A'}_{n}. \tag{1.30}$$

**Definicija 1.1.30** Operator druge kvantizacije *na Fockovom prostoru* $\Gamma(H)$, *u oznaci* $\Gamma(A)$, *je konjugovani operator od* $\Gamma^{\maltese}(A')$.

**Teorema 1.1.18** *Operator* $\Gamma(A)$ *se na odgovarajućem podskupu od* $H^{\widehat{\otimes} n}$ *poklapa sa* $A^{\otimes n}$, *odnosno*

$$\Gamma(A) \restriction_{Dom(A)^{\tilde{\hat{\otimes}} n}} = A^{\otimes n}. \tag{1.31}$$

**Teorema 1.1.19** *Ako je $A$ samoadjungovan operator, onda je i $\Gamma(A)$ samoadjungovan.*

### 1.1.4 Pettisov integral

U ovom delu dajemo kratak opis Pettisovog integrala: neka su $(M, \mathcal{B}, m)$ $\sigma$-konačan merljiv prostor i $(V, \|\cdot\|)$ Banachov prostor. Neka je preslikavanje $f : M \to V$ slabo merljivo, odnosno za svako $F \in V'$ funkcija $\langle F, f(\cdot)\rangle$ je merljiva. Pretpostavimo da je pri tome i $\langle F, f(\cdot)\rangle \in L^1(M)$. Operator $T : V' \to L^1(M)$ definisan sa $T(F) = \langle F, f(\cdot)\rangle$ je zatvoren. Po teoremi o zatvorenom grafiku $T$ je ograničen operator. Tada je za proizvoljno $A \in \mathcal{B}$ linearna funkcionela $F \mapsto \int_A \langle F, f(u)\rangle dm(u)$ neprekidna na $V'$, pa postoji jedinstven element $J_A \in V''$ takav da je $J_A(F) = \int_A \langle F, f(u)\rangle dm(u)$. Ovaj element $J_A$ označavamo sa $\int_A f(u)dm(u)$.

**Definicija 1.1.31** *Slabo merljivo preslikavanje $f : M \to V$ je* Pettis-integrabilno, *ako važe uslovi:*

1. *Za svako $F \in V'$ je $\langle F, f(\cdot)\rangle \in L^1(M)$.*
2. *Za svako $A \in \mathcal{B}$ postoji jedinstven element $J_A \in V$ takav da je*

   $$\langle F, J_A\rangle = \int_A \langle F, f(u)\rangle dm(u), \qquad \text{za sve } F \in V'.$$

   *Element $J_A$ označavamo sa $(P)\int_A f(u)dm(u)$ i nazivamo* Pettisov integral *funkcije $f$.*

Ako je prostor $V$ refleksivan tj. $V'' = V$, tada je drugi uslov iz prethodne definicije uvek zadovoljen.

### 1.1.5 Hermiteovi polinomi i funkcije

**Definicija 1.1.32** Hermiteov polinom (ermitski polinom) n-tog reda, $n \in \mathbb{N}_0$ *je definisan sa*

$$h_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-\frac{x^2}{2}}). \tag{1.32}$$

Prvih nekoliko ermitskih polinoma su: $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = x$, $h_2(x) = x^2 - 1$, $h_3(x) = x^3 - 3x$, $h_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3\ldots$ itd.

**Teorema 1.1.20** *Hermiteovi polionomi zadovoljavaju rekurentne veze:*

1. $h_{n+1}(x) - xh_n(x) + nh_{n-1}(x) = 0,$
2. $h'_n(x) = nh_{n-1}(x),$
3. $h''_n(x) - xh'_n(x) + nh_n(x) = 0.$

**Teorema 1.1.21** *Familija* $\{\frac{1}{\sqrt{n!}}h_n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$ *čini ortonormiranu bazu prostora* $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, *gde je* $d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ *Gaussova mera.*

**Teorema 1.1.22** *Generativna funkcija Hermiteovih polinoma je*

$$e^{tx-\frac{1}{2}t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} h_n(x). \tag{1.33}$$

**Teorema 1.1.23** *Svaki polinom nad poljem realnih brojeva se može prikazati preko ermitskih polinoma i obratno, preko identiteta:*

$$x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} (2k-1)!! h_{n-2k}(x), \tag{1.34}$$

$$h_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} (2k-1)!! x^{n-2k}. \tag{1.35}$$

**Teorema 1.1.24** *Hermiteovi polinomi zadovoljavaju identitete:*

1. $h_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h_{n-k}(x) y^k,$
2. $h_n(ax) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \binom{n}{2k} (2k-1)!! a^{n-2k} (1-a^2)^k h_{n-2k}(x),$
3. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x+y) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = y^n,$

4. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(ix+y)^n e^{-\frac{x^2}{2}}dx = h_n(x)$,

5. $h_n(x)h_m(x) = \sum_{k=0}^{min\{n,m\}} k!\binom{n}{k}\binom{m}{k}h_{n+m-2k}(x)$.

**Definicija 1.1.33** Hermiteova funkcija (ermitska funkcija) $n+1$-tog reda, $n \in \mathbb{N}_0$ *je definisana sa*

$$\xi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{2^n n!}}e^{-\frac{x^2}{2}}h_n(\sqrt{2}x). \tag{1.36}$$

Prvih nekoliko ermitskih funkcija su $\xi_1(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\xi_2(x) = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\xi_3(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\xi_4(x) = \frac{2x^3-3x}{\sqrt{3}\sqrt[4]{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \dots$ itd.

**Teorema 1.1.25** *Hermiteove funkcije zadovoljavaju identitete:*

1. $(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2+1)\xi_n = (2n)\xi_n$,

2. $\xi_n'(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\xi_{n-1}(x) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\xi_{n+1}(x)$,

3. $x\xi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2}}\xi_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\xi_{n+1}(x)$,

4. $\sup_{x\in\mathbb{R}}|\xi_n(x)| = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{12}})$.

**Teorema 1.1.26** *Hermiteove funkcije čine ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R})$.*

**Definicija 1.1.34** *Neka je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ proizvoljna d-torka. Definišimo*

$$\xi_\alpha = \xi_{\alpha_1} \otimes \xi_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\alpha_d}. \tag{1.37}$$

Multiindekse $\alpha$ možemo leksikografski poređati u rastući niz. Označimo sa $\alpha^{(j)}$ $j$-ti po redu multiindeks. To znači da za $i<j$ važi $\alpha_1^{(i)}+\cdots+\alpha_d^{(i)} \leq \alpha_1^{(j)}+\cdots+\alpha_d^{(j)}$. Na taj način možemo i familiju vektora $\xi_\alpha$ prenumerisati u prebrojivu familiju. Stavimo:

$$\eta_j = \xi_{\alpha^{(j)}}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{1.38}$$

**Teorema 1.1.27** *Familija funkcija $\{\eta_j : j \in \mathbb{N}\}$ čini ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Ermitske funkcije $\{\xi_j : j \in \mathbb{N}\}$ resp. familija funkcija $\{\eta_j : j \in \mathbb{N}\}$, pripadaju tzv. Schwartzovom prostoru brzoopadajućih funkcija $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ resp. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Schwartzovi prostori su opisani u narednom poglavlju.

### 1.1.6 Schwartzov prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Koristimo oznake: $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ za multiindekse, $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d}$ za izvod i $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ za stepenovanje elementa $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Dužina multiindeksa $\alpha$ se definiše kao $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d$.

**Definicija 1.1.35** Schwartzov prostor brzo opadajućih funkcija *je prostor*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d,\ \|f\|_{\alpha,\beta} < \infty\}$$

*gde je seminorma* $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ *definisana sa*

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\alpha D^\beta f(x)|, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d. \tag{1.39}$$

*Topologija na* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *je data familijom seminormi* $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$.

**Teorema 1.1.28** *Prostor* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *je nuklearan prebrojiv Hilbertov.*

**Definicija 1.1.36** Schwartzov prostor sporo rastućih (temperiranih) distribucija *je dualni prostor* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Ekvivalentna konstrukcija topologije prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se može dobiti pomoću samoadjungovanog operatora

$$A = -\triangle + |x|^2 + 1$$

gde je $\triangle$ laplasijan. Posmatrajmo Hilbertov prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ sa standardnom $L^2(\mathbb{R}^d)$-normom koju ćemo iz tehničkih razloga označiti sa $|\cdot|_0$. Operator $A$ je gusto definisan u $L^2(\mathbb{R}^d)$, tačnije njegov domen sadrži $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

**Teorema 1.1.29** *Operator $A$ je samoadjungovan. Hermiteove funkcije $\{\eta_n\}$ koje čine ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ su karakteristični vektori operatora $A$, odnosno*

$$A\eta_n = \lambda_n \eta_n$$

*gde je* $\{\lambda_n = 2(n_1 + \cdots + n_d) - d + 1 :\ (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{N}_0^d\}$ *spektar operatora* $A$.

Kako nula ne pripada spektru operatora $A$, sledi da postoji inverzni operator $A^{-1}$ koji je ograničen, i njegova norma je data sa $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_1}$.

**Definicija 1.1.37** *Za proizvoljno $p \in \mathbb{N}$ definišimo normu $|\cdot|_p$ na $L^2(\mathbb{R}^d)$ sa*

$$|f|_p = |A^p f|_0 \tag{1.40}$$

*Neka je $S_p(\mathbb{R}^d)$ zatvaranje skupa $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : |f|_p < \infty\}$ u $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Prostor $S_p(\mathbb{R}^d)$ je Hilbertov sa skalarnim proizvodom $(f|g)_p = (A^p f|A^p g)_0$. Pri tome je za svako $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gust u $S_p(\mathbb{R}^d)$ i inkluzija $S_{p+1}(\mathbb{R}^d) \subseteq S_p(\mathbb{R}^d)$ je Hilbert-Schmidt tipa.

**Teorema 1.1.30** *Familija seminormi $\{|\cdot|_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d\}$ i familija normi $\{|\cdot|_p : p \in \mathbb{N}\}$ su ekvivalentne na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

**Teorema 1.1.31** *Projektivni limit prostora $S_p(\mathbb{R}^d)$ je izomorfan sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, odnosno*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} S_p(\mathbb{R}^d) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall p \in \mathbb{N},\ |f|_p < \infty\}. \tag{1.41}$$

**Definicija 1.1.38** *Za proizvoljno $p \in \mathbb{N}$ definišimo normu $|\cdot|_{-p}$ na $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sa*

$$|f|_{-p} = |A^{-p} f|_0 \tag{1.42}$$

*Neka je $S_{-p}(\mathbb{R}^d)$ kompletiranje prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sa normom $|\cdot|_{-p}$.*

**Teorema 1.1.32** *Norma $|\cdot|_{-p}$ je ekvivalentna jakoj normi na dualnom prostoru $S_p'(\mathbb{R}^d)$ definisanoj sa $|\cdot|_{-p} = \sup_{\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), |\psi|_p \le 1} |\langle\cdot, \psi\rangle|$. Prostor $S_{-p}(\mathbb{R}^d)$ je izomorfan sa dualnim prostorom $S_p'(\mathbb{R}^d)$.*

Zapravo, ovaj izomorfizam između prostora $S_{-p}(\mathbb{R}^d)$ i $S_p'(\mathbb{R}^d)$ je uspostavljen preko operatora $A^p$.

**Teorema 1.1.33** *U skupovnom smislu imamo $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} S_{-p}(\mathbb{R}^d)$, i pri tome je lokalno konveksni induktivni limit prostora $S_{-p}(\mathbb{R}^d)$ izomorfan prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ sa jakom topologijom.*

Dakle, prostori $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ čine Gel'fandovu trojku. Štaviše imamo neprekidne inkluzije

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq S_p(\mathbb{R}^d) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d) \subseteq S_p'(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

**Teorema 1.1.34** *Za svako $p \in \mathbb{N}$ operator $A^{-p}$ je Hilbert-Schmidt tipa na $L^2(\mathbb{R}^d)$, pri čemu je*

$$\|A^{-p}\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2p}. \tag{1.43}$$

**Teorema 1.1.35** *Vektori* $\{\lambda_n^{-p}\eta_n\}$ *čine ortonormiranu bazu prostora* $S_p(\mathbb{R}^d)$. *Norma* $|f|_p = |A^p f|_0$ *se ekvivalentno može zapisati kao*

$$|f|_p^2 = (A^p|A^p)_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{2p}(f|\eta_n)_0^2 \tag{1.44}$$

*gde je* $(\cdot|\cdot)_0$ *skalarni proizvod u* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Poznata je karakterizacija Schwartzovih prostora preko ermitskih funkcija (slučaj $d = 1$):

**Teorema 1.1.36** *Funkcija* $f$ *pripada prostoru* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *ako i samo ako je oblika* $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\xi_k$, *gde* $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^p|a_k|^2 < \infty$ *za svako* $p \in \mathbb{N}$ *i koeficijenti su dati sa* $a_k = \langle f, \xi_k\rangle \in \mathbb{C}$.

**Teorema 1.1.37** *Funkcija* $f$ *pripada prostoru* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *ako i samo ako je oblika* $f = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\xi_k$ *(red konvergira u* $\mathcal{S}'$*)* , *gde* $\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-p}|a_k|^2 < \infty$ *za neko* $p \in \mathbb{N}$ *i koeficijenti su dati sa* $a_k = \langle f, \xi_k\rangle \in \mathbb{C}$.

**Primer 1.1.1** *Diracova delta distribucija ima razvoj*

$$\delta(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \xi_n(0)\xi_n(x) = \xi_1(x) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N},\\ n=2k+1}} \frac{(-1)^k}{\sqrt[4]{\pi}}\sqrt{\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}}\xi_n(x).$$

### 1.1.7 Prostori Zemaniana

Neka je $I$ otvoren interval u $\mathbb{R}$ i $L^2(I)$ skup kvadratno integrabilnih funkcija nad $I$ sa Lebesgueovom merom. Prostor $L^2(I)$ je Hilbertov sa skalarnim proizvodom $(f|g) = \int_I f(x)\overline{g(x)}dx$.

Neka je $\mathcal{R}$ samoadjungovan linearan diferencijalni operator oblika

$$\mathcal{R} = \theta_0 D^{n_1}\theta_1 \cdots D^{n_\nu}\theta_\nu = \bar{\theta}_\nu(-D)^{n_\nu} \cdots (-D)^{n_2}\bar{\theta}_1(-D)^{n_1}\bar{\theta}_0 \tag{1.45}$$

gde je $D = d/dx$, $\theta_k$ su glatke kompleksne funkcije bez nula u intervalu $I$, a $n_k$ su prirodni brojevi $k = 1, 2, \ldots, \nu$. Pretpostavimo da postoje niz realnih brojeva $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ i niz glatkih funkcija $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ u $L^2(I)$ koji su karakteristični koreni resp. karakteristični vektori operatora $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}\psi_n = \lambda_n\psi_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.46}$$

Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je niz apsolutnih vrednosti karakterističnih korena u rastućem poretku. Dakle,

$$|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le |\lambda_3| \le \cdots \to \infty.$$

Pretpostavimo da funkcije $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ čine potpun ortonormiran sistem u $L^2(I)$ tj. da se svaka funkcija $f \in L^2(I)$ može razviti u red $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f|\psi_n)\psi_n$ koji konvergira u $L^2(I)$.

Induktivno definišemo

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{k+1} &= \mathcal{R}(\mathcal{R}^k), \quad k \in \mathbb{N} \\ \mathcal{R}^0 &= \mathcal{I} \text{ (identični operator)}. \end{aligned}$$

Važi:
$(\mathcal{R}^k f|\psi_n) = \int_I \mathcal{R}^k f(x)\overline{\psi_n(x)}dx = \int_I f(x)\overline{\mathcal{R}^k\psi_n(x)}dx = (f|\mathcal{R}^k\psi_n) = \lambda_n^k(f|\psi_n)$, za proizvoljne $k \in \mathbb{N}_0$, $f \in \mathcal{C}^\infty(I) \cap L^2(I)$.

**Prostori** $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$

Nadalje ćemo pretposatviti da se nula ne nalazi među karakterističnim korenima operatora $\mathcal{R}$ (ako je neko $\lambda_n = 0$, njega zamenimo sa $\widetilde{\lambda_n} = 1$).

**Definicija 1.1.39** Zemanianov prostor test funkcija *je definisan sa*

$$\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{C}^\infty(I) : \, p_k(f) = \left(\int_I |\mathcal{R}^k f(x)|^2 dx\right)^{1/2} < \infty\}. \tag{1.47}$$

*Topologija na* $\mathcal{A}$ *je definisana nizom seminormi* $\{p_k : k \in \mathbb{N}_0\}$. *Dualni prostor* $\mathcal{A}'$ *je* Zemanianov prostor uopštenih funkcija.

Stavimo

$$\mathcal{A}_k = \{f \in L^2(I) : f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n, \, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \widetilde{\lambda_n}^{2k} < \infty\}. \tag{1.48}$$

Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}_0$ prostor $\mathcal{A}_k$ je Hilbertov snabdeven skalarnim proizvodom

$$(f|g)_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{b}_n \widetilde{\lambda_n}^{2k} \tag{1.49}$$

gde su $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n$ i $g = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n$ elementi prostora $\mathcal{A}_k$. Normu indukovanu ovim skalarnim proizvodom označavamo sa $\|\cdot\|_k$.

Dualni prostor $\mathcal{A}_k'$ je izometričan sa $\mathcal{A}_{-k}$. Dakle, imamo niz linearnih neprekidnih inkluzija

$$\cdots \subseteq \mathcal{A}_{k+1} \subseteq \mathcal{A}_k \subseteq \cdots \mathcal{A}_0 = L^2(I) \subseteq \mathcal{A}_{-1} \subseteq \mathcal{A}_{-2} \subseteq \cdots$$

Lako se pokazuje da je skup $S \subseteq \mathcal{A}$ definisan sa

$$S = \{f \in L^2(I) : \, f = \sum_{n=1}^{m} a_n\psi_n, \, a_n \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}_0\} \tag{1.50}$$

gust u svakom $\mathcal{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_0$, kao i u Zemanianovom prostoru $\mathcal{A}$. Važi (u skupovnom smislu):

$$\begin{array}{lllll} \mathcal{A} & = & \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_k & = & \left\{ f \in L^2(I) :\ f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n,\ \forall k, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \widetilde{\lambda_n}^{2k} < \infty \right\} \\ \mathcal{A}' & = & \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{-k} & = & \left\{ f \in L^2(I) :\ f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n,\ \exists k, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \widetilde{\lambda_n}^{-2k} < \infty \right\} \end{array} \tag{1.51}$$

(red konvergira u slaboj topologiji $\mathcal{A}'$). Više od toga: projektivna topologija na $\mathcal{A}$ se poklapa sa topologijom datoj u definiciji 1.1.39, i induktivna topologija u $\mathcal{A}'$ ekvivalentna je jakoj topologiji.

Dakle prostor Zemaniana $\mathcal{A}$ je prebrojiv Hilbertov. Ortonormiranu bazu prostora $\mathcal{A}_k$ čini familija funkcija $\{\lambda_n^{-k}\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$. Prostor $\mathcal{A}$ je nuklearan ako za neko $c \in \mathbb{N}_0$ važi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\lambda_n}^{-c} < \infty.$$

U ovakvom formalnom zapisu sa redovima, dejstvo elementa $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n \in \mathcal{A}'$ na test funkciju $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n$ je dato sa

$$\langle f, \varphi\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n.$$

Neka je $S$ snabdeven normom $\|\cdot\|_k$. Preslikavanje $\mathcal{R}^m : S \to \mathcal{A}_{k-m}$ je linearno i neprekidno za $m \leq k$, pa se može proširiti na linearno neprekidno preslikavanje sa domenom $\mathcal{A}_k$ (ovo proširenje takođe označavamo sa $\mathcal{R}^m$). Pri tome važi

$$\mathcal{R}^m\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_n^m\psi_n \tag{1.52}$$

za proizvoljno $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n \in \mathcal{A}_k$. Dalje, možemo definisati $\mathcal{R}^m : \mathcal{A}_{-k} \to \mathcal{A}_{-k-m}$ sa

$$\langle \mathcal{R}^m f, \varphi\rangle = \langle f, \mathcal{R}^m\varphi\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{A}_{k+m} \tag{1.53}$$

za proizvoljno $f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n \in \mathcal{A}_{-k}$, $m \leq k$. Formalno zapisujemo $\mathcal{R}^m f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\lambda_n^m\psi_n$.

**Teorema 1.1.38** *Funkcija $f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\psi_n$ pripada prostoru $\mathcal{A}'$ ako i samo ako postoje $k \in \mathbb{N}_0$, $F \in L^2(I)$ i $n \in \Lambda$ takvi da je*

$$f = \mathcal{R}^k F + \sum_{n\in\Lambda} b_n\psi_n \tag{1.54}$$

*gde je $\Lambda = \{n \in \mathbb{N}_0 : \lambda_n = 0\}$.*

**Primer 1.1.2** *Specijalno za izbor* $\mathcal{R} = -\frac{d^2}{dx} + x^2 + 1$ *prostor Zemaniana* $\mathcal{A}'$ *se svodi na prostor Schwartzovih temperiranih distribucija* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Poznato je da se prostor Schwartzovih distribucija $\mathcal{D}'(I)$ i njegov test-prostor $\mathcal{D}(I)$ odnose prema Zemanianovim prostorima na sledeći način:

$$\mathcal{D}(I) \subseteq \mathcal{A} \subseteq L^2(I) \subseteq \mathcal{A}' \subseteq \mathcal{D}'(I).$$

Dakle, restrikcija proizvoljnog elementa $f \in \mathcal{A}'$ na $\mathcal{D}(I)$ je element prostora $\mathcal{D}'(I)$. Jasno je i da za svako $f \in L^2(I)$ postoji jedinstven element $\tilde{f} \in \mathcal{A}'$ tako da važi

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_I f(x)\varphi(x)dx = (f|\overline{\varphi})_{L^2(I)}, \qquad \varphi \in \mathcal{A}.$$

**Prostori** *Exp*$\mathcal{A}$, *Exp*$\mathcal{A}'$

Stavimo oznaku

$$\exp_p x = \underbrace{\exp(\exp(\cdots(\exp x))\cdots)}_{p}$$

**Definicija 1.1.40** *Prostor* $\exp_p \mathcal{A}$ *je dat sa*

$$\exp_p \mathcal{A} = \{\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n : \forall k \in \mathbb{N}_0, \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (\exp_p \widetilde{\lambda_n})^{2k} < \infty\} \tag{1.55}$$

*(red konvergira u* $L^2(I)$*), a njegov dualni prostor je*

$$\exp_p \mathcal{A}' = \{f = \sum_{n1}^{\infty} b_n\psi_n : \exists k \in \mathbb{N}_0, \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 (\exp_p \widetilde{\lambda_n})^{-2k} < \infty\} \tag{1.56}$$

*(red konvergira u slabom smislu).*

Prostori $\exp_p \mathcal{A}$ i $\exp_p \mathcal{A}'$ se mogu konstruisati i kao projektivni resp. induktivni limit prostora

$$\exp_{p,k} \mathcal{A} = \{\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\psi_n : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (\exp_p \widetilde{\lambda_n})^{2k} < \infty\} \tag{1.57}$$

snabdevenih normom $\|\varphi\|_{p,k} = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 (\exp_p \widetilde{\lambda_n})^{2k}$, $k \in \mathbb{Z}$. Neka su:

$$\exp_p \mathcal{A} = \bigcap_k \exp_{p,k} \mathcal{A}, \quad \exp_p \mathcal{A}' = \bigcup_k \exp_{p,-k} \mathcal{A}. \tag{1.58}$$

Jasno, $S$ je gust u svakom prostoru $\exp_{p,k}\mathcal{A}$. Inkluzivna preslikavanja $\exp_{p,k+1}\mathcal{A} \to \exp_{p,k}\mathcal{A}$ su kompaktna. Prostor $\exp_p \mathcal{A}$ je nuklearan ako za neko $c \in \mathbb{N}_0$ važi $\sum_{n=1}^{\infty}(\widetilde{\exp_p \lambda_n})^{-2c} < \infty$.

Operator

$$E_p^k = (\underbrace{\exp\exp\cdots\exp}_{p}\mathcal{R})^k$$

definisan sa

$$E_p^k\phi = \sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{k^{m_1}}{m_1!}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{m_1^{m_2}}{m_2!}\cdots\sum_{m_p=0}^{\infty}\frac{m_{p-1}^{m_p}}{m_p!}\mathcal{R}^{m_p}\phi \tag{1.59}$$

slika $\exp_p \mathcal{A}$ neprekidno u samog sebe. Sistem normi $\|\phi\|_{p,k}$ ekvivalentan je sa sistemom normi $\sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{k^{m_1}}{m_1!}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{m_1^{m_2}}{m_2!}\cdots\sum_{m_p=0}^{\infty}\frac{m_{p-1}^{m_p}}{m_p!}\|\mathcal{R}^{m_p}\phi\|_{L^2}$.

**Definicija 1.1.41**

$$Exp\mathcal{A} = projlim_{p\to\infty}\exp_p \mathcal{A}, \quad Exp\mathcal{A}' = indlim_p \exp_{p\to\infty}\mathcal{A}' \tag{1.60}$$

Inkluzije $\exp_{p+1}\mathcal{A} \to \exp_p \mathcal{A}$ su neprekidna i kompaktna preslikavanja. Skup $S$ je gust u $\exp_p \mathcal{A}$ za svako $p \in \mathbb{N}$, te je prostor $Exp\mathcal{A}$ gust u svakom $\exp_p \mathcal{A}$ i u $\mathcal{A}$.

**Teorema 1.1.39** *Funkcija $f$ pripada prostoru $\exp_p \mathcal{A}'$ ako i samo ako postoje niz $L^2(I)$ funkcija $\{f_{(m_1,\ldots,m_p)} : (m_1,\ldots,m_p) \in \mathbb{N}_0^p\}$ i prirodan broj $k$ takvi da je*

$$f = \sum_{m_1=0}^{\infty}\frac{k^{m_1}}{m_1!}\sum_{m_2=0}^{\infty}\frac{m_1^{m_2}}{m_2!}\cdots\sum_{m_p=0}^{\infty}\frac{m_{p-1}^{m_p}}{m_p!}\mathcal{R}^{m_p}f_{(m_1,\ldots,m_p)} \tag{1.61}$$

*i*

$$\sup_{(m_1,\ldots,m_p)\in\mathbb{N}_0^p}\|f_{(m_1,\ldots,m_p)}\|_{L^2} < \infty. \tag{1.62}$$

## 1.2 Osnovi stohastičke analize

Pitanja vezana za igre sa kockama koje je lord de Méré postavio Pascalu i Fermatu 1653 godine, stvorila su jednu novu oblast matematike - teoriju verovatnoće. Aksiomatsko zasnivanje ove teorije potiče od ruskog matematičara Kolmogorova sa početka XX veka.

Modeliranje raznovrsnih prirodnih fenomena u fizici, biologiji, tržišnih kretanja u ekonomiji ili čak i najjednostavnijih igara, neophodno sadrži faktor slučajnosti. Nazovimo to "slučajnost", "sreća", "šum" ili jednostavno "nepoznati faktor". Shvatimo verovatnoću kao meru slučajnosti, kao meru ljudskog neznanja ili kao meru realizacije određene vrste budućnosti; matematički pristup je potpuno isti.

Danas je stohastička analiza jedna od najmodernijih oblasti matematike. Poseduje razvijen matematički aparat u radu sa stohastičkim diferencijalnim jednačinama koje modeliraju fenomene sa nepoznatim faktorima, a koje shvatamo kao da su se *slučajno* desili.

Ovo poglavlje predstavlja pregled osnovnih pojmova teorije verovatnoće kao što su slučajne promenljive, slučajni procesi, uslovno matematičko očekivanje, martingali itd. Poseban značaj imaju Gaussova raspodela, Brownovo kretanje i Itôv integral koji čine osnovu teorije *belog* šuma.

## 1.2.1 Aksiomatsko zasnivanje teorije verovatnoće

U aksiomatskom zasnivanju teorije verovatnoće se polazi od osnovnog pojma *elementarnog događaja* $\omega$ koji se ne definiše eksplicitno, slično kao ni pojmovi tačke, prave i ravni u geometriji. Nadalje će skup $\Omega$ uvek označavati skup elementarnih događaja.

**Definicija 1.2.1** *Familija $\mathcal{F}$ podskupova od $\Omega$ je* $\sigma$-algebra, *ako $\Omega \in \mathcal{F}$, $A \in \mathcal{F}$ implicira $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, i ako su $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$, tada i $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

**Definicija 1.2.2** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ merljiv prostor događaja. Skupovna funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ naziva se* verovatnosna mera *ili kraće samo* verovatnoća, *ako ima sledeće osobine: $P(A) \geq 0$ za svaki događaj $A \in \mathcal{F}$, $P(\Omega) = 1$, i ako su $A_1, A_2, A_3 \dots$ disjunktni događaji iz $\mathcal{F}$, tada važi $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.*

**Definicija 1.2.3** *Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gde je $\Omega$ prostor elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ data $\sigma$-algebra događaja na $\Omega$ i $P$ verovatnosna mera na $\sigma$-algebri $\mathcal{F}$, naziva se* prostor verovatnoće.

