UNIVERZITET U NOVOM SADU,

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET,

DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Seminarski rad iz predmeta *Seminarski rad B* na temu:

OSNOVNI DINAMIČKI KONCEPTI U REALNOJ ANALIZI,

STUDENT:

Andrija Blesić, 311/10

TM (M2)

MENTOR:

prof. dr Jelena Aleksić

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Uvod

Fizika, kao naučna disciplina, najtešnje je povezana sa matematikom, i to u tolikoj meri da se fizika ne može proučavati bez znanja matematike. Samo uz pomoć znanja matematičkog aparata, moguće je razumeti i analizirati složene fizičke zakonitosti. Neupitna korist ovakvog, ujedinjenog znanja matematike i fizike vidljiva je, pre svega, iz mnogobrojnih primera iz istorije ovih nauka, u kojima se pojavljuju imena istih autora i kao matematičara, i kao fizičara[1].

Deo fizike, koji se bavi proučavanjem najjednostavnijeg oblika kretanja materije naziva se *mehanika*. Mehaničko kretanje (kakvo se razmatra u ovom radu) je najjednostavniji oblik kretanja materije, zato što se pri ovakvom kretanju ne uzimaju u obzir kako unutrašnja struktura tela, tako ni zakonitosti interakcija tih struktura, koje ipak pripadaju višim oblicima kretanja materije.

Prema logičkoj strukturi, mehanika se deli na kinematiku i dinamiku. *Kinematika* se bavi proučavanjem oblika kretanja materijalnih (za razliku od geometrijskih) tela u prostoru i vremenu, ne vodeći računa o uzrocima, koji ih izazivaju. *Dinamika* se, sa druge strane, bavi izučavanjem oblika kretanja materijalnih tela zajedno sa njihovim uzrocima (dejstvom sila).

S tim u vezi, dinamička analiza može se primeniti na kretanje materijalne tačke, kao i na kretanje krutog tela, baš iz razloga što se kruto telo (model tela, koje ni pod kakvim uslovima ne menja svoj oblik i dimenzije), može predstaviti kao kretanje mehaničkog sistema sa velikim brojem materijalnih tačaka, koje imaju postojan međusoban položaj nezavisan od položaja i kretanja datog krutog tela.

Možda nije najednom jasno, ali upravo ovo omogućuje razmatranje pojmova kao što su gustina, masa, momenti mase, momenti inercije u dvodimenzionalnim, trodimenzionalnim, i, u teoriji, n-dimenzionalnim prostorima. Drugim rečima, ova osobina omogućuje veoma lepe i prirodne generalizacije, sa potencijalno velikom praktičnom primenom.

Shodno tome, u ovom su radu postupno prezentovani koncepti, kojima se dinamika najčešće zanima, a koja su zanimljiva i sa stanovišta matematičke analize. Najpre su obrazloženi koncepti mase i gustine, da bi se u drugoj glavi napravilo povezivanje sa pojmovima težišta, centra mase i momentom mase, i omogućilo sagledavanje njihovog zajedničkog udela u translatornom kretanju.

Treća glava opisuje momenat inercije, kao značajnu osobinu svakog n-dimenzionalnog objekta, koje vrši rotaciono kretanje, i koja određuje lakoću sa kojom telo vrši takvo kretanje. Tu su i naglašeni metodi računanja istog, u odnosu na rotaciju oko proizvoljne ose. Četrvta glava bavi se praktičnim problemom opisa pritiska i sile pritiska (idealnog, mirnog) fluida.

Na kraju će se napomenuti da je posebno naglašeno kako se u ovom radu vrši elaboracija koncepta u realnoj analizi, zato što je takav opis, sa stanovišta tehničkih nauka, ipak najadekvatniji.

[1] Primera je zaista mnogo. Matematičko formulisanje Njutnovih zakona dovelo je do brzog razvoja diferencijalnog i integralnog računa, dok je Maksvel, izražavajući Faradejeve zaključke u matematičku formu i njihovom analizom, došao do elektromagnetne teorije svetlosti, itd.

Glava 1

Gustina i masa u realnoj analizi

Kada se govori o masi, intuitivno se pomisli na klasičnu definiciju mase u fizici kao kvantitativnu meru inercijalnih svojstva datog materijalnog tela, to jest, meru otpora kretanju. Intuitivno se javljaju misli o povezanosti mase kao pojma i pojma težine, te eksperimentalno utvđene ekvivalencije inercijalne i gravitacione mase. Međutim, masa se ne mora i ne sme posmatrati isključivo kao svojstvo *tela u prostoru*. Ona je mera inertnosti, koje pokazuju svi objekti kako u dvodimenzionalnim, tako i u jednodimenzionalnim sistemima, ali se tada, naravno, drugačije posmatra, meri i opisuje, mada po svojoj prirodi ostaje nepromenjena.

Kako je pojam mase u čvrstoj vezi sa pojmom gustine, ovde se detaljnije opisuju linearna, arealna i zapreminska gustina i masa, u nadi da će se intuitivne ideje o njima razviti u dovoljnoj meri, da čitalac može sa razumevanjem prihvatiti njihovu deskripciju sa stanovišta realne analize.

1.1 Linearna gustina i njoj odgovarajuća masa

Ako se uzme trivijalni primer žice, ona ima svoju masu, svoju zapreminu, i gustinu. Kako se velika većina žica pravi od jedinstvenog, istovrsnog metala ili legure istog, za njih se se kaže da imaju tzv. *konstantnu* ili *uniformnu linearnu gustinu*. Posebno se naglašava da se radi o linearnoj gustini, definisanoj kao masa po jedinici *dužine*[1].

Formalna definicija bi glasila:

Definicija 1.1 *Neka je data jednodimenzionalna oblast $\Lambda \in \mathbb{R}$, i neka proizvoljna tačka x pripada toj oblasti. Tada se za tu oblast kaže da ima linearnu gustinu $\rho(x)$ ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji neko $\rho > 0$, tako da važi:*

$$\left|\rho(x) - \frac{\Delta m}{\Delta l}\right| < \varepsilon,$$

gde je Δl deo oblasti Λ mere manje od δ, koji sadrži tačku x, a Δm masa tog dela.

Linearna gustina, dakle, istovetno kao i zapreminska, može biti ili homogena ili varijabilna (odnosno promenljiva). Poslednjih slučaj jednako je zanimljiv. Ako se pretpostavi da malopređašnje pomenuta

[1] kvantitativno se meri u kilogramima po metru.

žica nije homogena, već da joj je masa merena od levog kraja do neke tačke x_0 na njoj upravo funkcija položaja te tačke, $m = f(x_0)$, kao što je prikazano na slici, tada je masa dela žice između tačaka x_1 i x_2 na njoj data sa:

$$\Delta m = f(x_2) - f(x_1).$$

Odatle, opet, sledi da je srednja gustina tog dela žice:

$$\rho_{sr} := \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \qquad [1.1]$$

Ako se sada pusti da $\Delta x \to 0$, odnosno da $x_2 \to x_1$, onda se zapravo računa srednja gustina sve manjeg i manjeg dela žice. Lineana gustina ρ u tački x_1 tada je limes svih ovih srednjih gustina, kada $\Delta x \to 0$. Drugim rečima, linearna gustina je stopa promene mase po dužini, u oznaci:

$$\rho := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{dm}{dx}. \qquad [1.2]$$

Potonje automatski znači da je, na osnovu Fundamentalne Teoreme,

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\, dx = m(x_2) - m(x_1) \qquad [1.3]$$

izraz za dobijanje mase segmenta žice, koji leži između tačaka x_1 i x_2, ali o tome će biti više reči kasnije. Primeri su dati u nastavku.

Primer 1.1 *Neka je data žica mase $m = f(x) = x^2$, gde je x mereno u metrima, a m u kilogramima. Izračunati srednju gustinu na delu žice između tačaka $x = \frac{3}{4}$ i $x = \frac{5}{4}$. Pritome, utvrditi kolika je tačna vrednost linearne gustine u tački $x = \frac{3}{4}$.*

Rešenje.

Da bi se odredila srednja gustina, dovoljno je primeniti formulu [1.1]:

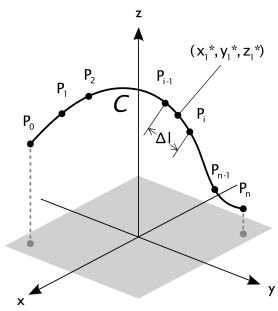
$$\rho_{sr} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{f(\frac{5}{4}) - f(\frac{3}{4})}{\frac{5}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{25}{16} - \frac{9}{16}}{\frac{1}{2}} = 2\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

Isto tako, na osnovu [1.2], sledi da je gustina u tački $x = \frac{3}{4}$:

$$\rho = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=\frac{3}{4}} = \left. 2x \right|_{x=\frac{3}{4}} = \frac{6}{4}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}.$$

□

Idući jedan korak dalje i koristeći se sličnom ilustracijom kao gore, pretpostavimo da je $\rho(x, y)$ linearna gustina neke tanke žice oblika nekakve krive C u $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$ u tački (x, y), kao na slici. Tada je masa dela žice od tačaka P_{i-1} i P_i prikazanih na slici približno $\rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta l_i$, dok je ukupna masa žice približno $\sum \rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta l_i$. Uzimajući sve više i više tačaka sa krive, ukupna masa žice se dobija kao:



$$m = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i^*, y_i^*)\,\Delta l_i := \int_C \rho(x, y)\, dl, \qquad [1.4]$$

odnosno, kao granična vrednost sume sve kvalitetnijih aproksimacija masa. Bitno je utrvditi gornje, jer je lako moguće da dve žice iste dužine nemaju uopšte imati istu masu (a kasnije će biti pokazano ni centar mase), ukoliko su različitog oblika.

Primer 1.2 *Data je žica, čija je funkcija linearne gustine $\rho(x,y) = xy^2 - 3$, a koja je smeštena na donju polukružnicu jediničnog kruga. Izračunati njenu masu.*

Rešenje.

Koristeći formulu [1.4], uz prigodnu parametrizaciju $x = \cos t$, $y = \sin t$ za $t \in [0, -\pi]$, dobija se:

$$m = \int\limits_C \rho(x,y)\,dl = \int\limits_0^{-\pi} (\cos t \sin^2 t - 3)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt =$$

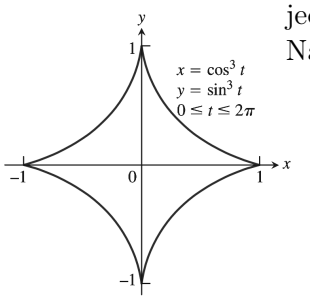
$$= \int\limits_0^{-\pi} (\cos t \sin^2 t - 3)\,dt = \frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{-\pi} + 3\pi = 3\pi.$$

Žica, dakle, ima masu od 3π jedinica mase.

□

Primer 1.3 *Naći masu žice oblika astroide $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$, za $t \in [0, 2\pi]$, ako je $\rho(x,y) = y$.*

Rešenje.



Usled simetrije krive u odnosu na na koordinatne ose, ukupna masa žice jednaka je dvostrukoj masi onog dela žice, koja se nalazi u desnoj poluravni. Na osnovu data parametrizacije, lako se vidi da je:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3\cos^2 t\,(-\sin t)]^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3\sin^2(\cos t)]^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 3\cos t \sin t.$$

Imajući na umu da je $\rho(x,y) = y$, odnosno da je $\rho(t) = \sin^3 t$, dobija se:

$$m = 3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos t\,dt = \frac{3}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (3 - 4\cos 2t + \cos 4t)\cos t\,dt = \frac{6}{5}.$$

Ovo implicira da je ukupna masa žice $\dfrac{12}{5}$.

□

Primer 1.4 *Naći masu žice, oblika heliksa, datog sa:*

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{5}(3\cos t\,\vec{i} + 3\sin t\,\vec{j} + 4t\,\vec{k}), \quad t \in [0, 8\pi],$$

čija je funkcija linearne gustine $\rho(x,y,z) = 1 + 5z$.

Rešenje.

Kako je, pre svega $\|\vec{r'}(t)\| = \dfrac{1}{5}\sqrt{9\sin^2 t + 9\cos^2 t + 16} = 1$, sledi odmah i da je:

$$m = \int\limits_C (1 + 5z)\,dl = \int\limits_0^{8\pi} (1 + 4t)dt = t + 2t^2\Big|_0^{8\pi} = \pi\,[8 + 128\pi].$$

Masa žice je, dakle, $\pi\,[8 + 128\pi]$.