**Definicija 1.2.4** *Mera $Q$ je* apsolutno neprekidna *u odnosu na meru $P$ u prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$, u oznaci $Q \ll P$ ako za svako $A \in \mathcal{F}$ važi da iz $P(A) = 0$ sledi $Q(A) = 0$. Mere $P$ i $Q$ su* ekvivalentne *ako je $Q \ll P$ i $P \ll Q$.*

**Teorema 1.2.1 (Radon - Nikodŷm)** *Neka su $P$ i $Q$ dve mere na prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ takve da je $Q$ apsolutno neprekidna u odnosu na meru $P$. Tada postoji* *nenegativna merljiva funkcija* $f : \Omega \to \mathbb{R}$, *takva da važi relacija*

$$Q(E) = \int\limits_E f dP \tag{1.63}$$

*za svako* $E \in \mathcal{F}$. *Pri tome je funkcija* $f$ *jedinstvena do na skup* $P$*-mere nula.*

Funkcija $f$ iz prethodne teoreme se naziva Radon-Nikodỳmov izvod mere $Q$ po meri $P$ i označava se sa $f = \frac{dQ}{dP}$ ili $dQ = fdP$.

**Definicija 1.2.5** *Posmatrajmo skup* $\mathbb{R}^n$ *sa uobičajenom topologijom. Najmanja* $\sigma$*-algebra koja sadrži sve otvorene skupove se naziva* Borelova $\sigma$-algebra *i označava se sa* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. *Elementi Borelove* $\sigma$*-algebre se nazivaju* Borelovi skupovi.

Sa $\mathbb{R}^T$ označavamo familiju svih preslikavanja $T \to \mathbb{R}$ gde je $T$ podskup skupa realnih brojeva proizvoljne kardinalnosti.

**Definicija 1.2.6** Cilindrični skup *u* $\mathbb{R}^T$ *je skup oblika*

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}il_{t_1,t_2,\dots,t_n}(B^n) = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^T : \ (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)) \in B^n \ \text{za neko}\ B^n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\}, \end{aligned} \tag{1.64}$$

*za fiksirane* $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$. *Skup* $B^n$ *nazivamo* osnova cilindra. *Označimo sa* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ *najmanju* $\sigma$*-algebru koju generiše familija svih cilindara.*

Familija cilindara čini algebru, pa se verovatnosna mera definisana na cilindrima proširuje na meru nad čitavom $\sigma$-algebrom. Ta konstrukcija će biti takva da će se verovatnosna mera na beskonačnodimenzionalnim prostorima dobiti produženjem mera sa konačnodimenzionalnih prostora koje zadovoljavaju tzv. uslov saglasnosti.

Posmatrajmo neuređenu $n$-torku indeksa $\tau = [t_1, t_2, \dots, t_n]$ gde su $t_i \in T$ i neka je $P_\tau$ mera na $(\mathbb{R}^\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau))$ gde je $\mathbb{R}^\tau = \mathbb{R}_{t_1} \times \mathbb{R}_{t_2} \times \cdots \times \mathbb{R}_{t_n}$.

**Definicija 1.2.7** *Kažemo da je familija mera* $\{P_\tau\}$ saglasna *($\tau$ prolazi kroz skup svih konačnih izbora neuređenih n-torki iz* $T$*) ako važi: za proizvoljnu funkciju* $x : T \to \mathbb{R}$, *za svaka dva izbora* $\tau = [t_1, t_2, \dots, t_n]$ *i* $\sigma = [s_1, s_2, \dots, s_k]$ *takva da je* $\sigma \subset \tau$ *i za proizvoljno* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\sigma)$ *važi*

$$\begin{aligned} &P_\sigma\{(x(s_1), x(s_2), \dots, x(s_k)) : (x(s_1), x(s_2), \dots, x(s_k)) \in B\} = \\ &\qquad = P_\tau\{(x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)) : (x(s_1), x(s_2), \dots, x(s_k)) \in B\}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

**Teorema 1.2.2 (Kolmogorov)** *Neka je* $\{P_\tau\}$ *familija saglasnih verovatnosnih mera na* $(\mathbb{R}^\tau, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau))$ *. Tada postoji jedinstvena mera* $P$ *na* $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ *takva da je*

$$P\{x \in \mathbb{R}^T : (x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)) \in B\} = P_{[t_1,t_2,\dots,t_n]}(B) \tag{1.66}$$

*za sve izbore* $\tau = [t_1, t_2, \dots, t_n] \subset T$ *i* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^\tau)$.

### 1.2.2 Slučajne promenljive i njihove karakteristike

**Definicija 1.2.8** *Preslikavanje* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *iz prostora verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *u merljiv prostor* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *naziva se* $n$-dimenzionalna slučajna promenljiva *ako inverzna slika svakog Borelovog skupa pripada* $\sigma$*-algebri* $\mathcal{F}$*. Na merljivom prostoru* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *uvodimo verovatnosnu meru* $P_X$ *definisanu relacijom*

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)). \tag{1.67}$$

*Za meru* $P_X$ *postoji jedinstvena funkcija raspodele* $F_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *za koju važi*

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_n]) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\}. \tag{1.68}$$

*Funkciju* $F_X$ *nazivamo* funkcija raspodele *slučajne promenljive* $X$.

Dakle slučajna promenljiva $X$ prenosi strukturu verovatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ na prostor $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), P_X)$ u kojem postoji razvijen aparat matematičke analize. Najčešće ćemo i identifikovati ova dva prostora.

**Definicija 1.2.9** *Slučajna promenljiva* $I_A$ *data sa* $I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ *za događaj* $A \in \mathcal{F}$ *naziva se* indikator događaja $A$.

*Ako postoje disjunktno razbijanje sigurnog događaja* $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots$, *i najviše prebrojiv skup* $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$, *tada slučajnu promenljivu oblika*

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i I_{A_i}(\omega) \tag{1.69}$$

*nazivamo* diskretna slučajna promenljiva.

**Definicija 1.2.10** *Slučajna promenljiva je* apsolutno neprekidnog tipa*, ako je verovatnosna mera* $P_X$ *apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu meru na* $\mathbb{R}^n$*. Radon-Nikodỳmov izvod mere* $P_X$ *po meri Lebesguea označavamo sa* $\varphi(x)$ *i nazivamo* funkcija gustine *slučajne promenljive* $X$.

**Definicija 1.2.11** *Komponente slučajanog vektora* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *su* nezavisne*, ako za svako* $k \leq n$*, za svaki izbor indeksa* $(i_1, \ldots, i_k)$ *i za proizvoljne Borelove skupove* $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *važi*

$$P(\bigcap_{j=1}^{k}\{X_{i_j} \in B_j\}) = \prod_{j=1}^{k} P\{X_{i_j} \in B_j\}. \tag{1.70}$$

**Definicija 1.2.12** *Slučajna promenljiva* $X$ *je merljiva funkcija na prostoru verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, pa možemo posmatrati i njen integral po meri* $P$*. Ovaj integral ćemo označavati sa* $E(X)$ *i nazivaćemo ga* matematičko očekivanje *slučajne promenljive* $X$*. Dakle,*

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \int_{\mathbb{R}^n} X dF_X. \tag{1.71}$$

**Definicija 1.2.13** *Neka je* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ $n$*-dimenzionalna slučajna promenljiva.* Kovarijaciona matrica *vektora* $X$ *je matrica data sa* $B = [cov(X_i, X_j)]_{n \times n}$*, gde je*

$$cov(X_i, Y_j) = E(X_i Y_j) - E(X_i)E(Y_j).$$

**Teorema 1.2.3** *Matrica* $B$ *je kovarijaciona matrica nekog slučajnog vektora akko je simetrična i pozitivno semidefinitna.*

**Definicija 1.2.14** Karakteristična funkcija $n$*-dimenzionalne slučajne promenljive* $X$ *je funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *definisana relacijom*

$$f_X(t_1, t_2, \ldots, t_n) = E(e^{i(t|X)}) = E(e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k}), \tag{1.72}$$

*gde je* $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$*, a* $(\cdot \mid \cdot)$ *je oznaka za standardni skalarni proizvod u* $\mathbb{R}^n$*.*

Karakteristična funkcija postoji za svaku slučajnu promenljivu i ona je jednoznačno određuje. Karakteristična funkcija slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa je zapravo Fourierova transformacija funkcije gustine.

**Definicija 1.2.15** *Označimo sa* $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ili kraće samo sa* $L^2(\Omega)$ *prostor slučajnih promenljivih za koje je* $E(X^2) < \infty$*. U prostoru* $L^2(\Omega)$ *uvodimo skalarni proizvod kao*

$$(X \mid Y) = E(XY) \tag{1.73}$$

*za proizvoljne* $X, Y \in L^2(\Omega)$*.*

Norma indukovana ovim skalarnim proizvodom je oblika $||X|| = \sqrt{E(X^2)}$ i važi da je prostor $L^2(\Omega)$ kompletan u odnosu na ovu normu. Konvergencija slučajnih promenljivih u prostoru $L^2(\Omega)$ je srednjekvadratna konvergencija definisana sa: $X_n \xrightarrow{L^2} X$, ako $E\left|X_n - X\right|^2 \to 0$, kad $n \to \infty$. Prostor $L^2(\Omega)$ je Hilbertov prostor.

**Normalna raspodela**

**Definicija 1.2.16** *Slučajan vektor* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *ima* n-dimenzionalnu normalnu (Gaussovu) raspodelu *sa parametrima* $m$ *i* $B$, *što označavamo sa* $X : \mathcal{N}(m, B)$, *gde je* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{R}^n$, *i* $B$ *je regularna, simetrična, pozitivno semidefinitna matrica, ako je njena funkcija gustine data sa*

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det A}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^T A(x-m)} \tag{1.74}$$

*za* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *i* $A$ *je inverzna matrica za* $B$.

**Teorema 1.2.4** *Neka je* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *slučajan vektor sa normalnom* $X : \mathcal{N}(m, B)$ *raspodelom. Tada važi:*

1. *Parametar* $m$ *je vektor matematičkih očekivanja komponenti slučajnog vektora* $X$ *tj.*
$$E(X_k) = m_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\ ,$$
*gde je* $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

2. *Matrica* $B$ *je kovarijaciona matrica slučajnog vektora* $X$.

**Teorema 1.2.5** *Neka je* $X$ *slučajna promenljiva sa n-dimenzionalnom normalnom raspodelom* $X : \mathcal{N}(m, B)$. *Tada je karakteristična funkcija slučajnog vektora* $X$ *data sa*

$$f(t_1, t_2, \ldots, t_n) = e^{i(t|m) - \frac{1}{2}t^T Bt}, \tag{1.75}$$

*gde je* $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

**Teorema 1.2.6** *Neka je* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *proizvoljan slučajan vektor.*

1. *Ako* $X$ *ima n-dimenzionalnu normalnu raspodelu* $X : \mathcal{N}(m, B)$, *tada za proizvoljne* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *takve da postoji bar jedno* $\lambda_i \neq 0$, *važi da slučajna promenljiva* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ *ima normalnu raspodelu*
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k X_k : \mathcal{N}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k m_k;\ \lambda^T B \lambda). \tag{1.76}$$

2. *Ako za sve* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *važi da linearna kombinacija* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k X_k$ *ima normalnu raspodelu, tada slučajan vektor* $X$ *ima n-dimenzionalnu normalnu raspodelu.*

Posmatrajmo $L^2(\Omega)$ prostor slučajnih promenljivih sa konačnim drugim momentom. Slučajne promenljive sa normalnom raspodelom pripadaju prostoru $L^2(\Omega)$ jer imaju konačnu disperziju. Na osnovu prethodne teoreme se svaki konačan podprostor $\mathcal{L}\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ generisan slučajnim promenljivama sa normalnom raspodelom sastoji isključivo od slučajnih promenljivih sa normalnom raspodelom. Naredna teorema proširuje ovaj rezultat i na zatvorene beskonačnodimenzionalne podprostore $\overline{\mathcal{L}}\{X_1, X_2, \ldots\}$ generisane slučajnim promenljivama sa normalnom raspodelom.

**Teorema 1.2.7** *Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz slučajnih promenljivih sa normalnom raspodelom koji konvergira u srednjekvadratnom ka slučajnoj promenljivoj $X$. Tada i slučajna promenljiva $X$ ima normalnu raspodelu.*

### Uslovno matematičko očekivanje

**Definicija 1.2.17** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ verovatnosni prostor, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ proizvoljna $\sigma$-podalgebra i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ integrabilna slučajna promenljiva. Esencijalno jedinstvenu $\mathcal{B}$-merljivu funkciju $E(X \mid \mathcal{B}) : \Omega \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava jednakost*

$$\int_B E(X \mid \mathcal{B}) dP_{\mathcal{B}} = \int_B X dP \tag{1.77}$$

*za svako $B \in \mathcal{B}$, nazivamo* uslovno matematičko očekivanje slučajne promenljive $X$ u odnosu na $\sigma$-algebru $\mathcal{B}$.

*Neka je za $A \in \mathcal{F}$*

$$P(A \mid \mathcal{B}) = E(I_A \mid \mathcal{B}). \tag{1.78}$$

*Tada se $P(\cdot \mid \mathcal{B})$ naziva* uslovna verovatnoća na $\sigma$-algebri $\mathcal{F}$ u odnosu na $\sigma$-algebru $\mathcal{B}$.

U slučaju kada je $\sigma$-algebra $\mathcal{B}$ generisana nekom slučajnom promenljivom $Y$, uslovno matematičko očekivanje označavamo sa $E(X|Y)$.

**Teorema 1.2.8** *Uslovno matematičko očekivanje ima sledeće osobine:*

1. $E(E(X \mid \mathcal{B})) = E(X)$.
2. *Ako je $X$ merljiva u odnosu na $\mathcal{B}$, tada $E(X \mid \mathcal{B}) \overset{s.s.}{=} X$.*
3. *Ako je $X \geq 0$, tada je i $E(X \mid \mathcal{B}) \geq 0$ s.s..*
4. *Ako je $X \overset{s.s.}{=} c$ gde je $c$ proizvoljna konstanta, tada je $E(X \mid \mathcal{B}) \overset{s.s.}{=} c$.*
5. *Ako je $B = \{\emptyset, \Omega\}$ trivijalna $\sigma$-algebra, tada $E(X \mid \mathcal{B}) \overset{s.s.}{=} E(X)$.*

**Teorema 1.2.9** *Ako su $X_1$ i $X_2$ integrabilne slučajne promenljive i $a_1, a_2$ proizvoljne konstante, tada važi*

$$E(a_1X_1 + a_2X_2 \mid \mathcal{B}) \overset{s.s.}{=} a_1E(X_1 \mid \mathcal{B}) + a_2E(X_2 \mid \mathcal{B}). \tag{1.79}$$

*tj. operator $E(\cdot \mid \mathcal{B}) : L^1(\Omega) \to L^1(\Omega)$ je linearan operator nad prostorom integrabilnih slučajnih promenljivih.*

**Teorema 1.2.10 (o dominantnoj konvergenciji)** *Neka je dat niz slučajnih promenljivih $\{X_n\}$ koji konvergira $X_n \overset{s.s.}{\to} X$. Neka postoji $Y \in L^1(\Omega)$ tako da je za svako $n \in \mathbb{N}$ $|X_n| \le Y$ s.s. Tada važi*

$$E(|X_n - X| \mid \mathcal{B}) \overset{s.s.}{\to} 0. \tag{1.80}$$

**Teorema 1.2.11** *Neka su $X_n$ nenegativne slučajne promenljive za sve $n \in \mathbb{N}$. Tada*

$$E(\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mid \mathcal{B}) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X_k \mid \mathcal{B}) \quad s.s. \tag{1.81}$$

**Teorema 1.2.12** *Neka su $X, Y$ slučajne promenljive na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takve da su $X$ i $XY$ integrabilne. Ako je $Y$ merljiva u odnosu na $\sigma$-algebru $\mathcal{B}$, tada je*

$$E(XY \mid \mathcal{B}) = YE(X \mid \mathcal{B}) \quad s.s. \tag{1.82}$$

### 1.2.3 Slučajni procesi

**Definicija 1.2.18** *Neka je $T$ neprazan indeksni skup u $\mathbb{R}$. Familija $\mathbb{R}^d$-vrednosnih slučajnih promenljivih $\{\omega \mapsto X_t(\omega) : t \in T\}$ definisanih nad istim prostorom verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je* slučajan proces *sa indeksnim skupom $T$ i prostorom stanja $\mathbb{R}^d$.*

Iz prethodne definicije direktno sledi da je proces $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ za svako fiksirano $t_0 \in T$ slučajna promenljiva (merljivo prelikavanje nad prostorom verovatnoće).

**Definicija 1.2.19** *Neka je $\{X_t(\omega) : t \in T\}$ slučajan proces. Tada za svako fiksirano $\omega_0 \in \Omega$ imamo preslikavanje $X_t(\omega_0) : T \to \mathbb{R}^d$ koje nazivamo* trajektorija *slučajnog procesa.*

U daljem ćemo slično kao i kod slučajnih promenljivih, izostaviti oznaku $\omega$ (koja se podrazumeva) i pisati samo $X_t$.

**Definicija 1.2.20** Konačnodimenzionalne raspodele *slučajnog procesa* $\{X_t : t \in T\}$ *su date sa*

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = P\{(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \in (-\infty,x_1]\times\cdots\times(-\infty,x_n]\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

*gde su* $t_i \in T$, $x_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1,2,\dots$

**Teorema 1.2.13** *Familija konačnodimenzionalnih raspodela na* $((\mathbb{R}^d)^n, \mathcal{B}((\mathbb{R}^d)^n))$ *zadovoljava sledeća dva uslova:*

1. *uslov saglasnosti*

$$F_{t_1,\dots,t_m,t_{m+1},\dots,t_n}(x_1,\dots,x_m,\infty,\dots,\infty) = F_{t_1,\dots,t_m}(x_1,\dots,x_m) \tag{1.83}$$

   *za svako* $m < n$ *i* $t_1,\dots,t_n \in T$.

2. *uslov simetrije*

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)}) \tag{1.84}$$

   *za svako* $n \in \mathbb{N}$ *i svako* $\pi$ *iz grupe permutacija brojeva* $\{1,2,\dots,n\}$.

**Teorema 1.2.14 (Kolmogorov)** *Za svaku familiju funkcija raspodele koja zadovoljava uslov saglasnosti i simetrije postoji prostor verovatnoće* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i slučajan proces* $\{X_t : t \in T\}$ *definisan na njemu, čije su konačnodimenzionalne raspodele upravo one date.*

Prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ iz prethodne teoreme je prostor$((\mathbb{R}^d)^T, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^T, P_X)$ u kojem je mera $P_X$ dobijena produženjem odgovarajućih konačnodimenzionalnih verovatnosnih mera. Mera $P_X$ se naziva *raspodela verovatnoća* procesa $X_t$.

Dakle, svaki (klasičan) slučajan proces možemo posmatrati iz tri ekvivalentne perspektive: kao merljivo preslikavanje $\Omega \to (\mathbb{R}^d)^T$, kao preslikavanje $T \to L^0(\Omega)$ ili kao zajedničko-merljivo preslikavanje $T \times \Omega \to \mathbb{R}^d$. Kod uopštenih slučajnih procesa imaćemo analogne koncepte koji nisu ekvivalentni, već definišu uopštene procese različitog tipa.

**Definicija 1.2.21** *Slučajan proces* $X_t$ *je* stacionaran *ako za svako* $h > 0$ *i svako* $t_i, t_i + h \in T$, $i \in \mathbb{N}$ *važi*

$$F_{t_1+h,\dots,t_n+h}(x_1,\dots,x_n) = F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n). \tag{1.85}$$

*Proces je* stacionaran u širem smislu *ako je* $E(X_t) = const$ *i* $Cov(X_t, X_s) = C(t-s)$, *gde je* $C$ *funkcija jedne promenljive.*

**Definicija 1.2.22** *Slučajan proces $X_t$ je* gausovski proces *ako su sve njegove konačnodimenzionalne raspodele normalne.*

Gausovski proces je potpuno okarakterisan svojim matematičkim očekivanjem $m(t) = E(X_t)$ i kovarijansnom funkcijom $E(X_t X_s) - m(t)m(s)$.

**Definicija 1.2.23** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće. Familija pod-$\sigma$-algebri $\{\mathcal{F}_t\}$ se naziva* filter *ako za svako $s < t$ važi $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$.*

**Definicija 1.2.24** *Slučajan proces $\{X_t : t \in T\}$ je* adaptiran *filteru $\{\mathcal{F}_t\}$ ako je za svako $t \in T$ slučajna promenljiva $X_t(\omega)$ $\mathcal{F}_t$-merljiva.*

**Definicija 1.2.25** *Slučajan proces $\{M_t\}$ je* martingal *u odnosu na filter $\{\mathcal{F}_t\}$, ako ima osobine:*

1. *za svako $t \in T$ je $E(|M_t|) < \infty$*
2. *za svako $s \leq t$ je $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$*

Ako se filter ne navodi eksplicitno, podrazumevamo da je $\mathcal{F}_t$ $\sigma$-algebra generisana familijom slučajnih promenljivih $\{X_s : s \leq t\}$.

**Definicija 1.2.26** *Slučajan proces $\{X_t\}$ je* markovski proces *ako za svako $t > s$ i svaki Borelov skup $B$ iz $\mathbb{R}^d$ važi*

$$P\{X_t \in B|\mathcal{F}_s\} = P\{X_t \in B|X_s\} \tag{1.86}$$

*skoro sigurno.*

### Brownovo kretanje

**Definicija 1.2.27** *Sučajan proces $\{B_t : t \in [0, \infty)\}$ se naziva* Brownovo kretanje (Wienerov proces) *ako važi:*

1. *$B_0 = 0$ skoro sigurno.*
2. *Priraštaji su nekorelirani.*
3. *Za svako $0 < s < t$ priraštaj $B_t - B_s$ ima normalnu $\mathcal{N}(0, (t-s)I)$ raspodelu, gde je $I$ jedinična $d \times d$ matrica.*

Najčešće slučajan proces $X_t(\omega)$ shvatamo kao poziciju (rezultat) u trenutku $t$ ishoda nekog eksperimenta $\omega$. Shodno tome i koncept Brownovog kretanja $B_t(\omega)$ interpretiramo kao položaj u prostoru $\mathbb{R}^d$ polenske (Brownove) čestice $\omega$ u trenutku $t$.

Primetimo još da je gore definisano $d$-dimenzionalno Brownovo kretanje možemo posmatrati kao $B_t = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$, gde su $B_t^{(i)}$, $i = 1, \ldots, d$ jednodimenzionalna nezavisna Brownova kretanja.

**Teorema 1.2.15** *Brownovo kretanje je gausovski proces sa očekivanjem* $E(B_t) = 0$ *i kovarijansnom matricom* $E(B_t B_s^T) = min\{t, s\}I$.

Prirašataji Brownovog kretanja su nezavisni i stacionarni. Brownovo kretanje je markovski proces.

**Teorema 1.2.16** *Za skoro svako* $\omega$ *je trajektorija* $B_t(\omega)$ *neprekidna po* $t$. *Tačnije postoji* verzija *Brownovog kretanja* $X_t$

$$P\{\omega : X_t(\omega) = B_t(\omega)\} = 1, \text{ za sve } t > 0 \tag{1.87}$$

*koja ima skoro sve neprekidne trajktorije.*

Nadalje ćemo uvek pretpostaviti da je $B_t$ upravo ova neprekidna verzija. Dakle, verovatnosna mera $P_B$ iz teoreme Kolmogorova se može uvesti na prostoru neprekidnih funkcija $C((\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)})$ sa odgovarajućom Borelovom $\sigma$-algebrom. Verovatnosnu meru $P_B$ nazivamo *Wienerova mera.*

**Teorema 1.2.17** *Skoro sve trajektorije Brownovog kretanja su skoro svuda nediferencijabilne funkcije.*

Dakle, ne postoji klasičan slučajan proces koji je izvod Brownovog kretanja, odnosno ne postoji proces koji bi opisivao *brzinu* polenske čestice. Intuitivno, to bi bio gausovski proces čija je kovarijansa Diracova delta funkcija. Nažalost, tako nešto ne postoji u klasičnom smislu.

Ipak, u nastavku ćemo definisati uopštene slučajne procese, specijalno proces belog šuma koji će biti uopšteni izvod Brownovog kretanja. Naziv *beli šum* je inspirisan činjenicom da bi takav proces - ako bi neformalno bio definisan u klasičnom smislu - imao konstantnu spektralnu gustinu slično kao što bela svetlost uniformno sadrži boje svih talasnih dužina spektra. Reč *šum* sugeriše da ovaj proces u SDJ-ima modelira neke nepoznate faktore koji se tretiraju kao neke smetnje. Uglavnom to nisu baš zvučne smetnje, ali primera radi možemo beli šum shvatiti kao zvuk koji uniformno sadrži sve glasove zvučnog spektra (brujanje avionskog motora, buka na tržištu akcija ili šustanje televizora kad nema programa).

Sama činjenica da je proces *uopšten* znači da će biti konstruisan uvođenjem verovatnosne mere na prostoru Schwartzovih temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, a ne mere na mnogo manjem prostoru $(\mathbb{R}^d)^{[0,\infty)}$.

### Itôv integral

Kako su trajektorije Brownovog kretanja funkcije neograničene varijacije, nemoguće je definisati integral u Lebesgue-Stiltjesovom smislu. Ovde dajemo kratak opis konstrukcije tzv. Itôvog integrala (jednostavnosti radi u jednoj dimenziji). Prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je prostor verovatnoće, $B_t$ označava Brownovo kretanje, a $\mathcal{B}$ je Borelova $\sigma$-algebra na $\mathbb{R}$.

Neka je preslikavanje $f : \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ merljivo u odnosu na $\mathcal{B} \times \mathcal{F}$ i adaptirano standardnom Brownovom filteru, takvo da je

$$E(\int f(t,\omega)^2 dt) < \infty. \tag{1.88}$$

1. Ako je $f$ stepenasta funkcija oblika $f(t,\omega) = \sum_j e_j(\omega)\chi_{[t_j,t_{j+1}]}(t)$, tada se Itôv integral definiše kao

$$\int f(t,\omega) dB_t(\omega) = \sum_j e_j(\omega)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}). \tag{1.89}$$

2. Ako je $f$ proizvoljna funkcija, ona se može u $L^2$ smislu aproksimirati nizom stepenastih funkcija $f_n$ tako da $E\left(\int (f(t,\omega) - f_n(t,\omega))^2 dt\right) \to 0$, $n \to \infty$. Tada se Itôv integral definiše kao

$$\int f(t,\omega) dB_t(\omega) = lim_{n\to\infty} \int f_n(t,\omega) dB_t(\omega) \tag{1.90}$$

   gde je limit u $L^2$-smislu.

Važi da je Itôv integral martingal tj. $E(\int_0^t f(\tau,\omega)dB_\tau(\omega)|\mathcal{F}_s) = \int_0^s f(\tau,\omega)dB_\tau(\omega)$, za proizvoljno $s \le t$.

Sa $\widehat{L^2}(\mathbb{R}^n)$ označavamo simetrične funkcije po $n$-promenljivih prostora $L^2(\mathbb{R}^n)$.

**Definicija 1.2.28** *Neka je $\psi \in \widehat{L^2}(\mathbb{R}^n)$. Definišimo n-tostruki Itôv integral kao*

$$\begin{aligned} I_n(\psi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi dB^{\otimes n} = \\ &= n! \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{t_n} \cdots \int_{-\infty}^{t_2} \psi(t_1, t_2, \ldots, t_n) dB(t_1) dB(t_2) \cdots dB(t_n) \end{aligned} \tag{1.91}$$

*gde su na desnoj strani n iteriranih jednostrukih Itôvih integrala.*

Primetimo da zbog granica integrala u svakom koraku imamo adaptiranu podintegralnu funkciju, kao i da je zbog simetričnosti funkcije $\psi$ integral invarijantan u odnosu na redosled iteriranih integrala (važi Fubinijevo pravilo).

**Teorema 1.2.18 (Itôva izometrija)**

$$E\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi dB^{\otimes n}\right)^2 = n! \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t_1, \dots, t_n)^2 dt_1 \cdots dt_n. \tag{1.92}$$

Itôv integral se teško izračunava direktno po definiciji; u konkretnim problemima se za izračunavanje integrala koriste Itôve formule. Ovde, jednostavnosti radi, navodimo Itôvu formulu za jednodimenzionalni slučaj.

**Definicija 1.2.29** *Slučajan proces $X_t$ je* standardan proces *ako je oblika*

$$dX_t = a(\omega, t)dt + b(\omega, t)dB_t$$

*gde je* $P\left(\int_0^T a(\omega, t)dt < \infty\right) = 1$ *i* $P\left(\int_0^T b^2(\omega, t)dt < \infty\right) = 1$.

**Teorema 1.2.19 (Itôva formula)** *Neka je $X_t$, $t \in [0, T]$ standardan proces i $f(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^{1,2}$. Tada važi*

$$f(t, X_t) - f(0, 0) = \int_0^t f_x(s, X_s)dX_s + \int_0^t f_t(s, X_s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{xx}(s, X_s)b^2(\omega, s)ds.$$

Prvi integral u formuli je Itôv integral, drugi i treći su Riemannovi. Vidimo da se za razliku od klasične Newton-Leibnizove formule javljaju dodatni članovi koji su posledica činjenice da su trajektorije Brownovog kretanja neograničene varijacije.