□

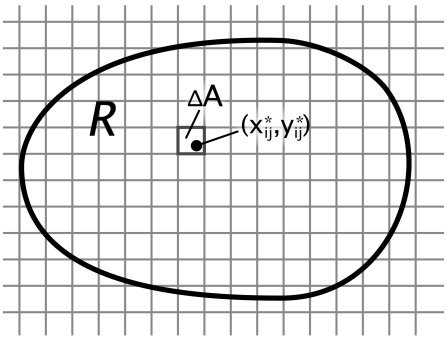
1.2 Arealna gustina i njoj odgovarajuća masa

Sličnim rezonovanjem, gornja priča se može uopštiti, te se novi koncepti uvesti. Za svaku se tanku, pljosnatu ploču lako može utrvditi ima li promenljivu ili konstantu arealnu gustinu, definisanu kao masa po jedinici površine. Formalnije, za svaku ravnu površ[2] Π u xy-ravni, konstantne ili promenljive gustine, može reći da ima konstantnu ili promenljivu *arealnu* (*površinsku*) *gustinu* datu sa, po pretpostavci, neprekidnom funkcijom nad Π:

Definicija 1.2 *Neka je data površ $\Pi \in \mathbb{R}^2$, i proizvoljna tačka (x, y), koja joj pripada. Tada se za ovu površ kaže da ima arealnu gustinu $\rho(x, y)$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji neko $\rho > 0$, tako da važi:*

$$\left|\rho(x, y) - \frac{\Delta m}{\Delta S}\right| < \varepsilon,$$

gde je ΔS deo površi Π, koja sadrži tačku (x, y), prečnika je manjeg od ρ i ima masu Δm.



Slika 1.1: Particija oblasti Π

Da bi se pronašao izraz za ukupna masu m površi Π, nužno je podeliti pravougaonu oblast R, koji sadrži čitavu Π na manje elementarne pravougaonike R_{ij}, potpuno jednakih dimenzija, i uzeti da je $\rho(x, y) \equiv 0$, ako $(x, y) \notin \Pi$. Ako se izabere tačka $(x^*_{ij}, y^*_{ij}) \in R_{ij}$, tada je masa dela površi, koju zauzima R_{ij} približno $\rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\,\Delta A$, gde je ΔA površina pravougaonika R_{ij}. Ako se ovome dodaju približne mase svih ostalih delova, dobija se aproksimacija ukupne mase:

$$m \approx \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\,\Delta A.$$

Povećanjem broja pravougaonika dobija se ukupna masa m površi:

$$m = \lim_{k,l\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} \rho(x^*_{ij}, y^*_{ij})\,\Delta A := \iint\limits_D \rho(x, y)\,dA \qquad [1.5]$$

kao granična vrednost svih aproksimacija.

Jedan primer će poslužiti kao ilustracija:

Primer 1.5 *Izračunati masu polukružnog diska radijusa a, gustine date sa $\rho(x, y) = x^2 + y^2$, koji se nalazi u desnoj poluravni, a čiji se centar nalazi u koordinatnom početku.*

Rešenje.

Po formuli [1.5] odmah sledi:

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\,dA = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dy\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \int\limits_0^a r^3\,dr\,d\theta = 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^a = \frac{a^4\pi}{2}.$$

Masa ovog polukružnog diska je, dakle, $\dfrac{a^4\pi}{2}$ jedinice mase.

□

[2] U nekim se izvorima ovakva površ još naziva i *laminom*.

Naravno, i ovde se može krenuti jedan korak dalje, posmatrajući, na primer, gustinu i masu nekakve ploče zakrivljene u prostoru. Prirodno, ovde se koriste površinski integrali.

Ako se, kao na Slici 1.2, konstruiše, ispod neke glatke površi S date sa paramatrizacijom $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\,\vec{i} + y(u,v)\,\vec{j} + z(u,v)\,\vec{k}$, particija oblasti Π, sačinjena od n oblasti (pravougaonika), tada se oblast jednog, i-tog, elementa Π_i računa kao $\Delta A_i = \Delta u_i \Delta v_i$, a njegova masa, shodno tome, kao:

$$m_i = \rho \Delta A_i = \rho \Delta u_i \Delta v_i,$$

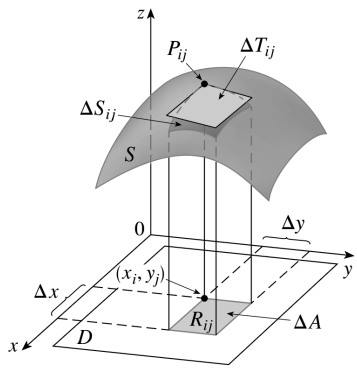
gde je ρ arealna gustina površine S.

Neka je, sada, u svakoj elementarnoj oblasti Π_i unutrašnja tačka (u_i, v_i) upravo ona najbliža koordinatnom početku[3]. Ako se u tački $(x_i, y_i, z_i) = \big(x(u_i,v_i), y(u_i,v_i), z(u_i,v_i)\big)$, na površi S, konstruiše tangentna ravan T_i, onda se površina dela S, koji se nalazi iznad Π_i, u oznaci S_i, može aproksimirati paralelogramom iznad Π_i, koji pripada T_i. I generalno, površina čitave S se može aproksimirati sa $\sum \Delta S_i \approx \sum \Delta T_i$. Kako je površina i-tog paralelograma nad Π_i:

$$\|\Delta u_i \vec{r_u} \times \Delta v_i \vec{r_v}\| = \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|\, \Delta u_i\, \Delta v_i,$$

gde je $\vec{r_u} = x_u\,\vec{i} + y_u\,\vec{j} + z_u\,\vec{k}$, a $\vec{r_v} = x_v\,\vec{i} + y_v\,\vec{j} + z_v\,\vec{k}$, to opet sugeriše da je njegova masa:

$$m_i = \rho\, \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|\, \Delta u_i\, \Delta v_i.$$



Slika 1.2: Masa m_i

Uzimajući da $n \to \infty$, dobijaju se sve finije aproksimacije ove vrednosti, što navodi na zaključak da se obrazac za dobijanje ukupne mase površi u prostoru realizuje kao granična vrednost sume aproksimiranih elementarnih masa:

$$m := \iint\limits_S \rho\, dS = \iint\limits_D \rho\, \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|\, dA. \qquad [1.6]$$

U nastavku sledi primer.

Primer 1.6 *Izračunati masu površi paraboloida jednačine $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ iznad ravni $z = 0$, ako joj je gustina data sa $\rho(x,y) = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}$.*

Rešenje.

Ovoj površi odgovara glatka parametrizacija $\vec{r}(u,v) = (u\cos v)\,\vec{i} + (u \sin v)\,\vec{j} + (9 - u^2)\,\vec{k}$, za $u \in [0,3]$ i $v \in [0, 2\pi]$. Odatle sledi da je:

$$\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{j} \\ \cos v & \sin v & -2u \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{matrix} \right\| = \|(2u^2 \cos v)\vec{i} + (2u^2 \sin v)\vec{j} + u\vec{k}\| = u\sqrt{4u^2 + 1}.$$

Ukoliko se dodatno primeti da je $\rho(u,v) = \sqrt{4u^2 + 1}$, prostom primenom obrasca [1.6] dobija se:

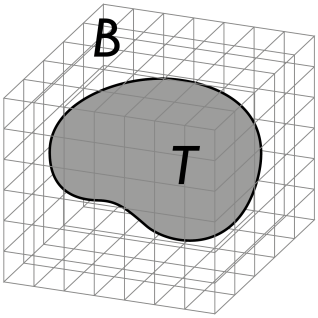
$$m = \iint\limits_D \rho(u,v)\, \|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\|\, dA = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^3 u\,(4u^2 + 1) du\, dv = 2\pi\, \frac{1}{8} \int\limits_1^{37} s\, ds = 171\pi.$$

□

[3] Zapravo, može se birati bilo koja tačka unutar D_i, jer njen položaj ne igra nikakvu ulogu kada $n \to \infty$.

1.3 Zapreminska gustina i njoj odgovarajuća masa

Na sličan način kao i do sad, ukoliko je $\rho(x, y, z)$ gustina tela[4], koje zauzima oblast T u $\mathbb{R}^3$, onda integral funkcije $\rho(x, y, z)$ po T daje ukupnu masu tela T. Da bi postalo jasnije zašto je to tako, dovoljno je posmatrati sliku.



Slika 1.3: Particija tela T.

Neka je dat neki kvadar B, koji prestavlja pravi nadskup tela T. Kada se taj kvadar B podeli na n potpuno jednakih delova B_{ijk}, svaki identične zapremine ΔV, ono se deli na isto toliko masenih elemenata koliko ih ima i T, jer je $\rho(x, y, z) \equiv 0$, ako $(x, y, z) \notin B$.

Ako se sada odabere proizvoljna tačka $(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk}) \in B_{ijk}$, tada je masa tog elementarnog dela tela, koje zauzima B_{ijk}, približno $\rho(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V$. Ako se ovome dodaju približne mase svih ostalih delova, dobija se aproksimacija ukupne mase tela B, data trostukom Rimanovom sumom:

$$m \approx \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} \rho(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V.$$

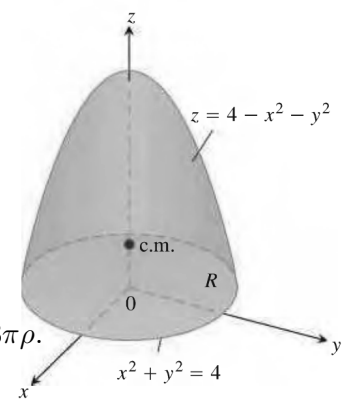
Povećanjem broja delova, na koliko je telo B podeljeno, do vrlo velikih vrednosti, dobija se fina aproksimacija ukupne mase tela, koja svoju granicu nalazi u:

$$m = \lim_{r,s,t\to\infty} \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t} \rho(x^*_{ijk}, y^*_{ijk}, z^*_{ijk})\,\Delta V := \iiint\limits_T \rho(x, y, z)\,dV. \qquad [1.7]$$

Dakle, iz tog razloga integral funkcije $\rho(x, y, z)$ po T daje ukupnu masu tela T. Predstojeći primer ilustrovaće primenu ovoga.

Primer 1.7 *Naći masu čvrstog tela konstantne gustine ρ, ograničeno odozdo diskom $D : x^2 + y^2 \le 4$ u ravni $z = 0$, i odozgo paraboloidom $z = 4 - x^2 - y^2$ [vidi sliku].*

Rešenje.



Prostom upotrebom identiteta [1.7], lako se dobija:

$$m = \iint\limits_D \int\limits_0^{4-x^2-y^2} \rho\,dz\,dy\,dx = \rho \iint\limits_D (4 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$$

Smenom u polarne $(r, \theta)-$koordinate, ovo postaje:

$$m = \rho \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2} (4 - r^2)\,r\,dr\,d\theta = 2\pi\rho \int\limits_0^{2} (4 - r^2)\,r\,dr = 2\pi\rho \left(2r^2 - \frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 8\pi\rho.$$

Masa ovakvog tela je, dakle, $8\pi\rho$ jedinica mase.

□

[4]sada *zapreminska* gustina, masa po jedinici zapremine.

Glava 2

Centri mase i momenti sile

U prethodnom je poglavlju naglašena osnovna razlika između tumačenja pojma mase u različitim prostorima, dok će ovde priča biti upotpunjena veličinama i pojmovima, koji su u tesnoj vezi sa masom objekta, kao što su *težište*, *centar mase* i *momenti sile*.

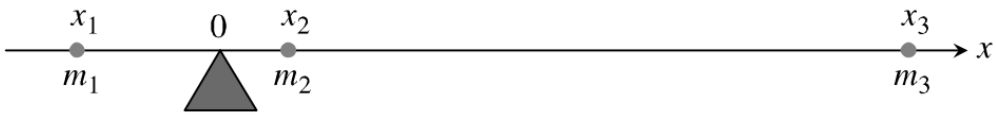
Najpre treba napomenuti razliku između centra mase i težišta:
Centrom mase[1] se naziva ona tačka na objektu (ili sistemu) u $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ili $\mathbb{R}^3$, u kojoj se se može smatrati da je čitava masa skoncentrisana. Ovo omogućuje da se čitav objekat tretira kao materijalna tačka, čija je masa jednaka ukupnoj masi sistema, i da se njegovo kretanje uporedi kretanjem ovakve materijalnih tačake. Posledično, ovo umnogome olakšava interpretaciju i optimizaciju matematičkog modela datog sistema.