Ako sa $Y_t$ označimo proces $Y_t = f(t, X_t)$ tada prethodnu jednačinu možemo formalno pisati u obliku stohastičke diferencijalne jednačine:

$$dY_t = f_x(t, X_t)dX_t + f_t(t, X_t)dt + \frac{1}{2} f_{xx}(t, X_t)dX_t \cdot dX_t$$

gde $\cdot$ označava množenje u tzv. *box-algebri* datoj pravilom: $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$, $dB_t \cdot dB_t = dt$. Pošto diferencijal nismo definisali (u klasičnoj teoriji), vodimo računa o tome da iza ovakvog zapisa u stvari stoji integralna jednačina. U teoriji uopštenih stohastičkih procesa će upravo ovaj formalan zapis $dB_t$ biti zamenjen korektno definisanim konceptom belog šuma $W(t)$.

# Glava 2

# Uopšteni stohastički procesi

Široku klasu slučajnih procesa koji se na prirodan način javljaju u primenama, nemoguće je definisati na klasičan način. Izvod Brownovog kretanja odnosno proces belog šuma je možda najpozantiji od njih. Koncept belog šuma se pokazao kao odličan model naglih i velikih fluktuacija u dinamičkim sistemima, ali ga je matematički korektno moguće definisati jedino u okviru teorije uopštenih funkcija (distribucija). Uopšteni stohastički procesi su prvi put uvedeni 1955 u radovima I.M. Gel'fanda, N. Vilenkina i K. Urbanika a zatim je 80-ih ova teorija doživela snažan razvoj u K. Itôvim i T. Hidinim radovima. Tokom poslednjih decenija za razvoj ove teorije prvenstveno su zaslužni T. Hida, Y. Kondratiev, H. Kuo i B. Øksendal.

Ova glava posvećena je raznovrsnim prostorima stohastičkih test i uopštenih funkcija - to su pre svega dobro poznati Hidini, Kondratievi, a kao novitet uveden je i novi prostor $exp(S)_\rho$. Tekst vodi čitaoca od konstrukcije osnovnog prostora verovatnoće belog šuma, preko Wiener-Itôve haos ekspanzije do same konstrukcije gore navedenih prostora koji sadrže uopštene stohastičke funkcije.

Generalno, postoje dva pristupa ka proučavanju uopštenih stohastičkih procesa i prostora koji ih sadrže: pomoću Itôvih integrala i operatora, ili pomoću Fourier-Hermiteovih polinoma. Većina autora se opredeljuje za jedan od ova dva pristupa; na primer u radovima T. Hide i H.H. Kua u velikoj meri se koriste integrali i operatori, dok npr. kod Øksendala pretežno preovladava ovaj drugi pristup. Jedan od (manjih) ciljeva u ovoj tezi jeste da se ove dve notacije objedine.

Definisani su uopšteni stohastički procesi različitog tipa: to su procesi tipa (I) i tipa (U) kao što su ih definisali Inaba i Ullrich (videti npr. [23]), kao i procesi tipa (O) kao što su ih definše Øksendal (videti npr. [17]). Esencijalni deo ove glave - kao i čitave teze - čine teoreme o ekspanziji procesa tipa (I) sa vrednošću u prostoru $(S)_{-1}$ ili $exp(S)_{-1}$.

## 2.1 Prostor verovatnoće belog šuma

**Definicija 2.1.1** *Neka je $E$ nuklearan prebrojiv Hilbertov prostor topologizovan nizom seminormi $|\cdot|_n$.* Borelova $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(E')$ *je $\sigma$-algebra generisana slabom topologijom prostora $E'$.*

Iz osobina nuklearnosti prostora sledi da se ista Borelova $\sigma$-algebra može generisati i jakom topologijom, induktivnom topologijom, ili cilindričnim skupovima oblika

$$Cil_{\phi_1,\dots,\phi_n}(B) = \{\omega \in E' : (\langle\omega,\phi_1\rangle,\dots,\langle\omega,\phi_n\rangle) \in B\} \tag{2.1}$$

gde je $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ baza cilindra, a $\phi_1,\dots,\phi_n \in E$ su fiksirani.

Kako je osnovni nuklearan prostor $E$ i separabilan, možemo birati za prostor $H$ da je neki od prostora $E_n$ koji definišu prebrojivu strukturu prostora $E$, i time dobijamo Gel'fandovu trojku oblika

$$E \subseteq H \subseteq E'. \tag{2.2}$$

**Definicija 2.1.2** *Funkcija $C : E \to \mathbb{C}$ se naziva* karakteristična funkcija *ako ima osobine:*

1. *$C$ je neprekidna na $E$,*
2. *$C(0) = 1$,*
3. *$C$ je pozitivno definitna tj. za proizvoljne $z_1\dots,z_n \in \mathbb{C}$ i $\phi_1,\dots,\phi_n \in E$ je*

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j\overline{z_k}C(\phi_j - \phi_k) \geq 0. \tag{2.3}$$

**Teorema 2.1.1 (Bochner-Minlos)** *Neka je $E$ nuklearan prostor i $C$ karakteristična funkcija na njemu. Tada postoji jedinstvena mera $\mu_C$ na prostoru $(E',\mathcal{B}(E'))$ takva da je za svako $\phi \in E$*

$$\int_{E'} e^{i\langle\omega,\phi\rangle} d\mu_C(\omega) = C(\phi). \tag{2.4}$$

*Ako je $C$ neprekidno i u odnosu na neku seminormu $|\cdot|_p$ i ako je $m > p$ takvo da je inkluzivno preslikavanje $E_m \to E_p$ HS-tipa, onda je $\mu_C(E_{-m}) = 1$.*

Uslov nuklearnosti iz Bochner-Minlosove teoreme je potreban i dovoljan da bi se aditivna mera dobijena na algebri cilindara (po konačnodimenzionalnoj Bochnerovoj teoremi) mogla proširiti na $\sigma$-aditivnu meru na beskonačnodimenzionalnom prostoru $E'$. Opširan dokaz ove teoreme kao i sama konstrukcija mere $\mu_C$ može se naći u [9].

**Definicija 2.1.3** *Prostor* $(E', \mathcal{B}(E'), \mu_C)$ *nazivamo* prostor šuma *pridružen osnovnom prostoru* $(E, |\cdot|)$.

**Definicija 2.1.4** *Matematičko očekivanje merljive funkcije* $f$ *definisane nad* $E'$ *u odnosu na meru* $\mu_C$ *je dato sa*

$$E_\mu(f) = \int_{E'} f(\omega) d\mu_C(\omega), \tag{2.5}$$

*pod uslovom da je* $E_\mu(f) = \int_{E'} |f(\omega)| d\mu_C(\omega) < \infty$.

Direktno iz (2.4) sledi da je karakteristična funkcija slučajne promenljive $\langle \cdot, \phi \rangle$ data sa

$$E_\mu(e^{i\langle \cdot, \phi \rangle}) = \int_{E'} e^{i\langle \omega, \phi \rangle} d\mu_C(\omega). \tag{2.6}$$

Sa stanovišta primena prirodno je posmatrati tzv. prostor belog šuma.

**Definicija 2.1.5** *Neka je* $E = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $E' = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $H = L^2(\mathbb{R}^d)$, $C(\phi) = \exp\{-\frac{1}{2}|\phi|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\}$ *i* $\mu$ *odgovarajuća mera iz teoreme Bochner-Minlosa. Prostor*

$$(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}, \mu) \tag{2.7}$$

*nazivamo* prostor verovatnoće belog šuma*. Mera* $\mu$ *je* mera belog šuma *ili Gaussova mera na* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

U daljem radu pretpostavljamo da je osnovni prostor verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}, \mu)$.

Sa $(L)^2$ ćemo označavati kvadratno integrabilne funkcije na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ u odnosu na meru belog šuma ili opštije

$$(L)^p = L^p(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mu), \qquad 1 \le p \le \infty. \tag{2.8}$$

Prostor $(L)^2$ je Hilbertov, a skalarni proizvod u njemu je dat sa

$$(F|G)_{(L)^2} = E_\mu(FG). \tag{2.9}$$

**Teorema 2.1.2** *Neka su* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *funkcije iz* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *koje su ortonormirane u* $L^2(\mathbb{R}^d)$. *Neka je* $d\lambda_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx_1 \cdots dx_n$ *Gaussova mera na* $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. *Tada n-dimenzionalna slučajna promenljiva*

$$\omega \mapsto (\langle \omega, \xi_1 \rangle, \ldots, \langle \omega, \xi_n \rangle) \tag{2.10}$$

*ima raspodelu* $\lambda_n$, *odnosno*

$$E_\mu(f(\langle \cdot, \xi_1 \rangle, \cdots, \langle \cdot, \xi_n \rangle)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda_n(x) \tag{2.11}$$

*za svako* $f \in L^1(\mathbb{R}^n, d\lambda_n)$.

*Dokaz*: Dokazaćemo da je karakteristična funkcija slučajne promenljive $(\langle\omega,\xi_1\rangle,\ldots,\langle\omega,\xi_n\rangle)$ jednaka karakterističnoj funkciji normalne $n$-dimenzionalne raspodele datoj relacijom (1.75). Na osnovu relacije (2.6) i ortogonalnosti elemenata $\xi_k$ imamo da je

$$E_\mu\left(e^{i\sum_{k=1}^n\langle\cdot,\xi_k\rangle}\right)=E_\mu\left(e^{i\langle\cdot,\sum_{k=1}^n\xi_k\rangle}\right)=e^{-\frac{1}{2}|\sum_{k=1}^n\xi_k|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}=e^{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n|\xi_k|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}}$$

što zaista jeste karakteristična funkcija normalne $n$-dimenzionalne raspodele. $\square$

Mera $\mu$ u stvari zamenjuje Lebesgueovu meru (koja ne postoji na beskonačnodimenzionalnim prostorima), a ima npr. osobinu da je rotaciono invarijantna. To možemo intuitivno shvatiti na sledeći način: neka je $\{\eta_k\}$ potpun ortonormiran sistem od $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Napravimo niz koordinata $\langle\omega,\eta_k\rangle=X_k$, $k\in\mathbb{N}_0$. Tada je niz $X_k$ niz slučajnih promenljivih sa standardnom Gaussovom raspodelom, pa je prema jakom zakonu velikih brojeva

$$lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N X_n^2=1$$

za s.s. $\omega$ (po meri $\mu$). Tj. za $\omega\in supp(\mu)$ je $\sum_{n=1}^N X_n^2\approx N$. Ova jednačina opisuje sferu u prostoru $\mathbb{R}^N$. Uzimajući granični proces $N\to\infty$ možemo reći da nosač mere $\mu$ "izgleda kao" beskonačnodimenzionalna sfera, pa je invarijantna pod beskonačnodimenzionalnim rotacijama. Precizna priča o grupama rotacija i detaljni rezultati vezani za njih mogu se naći u [12].

**Teorema 2.1.3** *Neka je $\phi\in L^2(\mathbb{R}^d)$ i niz $\phi_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ takav da $\phi_n$ konvergira ka $\phi$ u prostoru $L^2(\mathbb{R}^d)$. Tada je niz funkcija $\omega\mapsto\langle\omega,\phi_n\rangle$ konvergentan u prostoru $(L)^2$.*

*Dokaz*: Bez ograničenja opštosti pretpostavimo da su funkcije $\phi_n$ ortogonalne. Primenjujući relaciju (2.11) za $f(\langle\cdot,\phi_m\rangle-\langle\cdot,\phi_n\rangle)=|\langle\cdot,\frac{\phi_m-\phi_n}{|\phi_m-\phi_n|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\rangle|^2$ dobijamo da je

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)}|\langle\omega,\phi_m\rangle-\langle\omega,\phi_n\rangle|^2d\mu(\omega)&=E_\mu(|\langle\cdot,\phi_m-\phi_n\rangle|^2)\\&=|\phi_m-\phi_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}E_\mu(|\langle\cdot,\frac{\phi_m-\phi_n}{|\phi_m-\phi_n|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}\rangle|^2)\\&=|\phi_m-\phi_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}x^2e^{-\frac{1}{2}x^2}dx\\&=|\phi_m-\phi_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

što pokazuje da je niz Cauchyjev, a kako je $(L)^2$ kompletan, on je i konvergentan. $\square$

Prema prethodnoj teoremi možemo proširiti dejstvo elemenata iz $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ i na funkcije $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, što ćemo označavati sa $\langle \omega, \phi \rangle$ ali podrazumevamo da je to u stvari

$$\langle \omega, \phi \rangle = (L)^2 - lim_{n\to\infty} \langle \omega, \phi_n \rangle. \tag{2.12}$$

**Teorema 2.1.4** *Neka je* $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ *i* $\chi_{[0,t]} = \chi_{[0,t_1]\times\cdots\times[0,t_d]} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *karakteristična funkcija pravougaonika* $[0,t]$. *Tada je sa*

$$B(t, \omega) = \langle \omega, \chi_{[0,t]} \rangle \tag{2.13}$$

*definisano d-parametarsko Brownovo kretanje na prostoru verovatnoće* $(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{B}, \mu)$.

*Dokaz*: Očigledno je $B(0, \cdot) = 0$ s.s. u odnosu na meru $\mu$. Koristeći relaciju (2.4) lako se pokazuje da za proizvoljno $n \in \mathbb{N}$, slučajna promenljiva $(B(t^{(1)}, \omega), \ldots, (B(t^{(n)}, \omega))$ ima $n$-dimenzionalnu normalnu raspodelu sa nula-očekivanjem i kovarijansnom matricom $n \times n$ koja na $(i,j)$-tom polju ima element $\prod_{l=1}^{d} min\{t_l^{(i)}, t_l^{(j)}\}$, gde su $t^{(1)}, \ldots, t^{(n)} \in \mathbb{R}^d$. Neka su $k \in \{1, \ldots, n\}$ i $s^{(k)} \in \mathbb{R}^d$ proizvoljni. Posmatrajući $k$-tu komponentu $B(t^{(k)}, \omega)$ pomoću relacije (2.11) dobijamo da je priraštaj $B(t^{(k)}, \omega) - B(s^{(k)}, \omega)$ normalno raspoređen sa nula očekivanjem i disperzijom jednakoj $\prod_{l=1}^{d} |t_l^{(k)} - s_l^{(k)}|$. $\square$

**Definicija 2.1.6** Uglačani beli šum *je preslikavanje* $w : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *dato sa*

$$w(\phi, \omega) = \langle \omega, \phi \rangle. \tag{2.14}$$

**Teorema 2.1.5** *Za proizvoljno* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *je Itôv integral dat sa*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(t) dB(t, \omega) = \langle \omega, \phi \rangle, \qquad \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d). \tag{2.15}$$

*Dokaz:* Kako je $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ deterministička funkcija, uslov (1.88) je zadovoljen. Neka je $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ proizvoljno, fiksirano. Funkciju $\phi$ možemo aproksimirati nizom stepenastih funkcija $f_n(t) = \sum_j e_{j,n} \chi_{[t_j, t_{j+1}]}(t)$, $n \in \mathbb{N}$ koji u $L^2(\mathbb{R}^d)$ konvergira ka $\phi$. Tada je

$$\begin{aligned}
\langle \omega, f_n \rangle &= \langle \omega, \sum_j e_{j,n} \chi_{[t_j, t_{j+1}]} \rangle = \sum_j e_{j,n} \langle \omega, \chi_{[0,t_{j+1}]} - \chi_{[0,t_j]} \rangle \\
&= \sum_j e_{j,n} \left( B(t_{j+1}, \omega) - B(t_j, \omega) \right)
\end{aligned}$$

što jeste (1.89). Prelaskom na granični proces $n \to \infty$ i po teoremi 2.1.3 sledi tvrđenje. $\square$

Koristeći parcijalnu integraciju može se pokazati da je u distribucionom (slabom) smislu, za skoro svako $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$

$$w = \frac{\partial^d B}{\partial t_1 \cdots \partial t_d} \tag{2.16}$$

odnosno, uglačani beli šum predstavlja uopšteni izvod Brownovog kretanja.

**Definicija 2.1.7** Koordinatni proces uglačanog belog šuma *je preslikavanje* $W_\phi : \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *dato sa*

$$W_\phi(t, \omega) = w(\phi_t, \omega) \tag{2.17}$$

*gde je* $\phi_t(s) = \phi(s - t)$, $s, t \in \mathbb{R}^d$.

Dakle, za fiksirano $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, proces uglačanog belog šuma dat sa

$$W_\phi(t, \omega) = \langle \omega(s), \phi(s - t) \rangle$$

je klasičan slučajan proces. U narednom poglavlju biće definisani singularni beli šum.

**Teorema 2.1.6** *Koordinatni proces uglačanog belog šuma ima sledeće osobine:*

1. *Ako je* $\operatorname{supp} \phi_t \cap \operatorname{supp} \phi_s = \varnothing$, *tada su slučajne promenljive* $W_\phi(t, \cdot)$ *i* $W_\phi(s, \cdot)$ *nezavisne.*
2. *Stacionaran je.*
3. *Za svako fiksirano* $t \in \mathbb{R}^d$ *slučajna promenljiva* $W_\phi(t, \cdot)$ *ima normalnu raspodelu sa nula očekivanjem i disperzijom* $|\phi|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

**Definicija 2.1.8** *Neka je* $P(x) = \sum_{|\alpha| \le N} c_\alpha x^\alpha$ *polinom stepena* $N$, *gde je* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *multiindeks i* $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. *Preslikavanje* $\mathcal{P} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *dato sa*

$$\mathcal{P}(\omega) = P(\langle \omega, \phi_1 \rangle, \ldots, \langle \omega, \phi_n \rangle) \tag{2.18}$$

*gde su* $\phi_1, \ldots \phi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *nazivamo* stohastički polinom.
*Preslikavanje* $\mathcal{E} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ *dato sa*

$$\mathcal{E}(\omega) = e^{i\langle \omega, \phi \rangle} \tag{2.19}$$

*za* $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ *nazivamo* stohastički eksponencijal.

**Teorema 2.1.7** *Familija stohastičkih polinoma (za $N = 1, 2, \dots$) i linearna obvojnica familije stohastičkih eksponencijala su gusti skupovi u $(L)^p$, $p \geq 1$.*

U višedimenzionalnom slučaju, za dato $m \in \mathbb{N}$ definišemo

$$S = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad S' = \prod_{i=1}^{m} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d),$$

prostor $S'$ snabdevamo Borelovom $\sigma$-algebrom proizvoda i odgovarajućim proizvodom mera $\mu_m = \underbrace{\mu \times \cdots \times \mu}_{m}$. Dejstvo elementa $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m) \in S'$ na element $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m) \in S$ je dato sa

$$\langle \omega, \phi \rangle = \langle \omega_1, \phi_1 \rangle + \cdots + \langle \omega_m, \phi_m \rangle.$$

Uređenu trojku

$$(S', \mathcal{B}, \mu_m)$$

nazivamo *$m$-dimenzionalni $d$-parametarski prostor verovatnoće belog šuma.* Slično kao i u jednodimenzionalnom slučaju mogu se definisati $m$-dimenzionalno Brownovo kretanje i koordinatni proces uglačanog belog šuma kao (klasični) $m$-dimenzionalni stohastički procesi ($m$-torka jednodimenzionalnih nezavisnih procesa).

Sa $(L)^{2,m}$ ćemo označavati kvadratno integrabilne funkcije na $S'$ u odnosu na meru $m$-dimenzionalnog belog šuma, odnosno

$$(L)^{2,m} = L^2(S', \mu_m). \tag{2.20}$$

Neka je

$$K = \bigoplus_{k=1}^{m} L^2(\mathbb{R}^d)$$

ortogonalna suma $m$ identičnih kopija prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$. Prostor $K$ je Hilbertov, a norma na njemu je data sa $|\phi|_K = (\sum_{k=1}^{m} |\phi_k|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Neka su $d$ parametar belog šuma i $m$ dimenzija belog šuma fiksirani. Neka je $N$ *dimenzija prostora stanja* belog šuma. Stavimo da je

$$(L)^{2,m,N} = \bigoplus_{k=1}^{N} (L)^{2,m}$$

direktna suma $N$ identičnih kopija prostora $m$-dimenzionalnog belog šuma, snabdevena normom $|f|_N = \left( \sum_{k=1}^{N} |f_n|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

## 2.2 Wiener-Itôva haos ekspanzija

Neka su $h_n$ Hermiteovi polinomi, $\xi_n$ Hermiteove funkcije i $\eta_j$ definisano kao u (1.38). Podsetimo se da familija funkcija $\eta_j$ čini ortonormiranu bazu prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ koja pripada $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Označimo sa $\mathcal{I} = (\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}})_c$ skup nizova prirodnih brojeva koji imaju samo konačno mnogo elemenata različitih od nule.

**Definicija 2.2.1** *Za proizvoljno* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \mathcal{I}$ *definišimo* Fourier-Hermiteov polinom *sa*

$$H_\alpha(\omega) = \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle \omega, \eta_i \rangle), \qquad \omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d). \tag{2.21}$$

Primetimo da je Fourier-Hermiteov polinom u stvari konačan proizvod stohastičkih polinoma.

U višedimenzionalnom slučaju ($m > 1$) ortonormiranu bazu prostora $K$ čine vektori dužine $m$ oblika $e^{(k)} = (0, \ldots, \eta_j, 0, \ldots)$ gde se $\eta_j$ nalazi na $i$-tom mestu u nizu, a brojevi $i, j$ su takvi da je $k = i + (j-1)m$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \mathbb{N}$. U tom slučaju definišemo

$$H_\alpha^{(m)}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} h_{\alpha_k}(\langle \omega, e^{(k)} \rangle), \qquad \omega \in S'. \tag{2.22}$$

**Teorema 2.2.1** *Fourier-Hermiteovi polinomi* $H_\alpha^{(m)}$ *čine ortogonalnu bazu prostora* $(L)^{2,m}$. *Pri tome je*

$$\|H_\alpha^{(m)}\|_{(L)^{2,m}} = \sqrt{\alpha_1! \alpha_2! \cdots} \tag{2.23}$$

*za* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \mathcal{I}$.

*Dokaz*: Jednostavnosti radi dajemo dokaz u slučaju $m = 1$. Neka su $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ i $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ proizvoljni multiindeksi iz $\mathcal{I}$. Tada je prema (2.11) i teoremi Fubinija

$$\begin{aligned} E_\mu(H_\alpha H_\beta) &= E_\mu\left(\prod_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}(\langle \omega, \eta_i \rangle) h_{\beta_i}(\langle \omega, \eta_i \rangle)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}(x_i) h_{\beta_i}(x_i) d\lambda_n(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} h_{\alpha_i}(x_i) h_{\beta_i}(x_i) d\lambda_1(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \delta_{\alpha_i, \beta_i} \alpha_i! = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \alpha!, & \alpha = \beta \end{cases} \end{aligned}$$

gde smo u poslednjem koraku koristili ortogonalnosti Hermiteovih polinoma. Kako je familija stohastičkih polinoma gusta u $(L)^2$, proizvoljan element $f \in (L)^2$ se može aproksimirati po $\|\cdot\|_{(L)^2}$ normi stohastičkim polinomom oblika $\mathcal{P}_n(\omega) = f_n(\langle\omega,\eta_1\rangle,\ldots,\langle\omega,\eta_n\rangle)$. Polinom $f_n(x_1,\ldots,x_n)$ se može napisati kao linearna kombinacija proizvoda ermitskih polinoma,

$$f_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_\alpha c_\alpha \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(x_i).$$

Tada je $\mathcal{P}_n(\omega) = \sum_\alpha c_\alpha \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(\langle\omega,\eta_i\rangle) = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha(\omega)$. $\square$

**Teorema 2.2.2 (Haos ekspanzija I)** *Proizvoljan element $F \in (L)^{2,m,N}$ ima jedinstvenu reprezentaciju oblika*

$$F(\omega) = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} c_\alpha H_\alpha^{(m)}(\omega), \quad c_\alpha \in \mathbb{R}^N \tag{2.24}$$

*tako da važi*

$$\|F\|^2_{(L)^{2,m,N}} = \sum_{\alpha\in\mathcal{I}} \alpha! c_\alpha^2 \tag{2.25}$$

*gde je $c_\alpha^2 = (c_\alpha|c_\alpha)$ standardni skalarni proizvod u $\mathbb{R}^N$.*

*Dokaz*: Sledi iz prethodne teoreme, primenjujući je po komponentama $(L)^{2,m}$ prostora $(L)^{2,m,N}$ . $\square$

Relaciju (2.24) shvatamo u smislu da red konvergira u $(L)^{2,m,N}$. Iz ortogonalnosti familije $H_\alpha^{(m)}$ sledi da su koeficijenti ekspanzije $c_\alpha$ dati na sledeći način: $i$-ta komponenta koeficijenta $c_\alpha$ u razvoju elementa $F = (F_1,\ldots,F_N)$ je

$$c_\alpha^i = \frac{1}{\alpha!} E_{\mu_m}(F_i H_\alpha^{(m)}), \qquad i = 1,2,\ldots N.$$

Koeficijent $c_0$ koji stoji uz multiindeks $\alpha = (0,0,\ldots)$ jeste upravo matematičko očekivanje elementa $F(\omega)$.

Wiener-Itôva haos ekspanzija se može dati i preko Itôvih integrala. Pretpostavimo jednostavnosti radi da su $N = 1, m = 1, d = 1$, a u višedimenzionalnom slučaju se lako prelazi na odgovarajući tenzorski proizvod.

**Teorema 2.2.3 (Itô,1951)** *Neka je $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ multiindeks dužine $|\alpha| = n$. Tada je*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\hat{\otimes}\alpha} dB^{\otimes n} = \prod_{j=1}^k h_{\alpha_j}(\langle\omega,\xi_j\rangle) = H_\alpha(\omega) \tag{2.26}$$

*gde smo koristili notaciju da je $\xi^{\hat{\otimes}\alpha} = \xi_1^{\hat{\otimes}\alpha_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}\xi_k^{\hat{\otimes}\alpha_k}$.*

Na primer za $n = 1$, prema (2.15) imamo $\int_{\mathbb{R}} \xi_j(t)dB(t,\omega) = \langle \omega, \xi_j \rangle = h_1(\langle \omega, \xi_j \rangle)$, jer je $h_1(x) = x$.

**Teorema 2.2.4 (Haos ekspanzija II)** *Proizvoljan element $F \in (L)^2$ ima jedinstvenu reprezentaciju oblika*

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n dB^{\otimes n}, \quad f_n \in \widehat{L^2}(\mathbb{R}^n) \tag{2.27}$$

*tako da važi*

$$\|F\|^2_{(L)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.28}$$

*Dokaz*: Koristeći haos ekspanziju I, grupišemo multiindekse $\alpha$ po njihovoj dužini:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sum_{\alpha} c_\alpha H_\alpha(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha H_\alpha(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \xi^{\hat{\otimes}\alpha} dB^{\otimes n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \xi^{\hat{\otimes}\alpha} dB^{\otimes n}. \end{aligned}$$

Za

$$f_n = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \xi^{\hat{\otimes}\alpha} \in \widehat{L^2}(\mathbb{R}^n) \tag{2.29}$$

sledi tvrđenje. $\square$

Neka $\mathcal{H}_n$ označanva podprostor od $(L)^2$ razapet Fourier-Hermiteovim polinomima reda $n$. U skladu sa relacijom (2.26) ovaj prostor se naziva *$n$-tostruki Itôv integral* ili *$n$-ti homogeni haos*. Haos ekspanzija I se može reformulisati i kao izomorfizam sa odgovarajućim Fockovim prostorom

$$(L)^2 \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n.$$

Na primer Brownovo kretanje "živi" u prostoru $\mathcal{H}_1$. Prostor $\widehat{L^2}(\mathbb{R}^n)$ se u tom smislu može shvatiti kao *realizacija prostora* $\mathcal{H}_n$. Haos ekspanzija II zapravo je izomorfizam sa Fockovim prostorom

$$(L)^2 \cong \bigoplus_{n=0}^{\infty} \sqrt{n!}\, \widehat{L^2}(\mathbb{R}^n).$$

Ovaj izomorfizam se uspostavlja tzv. $\mathcal{S}$-transformacijom, koja je detaljno opisana npr. u knjigama [12] i [16]. Ako je $F_n \in \mathcal{H}_n \subseteq (L)^2$, tada njoj odgovarajuću simetričnu funkciju $f_n \in \widehat{L^2}(\mathbb{R}^n)$ sa osobinom $\|F_n\|_{(L)^2} = \sqrt{n!}|f_n|_{\widehat{L^2}(\mathbb{R}^n)}$ nazivamo *integralno jezgro*. Integracija u odnosu na $dB_t$ definiše operator koji prenosi integrabilne elemente iz $\mathcal{H}_n$ u prostor $\mathcal{H}_{n+1}$; dakle u tom kontekstu Itôv integral odgovara operatoru kreacije na Fockovom prostoru.

**Primer 2.2.1** *Neka je* $\varepsilon_j = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ *niz sa jedinicom na* $j$*-tom mestu.*

1. *Jednodimenionalni* ($m = 1$) *uglačani beli šum ima ekspanziju*

$$w(\phi, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi|\eta_j) H_{\varepsilon_j}(\omega). \tag{2.30}$$

*Naime važi:*

$$w(\phi, \omega) = \langle \omega, \phi \rangle = \langle \omega, \sum_{i=1}^{\infty} (\phi|\eta_i)\eta_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\phi|\eta_i)\langle \omega, \eta_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} (\phi|\eta_i) H_{\varepsilon_i}(\omega).$$

2. *Jednodimenzionalno* $d$*-parametarsko Brownovo kretanje ima ekspanziju*

$$B(t, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \int_0^t \eta_j(u) du \right) H_{\varepsilon_j}(\omega). \tag{2.31}$$

*Ovo sledi iz činjenice da je*

$$\chi_{[0,t]}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\chi_{[0,t]}|\eta_j)\eta_j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \eta_i(s) ds \, \eta_i(x).$$

*Dakle,*

$$B(t, \omega) = \langle \omega, \chi_{[0,t]} \rangle = \langle \omega, \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \eta_i(s) ds \, \eta_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \eta_i(s) ds \langle \omega, \eta_i \rangle.$$

## 2.3 Prostori stohastičkih test funkcija i uopštenih funkcija

U prethodnom odeljku je bio definisan uglačani beli šum, ali još uvek nemamo pogodan objekat (model) koji bi predstavljao izvod Brownovog kretanja. U ovom delu teze biće definisan tzv. singularni beli šum, i ujedno različiti prostori u kojima "živi" singularni beli šum zajedno sa ostalim "lošim" procesima.

Posmatrajmo jednostavnosti radi, jednodimenzionalan slučaj ($d = 1$). U analogiji sa pretpostavkama mogli bismo formalno pisati:

$$\frac{d}{dt}B(t) = lim_{h\to\infty}\frac{B(t+h)-B(t)}{h} = lim_{h\to\infty}\langle\cdot, \frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}\rangle.$$

Ali ovaj limes ne postoji u prostoru $(L)^2$, slično kao što ni $\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}$ ne konvergira u $L^2(\mathbb{R})$. Ipak, $\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}$ konvergira ka Diracovoj $\delta_t$ distribuciji u prostoru temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Slična je ideja i u ovom slučaju: potrebno je konstruisati neki novi prostor - sa topologijom slabijom od topologije $\|\cdot\|_{(L)^2}$ norme - koji će imati sličan odnos sa $(L)^2$ kao što $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ima sa $L^2(\mathbb{R})$. Takvi prostori će biti prostori Kondratieva, Hide ...itd. Formalno, želimo dati smisla izrazu oblika $\langle\cdot, \delta_t\rangle$, odnosno koristeći razvoj $\delta_t = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t)\xi_n$ u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, želimo dati smisao formalnom razvoju

$$\frac{d}{dt}B(t,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n(t)\langle\omega, \xi_n\rangle.$$

### 2.3.1 Hidini prostori

Neka je $A = -d^2/dx^2 + x^2 + 1$ samoadjungovani diferencijalni operator sa karakterističnim korenima $\lambda_n = 2n$. Prema haos ekspanziji II, svaku funkciju $F \in (L)^2$ možemo prikazati u obliku

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$$

gde je $I_n$ oznaka za $n$-tostruki Itôv integral, a $f_n$ su iz $\widehat{L^2}(\mathbb{R}^n)$. Norma na $(L)^2$ je data sa (2.28). Označimo je, preglednosti radi, sa $\|\cdot\|_0$. Dakle,

$$\|F\|_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n!|f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kako je $(L)^2$ izomorfan sa Fockovim prostorom, možemo posmatrati operator druge kvantizacije $\Gamma(A)$, koji je gusto definisan na $(L)^2$ sa

$$\Gamma(A)F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(A^{\otimes n} f_n). \tag{2.32}$$

Poznato je da je $\Gamma(A)$ takođe samoadjungovan sa karakterističnim vektorima

$$F_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} I_n(\xi^{\hat{\otimes}\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{\alpha!}} H_\alpha(\omega), \quad |\alpha| = n.$$

Familija $F_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{I}$ čini ortonormiranu bazu $(L)^2$ i pri tome je

$$\Gamma(A)F_\alpha = \lambda_1^{\alpha_1}\lambda_2^{\alpha_2}\cdots F_\alpha = \prod_{j=1}^{\infty}(2j)^{\alpha_j} F_\alpha,$$

gde je $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Slično, za proizvoljno $p \geq 0$ je

$$\Gamma(A)^p F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n((A^p)^{\otimes n} f_n) \tag{2.33}$$

samoadjungovan i pri tome važi

$$\Gamma(A)^p F_\alpha = \prod_{j=1}^{\infty}(2j)^{p\alpha_j} F_\alpha. \tag{2.34}$$

Takođe je poznato da je $\Gamma(A)^{-1}$ operator Hilbert-Schmidt tipa sa normom

$$\|\Gamma(A)^{-1}\|_{HS}^2 = \left(\prod_{j=1}^{\infty}(1-\lambda_j^{-2})\right)^{-1}. \tag{2.35}$$

Definišimo, za proizvoljno $p \geq 0$

$$\|F\|_p = \|\Gamma(A)^p F\|_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} n! |(A^p)^{\otimes n} f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.36}$$

i stavimo

$$(S)_p = \{F \in (L)^2 : \|F\|_p < \infty\}. \tag{2.37}$$

Neka je $(S) = \bigcap_p (S)_p$ snabdeven projektivnom topologijom i $(S)^*$ njegov dual. Tada imamo Gel'fandovu trojku $(S) \subseteq (L)^2 \subseteq (S)^*$ sa neprekidnim inkluzijama HS-tipa

$$(S) \subseteq (S)_p \subseteq (L)^2 \subseteq (S)_p^* \subseteq (S)^*$$

Može se pokazati da je norma na $(S)_p^*$ data sa $\|F\|_{-p} = \|\Gamma(A)^{-p}F\|_0$ tj, $(S)_p^*$ je kompletiranje $(L)^2$ sa normom $\|\cdot\|_{-p}$.

**Definicija 2.3.1** *Prostor* $(S)$ *je* prostor Hidinih test funkcija. *Prostor* $(S)^*$ *je* prostor Hidinih distribucija.

### 2.3.2 Kondratievi prostori

Neka je $\rho \in [0,1]$ fiksiran broj. Stavimo

$$\|F\|^2_{\rho,p} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1+\rho} |(A^p)^{\otimes n} f_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{2.38}$$

i neka je

$$(S_p)_\rho = \{F \in (L)^2 : \|F\|_{\rho,p} < \infty\}, \qquad p \geq 0. \tag{2.39}$$

Inkluzije $(S_{p+1})_\rho \subseteq (S_p)_\rho$ su HS-tipa. Stavimo da je

$$(S)_\rho = \bigcap_p (S_p)_\rho, \text{ projektivni limit}$$

i $(S)^*_\rho$ njegov dual. Tada je $(S)_\rho$ nuklearan i imamo Gel'fandovu trojku $(S)_\rho \subseteq (L)^2 \subseteq (S)^*_\rho$. Može se proveriti da je norma na $(S_p)^*_\rho$ ekvivalenta normi

$$\|F\|^2_{-\rho,-p} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{1-\rho} |(A^{-p})^{\otimes n} f_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.40}$$

Prema tome, prostor $(S_p)^*_\rho$ ćemo označavati i sa $(S_{-p})_{-\rho}$, a prostor $(S)^*_\rho$ sa $(S)_{-\rho}$. Jasno, $(S)_{-\rho}$ predstavlja induktivni limit prostora $(S_{-p})_{-\rho}$.

**Definicija 2.3.2** *Prostor* $(S)_\rho$ *je* prostor Kondratievih test funkcija. *Prostor* $(S)^*_\rho$ *je* prostor Kondratievih distribucija.

Specijalno, za $\rho = 0$ Kondratievi prostori se svode na Hidine prostore. Ako je $\rho_1 \leq \rho_2$, tada je $(S)_{\rho_1} \supseteq (S)_{\rho_2}$. Primetimo da je $(S_0)_\rho = (S_{-0})_\rho = (L)^2$ ako i samo ako je $\rho = 0$.

### 2.3.3 Kondratievi prostori u višedimenzionalnom slučaju

Prethodne konstrukcije koriste haos ekspanziju II (preko integrala), a slično se mogu konstruisati i odgovarajući prostori preko Fourier-Hermiteovih polinoma (haos ekspanzija I). Ilustracije radi, uradimo konstrukciju Kondratievih prostora za $d > 1, m > 1, N > 1$.

Uvedimo konvenciju za multiindekse $\alpha, \beta \in \mathcal{J}$ da je $\alpha^\beta = \alpha_1^{\beta_1}\alpha_2^{\beta_2}\cdots$ i specijalnu oznaku koju je uveo Øksendal u [17]:

$$(2\mathbb{N})^\gamma = \prod_{j=1}^{\infty}(2j)^{\gamma_j} \tag{2.41}$$

gde je $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ konačan niz realnih brojeva.

**Teorema 2.3.1 (Zhang, 1992)** $\sum_{\alpha\in\mathcal{J}}(2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty$ *ako i samo ako je* $p > 1$.

Neka je $\rho \in [0,1]$ fiksiran broj.

**Definicija 2.3.3** *Prostor Kondratievih test funkcija, u oznaci* $(S)_\rho^{m,N}$*, se sastoji od elemenata* $f = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha^{(m)} \in (L)^{2,m,N}$*,* $c_\alpha \in \mathbb{R}^N$*, takvih da je*

$$\|f\|_{\rho,p}^2 = \sum_\alpha c_\alpha^2 (\alpha!)^{1+\rho}(2\mathbb{N})^{p\alpha} < \infty, \quad \text{za sve } p \in \mathbb{N}. \tag{2.42}$$

*Prostor Kondratievih distribucija, u oznaci* $(S)_{-\rho}^{m,N}$*, se sastoji od formalnih razvoja oblika* $F = \sum_\alpha b_\alpha H_\alpha^{(m)}$*,* $b_\alpha \in \mathbb{R}^N$ *takvih da je*

$$\|F\|_{-\rho,-p}^2 = \sum_\alpha b_\alpha^2 (\alpha!)^{1-\rho}(2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty, \quad \text{za neko } p \in \mathbb{N}. \tag{2.43}$$

*Dejstvo elementa* $F$ *na test funkciju* $f$ *je dato sa*

$$\langle F, f\rangle = \sum_\alpha (b_\alpha|c_\alpha)\alpha! \tag{2.44}$$

*gde je* $(\cdot|\cdot)$ *skalarni proizvod u* $\mathbb{R}^N$.

U jednodimenzionalnom slučaju su norme date relacijama (2.42) i (2.38) ekvivalentne. Ako u (2.38) zamenimo iz (2.29) da je $f_n = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \xi^{\hat{\otimes}\alpha}$, sledi da je

$$(A^p)^{\otimes n} f_n = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{p\alpha_j} \xi^{\hat{\otimes}\alpha},$$

te je i

$$|(A^p)^{\otimes n} f_n|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \prod_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2p\alpha_j} \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha^2$$

gde su $\lambda_j = 2j$ karakteristični koreni operatora $A$. Odavde sledi da se $|(A^p)^{\otimes n} f_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ ponaša kao $(2\mathbb{N})^{2p\alpha} \sum_\alpha c_\alpha^2$.

Za proizvoljno $\rho \in [0,1]$ je prostor $(S)_\rho$ nuklearan. Jasno, po definiciji norme (2.42) lako se vidi da je $(S)_\rho$ projektivni limit prostora $(S_p)_\rho = \{f = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha : \|f\|_{\rho,p} < \infty\}$. Prostor $(S_p)_\rho$ je Hilbertov sa skalarnim proizvodom

$$(f|g)_{\rho,p} = \sum_\alpha a_\alpha b_\alpha \alpha!^{1+\rho}(2\mathbb{N})^{p\alpha},$$

gde su $f = \sum_\alpha a_\alpha H_\alpha$, $g = \sum_\alpha b_\alpha H_\alpha \in (S_p)_\rho$. Familija funkcija

$$K_{\alpha,p} = \alpha!^{-\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{-\frac{p\alpha}{2}} H_\alpha,$$

$\alpha \in \mathcal{I}$ čini ortonormiranu bazu prostora $(S_p)_\rho$. Za proizvoljno $p > q+1$ je tada po teoremi Zhanga

$$\sum_\alpha \|K_{\alpha,p}\|^2_{\rho,q} = \sum_\alpha (2\mathbb{N})^{-(p-q)\alpha} < \infty,$$

što znači da je inkluzija $(S_p)_\rho \subseteq (S_q)_\rho$ Hilbert-Schmidt tipa.

Slobodan član $c_0$ u ekspanziji, odnosno koeficijent koji stoji uz multiindeks $\alpha = (0,0,\ldots)$ nazivamo *uopštenim matematičkim očekivanjem* elementa $F \in (S)_{-1}$.

**Definicija 2.3.4** *1. Jednodimenzionalni d-parametarski* singularni beli šum *je definisan formalnim razvojem*

$$W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k(t) H_{\varepsilon_k}(\omega) \tag{2.45}$$

*gde je* $t \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon_k = (0,\ldots,1,0\ldots)$.

*2. m-dimenzionalni d-parametarski singularni beli šum je definisan sa*

$$W(t,\omega) = (W_1(t,\omega),\ldots,W_m(t,\omega))$$

*gde je i-ta komponenta data razvojem*

$$W_i(t,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(t) H_{\varepsilon_{i+(j-1)m}}(\omega). \tag{2.46}$$

Specijalno, za $d = 1$ singularni beli šum je dat haos ekspanzijom preko Itôvih integrala kao

$$\begin{aligned} W(t,\omega) &= \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) h_1(\langle \omega, \xi_k \rangle) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \langle \omega, \xi_k \rangle \\ &= \langle \omega, \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \xi_k \rangle = I_1(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) \xi_k) = I_1(\delta_t). \end{aligned}$$

**Teorema 2.3.2** *Singularni beli šum pripada Hidinom prostoru distribucija.*

*Dokaz* (za $m = 1$): Potrebno je dokazati da je za svako fiksirano $t \in \mathbb{R}^d$, $W(t,\omega) \in (S)_0^*$, tj. da je za neko $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \eta_k^2(t)(2k)^{-p} < \infty.$$

Poznato je da ermitske funkcije imaju osobinu $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\xi_n(x)| = \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{12}})$, pa prelaskom na tenzorski proizvod sledi da je i $|\eta_k^2(t)| \leq C$ za neku konstantu $C$ uniformno po $t \in \mathbb{R}^d$ i $k = 1, 2, \ldots$. Prema teoremi Zhanga, sledi da red konvergira za svako $p > 1$. □

**Primer 2.3.1** *Neka je $\rho \in (0,1)$ dato. Posmatrajmo uopštenu stohastičku funkciju*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{\frac{\rho-2}{4}} H_{\varepsilon_n}. \tag{2.47}$$

*Tada je*

$$\|X\|_{-\rho,-p}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{1-\rho} (n!)^{\frac{\rho-2}{2}} (2\mathbb{N})^{-p\varepsilon_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-\frac{\rho}{2}} (2n)^{-p}.$$

*Ovaj red konvergira po D'Alambertovom kriterijumu za svako $p \geq 0$. Dakle $X \in (S)_{-\rho}$. S druge strane je*

$$\|X\|_{0,-p}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)(n!)^{\frac{\rho-2}{2}} (2\mathbb{N})^{-p\varepsilon_n} = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{\frac{\rho}{2}} (2n)^{-p}.$$

*Ovaj red je divergentan za svako $p \geq 0$, što znači da $X \notin (S)^*$. Ovaj primer pokazuje da je prostor Kondratieva širi od prostora Hidinih distribucija.*

### 2.3.4 Prostori $\exp(S)_\rho$ i $\exp(S)_{-\rho}$

Posmarajmo umesto operatora $\Gamma^p(A)$ iz konstrukcije Hidinih i Kondratievih prostora, operator $e^{p\Gamma(A)}$ definisan na sledeći način:

$$e^{p\Gamma(A)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k \Gamma^k(A)}{k!}. \tag{2.48}$$

Lako se može proveriti da je za proizvoljan multiindeks $\alpha \in \mathcal{I}$

$$e^{p\Gamma(A)} \xi^{\hat{\otimes}\alpha} = e^{p(2\mathbb{N})^\alpha} \xi^{\hat{\otimes}\alpha}.$$

Neka je $F \in (L)^2$ sa ekspanzijom $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$, gde su $f_n$ iz $\widehat{L^2}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$e^{p\Gamma(A)} F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} (A^k)^{\otimes n} f_n \right) \tag{2.49}$$

i zato je $\|e^{p\Gamma(A)} F\|^2_{(L)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} (A^k)^{\otimes n} f_n \right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

Neka je $\rho \in [0,1]$ proizvoljno, fiksirano. Definišimo normu $\|\cdot\|_{\rho,p,exp}$ sa

$$\|F\|_{\rho,p,exp} = \sum_{n=0}^{\infty} n!^{1+\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} \left|(A^k)^{\otimes n} f_n\right|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \tag{2.50}$$

U višedimenzionalnom slučaju $d > 1, m > 1, N > 1$, ako je $F \in (L)^{2,m,N}$ dat ekspanzijom $F = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha H_\alpha^{(m)}$, $c_\alpha \in \mathbb{R}^N$, tada je (2.50) ekvivalentno sa

$$\|F\|_{\rho,p,exp} = \sum_\alpha \alpha!^{1+\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^k}{k!} c_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{k\alpha} = \sum_\alpha \alpha!^{1+\rho} c_\alpha^2 e^{p(2\mathbb{N})^\alpha}. \tag{2.51}$$

**Definicija 2.3.5** *Prostor test funkcija* $exp(S)_\rho^{m,N}$, *se sastoji od elemenata* $f = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha^{(m)} \in (L)^{2,m,N}$, $c_\alpha \in \mathbb{R}^N$, *takvih da je*

$$\|f\|^2_{\rho,p,exp} = \sum_\alpha c_\alpha^2 (\alpha!)^{1+\rho} e^{p(2\mathbb{N})^\alpha} < \infty, \quad \text{za sve } p \in \mathbb{N}. \tag{2.52}$$

*Prostor stohastičkih distribucija* $exp(S)_{-\rho}^{m,N}$, *se sastoji od formalnih razvoja oblika* $F = \sum_\alpha b_\alpha H_\alpha^{(m)}$, $b_\alpha \in \mathbb{R}^N$ *takvih da je*

$$\|F\|^2_{-\rho,-p,exp} = \sum_\alpha b_\alpha^2 (\alpha!)^{1-\rho} e^{-p(2\mathbb{N})^\alpha} < \infty, \quad \text{za neko } p \in \mathbb{N}. \tag{2.53}$$

**Teorema 2.3.3** $\sum_{\alpha\in\mathcal{I}} e^{-p(2\mathbb{N})^\alpha} < \infty$ *ako i samo ako je* $p > 0$.

Za proizvoljno $\rho \in [0,1]$ je prostor $exp(S)_\rho$ nuklearan. Iz definicije lako se vidi da je $exp(S)_\rho$ projektivni limit prostora $exp(S_p)_\rho = \{f = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha : \|f\|_{\rho,p,exp} < \infty\}$. Prostor $exp(S_p)_\rho$ je Hilbertov sa skalarnim proizvodom

$$(f|g)_{\rho,p,exp} = \sum_\alpha a_\alpha b_\alpha \alpha!^{1+\rho} e^{p(2\mathbb{N})^\alpha},$$

gde su $f = \sum_\alpha a_\alpha H_\alpha$, $g = \sum_\alpha b_\alpha H_\alpha \in exp(S_p)_\rho$. Familija funkcija

$$K_{\alpha,p} = \alpha!^{-\frac{1+\rho}{2}} e^{\frac{p}{2}(2\mathbb{N})^\alpha} H_\alpha,$$

$\alpha \in \mathcal{I}$ čini ortonormiranu bazu prostora $exp(S_p)_\rho$. Za proizvoljno $p > q$ je tada po prethodnoj teoremi

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \|K_{\alpha,p}\|^2_{\rho,q,\mathrm{exp}} &= \sum_\alpha \alpha!^{-(1+\rho)} e^{-p(2\mathbb{N})^\alpha} \|H_\alpha\|^2_{\rho,p,\mathrm{exp}} = \sum_\alpha \alpha!^{-(1+\rho)} e^{-p(2\mathbb{N})^\alpha} \alpha!^{1+\rho} e^{q(2\mathbb{N})^\alpha} \\ &= \sum_\alpha e^{-(p-q)(2\mathbb{N})^\alpha} < \infty,\end{aligned} \tag{2.54}$$

što znači da je inkluzija $exp(S_p)_\rho \subseteq exp(S_q)_\rho$ Hilbert-Schmidt tipa.

Jasno, najširi od prostora distribucija $exp(S)_{-\rho}$ je $exp(S)_{-1}$.

Za proizvoljno $\rho \in [0,1]$, $p > 0$ i $F \in (L)^2$ je $\|F\|_{\rho,p,exp} > \|F\|_{\rho,p}$, odakle sledi odnos sa Kondratievim prostorima:

$$exp(S)_\rho \subseteq (S)_\rho \subseteq (L)^2 \subseteq (S)_{-\rho} \subseteq exp(S)_{-\rho}.$$

**Primer 2.3.2** *Posmatrajmo uopštenu stohastičku funkciju*

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} e^n H_{\varepsilon_n}. \tag{2.55}$$

*Tada je*

$$\|X\|^2_{-1,-p,exp} = \sum_{n=1}^{\infty} |e^n|^2 e^{-p(2\mathbb{N})^{\varepsilon_n}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n} e^{-2pn} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{2(p-1)}}\right)^n.$$

*Ovaj red konvergira za svako* $p \geq 1$. *Dakle* $X \in exp(S)_{-1}$. *S druge strane je*

$$\|X\|^2_{-1,-p} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{2n}(2n)^{-p}.$$

*Ovaj red je divergentan za svako* $p \geq 0$, *što znači da* $X \notin (S)_{-1}$. *Ovaj primer pokazuje da je prostor* $exp(S)_{-1}$ *širi od prostora Kondratievih distribucija.*

**Primer 2.3.3**

*Neka je u definiciji 2.1.1 prostor $E$ jednak prostoru realnih brojeva $\mathbb{R}$, i neka su sve seminorme $|\cdot|_n$ jednake funkciji apsolutne vrednosti. Tada je $\mathbb{R}$ osnovni nuklearan prostor sa uobičajenom topologijom, on je Hilbertov - skalarni proizvod je dat običnim množenjem realnih brojeva, i $\mathbb{R}'$ možemo identifikovati sa $\mathbb{R}$.*

*Posmatrajmo dobro poznatu karakterističnu funkciju normalne raspodele $C(t) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$. Po teoremi Bochner-Minlosa postoji jedinstvena mera $\mu$ takva da je $\int_{\mathbb{R}} e^{ixt} d\mu(x) = e^{-\frac{1}{2}t^2}$, to jest mera $\mu$ je upravo klasična gausovska mera data sa $d\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$. Prostor belog šuma u ovom (trivijalnom) primeru jeste prostor realnih brojeva, snabdeven Borelovom $\sigma$-algebrom i gausovskom merom: $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$.*

*Prostor $(L)^2$ se u ovom primeru svodi na prostor $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Potpun ortogonalan sistem u njemu čini familija $h_n$,$n \in \mathbb{N}$, odnosno Fourier-Hermiteovi polinomi su u ovom slučaju upravo klasični Hermiteovi polinomi. Haos ekspanzija utvrđuje izomorfizam prostora $(L)^2$ sa prostorom kvadratno sumabilnih nizova $l^2$ sa težinom $n!$, koji u ovom slučaju ima ulogu Fockovog prostora. Konkretno, svako $f \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ je dato ekspanzijom $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n h_n(x)$, $a_n = (f|h_n) = \int_{\mathbb{R}} f(x) h_n(x) d\mu(x)$, i važi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 n! < \infty$. Možemo posmatrati i potpun ortonormiran sistem $\widetilde{h_n} = \frac{1}{\sqrt{n!}} h_n$.*

*Za konstrukciju prostora Hide posmatrajmo samoadjungovani operator $A$ (jedini koji postoji na $\mathbb{R}$): množenje sa nekom datom konstantom $c > 0$. Dakle $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A(x) = c \cdot x$. Karekteristični koren ovog operatora je $c$, a karakteristični vektor je $e = 1$. Inverzni operator je $A^{-1}(x) = \frac{x}{c}$, on je ograničen i ima HS-normu $\|A^{-1}\| = \frac{1}{c}$. Operator druge kvantizacije je dat sa $\Gamma(A)f = \sum_{n=0}^{\infty} c^n a_n \widetilde{h_n}$, gde su korišćene oznake iz haos ekspanzije. Specijalno, $\Gamma(A)\widetilde{h_m} = c^m \widetilde{h_m}$, pa je i $\Gamma(A)$ samoadjungovan sa karakterističnim korenima $\{c^m,\ m \in \mathbb{N}\}$. Hidine norme su date sa $\|f\|_p^2 = \|\Gamma(A)^p f\|_{(L)^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c^{2np} a_n^2$. Sada je jasno da se prostor Hidinih distribucija u ovom slučaju svodi na prostor $exp\,\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, odnosno Gel'fandova trojka $(S) \subseteq (L)^2 \subseteq (S)^*$ jeste $exp\,\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R}, d\mu) \subseteq exp\,\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.*

## 2.4 Tipovi uopštenih stohastičkih procesa

Uopšteni stohastički procesi se mogu definisati na više načina u zavisnosti od potreba u primeni. Navodimo različite vrste definicije uopštenih stohastičkih procesa, koje ćemo, da bi se ipak razlikovali, nazvati procesima određenog tipa.

**Definicija 2.4.1 (Øksendal)** *Uopšten stohastički $(S)_{-1}$-proces je merljivo* *preslikavanje*

$$U : \mathbb{R}^d \to (S)_{-1}.$$

Na primer singularni beli šum definisan sa $t \mapsto W(t)$ je proces u smislu ove definicije. Uopšteni procesi su na ovaj način "tačkasto " definisani po vrememskom parametru $t$, a reč *uopšten* znači da preslikavanje $U$ prima vrednosti u nekom prostoru uopštenih stohastičkih funkcija; na primer u Kondratievom prostoru $(S)_{-1}$. Dakle, za fiksirano $t \in \mathbb{R}^d$ imamo uopštenu slučajnu promenljivu $U(\omega) \in (S)_{-1}$ koja nema tačkastu vrednost za svako $\omega$, već samo srednju vrednost $\langle U(\omega), f(\omega)\rangle$ u odnosu na "glatku" slučajnu promenljivu $f(\omega) \in (S)_1$.

Naravno, na isti način mogu se posmatrati i prostori Hidinih distribucija, prostori $exp(S)_{-1}$ i dr. Uopštene slučajne procese u smislu merljivog preslikavanja iz $\mathbb{R}^d$ u neki prostor uopštenih stohastičkih funkcija nazivaćemo procesima *tipa (O)*.

**Definicija 2.4.2 (Øksendal)** *$L^p$-funkcionalni proces je preslikavanje*

$$X : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{R}^d \to (L)^p.$$

Na primer uglačani beli šum definisan sa $(\phi, t) \mapsto W_\phi(t)$ je primer funkcionalnog procesa.

**Definicija 2.4.3 (Walsh)** *Uopšten stohastički proces je merljivo preslikavanje*

$$X : \Omega \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d).$$

Za svako $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ preslikavanje $\Omega \to \mathbb{R}^d$ dato sa $\omega \mapsto \langle X(\omega), \varphi\rangle$ je slučajna promenljiva. Motivacija za ovakvu definiciju uopštenih procesa se nalazi u tome da su trajektorije Brownovog kretanja nediferencijabilne funkcije, te se ti izvodi nalaze u prostoru uopštenih funkcija $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Dakle za svako fiksirano $\omega$ imamo jednu uopštenu (determinističku) funkciju kao trajektoriju, zato proces nije indeksiran vremenskim parametrom $t \in \mathbb{R}^d$, već glatkim funkcijama $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Procesima ovog tipa se dalje nećemo baviti; umesto toga uzeli smo za osnovni prostor verovatnoće da je $\Omega = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

**Definicija 2.4.4 (Inaba)** *Uopšten stohastički proces je linearno, neprekidno preslikavanje*

$$X : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to L^2(\Omega).$$

Dakle, slično kao i u prethodnoj definiciji svakom $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se dodeljuje jedna slučajna promenljiva.

Motivisani ovom definicijom, elemente prostora $\mathcal{L}(D, L^2(\Omega))$ odnosno linearna neprekidna preslikavanja iz nekog test-prostora $D$ u prostor slučajnih promenljivih $L^2(\Omega)$, nazivaćemo procesima *tipa (I).*

Ovu definiciju proširujemo i na elemente prostora uopštenih slučajnih promenljivih, te npr. i elemente prostora $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), (S)_{-1})$ nazivamo procesima tipa (I).

**Definicija 2.4.5 (Ullrich)** *Neka je $V$ vektorsko topološki prostor i $V'$ njegov dual. Uopšten slučajan proces nad $V$ je preslikavanje*

$$X : \Omega \times V \to \mathbb{C}$$

*tako da važi:*

1. *za svako fiksirano $\omega \in \Omega$ je $X(\omega, \cdot) \in V'$,*
2. *za svako fiksirano $\varphi \in V$ je $X(\cdot, \varphi)$ kompleksnovrednosna slučajna promenljiva.*

Specijalno, za $V = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ to su procesi Gel'fand-Vilenkin tipa. Procese iz ove definicije nazivaćemo procesima *tipa (U).*

Primetimo, da ako je $X$ proces tipa (I) tj. $X \in \mathcal{L}(V, L^2(\Omega))$, tada nemamo neprekidnost za fiksirano $\omega \in \Omega$. Ako je proces $X$ tipa (I) i ako za svako fiksirano $\omega \in \Omega$ važi $X(\omega, \cdot) \in V'$, tada je proces $X$ ujedno i tipa (U). Primeri procesa tipa (I) koji nisu tipa (U) i primeri procesa tipa (U) koji nisu tipa (I), mogu se naći u [23].