Sa druge strane, *težište*[2], predstavlja tačku na objektu, gde bi se nalazio centar mase kada bi objekat bio konstantne gustine. Alternativno, definiše se i kao napadna tačka rezulttante vektorskog zbira sila teže svih materijalnih tačaka, koji sačinjavaju posmatrani sistem. Biće pokazano kako tela istih (u specijalnom slučaju čak i proporcionalnih) oblika, položaja i veličina imaju iste koordinate težišta, bez obzira na kvantitativnu vrednost konstantne gustine. Naravno, ovo ne važi kod centra mase, jer on razmatra situacije u kojima se gustina ponaša kao funkcija određenih promenljivih.

U dolazećim odlomcima biće reči kako na relativno lak način doći do centra mase, najpre za jednodimenzionalna i dvodimenzionalna tela, a potom posebno i za trodimenzionalna tela, upotrebom višestrukih integrala.

2.1 Centar mase jednodimenzionalnog sistema

Najpre, zamislimo primer raspoređenih masa m_1, m_2 i m_3 duž nekakve klackalice ili terazije, podržane u ravnotežnom položaju u tački oslonca. Bez gubitka na opštosti, može se konstuisati Dekartom koordinatni sistem, takav da x-osa leži duž klackalice, a da je tačka oslonca smeštena u koordinatnom početku. Naravno, klackalica može, ali ne mora biti u ravnotežnom položaju: ovo prvenstveno zavisi od veličine masa, kao i položaja tačke oslonca.



Sada, svaka masa m_k na klackalici vrši silu $m_k g$ nadole jednaku proizvodu inteziteta mase i gravitacionog ubrzanja. Svaka ovakva sila ima tendenciju premestiti klackalicu iz ravnotežnog položaja. Ovaj

[1] nekada se naziva i *baricentrom*, ili, manje precizno, *centrom gravitacije*.
[2] u nekim izvorima se navodi kao *centroida*.

efekat pomeranja naziva se *momentom sile*, *obrtnim momentom*, ili *torzionim momentom*, i izražava se proizvodom sile $m_k g$ sa rastojanjem x_k od koordinatnog početka, odnosno od tačke oslonca. Masa smeštena sa leve strane koordinatnog početka daju *negativan* momenat sile, a one smeštene sa desne strane *pozitivan* momenat sile.

Suma svih pojedinačnih momenata sila mere opštu tendenciju sistema da rotira oko tačke oslonca, i naziva se *momentom sile sistema*:

$$m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + \cdots + m_k g x_k = \sum_{i=1}^{k} m_i g x_i = g \sum_{i=1}^{k} m_i x_i. \qquad [2.1]$$

Veličina $\sum_{i=1}^{k} m_i x_i$ iz sume [2.1] zove se *momentom sistema*, *prvim momentom* ili još, u nekim izvorima, *momentom mase oko tačke oslonca*, u oznaci $\mathcal{M}_O$. Ona predstavlja sumu pojedinačnih momenata $m_1 x_1$, $m_2 x_2$, ..., $m_k x_k$. Jasno, sistem će mirovati ukoliko je $\mathcal{M}_O = 0$, jer će to značiti da se svi pojedinačni momenti međusobno poništavaju. Analogno važi i za prostore viših dimenzija.

S time u vezi, obično je od velikog značaja utvrditi tačan položaj, gde bi se oslonac trebao pomeriti, tako da se sistem nalazi u mirovanju, odnosno u koju tačku $\bar{x}$ treba premestiti oslonac da bi moment sile bio jednak nuli.

Momenat sile svake mase oko tačke oslonca je $(x_i - \bar{x})\, m_i\, g$. Imajući ovo na umu, ukoliko se suma [2.1] izjednači sa nulom, raspisivajući se dobija:

$$g \sum (x_i - \bar{x}) m_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum (x_i - \bar{x}) m_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum m_i x_i = \bar{x} \sum m_i,$$

odakle se lako dobija, izražavanjem $\bar{x}$:

$$\bar{x} := \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}. \qquad [2.2]$$

Tačka sa koordinatom $\bar{x}$ naziva se *centrom mase sistema.*

U praktičnim situacijama, često je potrebno naći centar mase neke žice ili tanke trake metala. Jasno je da se u ovakvim slučajevima ne može koristiti formula [2.2], jer ovde masa nije raspoređena u diskretnom nizu tačaka. Model, koji se tada primenjuje, služi se neprekidnom funkcijom za opisivanje rasporeda mase, a sume iz prethodnih formula se zamenjuju integralima, na način, koji se sada opisuje.

Ako se zamisli duga, tanka traka, koja leži duž x-ose od $x = a$ do $x = b$, podeljena na male delove mase Δm_i particijom intervala $[a, b]$, primetno je da je i-ti deo dužine Δx_i, i da leži na udaljenost približno x_k od koordinatnog početka. Bitno je primetiti tri činjenice:

i. Prvo, centar mase trake, $\bar{x}$, je približno jednak centru mase sistema, sačinjenog od materijalnih tačaka, svakih mase Δm_i;

ii. Drugo, momenat svakog k-tog dela trake oko koordinatnog početka je približno $x_k \Delta m_k$, tako da je ukupan momenat sistema približno suma svih $x_i \Delta m_i$;

iii. Treće, ako je linearna gustina trake u tački x_i jednaka $\delta(x_i)$ i δ je neprekidna funkcija, tada je Δm_i približno jednaka $\delta(x_i)\Delta x_i$.