Klasa procesa tipa (O) se na prirodan način može potopiti u klasu procesa tipa (I). Neka je sa $t \mapsto U(t, \cdot) \in (S)_{-1}$ dat proces tipa (O) koji je lokalno integrabilan u Pettisovom smislu tj. $U \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d, (S)_{-1})$. Tada njemu odgovara uopštena funkcija $\tilde{U}$ odnosno linearno neprekidno preslikavanje $\tilde{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), (S)_{-1})$ dato sa

$$[\tilde{U}, \varphi](\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} U(t, \omega)\varphi(t)dt, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{2.56}$$

gde je $[\cdot, \cdot]$ oznaka za dualno sparivanje u $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), (S)_{-1})$; dakle $[\tilde{U}, \varphi](\omega) \in (S)_{-1}$.

U narednom delu teze ćemo se ograničiti na proučavanje procesa tipa (O) i tipa (I). Poznate rezultate vezane za procese tipa (O) - njihovu ekspanziju, Wickov proizvod, itd. prenećemo po (2.56) i na procese tipa (I). Teoreme o ekspanziji procesa tipa (I) čine esencijalni deo ove teze i dobijene su u saradnji sa dr Stevanom Pilipovićem.

### 2.4.1 Ekspanzija procesa tipa (O)

Kako su procesi tipa (O) definisani tako da svakom fiksiranom $t \in \mathbb{R}^d$ dodeljuju element prostora uopštenih stohastičkih funkcija, teorema o njihovoj ekspanziji sledi direktno iz Wiener-Itôve haos ekspanzije i definicije odgovarajućeg prostora uopštenih stohastičkih funkcija (primera radi navodimo teoremu za prostore Kondratieva).

**Teorema 2.4.1** *Neka je $X : \mathbb{R}^d \to (S)_{-\rho}^{m,N}$ proces tipa (O). Tada je on dat formalnim razvojem*

$$X(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha(t) H_\alpha^{(m)} \tag{2.57}$$

*gde su $c_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^N$ merljive funkcije, ako i samo ako postoji $p \in \mathbb{N}_0$ tako da je za svako fiksirano $t \in \mathbb{R}^d$*

$$\|X(t)\|_{-\rho,-p} = \sum_{\alpha} \alpha!^{1-\rho} c_\alpha(t)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty. \tag{2.58}$$

U jednodimenzionalnom slučaju $N = m = d = 1$ možemo dati i karakterizaciju preko Itôvih integrala: tada je proces dat razvojem

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n), \tag{2.59}$$

gde su $f_n$ merljive funkcije $n+1$ promenljivih, simetrične po prvih $n$ promenljivih tj.

$$f_n(\cdot, t) \in \widehat{L^2}(\mathbb{R}^n)$$

i pri tome važi da je za neko $p \geq 0$ i svako $t \in \mathbb{R}^d$ zadovoljeno $\|X(t)\|_{-\rho,-p} < \infty$.

U slučaju kada je u definiciji 1.1.31 $M$ prostor realnih brojeva snabdeven Lebesgueovom merom, a $V$ prostor Hidinih distribucija $(S)^*$ , Pettisov integral nazivamo $(S)^*$ integralom. Iako Hidin prostor $(S)^*$ nije Banachov, njegova prebrojiva struktura dopušta konstrukciju integrala Pettisovog tipa.

**Definicija 2.4.6** *Preslikavanje $Z : \mathbb{R}^d \to (S)^*$ je $(S)^*$-integrabilno, ako je $\langle Z(t), \phi \rangle \in L^1(\mathbb{R}^d, dt)$ za svako $\phi \in (S)$. Tada je $(S)^*$-integral preslikavanja $Z(t)$, u oznaci*

$$(S)^* \int_{\mathbb{R}^d} Z(t)dt$$

*jedinstveni element prostora $(S)^*$ za koji važi:*

$$\langle (S)^* \int_{\mathbb{R}^d} Z(t)dt, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle Z(t), \phi \rangle dt, \qquad \phi \in (S). \tag{2.60}$$

Pettisov integral u prostoru Kondratieva $(S)_1$ i u prostoru $exp(S)_1$ ćemo takođe označavati sa $(S)^* \int_{\mathbb{R}}$, a njegova definicija je analogna sa definicijom Pettisovog integrala u prostoru Hidinih distribucija.

**Teorema 2.4.2** *Neka je $Z : \mathbb{R}^d \to (S)_{-\rho}^{m,N}$ proces tipa (O) dat formalnim razvojem*

$$Z(t) = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}} c_\alpha(t) H_\alpha^{(m)} \tag{2.61}$$

*gde su $c_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^N$ merljive funkcije iz $L^1(\mathbb{R}^d)$ i neka postoji $p \in \mathbb{N}_0$ tako da je*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|Z(t)\|_{-\rho,-p} dt = \sum_\alpha \alpha!^{1-\rho} |c_\alpha(t)|^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} (2\mathbb{N})^{-p\alpha} < \infty. \tag{2.62}$$

*Tada je $Z \in L^1(\mathbb{R}^d, (S)_{-\rho}^{m,N})$, odnosno $Z$ je Pettis-integrabilan proces, i pri tome važi*

$$(S)^* \int_{\mathbb{R}^d} Z(t) dt = \sum_\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^d} c_\alpha(t) dt \right) H_\alpha^{(m)}. \tag{2.63}$$

*Dokaz:* Neka je $\phi = \sum_\alpha a_\alpha H_\alpha^{(m)} \in (S)_\rho^{m,N}$ proizvoljno. Tada je

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\langle Z(t), \phi \rangle| dt &= \int_{\mathbb{R}^d} |\sum_\alpha \alpha! a_\alpha c_\alpha(t)| dt \leq \sum_\alpha \alpha! |a_\alpha| |c_\alpha|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \sqrt{\sum_\alpha \alpha!^{1+\rho} a_\alpha^2 (2\mathbb{N})^{p\alpha}} \sqrt{\sum_\alpha \alpha!^{1-\rho} |c_\alpha|^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} (2\mathbb{N})^{-p\alpha}} < \infty \end{aligned}$$

odakle sledi da je $Z(t)$ zaista $(S)^*$-integrabilan. Takođe važi

$$\begin{aligned} \langle (S)^* \int_{\mathbb{R}^d} Z(t) dt, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \langle Z(t) dt, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_\alpha \alpha! a_\alpha c_\alpha(t) dt \\ &= \sum_\alpha \alpha! a_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} c_\alpha(t) dt \\ &= \langle \sum_\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^d} c_\alpha(t) dt \right) H_\alpha^{(m)}, \phi \rangle. \end{aligned}$$

odakle sledi tvrđenje. $\square$

Teoreme o ekspanziji procesa tipa (I) predstavljaće uopštenje ekspanzije Pettis-integrabilnih procesa tipa (O) u smislu da će koeficijenti razvoja $c_\alpha(t)$ u (2.61) biti uopštene funkcije prostora $\mathcal{A}'$.

### 2.4.2 Ekspanzija procesa tipa (I)

U ovom delu radimo sa jednodimenzionalnim slučajem $d = 1$. Pretpostavimo jednostavnosti radi da je skup indeksa $\mathcal{I}$ leksikografski uređen u rastućem poretku. To se može uraditi npr. na sledeći način: neka je za proizvoljan multiindeks $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ njegova dužina $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots$, indeks $Index(\alpha) = max\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq 0\}$ i $n(\alpha)$ broj nenula elemenata u multiindeksu tj. $n(\alpha) = Card\{k \in \mathbb{N} : \alpha_k \neq 0\}$. Tada uvodimo poredak da je $\alpha < \beta$ ako i samo ako je $|\alpha| < |\beta|$ i $Index(\alpha) < Index(\beta)$ i $n(\alpha) < n(\beta)$. Označimo sa $\mathfrak{J}$ skup $\mathcal{I}$ sa tim uređenjem, a sa $\alpha^j$ označimo $j$-ti po redu multiindeks iz skupa $\mathfrak{J}$, $j \in \mathbb{N}$ i uvedimo konvenciju da umesto $\sum_{\alpha^i \in \mathfrak{J}}$ pišemo $\sum_{i=1}^{\infty}$.

Posmatrajmo uopštene stohastičke procese tipa (I) kao elemente prostora

$$\mathcal{A}^* = \mathfrak{L}(\mathcal{A}, (S)_{-1}) \tag{2.64}$$

gde je $\mathcal{A}$ test-prostor Zemanianovih funkcija. Elemente prostora

$$\mathcal{A}_k^* = \mathfrak{L}(\mathcal{A}_k, (S)_{-1}) \tag{2.65}$$

nazivamo procesima tipa (I) $\mathcal{R}$-reda $k$. Važi da $L \in \mathcal{A}_k^* = \mathfrak{L}(\mathcal{A}_k, (S)_{-1})$ akko postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da $L \in \mathfrak{L}(\mathcal{A}_k, (S_{-k_0})_{-1})$ koji je Banachov sa dualnom normom

$$\|L\|_{-k}^* = sup\left\{\|L(g)\|_{-1,-k_0} : g \in \mathcal{A}_k, \|g\|_k \leq 1\right\}.$$

Tada je $\mathcal{A}_k' \subseteq \mathcal{A}_k^*$, i $\|f\|_{-k}^* = \|f\|_{-k}$ ako je $f \in \mathcal{A}_{-k}$, i imamo lanac neprekidnih inkluzija

$$(L^2(I))^* = \mathcal{A}_0^* \subseteq \mathcal{A}_1^* \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{A}_k^* \subseteq \mathcal{A}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} \mathcal{A}_k^*.$$

Podsetimo se da funkcije $\psi_k$ koje su karakteristični vektori operatora $\mathcal{R}$ čine ortonormiranu bazu prostora $L^2(I)$, a funkcije $(2\mathbb{N})^{\frac{k\alpha}{2}} H_\alpha$ čine potpun ortonormiran sistem u Hilbertovom prostoru $(S_{-k})_{-1}$.

**Definicija 2.4.7** *Neka je $Y^\infty$ skup procesa tipa (I) koji su oblika*

$$\Phi(\omega, t) = \sum_{j=1}^{m} a_{\alpha^j}(\omega)\psi_j(t), \quad \omega \in \Omega, \quad t \in I, \quad a_{\alpha^j} \in (S)_{-1}, \quad j \leq m. \tag{2.66}$$

Dakle, svako $a_{\alpha^j}$ ima svoje razlaganje $a_{\alpha^j}(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{j,k} H_{\alpha^k}(\omega), \quad c_{j,k} \in \mathbb{R}$. Jasno, za skup

$$S = \{f \in L^2(I) : f = \sum_{j=1}^{m} b_j \psi_j(t), \quad b_j \in \mathbb{R}\} \tag{2.67}$$

važi $S \subseteq Y^\infty$. Takođe važi da je $Y^\infty$ podprostor od $\mathcal{A}_k^*$.

Označimo sa $Y^{-k}$ kompletiranje skupa $Y^\infty$ u $\mathcal{A}_k^*$ u odnosu na normu $\|\cdot\|_{-k}^*, k \in \mathbb{N}$. Tada se slično kao u [23] može pokazati da je $\mathcal{A}_{-k}$ pravi podprostor od $Y^{-k}$, kao i da je $Y^{-k}$ pravi podprostor od $\mathcal{A}_k^*$.

Označimo u narednom delu sa $[\cdot,\cdot]$ dejstvo elementa iz $\mathcal{L}(\mathcal{A},(S)_{-1})$ na element iz $\mathcal{A}$, a sa $\langle\cdot,\cdot\rangle$ klasično dualno sparivanje elemenata iz $\mathcal{A}'$ i $\mathcal{A}$.

**Definicija 2.4.8** *Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathcal{A}'$ i neka je $\{\theta_{\alpha^j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ niz u $(S)_{-1}$. Tada je*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes \theta_{\alpha^j}$$

*proces tipa (I) u $\mathcal{A}^*$ definisan sa*

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes \theta_{\alpha^j}(\omega), \varphi\right] = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \langle f_j, \varphi\rangle \theta_{\alpha^j}(\omega), \qquad \varphi \in \mathcal{A} \tag{2.68}$$

*pod uslovom da limes na desnoj strani postoji u $(S)_{-1}$ za svako $\varphi \in \mathcal{A}$.*

Primetimo da desna strana od (2.68) konvergira u $(S)_{-1}$ ako i samo ako konvergira po $\|\cdot\|_{-1,-k_0}$ za neko $k_0 \in \mathbb{N}_0$.

Naredne teoreme predstavljaju ekspanziju procesa tipa (I).

**Teorema 2.4.3** *Neka je $\Phi \in \mathcal{A}^*$. Tada $\Phi \in \mathcal{A}_k^*$, $k \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako se može predstaviti u obliku*

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes H_{\alpha^j}, \qquad f_j \in \mathcal{A}_{-k} \text{ za sve } j \in \mathbb{N} \tag{2.69}$$

*i ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da je za sve $\varphi \in \mathcal{A}_k$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, \varphi\rangle|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j} < \infty. \tag{2.70}$$

*Dokaz:* Fiksirajmo $k \in \mathbb{N}_0$. Neka je $\Phi \in \mathcal{A}_k^* = \mathcal{L}(\mathcal{A}_k,(S)_{-1})$. To znači da postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_k,(S_{-k_0})_{-1})$. Preslikavanje $f_j : \mathcal{A}_k \to \mathbb{R}$ dato sa $\varphi \mapsto ([\Phi,\varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0}$ je linearno i neprekidno za svako fiksirano $H_{\alpha^j}$, to jest, $f_j \in \mathcal{A}_k' = \mathcal{A}_{-k}$ za sve $j \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$\langle f_j, \varphi\rangle = ([\Phi,\varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0}, \quad \varphi \in \mathcal{A}_k, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Element $[\Phi,\varphi] \in (S_{-k_0})_{-1}$ ima razlaganje

$$[\Phi,\varphi] = \sum_{j=1}^{\infty} ([\Phi,\varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0} H_{\alpha^j}. \tag{2.71}$$

Red na desnoj strani relacije (2.71) konvergira ako i samo ako je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left| ([\Phi,\varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0} \right|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j} = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j,\varphi\rangle|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j} < \infty \tag{2.72}$$

što pokazuje (2.70). Dalje, (2.71) je po definiciji 2.4.8 jednako sa

$$[\Phi,\varphi] = \sum_{j=1}^{\infty}\langle f_j,\varphi\rangle H_{\alpha^j} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} f_j\otimes H_{\alpha^j},\varphi\right]$$

odakle sledi traženo razlaganje (2.69).

Obratno, neka je $\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes H_{\alpha^j}$, gde su $f_j \in \mathcal{A}_{-k}$ i neka je uslov (2.70) zadovoljen za svako $\varphi \in \mathcal{A}_k$. Kako je $\Phi \in \mathcal{A}^*$, sledi da je $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_k,(S_{-k_0})_{-1})$ za neko $k_0 \in \mathbb{N}_0$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je ovo $k_0$ isto kao ono iz uslova (2.70). Sledi da $[\Phi,\varphi] \in (S_{-k_0})_{-1}$ ima svoj razvoj

$$\begin{aligned}[\Phi,\varphi] &= \sum_{j=1}^{\infty}([\Phi,\varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0}H_{\alpha^j} = \sum_{j=1}^{\infty}([\sum_{k=1}^{\infty} f_k\otimes H_{\alpha^k},\varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0}H_{\alpha^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty}\langle f_k,\varphi\rangle H_{\alpha^k}|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0}H_{\alpha^j} = \sum_{j=1}^{\infty}\langle f_j,\varphi\rangle(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j}H_{\alpha^j}, \quad \varphi\in\mathcal{A}\end{aligned} \tag{2.73}$$

gde smo u poslednjem koraku koristili ortogonalnost baze $H_{\alpha^j}$. Niz parcijalnih suma

$$\Phi_m = \sum_{j=1}^{m} f_j \otimes H_{\alpha^j}$$

je Cauchyjev u $\mathcal{L}(\mathcal{A}_k,(S_{-k_0})_{-1})$ jer je za proizvoljne $m > n$

$$\|[\Phi_m,\varphi]-[\Phi_n,\varphi]\|^2_{-1,-k_0} = \sum_{j=n+1}^{m} |\langle f_j,\varphi\rangle|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j} < \varepsilon$$

ako biramo $n,m$ dovoljno veliko. Odavde sledi da je niz $\Phi_m$ Cauchyjev i u $\mathcal{A}_k^*$. Njegova granična vrednost $\Phi_0$ je takođe u $\mathcal{A}_k^*$, pa ima svoj razvoj

$$\Phi_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{f}_j \otimes H_{\alpha^j}.$$

Ostaje jedino da se dokaže da je $\Phi_0 = \Phi$. Kako je

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{f}_j, \varphi\rangle - \langle f_j, \varphi\rangle = ([\Phi_0, \varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0} - ([\Phi, \varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0}\\
&= ([\lim_{m\to\infty} \Phi_m, \varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0} - ([\Phi, \varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0} = \lim_{m\to\infty}([\Phi_m - \Phi, \varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0}\\
&= \lim_{m\to\infty}([\sum_{j=m+1}^{\infty} f_j \otimes H_{\alpha^j}, \varphi]|H_{\alpha^j})_{-1,-k_0} = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=m+1}^{\infty} |\langle f_j, \varphi\rangle|^2 \, (2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j} = 0
\end{aligned} \tag{2.74}$$

za svako $\varphi \in \mathcal{A}_k$, sledi da je $\tilde{f}_j = f_j$ za sve $j \in \mathbb{N}$. $\square$

**Lema 2.4.1** *Neka je $\Phi \in \mathcal{A}_k^*$ proces tipa (I) dat ekspanzijom $\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \otimes H_{\alpha^i}$, $f_i \in \mathcal{A}_{-k}$, $i \in \mathbb{N}$. Tada je uslov da postoji $p \geq 0$ za koje je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i, \varphi\rangle|^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha^i} < \infty \tag{2.75}$$

*za sve $\varphi \in \mathcal{A}_k$ ekvivalentan uslovu da postoji neko $q \geq 0$ tako da je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|_{-k}^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha^i} < \infty. \tag{2.76}$$

*Dokaz:* Na osnovu Cauchy-Schwartzove nejednakosti, jasno je da iz uslova (2.76) sledi uslov (2.75). Obratno, neka važi (2.75), i posmatrajmo funkciju $p : \mathcal{A}_k \to \mathbb{R}$ definisanu sa

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i, \varphi\rangle|^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha^i}. \tag{2.77}$$

Prema uslovu (2.75) je preslikavanje $p$ dobro definisano. Takođe važi da je $p$ konveksna, poluneprekidna s donje strane, pa sledi da je i ograničena u nekoj okolini nule u prostoru $\mathcal{A}_k$. Dakle, postoji $M > 0$ tako da je

$$p(\varphi) \leq M\|\varphi\|_k^2, \tag{2.78}$$

odnosno za svako $j \in \mathbb{N}$ važi

$$|\langle f_j, \varphi\rangle|^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha^j} \leq M\|\varphi\|_k^2. \tag{2.79}$$

Odavde sledi da je za svako $j \in \mathbb{N}$,

$$\|f_j\|_{-k}^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha^j} \leq M. \tag{2.80}$$

Sada je za $q = p + 2$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|_{-k}^2 (2\mathbb{N})^{-q\alpha^j} \leq M \sum_{j=1}^{\infty} (2\mathbb{N})^{-2\alpha^j} < \infty, \tag{2.81}$$

što pokazuje traženo tvrđenje. $\square$

**Teorema 2.4.4** *Neka je $\Phi \in \mathcal{A}^*$. Tada $\Phi \in Y^{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako se može predstaviti u obliku*

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes H_{\alpha^j}, \qquad f_j \in \mathcal{A}_{-k} \text{ za sve } j \in \mathbb{N}, \tag{2.82}$$

*ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da je za sve $\varphi \in \mathcal{A}_k$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, \varphi\rangle|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j} < \infty \tag{2.83}$$

*i ako je niz*

$$\Phi_m = \sum_{j=1}^{m} f_j \otimes H_{\alpha^j}, \qquad m \in \mathbb{N} \tag{2.84}$$

*Cauchyjev u $Y^{-k}$.*

*Dokaz:* Neka je $k \in \mathbb{N}_0$ fiksirano i neka $\Phi \in Y^{-k}$. Kako je $Y^{-k} \subset \mathcal{A}_k^*$, po prethodnoj teoremi sledi da je oblika $\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes H_{\alpha^j}$, gde su $f_j \in \mathcal{A}_{-k}$, $j \in \mathbb{N}$ i postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, \varphi\rangle|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j} < \infty$ za sve $\varphi \in \mathcal{A}_k$. Ostaje da se pokaže da je niz $\Phi_m$ definisan sa (2.84) Cauchyjev. Pokažimo prvo da je $\Phi_m \in Y^{-k}$, za sve $m \in \mathbb{N}$. Kako je skup $S$ definisan u (2.67) gust u prostoru $\mathcal{A}_{-k}$, sledi da za svako $f_j \in \mathcal{A}_{-k}$ postoji niz $\{f_j^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ u $S$ tako da $\|f_j^n - f_j\|_{-k} \to 0$, kad $n \to \infty$. Kako su $f_j^n \in S$, oni su oblika $f_j^n = \sum_{k=1}^{n} b_{j,k}\psi_k(t)$, $j \in \mathbb{N}_0$. Definišimo

$$\begin{aligned} \Phi_m^n &= \sum_{j=1}^{m} f_j^n H_{\alpha^j}, \qquad n, m, \in \mathbb{N} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{m} b_{j,k} H_{\alpha^j} \right) \psi_k(t). \end{aligned}$$

Jasno, $\Phi_m^n \in Y^{\infty}$ za sve $n, m \in \mathbb{N}$ jer su koeficijenti $\sum_{j=1}^{m} b_{j,k} H_{\alpha^j} \in (S)_{-1}$. Takođe je $\Phi_m \in \mathcal{A}_k^*$, odakle sledi da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\Phi_m \in$

$\mathcal{L}(\mathcal{A}_k,(S_{-k_0})_{-1})$. Bez ograničenja opštosti možemo pretpostaviti da je ovo $k_0$ isto ono kao iz uslova (2.83) – inače biramo manji od njih. Sada je

$$\begin{aligned}
\|\Phi_m-\Phi_m^n\|_{-k}^{*,2} &= \|\sum_{j=1}^m f_j\otimes H_{\alpha^j}-\sum_{j=1}^m f_j^nH_{\alpha^j}\|_{-k}^{*,2}\\
&= sup\left\{\left\|\left[\sum_{j=1}^m f_j\otimes H_{\alpha^j}-\sum_{j=1}^m f_j^nH_{\alpha^j},\varphi\right]\right\|_{-1,-k_0}^2 : \quad \varphi\in\mathcal{A}_k,\ \|\varphi\|_k\le 1\right\}\\
&= sup\left\{\sum_{j=1}^m \left|\langle f_j,\varphi\rangle-\langle f_j^n,\varphi\rangle\right|^2\|H_{\alpha^j}\|_{-1,-k_0}^2 \quad \varphi\in\mathcal{A}_k,\ \|\varphi\|_k\le 1\right\}\\
&= sup\left\{\sum_{j=1}^m \left|\langle f_j-f_j^n,\varphi\rangle\right|^2(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j} : \quad \varphi\in\mathcal{A}_k,\ \|\varphi\|_k\le 1\right\}\\
&\le \sum_{j=1}^m(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^j}\|f_j-f_j^n\|_{-k}^2\to 0,\quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

Dakle, $\Phi_m\in Y^{-k}$ za sve $m\in\mathbb{N}$.
Sada ćemo pokazati da je niz $\{\Phi_m\}_m$ Cauchyjev u $Y^{-k}$. Za $\Phi\in Y^{-k}$ postoji niz $\{T_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ u $Y^\infty$ tako da je $\|\Phi-T_j\|_{-k}^*\to 0$, kad $j\to\infty$. U stvari stavili smo da je $T_j=\sum_{n=1}^\infty f_j^nH_{\alpha^n}$, i $f_j^n=(T_j|H_{\alpha^n})_{-1,-k_0}$. Tada je

$$\int_I \|T_j\|_{-1,-k_0}^2dt=\sum_{n=1}^\infty\|f_j^n\|_{L^2(I)}^2(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^n}. \tag{2.85}$$

Sada je

$$\begin{aligned}
\|T_j-\Phi_m\|_{-k}^{*\,2} \le & sup\left\{\sum_{n=1}^m\left|\langle f_j^n-f_j,\varphi\rangle\right|^2(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^n} : \quad \varphi\in\mathcal{A}_k,\|\varphi\|_k\le 1\right\}+\\
&+sup\left\{\sum_{n=m+1}^\infty\left|\langle f_j^n,\varphi\rangle\right|^2(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^n} : \quad \varphi\in\mathcal{A}_k,\|\varphi\|_k\le 1\right\}\\
\le & sup\left\{\sum_{n=1}^\infty\left|\langle f_j^n-f_j,\varphi\rangle\right|^2(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^n} : \quad \varphi\in\mathcal{A}_k,\|\varphi\|_k\le 1\right\}+\\
&+\sum_{n=m+1}^\infty sup\left\{\left|\langle f_j^n,\varphi\rangle\right|^2(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^n} : \quad \varphi\in\mathcal{A}_k,\|\varphi\|_k\le 1\right\}\\
&=\|T_j-\Phi\|_{-k}^{*\,2}+\sum_{n=m+1}^\infty\|f_j^n\|_{L^2(I)}^2(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^n}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Dakle,

$$
\begin{aligned}
\|\Phi-\Phi_m\|_{-k}^{*2} &\leq \|\Phi-T_j\|_{-k}^{*2}+\|T_j-\Phi_m\|_{-k}^{*2}\\
&\leq \|\Phi-T_j\|_{-k}^{*2}+\sqrt{\|T_j-\Phi\|_{-k}^{*2}+\sum_{n=m+1}^{\infty}\|f_j^n\|_{L^2(I)}^2(2\mathbb{N})^{-k_0\alpha^n}} \qquad (2.87)
\end{aligned}
$$

Prvi i drugi član u (2.87) teže nuli kad $j\to\infty$, jer niz $\{T_j\}$ konvergira ka $\Phi$ u $Y^{-k}$. Treći član teži nuli kao ostatak konvergentnog reda iz (2.85). Dakle, $\|\Phi-\Phi_m\|_{-k}^{*2}\to 0$, $m\to\infty$, odnosno niz $\{\Phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ konvergira ka $\Phi$ u prostoru $Y^{-k}$. Dakle, niz je i Cauchyjev.

Obratno, neka su $\Phi$ i $\Phi_m$ definisani kao u (2.82) i (2.84), respektivno. Pokazaćemo da je $\Phi\in Y^{-k}$. Kako je $\{\Phi_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ Cauchyjev niz u kompletnom prostoru $Y^{-k}$, on je i konvergentan, te označimo sa $\Phi_0\in Y^{-k}$ njegovu graničnu vrednost. Tada $\Phi_0$, prema prethodno dokazanom pravcu teoreme, mora biti oblika $\Phi_0=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{f}_j\otimes H_{\alpha^j}$. Dalja ideja je jednostavna i dobro poznata: potrebno je pokazati da je $\Phi_0=\Phi$, to jest da je $\tilde{f}_j=f_j$ za sve $j\in\mathbb{N}$. Ovaj deo dokaza je potpuno isti kao i u teoremi 2.4.4. $\square$

**Saglasnost ekspanzije procesa tipa (O) i tipa (I)**

Neka je $U$ slučajan proces tipa (O) dat ekspanzijom

$$U(t,\omega)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)H_{\alpha^i}(\omega),$$

takav da su $a_i(t)\in L^1_{loc}(I)$, $i\in\mathbb{N}$. Tada prema (2.56) njemu odgovara proces tipa (I), u oznaci $\tilde{U}$ tako da je

$$
\begin{aligned}
[\tilde{U},\varphi](\omega)=\int_{\mathbb{R}}\sum_{i=1}^{\infty}a_i(t)H_{\alpha^i}(\omega)\varphi(t)dt &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_{\mathbb{R}}a_i(t)\varphi(t)dt\right)H_{\alpha^i}(\omega)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\langle\tilde{a}_i,\varphi\rangle H_{\alpha^i}(\omega)
\end{aligned}
$$

gde je $\tilde{a}_i\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ uopštena funkcija koja odgovara funkciji $a_i(t)\in L^1_{loc}(I)$. Dakle, proces $\tilde{U}$ ima razvoj

$$\tilde{U}=\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{a}_i\otimes H_{\alpha^i}$$

što znači da su ekspanzije procesa tipa (I) konzistente sa ekspanzijom procesa tipa (O).

**Primer 2.4.1** *Neka je* $\mathcal{R} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$ *i neka je* $I = \mathbb{R}$. *Tada je* $\mathcal{A} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *i* $\psi_k(t) = \xi_k(t)$ *gde su* $\xi_k$ *ermitske funkcije.*

1. *Poznato je da jednoparametarski singularni beli šum kao proces tipa (O) ima razlaganje*

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k(t) H_{\varepsilon_k}.$$

*Funkciji* $\xi_k(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ *odgovara uopštena funkcija* $\tilde{\xi}_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *definisana sa* $\langle \tilde{\xi}_k, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \xi_k(t)\varphi(t)dt$. *Ako je* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *data razvojem* $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i(t)$, *tada je* $\langle \tilde{\xi}_k, \varphi \rangle = a_k$. *Tada je beli šum* $\tilde{W}$ *kao proces tipa (I) dat ekspanzijom*

$$\tilde{W} = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\xi}_k \otimes H_{\varepsilon_k} \quad \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}), (S)_{-1})$$

*i pri tome važi da je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle \tilde{\xi}_k, \varphi \rangle \right|^2 (2\mathbb{N})^{-p\varepsilon_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 (2k)^{-p} < \infty,$$

*za* $p = 0$.

2. *Fiksirajmo* $k > \frac{5}{12}$ *i* $t_1, t_2, t_3, \ldots \in \mathbb{R}$ *takve da je* $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \nearrow \infty$. *Poznato je da za* $k > \frac{5}{12}$ *Diracova delta distribucija* $\delta_{t_j}$ *pripada prostoru* $\mathcal{A}_{-k} = \mathcal{S}_{-k}(\mathbb{R})$. *Sa*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \delta_{t_j} \otimes H_{\alpha^j}$$

*je dat slučajan proces tipa (I) koji nije tipa (O). Proverimo još uslov (2.70); neka je* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *proizvoljno dato razvojem* $\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i$. *Tada je*

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \left| \langle \delta_{t_j}, \varphi \rangle \right|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0 \alpha^j} &= \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(t_j)|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0 \alpha^j} = \\
= \sum_{j=1}^{\infty} | \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i(t_j)|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0 \alpha^j} &\leq \sum_{j=1}^{\infty} (2\mathbb{N})^{-k_0 \alpha^j} | \sum_{i=1}^{\infty} a_i \mathcal{O}(i^{-\frac{1}{12}})|^2 \\
\leq C \sum_{j=1}^{\infty} (2\mathbb{N})^{-k_0 \alpha^j} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 i^{-\frac{1}{6}} &\leq C \sum_{j=1}^{\infty} (2\mathbb{N})^{-k_0 \alpha^j} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty
\end{aligned}$$

*za neku konstantu* $C > 0$, *i ako biramo* $k_0 > 1$.

**Primer 2.4.2** *Neka je* $\mathcal{R} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$ *i neka je* $I = \mathbb{R}$. *Tada je* $\mathcal{A} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}' = \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *i* $\psi_k(t) = \xi_k(t)$ *gde su* $\xi_k$ *ermitske funkcije i* $\lambda_k = 2k$ *karakteristični koreni operatora* $\mathcal{R}$.

1. *Neka su* $b_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *merljive funkcije iz* $(S)_{-1}$ *takve da postoji* $k_0 \in \mathbb{N}_0$, *i da za svako* $\omega \in \Omega$ *postoji* $k = k(\omega)$ *tako da je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|b_n(\omega)\|^2_{-1,-k_0} \lambda_n^{-2k} < \infty.$$

*Tada je sa*

$$(\omega, \varphi) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(\omega), \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

*definisan proces tipa (I) i (U) na* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. *Naime važi da je* $\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(\omega)\|^2_{-1,-k_0} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \lambda_n^{2k} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|b_n(\omega)\|^2_{-1,-k_0} \lambda_n^{-2k} < \infty$.

2. *Neka su u okviru prethodnog primera*

$$b_n(\omega) = \sum_{j=1}^{n} H_{\alpha^j}(\omega), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

*Tada je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_n c_{n,j} H_{\alpha^j}$, *gde je* $c_{n,j} = \begin{cases} 1, & j \leq n \\ 0, & j > n \end{cases}$.
*Jasno,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(\omega) \in (S)_{-1}$ *jer je* $\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_{n,j}\right|^2 (2\mathbb{N})^{-k_0 \alpha^j} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} (2\mathbb{N})^{-k_0 \alpha^j} < \infty$, *ako biramo* $k_0 > 1$.

### Ekspanzija procesa tipa (I) sa vrednošću u $exp(S)_{-1}$

Analogno prethodnim teoremama koje su se odnosile na razlaganje procesa tipa (I) sa vrednošću u Kondratievom prostoru $(S)_{-1}$, mogu se posmatrati i procesi tipa (I) koji primaju vrednosti u nekom drugom prostoru uopštenih stohastičkih funkcija. Posmatrajmo na primer prostor $exp(S)_{-1}$ koji je širi od Kondratievog prostora, dakle i klasa procesa tipa (I) sa skupom vrednosti $exp(S)_{-1}$ je mnogo šira.

Neka su (uz malu zloupotrebu oznaka) u ovom delu

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{L}(\mathcal{A}, exp(S)_{-1}), \qquad \mathcal{A}^*_k = \mathcal{L}(\mathcal{A}_k, exp(S)_{-1})$$

procesi tipa (I) i procesi reda $k$, respektivno. Dalje, neka su i svi ostali pojmovi definisani analogno kao kod procesa tipa (I) sa vrednostima u Kondratievom prostoru - praktično, svuda gde piše $(S)_{-1}$, zamenimo sa $exp(S)_{-1}$.

Tada važe teoreme o ekspanziji, sa istim dokazima kao teoreme 2.4.3 i 2.4.4, jedina razlika je u tome što bazu prostora $exp(S_{-k_0})_{-1}$ čine funkcije $e^{-\frac{k_0}{2}(2\mathbb{N})^{\alpha^j}} H_{\alpha^j}$, $\alpha^j \in \mathfrak{J}$.

**Teorema 2.4.5** *Neka je $\Phi \in \mathcal{A}^*$. Tada:*

1. *$\Phi \in \mathcal{A}^*_k$, $k \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako je oblika*

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes H_{\alpha^j}, \qquad f_j \in \mathcal{A}_{-k} \tag{2.88}$$

   *i ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da je za svako $\varphi \in \mathcal{A}_k$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, \varphi\rangle|^2 e^{-k_0(2\mathbb{N})^{\alpha^j}} < \infty. \tag{2.89}$$

2. *$\Phi \in Y^{-k}$, $k \in \mathbb{N}_0$ ako i samo ako se može predstaviti u obliku*

$$\Phi = \sum_{j=1}^{\infty} f_j \otimes H_{\alpha^j}, \qquad f_j \in \mathcal{A}_{-k} \text{ za sve } j \in \mathbb{N}_0, \tag{2.90}$$

   *ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tako da je za sve $\varphi \in \mathcal{A}_k$*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle f_j, \varphi\rangle|^2 \, e^{-k_0(2\mathbb{N})^{\alpha^j}} < \infty \tag{2.91}$$

   *i ako je niz*

$$\Phi_m = \sum_{j=1}^{m} f_j \otimes H_{\alpha^j}, \qquad m \in \mathbb{N} \tag{2.92}$$

   *Cauchyjev u $Y^{-k}$.*

Slično kao i u lemi 2.4.1, može se pokazati da je uslov (2.89) ekvivalentan uslovu da postoji neko $k_1 \geq 0$ tako da je

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_j\|^2_{-k} e^{-k_1(2\mathbb{N})^{\alpha^j}} < \infty. \tag{2.93}$$

### 2.4.3 Primene na stohastičke diferencijalne jednačine

Neka je $\mathcal{R}$ samoadjungovani diferencijalni operator koji definiše prostor Zemaniana. Neka je $P(t) = p_k t^k + p_{k-1}t^{k-1} + \cdots + p_1 t + p_0$ polinom sa realnim koeficijentima. Dajemo dva primera stohastičkih diferencijalnih jednačina sa procesima tipa (I), u kojima figuriše diferencijalni operator $P(\mathcal{R})$ koji je definisan kao $P(\mathcal{R}) = p_k\mathcal{R}^k + p_{k-1}\mathcal{R}^{k-1} + \cdots + p_1\mathcal{R} + p_0 I$. Za njega važi da je

$$\begin{aligned} P(\mathcal{R})\psi_i &= (p_k\mathcal{R}^k + p_{k-1}\mathcal{R}^{k-1} + \cdots + p_1\mathcal{R} + p_0 I)\psi_i \\ &= p_k(\lambda_i)^k\psi_i + p_{k-1}(\lambda_i)^{k-1}\psi_i + \cdots + p_1\lambda_i\psi_i + p_0\psi_i = P(\lambda_i)\psi_i. \end{aligned}$$

**Primer 2.4.3** *Posmatrajmo SDJ oblika*

$$P(\mathcal{R})u = g \tag{2.94}$$

*gde su* $u, g \in \mathcal{A}^*$ *procesi tipa (I). Neka su* $u$ *i* $g$ *dati ekspanzijom* $u(t,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} u_j(t) \otimes H_{\alpha^j}(\omega)$, $g(t,\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(t) \otimes H_{\alpha^j}(\omega)$ *redom, gde su* $u_j$, $g_j \in \mathcal{A}'$, $j \in \mathbb{N}$.

*Neka su* $u_j$, $g_j$ *dati razvojem* $u_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}\psi_i$, $g_j = \sum_{i=1}^{\infty} b_{i,j}\psi_i$, $j \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$\begin{aligned} P(\mathcal{R})u &= \sum_{j=1}^{\infty} P(\mathcal{R})u_j \otimes H_{\alpha^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left( P(\mathcal{R}) \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j}\psi_i \right) \otimes H_{\alpha^j} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} P(\lambda_i)\psi_i \otimes H_{\alpha^j}. \end{aligned} \tag{2.95}$$

*Kako je svaki proces tipa (I) jedinstveno određen svojim koeficijentima u ekspanziji, za rešavanje jednačine možemo primeniti metod izjednačavanja koeficijenata. Iz (2.94) i (2.95) sledi da je*

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{i,j} P(\lambda_i)\psi_i = g_j, \qquad \text{za sve } j \in \mathbb{N}. \tag{2.96}$$

*Ako sada ponovo izjednačimo koeficijente razvoja u* $\mathcal{A}'$, *dobijamo sistem*

$$a_{i,j} P(\lambda_i) = b_{i,j}, \qquad \text{za sve } i, j \in \mathbb{N}. \tag{2.97}$$

*Prvi slučaj: ako je* $P(\lambda_i) \neq 0$ *za sve* $i \in \mathbb{N}$, *tada imamo*

$$a_{i,j} = \frac{b_{i,j}}{P(\lambda_i)} \qquad \text{za sve } i, j \in \mathbb{N}$$

*pa je rešenje jednačine dato sa*

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i,j}}{P(\lambda_i)} \psi_i \right) \otimes H_{\alpha^j}. \tag{2.98}$$

*U ovom slučaju rešenje postoji i jedinstveno je. Naime, ako je $P(\lambda_i) \neq 0$, za svako $i \in \mathbb{N}$, tada postoji konstanta $C > 0$ takva da je $P(\lambda_i) \geq C$, za sve $i \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_{i,j}}{P(\lambda_i)} \psi_i \right)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha^j} \leq \frac{1}{C^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{\infty} b_{i,j} \psi_i \right)^2 (2\mathbb{N})^{-p\alpha^j} < \infty,$$

*za neko $p > 0$ jer $g \in \mathcal{A}^*$.*

*Drugi slučaj: ako je $P(\lambda_i) = 0$ za neke $i \in \mathbb{N}$, recimo za $\lambda_{i_1}, \dots \lambda_{i_m}$. Tada rešenje postoji ako i samo ako su $b_{i_1,j} = \cdots = b_{i_m,j} = 0$. Rešenje u ovom slučaju nije jedinstveno, a koeficijenti rešenja $u$ dati su formulom*

$$u_j = \sum_{\substack{i=1 \\ P(\lambda_i) \neq 0}}^{\infty} \frac{b_{i,j}}{P(\lambda_i)} \psi_i + \sum_{k=1}^{m} c_k \psi_{i_k} \tag{2.99}$$

*gde su $c_k$, $k = 1, 2, \dots m$ proizvoljni realni brojevi.*

**Primer 2.4.4** *Neka je $\mathcal{R} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$ i neka su $b_n$ merljive funkcije iz $(S)_{-1}$ kao u primeru 2.4.2. Označimo sa $F : \Omega \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to (S)_{-1}$ proces definisan sa*

$$(\omega, \varphi) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(\omega), \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

*kao što je opisan u primeru 2.4.2.*

*Tada Cauchyjev problem*

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t} u(t, x, \omega) &= P(\mathcal{R}) u(t, x, \omega) \\ u(0, x, \omega) &= F(x, \omega) \end{aligned} \tag{2.100}$$

*gde su $x, t \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ ima slabo rešenje dato izrazom*

$$u(t, x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{P(2n)t} b_n(\omega) \xi_n(x). \tag{2.101}$$

*Dokaz: Kako je*

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P(2n) e^{P(2n)t} b_n(\omega) \xi_n(x),$$

*i s druge strane*

$$P(\mathcal{R})u(t,x,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{P(2n)t}b_n(\omega)P(\mathcal{R})\xi_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{P(2n)t}b_n(\omega)P(2n)\xi_n(x)$$

*sledi da funkcija data sa (2.101) zaista zadovoljava jednačinu. Takođe je*

$$u(0,x,\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\omega)\xi_n(x)=F(x,\omega),$$

*dakle zadovoljen je i početni uslov. Za proizvoljno* $\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}a_i\xi_i\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *je* $\langle F(x,\omega),\varphi\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n(\omega)=F(\omega,\varphi)$ *i* $\langle u(t,x,\omega),\varphi\rangle=u(t,\varphi,\omega)$.

*Primedba: funkcija u predstavlja kombinaciju procesa tipa (O) i tipa (I) - ona je tačkasto definisana po promenljivoj* $t$, *odnosno svakom* $t\in\mathbb{R}$ *dodeljuje proces tipa (I).*

*Za svako fiksirano* $\omega_0\in\Omega$ *je* $u(t,x,\omega_0)\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathcal{S}'(\mathbb{R}))$. *Za fiksirano* $t_0\in\mathbb{R}$ *je* $u(t_0,\varphi,\omega)$ *uopšten slučajan proces tipa (U) i (I). Za fiksirane* $t_0\in\mathbb{R}$, $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *je* $u(t_0,\varphi_0,\omega)$ *uopštena slučajna promenljiva iz* $(S)_{-1}$.

# Glava 3

# Wickov proizvod

Poznato je da u opštem slučaju nije moguće definisati množenje uopštenih funkcija koje predstavlja proširenje klasičnog množenja realnih brojeva. Problem množenja uopštenih stohastičkih funkcija se u ovoj tezi prevazilazi uvođenjem Wickovog proizvoda, i u ovoj glavi su prezentovana osnovna pravila Wickovog računa; zapravo pravila klasičnog diferencijalnog računa sa proizvodom interpretiranim kao Wickov proizvod, zamenjuju Itôvu formulu i Itôv diferencijalni račun za klasične stohastičke procese.

U prvom delu ove glave je predstavljen Wickov proizvod procesa tipa (O) kao što je to urađeno u [17] i u ostalim radovima. Drugi deo glave sadrži originalne rezultate u kojima je definisan Wickov proizvod i za procese tipa (I) koji na prirodan način predstavlja uopštenje Wickovog proizvoda procesa tipa (O).

## 3.1 Wickov proizvod u prostoru Kondratieva i u $exp(S)_{-1}$

U prethodnom delu definisali smo singularni beli šum kao $W(t) = I_1(\delta_t)$. Sada se postavlja pitanje šta je kvadrat takvog procesa $W(t)^2$ ili npr. $e^{W(t)}$? Poznato je da u opštem slučaju nije moguće definisati "tačkasto " množenje uopštenih funkcija, niti nelinearne funkcije po njima. Formalno bi bilo

$$W(t)^2 = \lim_{h\to\infty} \langle \cdot, \frac{1}{h^2}\chi^2_{[t,t+h]} \rangle.$$

Ali, $E_\mu(\langle \cdot, \frac{1}{h^2}\chi^2_{[t,t+h]}\rangle) = \frac{1}{h} \to \infty$, pa ne možemo očekivati konvergenciju čak ni u (oslabljenoj) topologiji prostora Kondratieva. Jedan od načina da se ovaj problem prevaziđe jeste uvođenje tzv. Wickovog proizvoda i Wickove verzije analitičkih funkcija. Wickov proizvod je na prirodan način povezan sa Itôvim integralom, kao i sa pojmom *renormalizacije* u kvantnoj fizici.

Posmatrajmo izraz

$$\begin{aligned}\langle\cdot,\frac{1}{h^2}\chi^2_{[t,t+h]}\rangle-\frac{1}{h}&=\langle\cdot,\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}\rangle\langle\cdot,\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}\rangle-(\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}|\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]})\\&=I_2(\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}\hat{\otimes}\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}).\end{aligned}$$

Veličina $\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}\hat{\otimes}\frac{1}{h}\chi_{[t,t+h]}$ ne konvergira u $L^2(\mathbb{R}^2)$, ali konvergira ka $\delta_t\hat{\otimes}\delta_t$ u prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R})\hat{\otimes}\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Dakle formalno možemo očekivati da ćemo imati

$$W(t)^2=I_2(\delta_t\hat{\otimes}\delta_t).$$

Formalno ćemo izraz $\left(\frac{d}{dt}B(t)\right)^2-\frac{1}{dt}$ zvati renormalizacijom vrednosti $\left(\frac{d}{dt}B(t)\right)^2$. Renormalizacija na neki način predstavlja izdvajanje glavne vrednosti beskonačnosti.

**Definicija 3.1.1** Wickov proizvod $\Diamond$ *elemenata* $F=\sum_\alpha a_\alpha H^{(m)}_\alpha$ *i* $G=\sum_\beta b_\beta H^{(m)}_\beta$ *iz Kondratievog prostora* $(S)^{m,N}_{-1}$ *je definisan sa*

$$F\Diamond G=\sum_{\alpha,\beta}(a_\alpha|b_\beta)H^{(m)}_{\alpha+\beta} \tag{3.1}$$

*gde su koeficijenti* $a_\alpha, b_\beta$ *iz* $\mathbb{R}^N$, *a* $(a_\alpha|b_\beta)$ *je njihov standardni skalarni proizvod u* $\mathbb{R}^N$.

U [17] je pokazano da Wickov proizvod ne zavisi od izbora bazičnih elemenata prostora $(L)^{2,m,N}$. Kondratievi prostori su zatvoreni u odnosu na Wickov proizvod, odnosno važi:

**Teorema 3.1.1** *1. Ako* $F,G\in(S)^{m,N}_1$, *onda* $F\Diamond G\in(S)^{m,1}_1$.

*2. Ako* $F,G\in(S)^{m,N}_{-1}$, *onda* $F\Diamond G\in(S)^{m,1}_{-1}$.

*3. Ako* $F,G\in(S)^N$, *onda* $F\Diamond G\in(S)$.

*4. Ako* $F,G\in(S)^{*,N}$, *onda* $F\Diamond G\in(S)^{*,1}$.

Primetimo da dimenzija $N$ nakon primene Wickovog proizvoda prelazi u dimenziju jednaku jedinici, što je posledica definicije (3.1) u kojoj se koeficijenti množe skalarnim proizvodom.

**Definicija 3.1.2** *Wickov proizvod elemenata $F = \sum_\alpha a_\alpha H_\alpha^{(m)}$ i $G = \sum_\beta b_\beta H_\beta^{(m)}$ iz prostora $exp(S)_{-1}^{m,N}$ je definisan sa*

$$F \Diamond G = \sum_{\alpha,\beta} (a_\alpha | b_\beta) H_{\alpha+\beta}^{(m)} \tag{3.2}$$

*gde su koeficijenti $a_\alpha, b_\beta$ iz $\mathbb{R}^N$, a $(a_\alpha|b_\beta)$ je njihov standardni skalarni proizvod u $\mathbb{R}^N$.*

**Teorema 3.1.2** *1. Ako $F, G \in exp(S)_1^{m,N}$, onda $F\Diamond G \in exp(S)_1^{m,1}$.*

*2. Ako $F, G \in exp(S)_{-1}^{m,N}$, onda $F\Diamond G \in exp(S)_{-1}^{m,1}$.*

*3. Ako $F, G \in exp(S)^N$, onda $F\Diamond G \in exp(S)$.*

*4. Ako $F, G \in exp(S)^{*,N}$, onda $F\Diamond G \in exp(S)^{*,1}$.*

*Dokaz*: Pretpostavimo da je $N = 1$, i dokažimo npr. osobinu 2, a ostale se analogno pokazuju. Neka su $F = \sum_\alpha a_\alpha H_\alpha^{(m)}$ i $G = \sum_\beta b_\beta H_\beta^{(m)}$ iz prostora $exp(S)_{-1}^m$. To znači da postoje brojevi $q_1$ i $q_2$ takvi da je

$$\sum_\alpha a_\alpha^2 e^{-q_1(2\mathbb{N})^\alpha} < \infty \quad \text{i} \quad \sum_\beta b_\beta^2 e^{-q_2(2\mathbb{N})^\alpha} < \infty.$$

Wickov proizvod možemo zapisati i kao

$$F\Diamond G = \sum_\gamma c_\gamma H_\gamma^{(m)}, \qquad \text{gde je } c_\gamma = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta.$$

Za $q = q_1 + q_2 + k$ imamo da je

$$\begin{aligned}
\sum_\gamma e^{-q(2\mathbb{N})^\gamma} c_\gamma^2 &= \sum_\gamma e^{-k(2\mathbb{N})^\gamma} e^{-(q_1+q_2)(2\mathbb{N})^\gamma} \left( \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha b_\beta \right)^2 \\
&\leq \sum_\gamma e^{-k(2\mathbb{N})^\gamma} e^{-(q_1+q_2)(2\mathbb{N})^\gamma} \left( \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha^2 \right) \left( \sum_{\alpha+\beta=\gamma} b_\beta^2 \right) \\
&= \sum_\gamma e^{-k(2\mathbb{N})^\gamma} \left( \sum_{\alpha+\beta=\gamma} a_\alpha^2 e^{-q_1(2\mathbb{N})^\gamma} \right) \left( \sum_{\alpha+\beta=\gamma} b_\beta^2 e^{-q_2(2\mathbb{N})^\gamma} \right) \\
&\leq \sum_\gamma e^{-k(2\mathbb{N})^\gamma} \left( \sum_\alpha a_\alpha^2 e^{-q_1(2\mathbb{N})^\alpha} \right) \left( \sum_\beta b_\beta^2 e^{-q_2(2\mathbb{N})^\beta} \right) < \infty,
\end{aligned}$$

ako biramo da je $k > 0$. $\square$

**Teorema 3.1.3** *Za Wickov proizvod važi komutativnost, asocijativnost i distributivnost u odnosu na sabiranje.*

**Definicija 3.1.3** Wickov stepen *elementa* $F \in (S)_{-1}$ *je definisan induktivno sa*

$$\begin{aligned} F^{\Diamond 0} &= 1 \\ F^{\Diamond k} &= F \Diamond F^{\Diamond (k-1)}, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{3.3}$$

*Neka je* $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ *polinom.* Wickova verzija polinoma $p_n(x)$ *je preslikavanje* $p^\Diamond : (S)_{-1} \to (S)_{-1}$ *dato sa*

$$p^\Diamond(F) = \sum_{k=0}^{n} a_k F^{\Diamond k}. \tag{3.4}$$

**Teorema 3.1.4** *Neka je* $d = m = N = 1$. *Pretpostavimo da su elementi* $f, g \in (L)^2$ *dati ekspanzijom preko Itôvih integrala*

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} I_i(f_i), \quad g = \sum_{j=0}^{\infty} I_j(g_j)$$

*takvi da* $f \Diamond g \in (L)^2$. *Tada je*

$$f \Diamond g = \sum_{\substack{n=0, \\ i+j=n}}^{\infty} I_n(f_i \hat{\otimes} g_j). \tag{3.5}$$

*Dokaz:* Neka je $f(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i(f_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^i} f_i dB^{\otimes i} = \sum_\alpha a_\alpha H_\alpha(\omega)$, i $g(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} I_j(g_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^j} g_j dB^{\otimes j} = \sum_\beta b_\beta H_\beta(\omega)$. Po definiciji Wickovog proizvoda je $(f \Diamond g)(\omega) = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta H_{\alpha+\beta}(\omega)$, a po relaciji (2.26) je

$$H_{\alpha+\beta}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^{|\alpha+\beta|}} \xi_\alpha^{\hat{\otimes}\alpha} \hat{\otimes} \xi_\beta^{\hat{\otimes}\beta} dB^{\otimes|\alpha+\beta|}. \tag{3.6}$$

Kombinujući ovo sa (2.29) dobijamo

$$\begin{aligned} (f \Diamond g)(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha+\beta|=n} a_\alpha b_\beta \left( \int_{\mathbb{R}^n} \xi_\alpha^{\hat{\otimes}\alpha} \hat{\otimes} \xi_\beta^{\hat{\otimes}\beta} dB^{\otimes n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{i+j=n} \sum_{|\alpha|=i} a_\alpha \xi_\alpha^{\hat{\otimes}\alpha} \hat{\otimes} \sum_{|\beta|=j} b_\beta \xi_\beta^{\hat{\otimes}\beta} \right) dB^{\otimes n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{i+j=n} f_i \hat{\otimes} g_j \right) dB^{\otimes n} \\ &= \sum_{n=0, i+j=n}^{\infty} I_n(f_i \hat{\otimes} g_j) \end{aligned}$$

što je i trebalo da se dokaže. $\square$

**Posledica 3.1.1** *Iz prethodne teoreme sledi osobina slična Fubinijevom pravilu*

$$I_1(f)^{\Diamond n} = I_n(f^{\hat{\otimes} n}). \tag{3.7}$$

**Primer 3.1.1** *Za singularni beli šum je*

$$W(t)^{\Diamond n} = I_n(\delta_t^{\hat{\otimes} n}). \tag{3.8}$$

**Primer 3.1.2** *Neka je $d = m = N = 1$. Ako su $F, G \in (L)^2$, tada ima smisla posmatrati i njihov "tačkasti" proizvod definisan kao*

$$(F \cdot G)(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega).$$

*Ako je barem jedna od funkcija $F, G$ deterministička, npr. $F = a_0 \in \mathbb{R}$, tada se Wickov proizvod i tačkasti proizvod poklapaju tj.*

$$F \Diamond G = F \cdot G.$$

**Lema 3.1.1** *Neka su*

$$F(\omega) = a_0 + I_1(f), \qquad \text{gde je } f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k(t) \in L^2(\mathbb{R}), \ \text{i}$$

$$G(\omega) = b_0 + I_1(g), \qquad \text{gde je } g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \xi_k(t) \in L^2(\mathbb{R}).$$

*Tada je*

$$I_1(f) \Diamond I_1(g) = I_1(f) \cdot I_1(g) - (f|g). \tag{3.9}$$

*Dokaz*: Važi $F(\omega) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k H_{\varepsilon_k}(\omega)$, $G(\omega) = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k H_{\varepsilon_k}(\omega)$. Po definiciji Wickovog proizvoda je $(F \Diamond G)(\omega) = a_0 b_0 + \sum_{k,l=1}^{\infty} a_k b_l H_{\varepsilon_k + \varepsilon_l}(\omega)$. Koristeći poznatu osobinu Fourier-Hermiteovih polinoma da je

$$H_{\varepsilon_k + \varepsilon_l} = \begin{cases} H_{\varepsilon_k} H_{\varepsilon_l}, & k \neq l \\ H_{\varepsilon_k}^2 - 1, & k = l \end{cases}$$

dobijamo

$$(F \Diamond G)(\omega) = F(\omega) \cdot G(\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k. \tag{3.10}$$

Odavde sledi $I_1(f) \Diamond I_1(g) = (F(\omega) - a_0) \Diamond (G(\omega) - b_0) = F(\omega) \Diamond G(\omega) - a_0 G(\omega) - b_0 F(\omega) + a_0 b_0 = F(\omega) \cdot G(\omega) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k - a_0 G(\omega) - b_0 F(\omega) + a_0 b_0 = (F(\omega) - a_0) \cdot (G(\omega) - b_0) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = I_1(f) \cdot I_1(g) - \int_{\mathbb{R}} f(t) g(t) dt$, gde smo u poslednjem koraku koristili ortonormiranost ermitskih funkcija. $\square$

**Primer 3.1.3** *1. Za $f = g \in L^2(\mathbb{R})$ imamo*

$$I_1(f)^2 = I_1(f)^{\diamondsuit 2} + (f|f) = I_2(f^{\hat{\otimes}}) + |f|^2_{L^2(\mathbb{R})}. \tag{3.11}$$

*2. Specijalno za $f = g = \chi_{[0,t]}$ imamo*

$$B(t)^{\diamondsuit 2} = B(t)^2 - t. \tag{3.12}$$

*Primetimo da $B(t)^{\diamondsuit 2}$ nije pozitivno.*

*3. Za uglačani beli šum, sa $|\phi| = 1$ je*

$$w(\phi)^{\diamondsuit n} = h_n(w(\phi)). \tag{3.13}$$

Naime, pošto je Wickov proizvod nezavisan od izbora baze prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$, možemo pretposatviti da je $\phi = \eta_1$. Tada je $w(\phi)^{\diamondsuit n} = h_1(\langle\omega, \eta_1\rangle)^{\diamondsuit n} = H_{\varepsilon_1}^{\diamondsuit n}(\omega) = H_{n\varepsilon_1}(\omega) = h_n(\langle\omega, \eta_1\rangle) = h_n(w(\phi))$.