Imajući gornje na umu, dolazi se do zaključka da je:

$$\bar{x} \approx \frac{\sum x_i\, \Delta m_i}{\sum \Delta m_i} \approx \frac{\sum x_i\, \delta(x_i)\, \Delta x_i}{\sum \delta(x_i)\, \Delta x_i}. \qquad [2.3]$$

Suma u brojiocu poslednjeg razlomka u [2.3] predstavlja Rimanovu sumu za neprekidnu funkciju $x\,\delta(x)$ na zatvorenom intervalu $[a,b]$, dok je suma u imeniocu Rimanova suma za funkciju $\delta(x)$ nad istim intervalom. Što se traka finije particioniše, aproksimacije u [2.3] postaju sve kvalitetnije, da bi se postupno došlo do njihove granične vrednosti:

$$\bar{x} := \frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}. \qquad [2.4]$$

Uputno je primetiti još jednu ideju: ukoliko se sa $M = \int_a^b \delta(x)\,dx$ označi ukupna masa sistema, a sa $\mathcal{M}_O$ momenat sistema oko tačke oslonca, formula [2.4] se može zapisati i u obliku:

$$\mathcal{M}_O = M\bar{x}. \qquad [2.5]$$

U zavisnosti od toga koji su podaci dostupni, oba identiteta se ravnopravno koriste.

Primer 2.1 *Pokazati da se centar mase prave, tanke žice konačne dužine i konstante gustine nalazi na sredini te žice, gde se tada njen centar mase poklapa sa njenim težištem.*

Rešenje.

Bez gubitka na opštosti, neka je žica položena na x-osu, tako da su joj krajevi redom na pravama $x = a$ i $x = b$. Kako je funkcija linearne gustine $\delta(x) \equiv \delta$ konstanta, važe sledeće kalkulacije:

$$\mathcal{M}_O = \delta \int_a^b x\,dx = \frac{\delta}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2), \qquad \text{i} \qquad M = \int_a^b \delta\,dx = \delta\int_a^b dx = \delta(b-a).$$

Primenom gornjeg, uz korištenje identiteta [2.5], dobija se:

$$\bar{x} = \frac{\mathcal{M}_O}{M} = \frac{\frac{\cancel{\delta}}{2}(b^2 - a^2)}{\cancel{\delta}(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Dakle, kada je gustina δ konstantne vrednosti, centar mase se poklapa sa težištem.

□

Međutim, u opštem je slučaju potrebno, na primer, odrediti momenat inercije ili centar mase neke žice ili krive u prostoju. Ovo se najlakše može uraditi služeći se krivolinijskim integralima i odgovarajućim formulama, koje se svode na [2.4]. Kada se zapravo sumiraju momenti svih infinitezimalnih delova žice dobija se:

$$\mathcal{M}_y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} x\,\delta(x_i^*, y_i^*)\,\Delta l = \int_C x\,\delta(x,y)\,dl. \qquad [2.6]$$

Pritom, formula [2.5] takođe je zadovoljena, jedino što se sad, na osnovu [1.4], masa M definiše kao $M = \int_C \delta(x,y)\,dl$.

Primer 2.2 *Naći centar mase žice gustine $\delta(x,y) = xy^2 - 3$ i radijusa a, a koja je smeštena na donju polukružnicu jediničnog kruga.* [*Vidi Primer 1.2 na strani 3.*]

Rešenje.

Parametrizacija date krive je $\vec{r}(x,y) = (\cos t)\,\vec{i} + (\sin t)\,\vec{j}$ za $t \in [0, -\pi]$, što implicira da $\|\vec{r'}(t)\| = 1$. Ovo dalje znači da su:

$$\mathcal{M}_y = \int_C x\,\delta(x,y)\,dl = \int_0^{-\pi}\left(\sin^2 t\,\cos^2 t - 3\cos t\right)dt = \frac{1}{8}\int_0^{-\pi}(1-\cos 4t)\,dt = -\frac{\pi}{8},$$

$$\mathcal{M}_x = \int_C y\,\delta(x,y)\,dl = \int_0^{-\pi}\left(\sin t\,\cos^3 t - 3\sin t\right)dt = \int_{-1}^{1} s^3\,ds - 3\int_0^{-\pi}\sin t\,dt = -6.$$

Na osnovu [2.5] i Primera 1.2, direktno sledi:

$$\bar{x} = \frac{\mathcal{M}_y}{M} = -\frac{\cancel{\pi}/8}{3\cancel{\pi}} = -\frac{1}{24} \quad \text{i} \quad \bar{y} = \frac{\mathcal{M}_x}{M} = \frac{-\cancel{6}}{\cancel{3}\pi} = -\frac{2}{\pi}.$$

Dakle, tačka sa kordinatama $\left(-\frac{1}{24}, -\frac{2}{\pi}\right)$ predstavlja centar mase ove žice.

□

2.2 Centar mase dvodimenzionalnog sistema

Ako je data konačna kolekcija materijalnih (tačkastih) tela, svaki neke mase m_i, rapoređenih u nekoj ravni, tako da se svako materijalno telo nalazi u nekoj tački (x_i, y_i), tada je ukupna masa sistema $M = \sum m_i$. Svako telo mase m_i mora imati momenat (mase) oko svake ose. Njegov momenat oko x-ose je, na primer, $m_i y_i$, a oko y-ose $m_i x_i$. I, generalno, momenti čitavog sistema oko ovih dveju osa su:

$$\begin{array}{ll} \text{Moment oko } x\text{-ose:} & \mathcal{M}_x = \sum m_i y_i, \\ \text{Moment oko } y\text{-ose:} & \mathcal{M}_y = \sum m_i x_i. \end{array}$$

Pri tome, x i y-koordinate centra mase sistema definišu se kao:

$$\bar{x} := \frac{\mathcal{M}_y}{M} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad \text{i} \quad \bar{y} := \frac{\mathcal{M}_x}{M} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}. \qquad [2.7]$$

Treba primetiti da, ako se izaberu $\bar{x}$ i $\bar{y}$ na ovaj način, sistem balansira oko prave jednačine $x = \bar{x}$, ali i oko prave jednačine $y = \bar{y}$. Na taj način, celokupan sistem se ponaša kao da joj je čitava masa skoncentrisana u tački $(\bar{x}, \bar{y})$. Kao i ranije, ova se tačka naziva *centrom mase sistema.*

Ipak, srazmerno je češći slučaj gde se traži centar mase neke tanke, pljosnate ploče. U takvim se slučajevima pretpostavlja da je masa podjednako raspoređena u svim delovima ploče (površi, u opštem slučaju), dok formule, kojima se računaju koordinate nužno sadrže u sebi integrale, radije nego sume, i to na sledeći način.

Neka je data površ u xy-ravni, podeljena na trake paralelne nekoj od osa[3]. Kako je centar mase jedne proizvoljne trake je u tački $(\tilde{x}, \tilde{y})$, momenat te trake oko x-ose je tada $\tilde{y}\Delta m$, a njen momenat oko y-ose $\tilde{x}\Delta m$. Jednačine [2.7] primenjena na ovu traku dobijaju sledeći oblik:

$$\bar{x} = \frac{\mathcal{M}_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\,\Delta m}{\sum \Delta m}, \qquad \text{i} \qquad \bar{y} = \frac{\mathcal{M}_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\,\Delta m}{\sum \Delta m}.$$

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, obe ove sume su Rimanove sume, koje se prilbližavaju integralima što se kvalitetnije vrši particija oblasti na sve tanje i tanje trake. U graničnom slučaju:

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,dm}{\int dm}, \qquad \text{i} \qquad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,dm}{\int dm}. \qquad [2.8]$$

Postupak za precizno određivanje koordinata centra mase je, dakle sledeći: nacrta se površ u xy-ravni, i obeleži proizvoljna traka paralelna jednoj koordinatnoj osi. Tada se izrazi masa trake dm i koordinate centra mase trake $(\tilde{x}, \tilde{y})$ u funkciji od x i y. Na kraju, potrebno je samo integraliti $\tilde{x}\,dm$, $\tilde{y}\,dm$ i dm u granicama integracije ograničenih položajem površi u ravni.

Ipak, neki puta je teže izvesti izvesne zaključke korštenjem korištenjem ovoga pristupa, tako da se u nastavku opisuje metoda određivanja momenta oko date ose njoj ekvivalentna, koja primenjuje dvostuke integrale. Ovo je naročito korisno ukoliko se pretpostavi da je posmatrana površ smeštena između grafika funcija $y = f(x)$ i $y = g(x)$.

[3] za početak će se razmatrati slučaj kada su paralelne y-osi; drugi slučaj je potpuno analogan.

Neka je, dakle, data ravna površ, koja zauzima oblast Π, i ima funkciju (arealne) gustine $\delta(x,y)$. Kako je momenat tela oko date ose definisan kao proizvod mase tela i njegovog rastojanja od ose, sledi da je, ako se Π podeli na manje pravougaone oblasti, masa svake elementarne oblasti Π_{ij} približno jednaka $\delta(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A$, tako da se momenat Π_{ij} oko x-ose može aproksimirati sa $[\delta(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A]y_{ij}^*$.

Ako se sada ovome dodaju momenti svih delića, dobija se izraz za računanje ukupnog momenta čitave površi oko x-ose:

$$\mathcal{M}_x = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^*\,\delta(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A := \iint\limits_{\Pi} y\,\delta(x,y)\,dA.$$

Slično, momenat oko y-ose se računa kao:

$$\mathcal{M}_y = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^*\,\delta(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A := \iint\limits_{\Pi} x\,\delta(x,y)\,dA.$$

Kao i ranije, centar mase $(\bar{x},\bar{y})$ se definiše tako da važi $M\bar{x} = \mathcal{M}_y$ i $M\bar{y} = \mathcal{M}_x$, i površ Π se ponaša kao da je njena čitava masa skoncentrisana u centru mase. Na taj način se ona nalazi u stanju mirovanja kada je podržana u centru mase.

Prema tome, koordinate $(\bar{x},\bar{y})$ centra mase površi, koja zauzima oblast Π, i ima funkciju (arealne) gustine $\delta(x,y)$ su sledeće:

$$\bar{x} := \frac{\mathcal{M}_y}{M} = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Pi} x\,\delta(x,y)\,dA \qquad \text{i} \qquad \bar{y} := \frac{\mathcal{M}_x}{M} = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Pi} y\,\delta(x,y)\,dA, \tag{2.9}$$

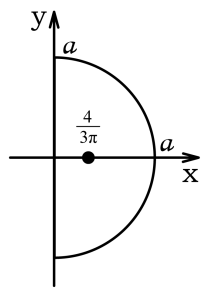
gde je masa M data sa: $M = \iint_{\Pi} \delta(x,y)\,dA$.

Primer 2.3 *Polukružni disk radijusa a, čiji centar leži u koordinatnom početku, smešten je u desnoj poluravni. Naći koordinate njegovog težišta.*

Rešenje.

Najpre, masa ovakvog polukružnog diska je dvostuki integral gustine nad oblasti diska. Međutim, kako se traže koordinate težišta, gustina $\delta(x,y)$ se tretira kao neka konstanta δ. Smenom u polarne koordinate, izraz za masu diska postaje:

$$M = \delta\iint\limits_{\Pi} dA = \delta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r\,dr\,d\theta = \delta\pi\frac{r^2}{2}\Big|_0^a = \frac{\delta}{2}\,a^2\pi$$



Na isti način, koristeći smenu u polarne koordinate, momenti dobijaju oblike:

$$\mathcal{M}_y = \delta\iint\limits_{\Pi} x\,dA = \delta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\cos\theta\,dr\,d\theta = \frac{\delta a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{2\delta}{3}a^3,$$

$$\mathcal{M}_x = \delta\iint\limits_{\Pi} y\,dA = \delta\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a r^2\sin\theta\,dr\,d\theta = \frac{\delta a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta = 0.$$

Koristeći identitet [2.9] direktno sledi da je $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$, a da je $\bar{y} = 0$. Ovo su redom tražene x i y-koordinate težišta.

□

Primer 2.4 *Naći koordinate centroide tanke ploče gustine $\delta(x,y)=1$, koja pokriva beskonačnu oblast ispod krive $y=f(x)=e^{-x^2/2}$, u prvom kvadratnu.*

Rešenje.