**Primer 3.1.4 (Gjessing, 1993)** *Neka je $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ takav da je $|\phi|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 1$ i stavimo $\theta(\omega) = \langle\omega, \phi\rangle$. Neka je*

$$F(\omega) = \begin{cases} 1, & \theta(\omega) \geq 0 \\ 0, & \theta(\omega) < 0 \end{cases}.$$

*Tada je $F \in (L)^2$, ali $F^{\diamondsuit 2} \notin (L)^2$. Ovaj primer pokazuje da prostori $(L)^p$ nisu zatvoreni u odnosu na Wickov proizvod.*

*Neka je*

$$G = \theta^{\diamondsuit 2} = \theta^2 - 1.$$

*Tada su $F$ i $G$ nezavisne slučajne promenljive, ali $F \diamondsuit G \neq F \cdot G$. Ovaj primer pokazuje da u opštem slučaju Wickov proizvod i tačkasti proizvod se ne poklapaju.*

**Teorema 3.1.5** *Neka je $d = m = N = 1$ i $0 \leq t_0 < t_1 < \infty$, i neka je $h(\omega) \in (L)^2$ funkcija koja je $\mathcal{F}_{t_0}$-merljiva. Tada je*

$$h \diamondsuit (B(t_1) - B(t_0)) = h \cdot (B(t_1) - B(t_0)). \tag{3.14}$$

*Dokaz*: Neka je funkcija $h(\omega)$ data svojom haos ekspanzijom

$$h(\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i(h_i), \quad h_i \in \widehat{L^2}(\mathbb{R}^i),\ i \in \mathbb{N}.$$

Zbog uslova merljivosti, svaka funkcija $h_i$ mora da zadovoljavati da je

$$h_i(x) = 0 \text{ za skoro svako } x \text{ van skupa } \{x : x_j \le t_0, j = 1, 2, \ldots, i\}. \quad (3.15)$$

Kako je $B(t_1) - B(t_0) = I_1(\chi_{[t_0,t_1]})$, prema teoremi 3.1.4 dobijamo da je

$$h\Diamond(B(t_1) - B(t_0)) = \sum_{\substack{n=0\\ i+1=n}}^{\infty} I_n(h_i \hat{\otimes} \chi_{[t_0,t_1]}) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(h_n \hat{\otimes} \chi_{[t_0,t_1]}).$$

Dalje, imamo da je

$$(h_n \hat{\otimes} \chi_{[t_0,t_1]})(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} h_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}) \chi_{[t_0,t_1]}(x_k). \quad (3.16)$$

Ali zbog (3.15) imamo da je $h_n(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}) = 0$, čim je bar jedan od argumenata veći od $t_0$. S druge strane, $\chi_{[t_0,t_1]}(x_k) = 0$, ako je $x_k < t_0$. Dakle, (3.16) postaje

$$(h_n \hat{\otimes} \chi_{[t_0,t_1]})(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} h_n(y_1, \ldots, y_n) \chi_{[t_0,t_1]}(\tilde{y}), \quad (3.17)$$

gde je $\tilde{y} = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$, a $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ je proizvoljna permutacija elemenata skupa $\{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\} \setminus \{\tilde{y}\}$. Za skoro svako $(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ je $\tilde{y}$ jedinstveno. Dakle,

$$\begin{aligned}
&h\Diamond(B(t_1) - B(t_0)) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)! \int_0^{\infty} \int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_2} \frac{1}{n+1} h_n(y_1, \ldots, y_n) \chi_{[t_0,t_1]}(\tilde{y}) dB(y_1) \cdots dB(y_n) dB(\tilde{y}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n! \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_2} h_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) dB(y_1) dB(y_2) \cdots dB(y_n) \right) dB(\tilde{y}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n! \left( \int_0^{y_n} \cdots \int_0^{y_2} h_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) dB(y_1) dB(y_2) \cdots dB(y_n) \right) \left( \int_{t_0}^{t_1} dB(\tilde{y}) \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} I_n(h_n) \cdot (B(t_1) - B(t_0)) = h \cdot (B(t_1) - B(t_0))
\end{aligned}$$

što je i trebalo da se dokaže. □

Wickov proizvod procesa $X(t)$ i $Y(t)$ koji su tipa (O) je tačkasto definisan za svako fiksirano $t \in \mathbb{R}^d$ preko Wickovog proizvoda u odgovarajućem prostoru uopštenih stohastičkih funkcija: $(S)_{-1}$ ili $exp(S)_{-1}$. Dakle to je proces tipa (O) koji svakom elementu $t \in \mathbb{R}^d$ dodeljuje element $X(t)\Diamond Y(t)$.

## 3.2 Skorohodov integral i Wickov račun

U ovom delu pretpostavićemo, jednostavnosti radi da je $d = m = N = 1$. Stohastički proces shvatamo u smislu tipa (O) kao preslikavanje $\mathbb{R} \to (S)^*$.

Glavni rezultat je dat izrazom $\int_{\mathbb{R}} X(t)\delta B(t) = (S)^* \int_{\mathbb{R}} X(t)\Diamond W(t)dt$, gde je integral na levoj starni Skorohodov integral slučajnog procesa $X(t,\omega)$, a integral na desnoj strani se interpretira kao Pettisov integral. Ova relacija u stvari znači da je Itôv račun (dat Itôvom formulom) sa klasičnim proizvodom ekvivalentan klasičnom diferencijalnom računu sa Wickovim proizvodom.

Skorohodov integral predstavlja proširenje Itôvog integrala na ne-adaptirane procese. Sledeća lema daje karakterizaciju adaptiranih slučajnih procesa u zavisnosti od koeficijenata njihove haos ekspanzije.

**Lema 3.2.1** *Neka je $X(t)$ slučajan proces sa osobinom da je $E_\mu(X^2(t)) < \infty$ za svako $t$ fiksirano.*

1. *Neka je $X(t)$ dat haos ekspanzijom II*

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x,t)dB^{\otimes n}(x), \qquad f_n(\cdot,t) \in \widehat{L^2}(\mathbb{R}^n),\ n \in \mathbb{N}.$$

*Tada je $X(t)$ adaptiran ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi*

$$supp f_n(\cdot,t) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \le t,\ \text{za sve } i = 1,2,\dots,n\}. \tag{3.18}$$

2. *Neka je $X(t)$ dat haos ekspanzijom I*

$$X(t) = \sum_{\alpha} c_\alpha(t) H_\alpha(\omega).$$

*Tada je $X(t)$ adaptiran ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi*

$$supp \left\{ \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha(t)\xi^{\hat{\otimes}\alpha}(x) \right\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \le t,\ \text{za sve } i = 1,2,\dots,n\}. \tag{3.19}$$

**Definicija 3.2.1** *Neka je $X(t)$ slučajan proces sa osobinom da je $E_\mu(X^2(t)) < \infty$ za svako $t$, dat ekspanzijom*

$$X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x_1,\dots,x_n,t)dB^{\otimes n}(x_1,\dots x_n), \qquad f_n(\cdot,t) \in \widehat{L^2}(\mathbb{R}^n),\ n \in \mathbb{N}.$$

*Neka je*

$$\widehat{f}_n(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1})$$

*simetrizacija funkcije* $f_n(x_1,\ldots,x_n,t)$ *u donosu na* $n+1$ *promenljivih (stavili smo* $t=x_{n+1}$*). Ako je*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!|\widehat{f}_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}<\infty, \tag{3.20}$$

*tada definišemo Skorohodov integral procesa* $X(t)$*, u oznaci* $\int_{\mathbb{R}}X(t)\delta B(t)$*, sa*

$$\int_{\mathbb{R}}X(t)\delta B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}I_{n+1}(\widehat{f}_n). \tag{3.21}$$

Iz definicije direktno sledi da Skorohodov integral pripada prostoru $(L)^2$ i da je

$$\|\int_{\mathbb{R}}X(t)\delta B(t)\|_{(L)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)!|\widehat{f}_n|^2_{L^2(\mathbb{R}^{n+1})}. \tag{3.22}$$

**Teorema 3.2.1** *Ako je* $X(t)$ *adaptiran proces sa osobinom* $\int_{\mathbb{R}}E_\mu(X^2(t))dt<\infty$*, tada se Skorohodov i Itôv integral poklapaju tj.*

$$\int_{\mathbb{R}}X(t)\delta B(t)=\int_{\mathbb{R}}X(t)dB(t). \tag{3.23}$$

Dokaz ove teoreme je vrlo sličan dokazu teoreme 3.1.5, te se stoga izostavlja.

**Lema 3.2.2** *Neka je* $Z(t)\in(S)^*$ *dat ekspanzijom* $Z(t)=\sum_\alpha c_\alpha(t)H_\alpha$*, i neka postoji* $p\in\mathbb{N}$ *takav da je*

$$\sup_\alpha\{\alpha!|c_\alpha|^2_{L^1(\mathbb{R})}(2\mathbb{N})^{-p\alpha}\}<\infty. \tag{3.24}$$

*Neka je* $\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ *proizvoljno. Tada su* $Z(t)\Diamond W(t)$ *i* $Z(t)\Diamond W_\phi(t)$ $(S)^*$*-integrabilni i važi:*

$$(S)^*\int_{\mathbb{R}}Z(t)\Diamond W(t)dt=\sum_{\alpha,k}\left(\int_{\mathbb{R}}c_\alpha(t)\xi_k(t)dt\right)H_{\alpha+\varepsilon_k} \tag{3.25}$$

$$(S)^*\int_{\mathbb{R}}Z(t)\Diamond W_\phi(t)dt=\sum_{\alpha,k}\left(\int_{\mathbb{R}}c_\alpha(t)(\phi_t(\cdot)|\xi_k)dt\right)H_{\alpha+\varepsilon_k}. \tag{3.26}$$

*Dokaz:* Sledi iz teoreme 2.4.2, jer je

$$Z(t)\Diamond W(t)=\sum_{\alpha,k}c_\alpha(t)\xi_k(t)H_{\alpha+\varepsilon_k}=\sum_{\beta}\sum_{\substack{\alpha,k\\ \alpha+\varepsilon_k=\beta}}c_\alpha(t)\xi_k(t)H_\beta,$$

a može se pokazati (videti npr. [17]) i da je

$$M(p)=\sum_\beta \beta!\left|\sum_{\substack{\alpha,k\\ \alpha+\varepsilon_k=\beta}}c_\alpha(t)\xi_k(t)\right|^2_{L^1(\mathbb{R})}(2\mathbb{N})^{-p\beta}<\infty$$

za neko $p\in\mathbb{N}$. $\square$

Sličan rezultat važi i za $(S)^*$-integrabilnost nad određenim intervalom $[a,b]$. Uslov (3.24) je tada zadovoljen ako je proces $Z(t)$ takav da je

$$\int_a^b E_\mu(Z^2(t))dt<\infty. \tag{3.27}$$

**Teorema 3.2.2** *Neka je $X(t)=\sum_\alpha c_\alpha(t)H_\alpha$ Skorohod-integrabilan proces. Neka su $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ proizvoljni. Tada za $X(t)\Diamond W(t)$ važi da je $(S)^*$-integrabilan nad $[a,b]$ i pri tome je*

$$\int_a^b X(t)\delta B(t)=(S)^*\int_a^b X(t)\Diamond W(t)dt. \tag{3.28}$$

*Dokaz:* Prema prethodnoj lemi, dovoljno je dokazati da je

$$\int_{\mathbb{R}}X(t)\delta B(t)=\sum_{\alpha,k}(c_\alpha|\xi_k)H_{\alpha+\varepsilon_k}$$

i po potrebi, zameniti $c_\alpha(t)$ sa $c_\alpha(t)\chi_{[a,b]}(t)$. Ekspanzija procesa $X(t)$ preko Itôvih integrala je data sa $X(t)=\sum_{n=0}^\infty I_n(f_n)$, gde je $f_n(u_1,\dots,u_n,t)=\sum_{|\alpha|=n}c_\alpha(t)\xi^{\hat{\otimes}\alpha}(u_1,\dots,u_n)$. Razvoj funkcije $c_\alpha(t)$ u $L^2(\mathbb{R})$ je dat sa $c_\alpha(t)=\sum_{k=1}^\infty(c_\alpha|\xi_k)\xi_k(t)$. Dakle,

$$X(t)=\sum_{n=0}^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{|\alpha|=n}\sum_{k=1}^\infty(c_\alpha|\xi_k)\xi_k(t)\xi^{\hat{\otimes}\alpha}(u_1,\dots,u_n)dB^{\otimes n}(u_1,\dots,u_n).$$

Kako je simetrizacija funkcije $\xi_k(t)\xi^{\hat{\otimes}\alpha}(u_1,\dots,u_n)$ data sa $\xi^{\hat{\otimes}(\alpha+\varepsilon_k)}(u_1,\dots,u_n,u_{n+1})$ (stavili smo $t=u_{n+1}$), sledi

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}X(t)\delta B(t)&=\sum_{n=0}^\infty\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\sum_{|\alpha|=n}\sum_{k=1}^\infty(c_\alpha|\xi_k)\xi^{\hat{\otimes}(\alpha+\varepsilon_k)}dB^{\otimes(n+1)}\\&=\sum_{n=0}^\infty\sum_{|\alpha|=n}\sum_{k=1}^\infty(c_\alpha|\xi_k)H_{\alpha+\varepsilon_k}=\sum_{\alpha,k}(c_\alpha|\xi_k)H_{\alpha+\varepsilon_k}.\end{aligned} \tag{3.29}$$

Time je dokaz završen. $\square$

**Primer 3.2.1** *1. U $(S)^*$ smislu imamo $W(t) = \frac{d}{dt}B(t)$. Naime važi:*

$$B(t) = \int_0^t 1\delta B(s) = (S)^* \int_0^t 1\Diamond W(s)ds = (S)^* \int_0^t W(s)ds.$$

*2. Ako je $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ deterministička funkcija (dakle i adaptirana), tada je $\int_{\mathbb{R}} \psi(t)dB(t) = (S)^* \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\Diamond W(t)dt$.*

*3. Specijalno, za $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ imamo da je*

$$W_\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(s-t)dB(s) = (S)^* \int_{\mathbb{R}} \phi(s-t)\Diamond W(s)ds.$$

*4. Po Itôvoj formuli je poznato da je $\int_0^t B(s)dB(s) = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2}t$. S druge strane, formalno računajući u $(S)^*$ dobijamo*

$$(S)^* \int_0^t B(s)\Diamond W(t)dt = (S)^* \int_0^t B(t)\Diamond B'(t)dt = \frac{1}{2}B(t)^{\Diamond 2} = \frac{1}{2}B^2(t) - \frac{1}{2}t.$$

*5. Neka je $h(\omega) \in (L)^2$ nezavisno od $t$. Tada je*

$$\int_a^b h(\omega)\delta B(t,\omega) = h(\omega)\Diamond(B(b) - B(a)).$$

**Definicija 3.2.2** *Neka je $Y(t,\omega)$ proces sa osobinom da je $\int_{\mathbb{R}} E_\mu(Y^2(t))dt < \infty$, i neka je $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.* Konvolucija elementa $\phi$ i $Y(\cdot,\omega)$ *je definisana za skoro svako $\omega \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ sa*

$$(\phi * Y)(t,\omega) = (S)^* \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s)Y(s,\omega)ds. \tag{3.30}$$

**Teorema 3.2.3** *Neka je $Y(t,\omega)$ proces sa osobinom da je $\int_{\mathbb{R}} E_\mu(Y^2(t))dt < \infty$, i neka je $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ako je $(\phi * Y)(t)$ Skorohod-integrabilno, tada je $Y(t)\Diamond W_\phi(t)$ takođe $(S)^*$-integrabilno i važi*

$$\int_{\mathbb{R}} (\phi * Y)(t)\delta B(t) = (S)^* \int_{\mathbb{R}} Y(t)\Diamond W_\phi(t)dt. \tag{3.31}$$

*Dokaz:* Neka je $Y(s)$ dat razvojem $Y(s) = \sum_\alpha c_\alpha(s) H_\alpha$. Tada je po uslovu $\int_{\mathbb{R}} E(Y^2(t))dt < \infty$ i lemi 3.2.2 proces $Y(t) \lozenge W_\phi(t)$ $(S)^*$-integrabilan. Primenom teoreme 3.2.2 na proces $(\phi * Y)(t)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} (\phi * Y)(t) \delta B(t) = (S)^* \int_{\mathbb{R}} (\phi * Y)(t) \lozenge W(t) dt = \\
= (S)^* \int_{\mathbb{R}} \left( (S)^* \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s) Y(s) ds \right) \lozenge W(t) dt = \\
= (S)^* \int_{\mathbb{R}} Y(s) \lozenge \left( (S)^* \int_{\mathbb{R}} \phi(t-s) W(t) dt \right) ds = (S)^* \int_{\mathbb{R}} Y(s) \lozenge W_\phi(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

□

## 3.3 Wickov proizvod procesa tipa (I)

Pretpostavimo nadalje da je Zemanianov prostor nuklearan, odnosno da postoji neko $p \geq 0$ za koje je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\lambda_n}^{-2p} < \infty.$$

Na primer u Schwartzovim prostorima $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ je ovaj uslov zadovoljen za $p = 1$.

Tada možemo definisati u $\mathcal{A}'$ množenje Wickovog tipa:

**Definicija 3.3.1** *Neka su $f, g \in \mathcal{A}'$ uopštene funkcije date razvojem $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k$, $g = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k$. Tada je $f \diamond g$ uopštena funkcija iz $\mathcal{A}'$ definisana sa*

$$f \diamond g = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j=n+1}} a_i b_j \right) \psi_n. \tag{3.33}$$

Prethodna definicija je dobra, možemo dati čak i precizniji rezultat:

**Lema 3.3.1** *Ako su $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \psi_k \in \mathcal{A}_{-k}$ i $g = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \psi_k \in \mathcal{A}_{-l}$, tada je $f \diamond g \in \mathcal{A}_{-(k+l+p)}$. Pri tome, za proizvoljnu test-funkciju $\varphi \in \mathcal{A}$ važi nejednakost*

$$|\langle f \diamond g, \varphi \rangle|^2 \leq \|f\|_{-k}^2 \|g\|_{-l}^2 \|\varphi\|_{k+l+p} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\lambda_n}^{-2p} \right). \tag{3.34}$$

*Dokaz:* Kako je niz $\{\lambda_n\}$ rastući, sledi da je

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{i+j=n+1} a_i b_j\right|^2 \widetilde{\lambda_n}^{-2(k+l+p)} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_n}^{-2p}\sum_{i+j=n+1}|a_i|^2\widetilde{\lambda_n}^{-2k}\sum_{i+j=n+1}|b_j|^2\widetilde{\lambda_n}^{-2l}\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_n}^{-2p}\sum_{i+j=n+1}|a_i|^2\widetilde{\lambda_i}^{-2k}\sum_{i+j=n+1}|b_j|^2\widetilde{\lambda_j}^{-2l}\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_n}^{-2p}\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2\widetilde{\lambda_i}^{-2k}\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|^2\widetilde{\lambda_j}^{-2l} < \infty\end{aligned}$$

po uslovu nuklearnosti. Dokažimo sada ocenu (3.34). Neka je $\varphi \in \mathcal{A}$ proizvoljno, dato razvojem $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$. Označimo sa $M = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_n}^{-2p}$. Tada je

$$\begin{aligned}|\langle f \diamond g, \varphi\rangle|^2 &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{i+j=n+1} a_i b_j\right|^2 = \left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\widetilde{\lambda_n}^{k+l+p}\sum_{i+j=n+1}\widetilde{\lambda_n}^{-p} a_i\widetilde{\lambda_n}^{-k} b_j\widetilde{\lambda_n}^{-l}\right|^2\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\widetilde{\lambda_n}^{2(k+l+p)}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{i+j=n+1}\widetilde{\lambda_n}^{-p} a_i\widetilde{\lambda_n}^{-k} b_j\widetilde{\lambda_n}^{-l}\right|^2\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\widetilde{\lambda_n}^{2(k+l+p)}\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_n}^{-2p}\sum_{i+j=n+1}|a_i|^2\widetilde{\lambda_n}^{-2k}\sum_{i+j=n+1}|b_j|^2\widetilde{\lambda_n}^{-2l}\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2\widetilde{\lambda_n}^{2(k+l+p)} M \sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2\widetilde{\lambda_i}^{-2k}\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|^2\widetilde{\lambda_j}^{-2l}\\ &= \|\varphi\|_{k+l+p} M\|f\|_{-k}^2\|g\|_{-l}^2\end{aligned}$$

što je i trebalo da se dokaže. $\square$

Slično se može definisati i množenje test-funkcija, pod dodatnom pretpostavkom:

**Lema 3.3.2** *Neka postoji konstanta $C > 0$ tako da je za sve indekse $i, j \in \mathbb{N}$ zadovoljena relacija*

$$\widetilde{\lambda_{i+j}} \leq C\widetilde{\lambda_i}\widetilde{\lambda_j}.$$

*Ako su $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\psi_k \in \mathcal{A}_k$ i $g = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\psi_k \in \mathcal{A}_k$, tada je $f \diamond g \in \mathcal{A}_{(k-p)}$.*

*Dokaz:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{i+j=n+1} a_i b_j\right|^2 \widetilde{\lambda_n}^{2k-2p} = \sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_n}^{-2p}\left|\sum_{i+j=n+1} a_i \widetilde{\lambda_n}^{k} b_j\right|^2$$
$$\leq C^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_n}^{-2p}\left|\sum_{i+j=n+1} a_i \widetilde{\lambda_i}^{k}\widetilde{\lambda_j}^{k} b_j\right|^2$$
$$\leq C^{2k}\sum_{n=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_n}^{-2p}\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2\widetilde{\lambda_i}^{2k}\sum_{j=1}^{\infty}|b_j|^2\widetilde{\lambda_j}^{2k} < \infty.$$

Lema dokazana. $\square$

**Primer 3.3.1** *Za proizvoljne $i, j \in \mathbb{N}$ važi*

$$\psi_i \diamond \psi_j = \psi_{i+j-1}. \tag{3.35}$$

Primetimo da je definicija Wickovog množenja u prostoru $\mathcal{A}'$ prirodno povezana sa Wickovim množenjem stohastičkih procesa u Hidinom prostoru. Na osnovu primera 2.3.3 videli smo da se svaka uopštena funkcija može trivijalno smatrati stohastičkim procesom, kao i da se u tom slučaju prostor Hidinih distribucija svodi na prostor $exp\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Naredna definicija predstavlja proširenje Wickovog proizvoda i na procese tipa (I).

**Definicija 3.3.2** *Neka su $\Phi \in \mathcal{A}_k^*$, $\Psi \in \mathcal{A}_l^*$ procesi tipa (I) dati ekspanzijom $\Phi = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \otimes H_{\alpha^i}$, $f_i \in \mathcal{A}_{-k}$ za sve $i \in \mathbb{N}$ i $\Psi = \sum_{j=1}^{\infty} g_j \otimes H_{\alpha^j}$, $g_j \in \mathcal{A}_{-l}$ za sve $j \in \mathbb{N}$ takvi da postoje $r_1 \geq 0$ i $r_2 \geq 0$ za koje važi:*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_{-k}^2(2\mathbb{N})^{-r_1\alpha^i} < \infty, \tag{3.36}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|g_j\|_{-l}^2(2\mathbb{N})^{-r_2\alpha^j} < \infty. \tag{3.37}$$

*Wickov proizvod elemenata $\Phi$ i $\Psi$ je definisan sa*

$$\Phi\blacklozenge\Psi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i,j\\ \alpha^i+\alpha^j=\alpha^{n+1}}} f_i \diamond g_j\right)\otimes H_{\alpha^n}. \tag{3.38}$$

**Teorema 3.3.1** *Wickov proizvod* $\Phi\blacklozenge\Psi$ *iz prethodne definicije je proces tipa (I), tačnije* $\Phi\blacklozenge\Psi \in \mathcal{A}^*_{k+l+p}$.

*Dokaz:* Prema lemi 3.3.1 sledi da je za sve $i, j \in \mathbb{N}$ proizvod $f_i \diamond g_j \in \mathcal{A}_{-k-l-p}$, pa su svi koeficijenti ekspanzije $\sum_{\alpha^i+\alpha^j=\alpha^{n+1}} f_i \diamond g_j \in \mathcal{A}_{-k-l-p}$. Kako je $[\Phi\blacklozenge\Psi, \varphi] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha^i+\alpha^j=\alpha^{n+1}} \langle f_i \diamond g_j, \varphi\rangle H_{\alpha^n}$, ostaje da se dokaže da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{\alpha^i+\alpha^j=\alpha^{n+1}} \langle f_i \diamond g_j, \varphi\rangle \right|^2 (2\mathbb{N})^{-r_3\alpha^n} < \infty \tag{3.39}$$

za sve $\varphi \in \mathcal{A}$ i neko $r_3 \geq 0$. Neka je $r_3 = r_1 + r_2 + r_3 + q$, gde je $q > 1$. Tada je prema (3.34)

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{\alpha^i+\alpha^j=\alpha^{n+1}} \langle f_i \diamond g_j, \varphi\rangle \right|^2 (2\mathbb{N})^{-r_3\alpha^n} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sum_{\alpha^i+\alpha^j=\alpha^{n+1}} \|f_i\|_{-k} \|g_j\|_{-l} \|\varphi\|_{k+l+p} \sqrt{M} \right|^2 (2\mathbb{N})^{-r_3\alpha^n} \\
&= M \sum_{n=1}^{\infty} (2\mathbb{N})^{-q\alpha^n} \left| \sum_{\alpha^i+\alpha^j=\alpha^{n+1}} \|f_i\|_{-k} (2\mathbb{N})^{-\frac{r_1\alpha^i}{2}} \|g_j\|_{-l} (2\mathbb{N})^{-\frac{r_2\alpha^j}{2}} \|\varphi\|_{k+l+p} \right|^2 \\
&\leq M \sum_{n=1}^{\infty} (2\mathbb{N})^{-q\alpha^n} \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i\|^2_{-k} (2\mathbb{N})^{-r_1\alpha^i} \sum_{j=1}^{\infty} \|g_j\|^2_{-l} (2\mathbb{N})^{-r_2\alpha^j} \|\varphi\|^2_{k+l+p} < \infty
\end{aligned}$$

gde smo koristili osobinu $(2\mathbb{N})^{\alpha^i+\alpha^j} = (2\mathbb{N})^{\alpha^i}(2\mathbb{N})^{\alpha^j}$. □

**Primer 3.3.2** *Ako su* $f, g \in \mathcal{A}'$, *možemo ih trivijalno smatrati stohastičkim procesima datim razvojem* $f = f \otimes H_{\alpha^1}$, $g = g \otimes H_{\alpha^1}$, *gde je* $\alpha^1 = (0, 0, 0, \ldots)$. *To znači da imaju samo prvi član u haos ekspanziji, odnosno konstantne su po promenljivoj* $\omega$. *Tada je*

$$f\blacklozenge g = (f \diamond g) \otimes H_{\alpha^1+\alpha^1} = (f \diamond g) \otimes H_{\alpha^1} = f \diamond g.$$

*Ovaj primer pokazuje da se Wickov proizvod* $\diamond$ *u prostoru* $\mathcal{A}'$ *može na prirodan način potopiti u Wickov proizvod* $\blacklozenge$ *u prostoru* $\mathcal{A}^*$.

**Primer 3.3.3** *Neka su* $f, g \in (S)_{-1}$ *uopštene stohastičke funkcije date ekspanzijom* $f = \sum_{i=1} f_i H_{\alpha^i}$, $g = \sum_{i=1} g_i H_{\alpha^i}$, *gde su* $f_i, g_i \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{N}$. *Tada je*

$$f\Diamond g = \sum_{n=1} \left( \sum_{\substack{i,j \\ \alpha^i+\alpha^j=\alpha^{n+1}}} f_i g_j \right) H_{\alpha^n}.$$

*S druge strane, svaku konstantu $f_i$ možemo posmatrati kao uopštenu funkciju. Tačnije, svakom $f_i$, $i \in \mathbb{N}$ odgovara element prostora $\mathcal{A}'$ koji ćemo označavati sa $\tilde{f}_i$, i on je dat razvojem*

$$\tilde{f}_i = f_i \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(t) dt \right) \psi_k.$$

*Slično imamo elemente*

$$\tilde{g}_j = g_j \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k(t) dt \right) \psi_k, \quad j \in \mathbb{N}.$$

*Neka su dalje,*

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_i \otimes H_{\alpha^i}, \qquad \tilde{g} = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{g}_i \otimes H_{\alpha^i}.$$

*Tada je*

$$\tilde{f} \blacklozenge \tilde{g} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{i,j \\ \alpha^i + \alpha^j = \alpha^{n+1}}} \tilde{f}_i \diamond \tilde{g}_j \right) \otimes H_{\alpha^n}.$$

*Kako je*

$$\begin{aligned} \tilde{f}_i \diamond \tilde{g}_j = & \left( f_i \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t) dt \cdot g_j \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t) dt \right) \psi_1 + \\ & + \sum_{k=2}^{\infty} \left( \sum_{s+z=k+1} f_i \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(t) dt \cdot g_j \int_{-\infty}^{\infty} \psi_z(t) dt \right) \psi_k, \end{aligned}$$

*sledi da je za* $\varphi = \dfrac{\psi_1}{\left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1(t) dt \right)^2}$ *zadovoljeno* $\langle \tilde{f}_i \diamond \tilde{g}_j, \varphi \rangle = f_i g_j$. *Dakle važi da je*

$$\begin{aligned} [\tilde{f} \blacklozenge \tilde{g}, \varphi] &= \sum_{n=1} \sum_{\substack{i,j \\ \alpha^i + \alpha^j = \alpha^{n+1}}} \langle \tilde{f}_i \diamond \tilde{g}_j, \varphi \rangle H_{\alpha^n} \\ &= \sum_{n=1} \sum_{\substack{i,j \\ \alpha^i + \alpha^j = \alpha^{n+1}}} f_i g_j H_{\alpha^n} \\ &= f \Diamond g. \end{aligned}$$

*Ovaj primer pokazuje da Wickov proizvod $\blacklozenge$ na prostoru $\mathcal{A}^*$ predstavlja prirodno uopštenje Wickovog proizvoda $\Diamond$ na prostoru stohastičkih uopštenih funkcija.*

**Primer 3.3.4** *Na kraju, dajemo primer nelinearne SDJ sa Wickovim proizvodom. Generalno, jednačine ovog tipa se rešavaju pomoću $\mathcal{S}$-transformacije. Ovde se međutim prikazuje metoda rešavanja bez ove transformacije, odnosno metoda traženja rešenja u obliku redova izjednačavanjem koeficijenata.*

*Neka je $\mathcal{R}$ samoadjungovani diferencijalni operator koji definiše prostor Zemaniana. Neka je $P(t)$ polinom sa realnim koeficijentima i $P(\mathcal{R})$ operator definisan kao u primeru 2.4.3 sa osobinom da je $P(\widetilde{\lambda_k}) - 1 \neq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Posmatrajmo nelinearnu stohastičku diferencijalnu jednačinu oblika*

$$P(\mathcal{R})X(t) = X(t)\blacklozenge\tilde{W}(t) + g(t,\omega) \tag{3.40}$$

*gde je $\tilde{W}(t)$ singularni šum u $\mathcal{A}^* = \mathcal{L}(\mathcal{A},(S)_{-1})$ dat ekspanzijom*

$$\tilde{W}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(t) \otimes H_{\varepsilon_n},$$

*i $g(t,\omega) \in \mathcal{A}^*$ oblika*

$$g(t,\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \otimes H_{\varepsilon_n},$$

*gde su $g_n(t) \in \mathcal{A}_{-r}$, za neko fiksirano $r \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dakle,*

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}\psi_k(t), \qquad g_{n,k} \in \mathbb{R}$$

*i pri tome važi da je*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |g_{n,k}|^2 \widetilde{\lambda_k}^{-2r} < \infty, \tag{3.41}$$

*kao i da postoji $q \geq 0$ za koje je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{-r}^2 (2\mathbb{N})^{-q\varepsilon_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{-r}^2 (2n)^{-q} < \infty. \tag{3.42}$$

*Rešenje $X(t)$ jednačine ćemo tražiti u obliku*

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \otimes H_{\varepsilon_n}$$

*gde su $a_n(t) \in \mathcal{A}'$, $n \in \mathbb{N}$ koeficijenti koje treba odrediti. Neka je $a_n(t)$ dat razvojem*

$$a_n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}\psi_k(t), \qquad a_{n,k} \in \mathbb{R}.$$

*Tada je, slično kao i u primeru 2.4.3*

$$P(\mathcal{R})X(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}P(\widetilde{\lambda}_k)\psi_k(t)\right) \otimes H_{\varepsilon_n}, \tag{3.43}$$

*a po definiciji Wickovog proizvoda je*

$$X(t)\blacklozenge\tilde{W}(t) + g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n+1} a_i(t) \diamond \psi_j(t) + g_n(t)\right) \otimes H_{\varepsilon_n}. \tag{3.44}$$

*Kako je* $a_i(t)\diamond\psi_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\psi_k(t)\diamond\psi_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\psi_{k+j-1}(t)$, *relacija (3.44) postaje*

$$X(t)\blacklozenge\tilde{W}(t) + g(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n+1}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\psi_{k+j-1}(t) + g_n(t)\right) \otimes H_{\varepsilon_n}. \tag{3.45}$$

*Iz (3.43) i (3.45) sledi da je*

$$\sum_{i+j=n+1}\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,k}\psi_{k+j-1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{n,k}\psi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}P(\widetilde{\lambda}_k)\psi_k(t), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.46}$$

*Iz sistema jednačina (3.46) se rekurzivno mogu odrediti koeficijenti* $a_{n,k}$, $n, k \in \mathbb{N}$.

*Za* $n = 1$ *(3.46) daje*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k}\psi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{1,k}\psi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k}P(\widetilde{\lambda}_k)\psi_k(t)$$

*odakle sledi da je*

$$a_{1,k} = \frac{g_{1,k}}{P(\widetilde{\lambda}_k) - 1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

*Za* $n = 2$ *relacija (3.46) postaje*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k}\psi_{k+1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k}\psi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2,k}\psi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k}P(\widetilde{\lambda}_k)\psi_k(t),$$

*odakle nakon pomeranja indeksa u prvoj sumi, sledi da je*

$$a_{2,1} = \frac{g_{2,1}}{P(\widetilde{\lambda}_1) - 1},$$

$$a_{2,k} = \frac{g_{2,k} + a_{1,k-1}}{P(\widetilde{\lambda}_k) - 1}, \qquad k = 2, 3, \dots$$

*Slično, za $n = 3$ imamo*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1,k}\psi_{k+2}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{2,k}\psi_{k+1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{3,k}\psi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} g_{3,k}\psi_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{3,k}P(\widetilde{\lambda}_k)\psi_k(t),$$

*odakle se dobijaju:*

$$a_{3,1} = \frac{g_{3,1}}{P(\widetilde{\lambda}_1) - 1},$$

$$a_{3,2} = \frac{g_{3,2} + a_{2,1}}{P(\widetilde{\lambda}_2) - 1},$$

$$a_{3,k} = \frac{g_{3,k} + a_{1,k-2} + a_{2,k-1}}{P(\widetilde{\lambda}_k) - 1}, \qquad k = 3, 4, \dots$$

*Indukcijom se lako može proveriti da je u opštem slučaju*

$$a_{n,k} = \frac{g_{n,k} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{i,k-n+i}}{P(\widetilde{\lambda}_k) - 1}, \qquad n \in \mathbb{N};\ k = n, n+1, \dots \tag{3.47}$$

*Kako je $P(\widetilde{\lambda}_k) - 1 \neq 0$ za sve $k \in \mathbb{N}$, sledi da postoji konstanta $K > 0$ takva da je $|P(\widetilde{\lambda}_k) - 1| \geq K$ za sve $k \in \mathbb{N}$.*

*Iz (3.41) sledi da postoji $C(n) > 0$ tako da je za svako $k \in \mathbb{N}$ zadovoljeno*

$$|g_{n,k}| \leq C(n)\widetilde{\lambda}_k^{\,r}.$$

*Slično, na osnovu (3.42) imamo da postoji $D > 0$ tako da je za svako $n \in \mathbb{N}$ zadovoljeno*

$$\|g_n\|_{-r}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |g_{n,k}|^2 \widetilde{\lambda}_k^{\,-2r} \leq D(2n)^q.$$

*Dakle, za svako $n \in \mathbb{N}$ je $C(n) \leq D(2n)^q$.*

*Sada imamo da je*

$$|a_{1,k}| \leq \frac{|g_{1,k}|}{K} \leq \frac{C(1)\widetilde{\lambda}_k^{\,r}}{K} \leq \frac{D}{K}\widetilde{\lambda}_k^{\,r}(2)^q, \quad k = 1, 2, \dots$$

*Dalje je*

$$|a_{2,k}| \leq \frac{1}{K}(|g_{2,k}| + |a_{1,k-1}|) \leq \frac{1}{K}(C(2)\widetilde{\lambda}_k^{\,r} + \frac{C(1)}{K}\widetilde{\lambda}_{k-1}^r).$$

*Kako je* $\widetilde{\lambda_k}^r \geq \widetilde{\lambda}_{k-1}^r$, *i* $(2n)^q \geq (2(n-1))^q$, *sledi da je*

$$|a_{2,k}| \leq D\widetilde{\lambda_k}^r(2\cdot 2)^q(\frac{1}{K}+\frac{1}{K^2}), \quad k=2,3,\ldots$$

*Slično se dobija i*

$$|a_{3,k}| \leq D\widetilde{\lambda_k}^r(2\cdot 3)^q(\frac{1}{K}+2\frac{1}{K^2}+\frac{1}{K^3}), \quad k=3,4,\ldots,$$

$$|a_{4,k}| \leq D\widetilde{\lambda_k}^r(2\cdot 4)^q(\frac{1}{K}+3\frac{1}{K^2}+3\frac{1}{K^3}+\frac{1}{K^4}), \quad k=4,5,\ldots,$$

*U opštem slučaju, važi da je*

$$|a_{n,k}| \leq D\widetilde{\lambda_k}^r(2n)^q\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}\frac{1}{K^i}, \qquad k\geq n \tag{3.48}$$

*odnosno*

$$|a_{n,k}| \leq D\widetilde{\lambda_k}^r(2n)^q K(1+\frac{1}{K})^{n-1}, \qquad n,k\in\mathbb{N}. \tag{3.49}$$

*Neka je p dato kao u (3.3). Tada je na osnovu (3.49)*

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}|^2\widetilde{\lambda_k}^{-2r-2p} \leq D^2(2n)^{2q}K^2(1+\frac{1}{K})^{2(n-1)}\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_k}^{-2p}<\infty,$$

*odnosno*

$$\|a_n\|^2_{-(r+p)}<\infty, \qquad n\in\mathbb{N} \tag{3.50}$$

*što pokazuje da su svi koeficijenti* $a_n(t)\in\mathcal{A}_{-(r+p)}$.

*Takođe važi da je*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|^2_{-(r+p)}e^{-s(2\mathbb{N})^{\varepsilon n}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\|a_n\|^2_{-(r+p)}e^{-2sn}\\ &\leq D^2M^2K^2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{2q}(K+\frac{1}{K})^{2(n-1)}e^{-2sn},\end{aligned} \tag{3.51}$$

*gde smo sa M označili* $M=\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{\lambda_k}^{-2p}$. *Red sa desne strane relacije (3.51) konvergira po D'Alambertovom kriterijumu, ako biramo da je* $s>\ln(1+\frac{1}{K})$. *Dakle, rešenje* $X(t)$ *pripada prostoru* $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{r+p}, exp(S)_{-1})$.

# Literatura


[1] Adams R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975

[2] Albeverio S., Daletsky Y.L., Kondratiev Y.G., *Non-Gaussian Infinite Dimensional Analysis*, Journal of Functional Analysis 138, pp 311-350, 1996

[3] Arnold L., *Stochastic Differential Equations - Theory and Applications*, John Wiley & Sons, 1974

[4] Benth F.E., Deck T., Potthoff J., *A White Noise Approach to a Class of Non-linear Stochastic Heat Equations*, Journal of Functional Analysis 146, pp 382-415, 1997

[5] Benth F.E., Pothoff J., *On the Martingale Property for Generalized Stochastic Processes*, Manuskripte Nr. 195/95, Fakultät für Mathematik und Informatik der Universität Mannheim

[6] Dôku I., *White Noise Approach to Limit Theorems for Solutions of some Wick Type Nonlinear Equations*, Far East J. Math. Sci. 4(2), pp 137-187, 2002

[7] Evans L., Gariepy R., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, 1992

[8] Floret K., Wloka J., *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*, Springer Verlag, 1968

[9] Gel'fand I.M., Vilenkin N.Ya., *Generalized Functions - Applications of Harmonic Analysis*, Academic Press, 1964

[10] Grothaus M., Kondratiev Y.G., Streit L., *Regular Generalized Functions in Gaussian Analysis*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol.2, No.1, pp 1-25, 1999

[11] Hadžić O., *Odabrane metode teorije verovatnoće*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1990

[12] Hida T., *Brownian Motion*, Springer Verlag, 1980

[13] Hida T., *White Noise Analysis and some Future Directions*, Preprint

[14] Hida T., *Some Methods of Computation in White Noise Calculus*, Preprint, pp 103-110

[15] Hida T., Kuo H.H., Obata N., *Transformations for White Noise Functionals*, Journal of Functional Analysis 111, pp 259-277, 1993

[16] Hida T., Kuo H.H., Pothoff J., Streit L., *White Noise - An Infinite Dimensional Calculus*, Kluwer Academic Publishers, 1993

[17] Holden H., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T., *Stochastic Partial Differential Equations - A Modeling, White Noise Functional Approach*, Birkhäuser, 1996

[18] Hollands S., Wald R.M., *Local Wick Polynomials and Time Ordered Products of Quantum Fields in Curved Spacetime*, Communications in Mathematical Physics 223, pp 289-326, 2001

[19] Hu Y., Øksendal B., *Fractional White Noise Calculus and Applications to Finance*, Preprint 10/1999, University of Oslo

[20] Hu Y., Øksendal B., *Chaos Expansion of Local Time of Fractional Brownian Motions*, Preprint 20/2000, University of Oslo

[21] Huang Z., Hu X., Wang X., *Explicit Forms of Wick Tensor Powers in General White Noise Spaces*, IJMMS 31:7, pp 413-420, 2002

[22] Ivković Z.A., *Teorija verovatnoća sa matematičkom statistikom*, Građevinska Knjiga, Beograd, 1976

[23] Kaminski A., Lozanov-Crvenković Z., Pilipović S., *Structure Theorems for Functional Generalized Random Processes*, to appear

[24] Kondratiev Y.G., Leukert P., Potthoff J., Streit L., *Generalized Functionals in Gaussian Spaces: The Characterization Theorem Revisited*, Journal of Functional Analysis 141, pp 301-318, 1996

[25] Kuo H.H., *White Noise Distribution Theory*, CRC Press, 1996

[26] Kuo H.H., *White Noise Theory*, Preprint

[27] Kuo H.H., Xiong J., *Stochastic Differential Equations in White Noise Space*, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, Vol.1, No.4, pp 611-632, 1998

[28] Kurepa S., *Funkcionalna analiza - Elementi teorije operatora*, Školska knjiga, Zagreb, 1981

[29] Lee Y.J., *Integral Representation of Second Quantization and Its Application to White Noise Analysis*, Journal of Functional Analysis 133, pp 253-276, 1995

[30] Lozanov-Crvenković Z, Perišić D., Pilipović S., *Contributions to the Theory of Generalized Random Processes*, Faculty of Science, Novi Sad, 2002

[31] Lozanov-Crvenković Z., Pilipović S., *On Some Classes of Generalized Random Linear Functionals*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol.129, No.2, pp 433-442, 1998

[32] Mališić J., *Slučajni procesi*, Građevinska Knjiga, Beograd, 1989

[33] Meyer P.A., *Quantum Probability for Probabilists*, Springer Verlag, 1995

[34] Mirković B., *Teorija mera i integrala*, Naučna Knjiga, Beograd, 1990

[35] Mittelstaedt P., *The Interpretation of Quantum Mechanics and the Measurement Process*, Cambridge University Press, 1998

[36] Mladenović P., *Verovatnoća i statistika*, VESTA - Matematički fakultet, Beograd, 1995

[37] Nualart D., Rozovski B., *Weighted Stochastic Sobolev Spaces and Bilinear SPDEs Driven by Space-Time White Noise*, Journal of Functional Analysis 149, pp 200-225, 1997

[38] Obata N., *Operator Calculus on Vector Valued White Noise Functionals*, Journal of Functional Analysis 121, pp 185-232, 1994

[39] Øksendal B., *Stochastic Differential Equations - An Introduction with Applications*, Springer Verlag, 2000

[40] Øksendal B., *Stochastic Partial Differential Equations - A Mathematical Connection between Macrocosmos and Microcosmos*, M.Gyllenberg et al.(Eds.): Analysis, Algebra and Computers in Mathematical Research, pp 365-385, 1994

[41] Øksendal B., *Black & Scholes-formelen: En triumf for matematisk modellering i finans*, Preprint 14/1999, University of Oslo

[42] Pap E., Pilipović S., *Semigroups of Operators on the Space of Generalized Functions* $Exp\mathcal{A}'$, Journal of Math. Anal. and Appl., Vol.126, No.2, pp 501-515, 1987

[43] Pilipović S., Stanković B., *Prostori distribucija*, SANU Ogranak u Novom Sadu, 2000

[44] Pilipović S., *Some operations in* $\sum_{\alpha}'$, $\alpha > \frac{1}{2}$, Radovi Matematički, Vol.5, pp 53-62, 1989

[45] Pilipović S., *Generalization of Zemanian Spaces of Generalized Functions Which Have Orthonormal Series Expansions*, SIAM J. Math. Anal., Vol.17, No2, pp 477-484, 1986

[46] Potthoff J., Streit L., *Invariant States on Random and Quantum Fields: $\phi$-Bounds and White Noise Analysis*, Journal of Functional Analysis 111, pp 295-311, 1993

[47] Rao M.M., *Stochastic Processes and Integration*, Stijthoff & Nordhoff, 1979

[48] Širjaev A.N., *Verojatnost*, Nauka, Moskva, 1989

[49] Siu-Ah Ng, *White Noise Analysis in a Nonstandard Model*, Preprint 2002 University of Natal

[50] Stan A., *Paley-Wiener Theorem for White Noise Analysis*, Journal of Functional Analysis 173, pp 308-327, 2000

[51] Steele J.M., *Stochastic Calculus and Financial Applications*, Springer Verlag, 2001

[52] Zemanian A.H., *Generalized Integral Transforms*, Nauka, Moskva, 1974

[53] Zeqian C., *Gaussian White Noise Calculus of Generalized Expansion*, Acta Mathematica Scientia 22B(3), pp 359-368, 2002

[54] Ziemer W.P., *Weakly Differentiable Functions - Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation*, Springer Verlag, 1989

# SPISAK UČESTALIH OZNAKA

| | | |
|---|---|---|
| $A^B$ | skup svih preslikavanja iz prostora $B$ u prostor $A$ | |
| $\mathcal{L}(A,B)$ | skup svih linearnih, neprekidnih preslikavanja iz prostora $A$ u prostor $B$ | |
| $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ | prostor glatkih funkcija nad $\mathbb{R}^d$ | |
| $L^2(\mathbb{R}^d)$ | prostor kvadratno integrabilnih funkcija nad $\mathbb{R}^d$ | |
| $\widehat{L^2(\mathbb{R}^d)}$ | prostor simetričnih kvadratno integrabilnih funkcija nad $\mathbb{R}^d$ | |
| $\mathcal{F}(H)$ | Fockov prostor nad Hilbertovim prostorom $H$ | str. 9 |
| $\Gamma(H)$ | simetrični Fockov prostor nad Hilbertovim prostorom $H$ | str. 9 |
| $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ | Schwartzov prostor test funkcija | str. 16 |
| $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ | Schwartzov prostor distribucija | str. 16 |
| $\mathcal{A}$ | Zemanianov prostor test funkcija | str. 19 |
| $\mathcal{A}'$ | Zemanianov prostor distribucija | str. 19 |
| $exp\mathcal{A}$ | prostor test funkcija | str. 21 |
| $exp\mathcal{A}'$ | prostor distribucija | str. 21 |
| $(L)^2$ | prostor kvadratno integrabilnih funkcija nad prostorom $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ | str. 41 |
| $(L)^{2,m}$, $(L)^{2,m,N}$ | | str. 41 |
| $(S)$ | prostor Hidinih test funkcija | str. 48 |
| $(S)^*$ | prostor Hidinih distribucija | str. 48 |
| $(S)_\rho$ | prostor Kondratievih test funkcija | str. 48 |
| $(S)_{-\rho}$ | prostor Kondratievih distribucija | str. 48 |
| $(S_p)_\rho$, $(S_{-p})_{-\rho}$ | | str. 48 |
| $exp(S)_\rho$ | prostor test funkcija | str. 52 |
| $exp(S)_{-\rho}$ | prostor distribucija | str. 52 |
| $\mathcal{A}^*$ | $\mathcal{L}(\mathcal{A},(S)_{-1})$ ili $\mathcal{L}(\mathcal{A},exp(S)_{-1})$ | str. 59, 67 |
| $\mathcal{A}^*_k$ | $\mathcal{L}(\mathcal{A}_k,(S)_{-1})$ ili $\mathcal{L}(\mathcal{A}_k,exp(S)_{-1})$ | str. 59, 67 |

| | | |
|---|---|---|
| $\chi_{[0,t]}$ | karakteristična funkcija skupa $[0,t]$ | |
| $h_n(x)$ | Hermiteov polinom reda $n$ | str. 14 |
| $\xi_n(x)$ | Hermiteova funkcija reda $n$ | str. 15 |
| $\eta_j(x)$ | baza prostora $L^2(\mathbb{R}^d)$ | str. 15 |
| $\mathcal{R}$ | operator koji generiše prostor $\mathcal{A}$ | str. 18 |
| $\Gamma(A)$ | operator druge kvantizacije pridružen operatoru $A$ | str. 13 |
| $\psi_k$ | ortonormirana baza prostora $\mathcal{A}$ | str. 18 |
| $\lambda_k$ | karakteristični koreni operatora $\mathcal{R}$ | str. 18 |
| $\delta_t$ | Diracova delta distribucija | str. 18 |
| $H_\alpha(\omega)$ | Fourier-Hermiteov polinom | str. 42 |
| $B_t(\omega)$ | Brownovo kretanje | str. 32, 39 |
| $w(\phi,\omega)$ | uglačani beli šum | str. 39 |
| $W_\phi(t,\omega)$ | koordinatni proces belog šuma | str. 40 |
| $W(t,\omega)$ | singularni beli šum | str. 50 |
| $\varepsilon_j$ | niz nula sa jedinicom na $j$-toj koordinati | str. 45 |
| $\vert\alpha\vert$ | dužina multiindeksa $\alpha$ | str. 16 |
| $Index(\alpha)$ | indeks multiindeksa | str. 59 |
| $n(\alpha)$ | broj nenula elemenata u multiindeksu | str. 59 |
| $\mathcal{I}$ | skup nizova sa konačno mnogo nenula elemenata | str. 42 |
| $\int_{\mathbb{R}^d}(\cdot)dB^{\otimes n}$ | Itôv integral | str. 33 |
| $I_n(\cdot)$ | Itôv integral | str. 33 |
| $(S)^*\int_{\mathbb{R}^d}(\cdot)dt$ | Pettisov integral u prostoru stohastičkih distribucija | str. 57 |
| $\otimes$ | tenzorski proizvod | str. 7 |
| $\hat{\otimes}$ | simetrični tenzorski proizvod | str. 8 |
| $\bigoplus$ | direktna ortogonalna suma prostora | str. 7 |
| $(2\mathbb{N})^\gamma$ | | str. 49 |
| $\langle\cdot,\cdot\rangle$ | dualno sparivanje | |
| $[\cdot,\cdot]$ | dualno sparivanje u $\mathcal{A}^*$ | str. 56 |
| $\lozenge$ | Wickov proizvod u prostorima tipa $(S)_{-1}$ | str. 74 |
| $\diamond$ | Wickov proizvod u prostoru $\mathcal{A}'$ | str. 84 |
| $\blacklozenge$ | Wickov proizvod u prostorima tipa $\mathcal{A}^*$ | str. 86 |

# Biografija

Rođena sam 22. aprila 1978. godine u Zrenjaninu, gde sam završila osnovnu školu i gimnaziju sa prosekom 5,00 i Vukovom diplomom, kao i nižu muzičku školu. Studije matematike sam započela 1996. na PMF-u u Novom Sadu na smeru *Diplomirani matematičar*. Diplomirala sam juna 2000. sa prosečnom ocenom 9,92 i nagradom Mileva Marić-Einstein za najbolji seminarski rad.

Od oktobra 2000. godine sam zaposlena na Departmanu za matematiku i informatiku kao asistent-pripravnik. Držim vežbe iz predmeta: *Verovatnoća i statistika, Statističko modeliranje, Funkcionalna analiza, Uvod u analizu, Analiza* I, *Matematika* I.

Postdiplomske studije sam upisala novembra 2000. godine iz oblasti Analiza i verovatnoća. U toku studija do 2002. položila sam sve ispite sa prosečnom ocenom 10,00. Učestvovala sam u letnjoj školi *Prostorni stohastički procesi* koju je organizovao CIME u Italiji 2001., u zimskoj školi *Parcijalne diferencijalne jednačine sa singularitetima* u Novom Sadu 2003., i imala sam jedno izlaganje pod naslovom *Stohastički modeli finansijskih tržišta* na konferenciji PRIM na Zlatiboru 2002.

Oblasti interesovanja su mi pored nauke i naučna fantastika, učenje stranih jezika i plivanje. Od 1998. godine sam član MENSA Jugoslavije.

Novi Sad, 20. 12. 2003. Dora Seleši

**UNIVERZITET U NOVOM SADU**
**PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET**
**KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

**Redni broj:**
**RBR**
**Identifikacioni broj:**
**IBR**
**Tip dokumentacije:** Monografska dokumentacija
**TD**
**Tip zapisa:** Tekstualni štampani materijal
**TZ**
**Vrsta rada:** Magistarska teza
**VR**
**Autor:** Dora Seleši
**AU**
**Mentor:** Akademik dr Stevan Pilipović
**MN**

**Naslov rada:** Ekspanzija uopštenih stohastičkih procesa sa primenama u jednačinama
**NR**

**Jezik publikacije:** srpski (latinica)
**JP**
**Jezik izvoda:** srpski/engleski
**JI**
**Zemlja publikovanja:** Srbija i Crna Gora
**ZP**
**Uže geografsko područje:** Vojvodina
**UGP**
**Godina:** 2003.
**GO**
**Izdavač:** Autorski reprint
**IZ**

**Mesto i adresa:** Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
**MA**
**Fizički opis rada:** 3/105/54/0/0/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
**FO**
**Naučna oblast:** Matematika
**NO**
**Naučna disciplina:** Analiza i verovatnoća
**ND**
**Predmetna odrednica/Ključne reči:** stohastički procesi, beli šum, Brownovo kretanje, haos ekspanzija, Wickov proizvod, nuklearni prostori, Schwartzovi prostori, prostori Zemaniana, prostori Kondratieva, Hermiteovi polinomi i funkcije.
**PO**

**UDK:**
**Čuva se:** u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
**ČU**
**Važna napomena:**
**VN**
**Izvod:** Magistarska teza je posvećena ekspanziji (razlaganju u redove) uopštenih stohastičkih procesa tipa (O) i tipa (I) po ortogonalnoj bazi prostora kvadratno integrabilnih slučajnih promenljivih definisanih nad prostorom belog šuma, i karakterizaciji raznovrsnih prostora uopštenih stohastičkih funkcija. Wickov proizvod koji je definisan za procese tipa (O) prenosi se i na procese tipa (I). Dati su primeri stohastičkih diferencijalnih jednačina koje opisuju zakone održanja sa belim šumom i evolucionih jednačina čija su rešenja uopšteni stohastički procesi tipa (I) dati u obliku redova.
**IZ**

**Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:** 16.01.2003.
**DP**
**Datum odbrane:**
**DO**
**Članovi komisije:**
Predsednik: dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: Akademik dr Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Slobodanka Janković, viši naučni saradnik, Matematički institut, Srpska akademija nauka i umetnosti, Beograd

Član: dr Danijela Rajter, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
**KO**

**UNIVERSITY OF NOVI SAD**
**FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS**
**KEY WORDS DOCUMENTATION**

**Accession number:**
**ANO**
**Identification number:**
**INO**
**Document type:** Monograph type
**DT**
**Type of record:** Printed text
**TR**
**Contents code:** Master thesis
**CC**
**Author:** Dora Seleši
**AU**
**Mentor:** Academic Stevan Pilipović, PhD
**MN**

**Title:** Expansion of Generalized Stochastic Processes with Applications to Equations
**TI**

**Language of text:** Serbian
**LT**
**Language of abstract:** Serbian/English
**LA**
**Country of publication:** Serbia and Montenegro
**CP**
**Locality of publication:** Vojvodina
**LP**
**Publication year:** 2003.
**PY**
**Publisher:** Author's reprint
**PU**

**Publication place:** Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics, Dositeja Obradovića 4
**PP**
**Physical description**: 3/105/54/0/0/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
**PD**
**Scientific field:** Mathematics
**SF**
**Scientific discipline:** Analysis and probability
**SD**
**Subject / Key words:** stochastic process, white noise, Brownian motion, chaos expansion, Wick product, nuclear spaces, Schwartz spaces, Zemanian spaces, Kondratiev spaces, Hermite polinoms and functions.
**SKW**
**UC:**
**Holding data:** library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
**HD**
**Note:**
**N**
**Abstract:** This thesis is devoted to the series expansion of generalized stochastic processes of type (O) and type (I) by the orthogonal basis of the square integrable random variables defined on the white noise space, and to the characterization of some spaces of generalized stochastic functions. The Wick product which is defined for processes of type (O) is generalized also for processes of type (I). Examples of stochastic differential equations are given, which have generalized stochastic processes of type (I) as solutions given by their series expansion.
**AB**

**Accepted by Scientific Board on:** January 16, 2003
**ASB**
**Defended:**
**DE**
**Thesis defend board:**
President: Zagorka Lozanov-Crvenković, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Academic Stevan Pilipović, PhD, Full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: Slobodanka Janković, PhD, Research Associate Professor, Mathematical Institute, Serbian Academy of Sciences and Art, Belgrade

Member: Danijela Rajter, PhD, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad
**DB**