Prvi zadatak je odrediti masu ove oblasti, koja se svodi na rešavanje određenog tipa nesvojstvenih integrala. Koristeći standardni metod za rešavanje ovakvih integrala (kvadriranje, smena u polarne koordinate, rešavanje dvostrukog integrala), dobija se:

$$M=\iint\limits_{\Pi}\delta\,dA=\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2/2}\,dx=\left(\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty}r\,e^{-r^2/2}\,dr\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2\pi\,e^{-r^2/2}\Big|_{\infty}^{0}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2\pi}.$$

Dalje, kako oblast Π predstavlja zapravo oblast u prvom kvadrantu ispod grafika krive $y=e^{-x^2/2}$, i kako je 0 regularna tačka, a tačka ∞ tačka prividnog singulariteta ove funkcije, sledi:

$$\mathcal{M}_y=\iint\limits_{\Pi}x\,\delta(x,y)\,dA=\int\limits_0^{\infty}x\,e^{-x^2/2}\,dx=e^{-x^2/2}\Big|_{\infty}^{0}=1,$$

Istovremeno, na osnovu ranijih računa, važi:

$$\mathcal{M}_x=\iint\limits_{\Pi}y\,\delta(x,y)\,dA=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty}e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

odatle i sledi da je:

$$\bar{x}=\frac{\mathcal{M}_y}{M}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\quad\text{i}\quad\bar{y}=\frac{\mathcal{M}_x}{M}=\frac{1}{2}.$$

□

Primetno je da je, u Primeru 2.3, dobijeno da je $\bar{y}=0$. Ovo nije slučajno, već je uzrokovano (neformalno govoreći) „lepim” geometrijskim osobinama polukružnog diska, konkretno njene simetričnosti u odnosu na x-osu. O ovome govori naredna teorema:

Teorema 2.1 (Princip Simetrije) *Ako je objekat Π simetričan oko neke ose, tako da je i funkcija gustine pravilno raspoređena u odnosu na nju, tada je momenat objekta oko te ose jednak nuli, a njen centar mase leži na osi simetrije.*

Dokaz.

Kako je objekat simetričan, uvek je moguće konstruisati pravougli (x,y)-koordinatni sistem, tako da je objekat simetričan u odnosu na y-osu takvog sistema, i da se nalazi ispod grafika krive $y=f(x)$, iznad grafika krive $y=g(x)$, a između pravih $x=-\xi$ i $x=\xi$. Kako je funkcija gustine δ tada pravilno raspoređena oko y-ose, moguće je pretpostaviti, bez gubitka na opštosti, da je δ funkcija jedne promenljive, x. Važi dakle:

$$(f-g)(-x)=(f-g)(x)\qquad\text{i}\quad\delta(-x)=\delta(x).$$

Tada je po definiciji:

$$\mathcal{M}_y=\iint\limits_{\Pi}x\,\delta(x)\,dA=\int\limits_{-\xi}^{\xi}\int\limits_{g(x)}^{f(x)}x\,\delta(x)\,dy\,dx=\int\limits_{-\xi}^{\xi}x\,(f-g)(x)\,\delta(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\xi}^{0}(-x)\,(f-g)(-x)\,\delta(-x)\,d(-x)+\int\limits_0^{\xi}x\,(f-g)(x)\,\delta(x)\,dx=0.$$

Odatle direktno sledi, primenom [2.9], da je i $\bar{x}=0$, te se zaključuje da centar mase leži na ovako konstruisanoj y-osi (osi simetrije).

■

2.3 Centar mase trodimenzionalnog sistema

U osnovi, razmatranje centra mase trodimenzionalnog sistema se se ne razlikuje toliko puno od pomenutog dvodimenzionalnog, kao posledica relativno jednostavnog svođenja trostukog inegrala na dvostruki. Definicija momenta je, dakle, potpuno analogna: momenat tela B oko koordinatne ravni je definisan kao trostuki integral nad B rastojanja od tačke (x, y, z) u B do date ravni, prethodno pomnoženo gustinom tela u toj tački.

Na primer, (prvi) momenat oko yz-ravni se računa sledećim integralom:

$$\mathcal{M}_{yz} := \iiint\limits_B x\,\delta(x, y, z)\,dV.$$

Dalje, *centar mase* se lako dobija zahvaljujući izrazu za momente oko koordinatnih ravni, jer se definiše kao tačka u (ili van) datog tela, čije koordinate uvek zadovoljavaju relacije $\mathcal{M}_{yz} = M\bar{x}$, $\mathcal{M}_{xz} = M\bar{y}$ i $\mathcal{M}_{xy} = M\bar{z}$.

Prema tome, ako je je $\delta = \delta(x, y, z)$ gustina u tački $(x, y, z) \in B$, koordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ centra mase tela B, nad kojim je definisana funkcija (arealne) gustine, su sledeće:

$$\bar{x} := \frac{\mathcal{M}_{yz}}{M} = \frac{1}{M}\iiint\limits_B x\,\delta\,dV, \qquad \bar{y} := \frac{\mathcal{M}_{xz}}{M} = \frac{1}{M}\iiint\limits_B y\,\delta\,dV \quad \text{i} \quad \bar{z} := \frac{\mathcal{M}_{xy}}{M} = \frac{1}{M}\iiint\limits_B z\,\delta\,dV,$$

Treba tu dodati, da se, u slučaju dvodimenzionalnih objekta (na primer neke tanke, ravne površi Π u xy-ravni), momenti oko osa računaju tako što se postavi da je $z \equiv 0$. Na taj način, prvi momenat oko y-ose, na primer, postaje dvostruki integral nad Π rastojanja od površi do ose pomnožene sa datom gustinom.

Primer 2.5 *Naći koordinate težišta tela T smeštenog u prvom oktantu, koji je ograničen odozgo kupom $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, a odozdo sa ravni $z = 0$.*

Rešenje.

Zadatak će biti rešen razmatranjem mase i momenata ovoga tela u cilindričnom koordinatnom sistemu. Imajući u vidu da se ovo telo nalazi u prvom oktantu, masa ovog tela jednaka je:

$$M = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^2\int\limits_0^r r\,\delta\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\delta\pi}{2}\int\limits_0^2 r^2\,dr = \frac{4\pi}{3}\delta,$$

a momenti oko koordinatnih ravni su:

$$\mathcal{M}_{yz} = \iiint\limits_T x\,\delta\,dV = \delta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^2\int\limits_0^r r^2\cos\theta\,dz\,dr\,d\theta = \delta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^2 r^3\cos\theta\,dr\,d\theta = 4\delta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta = 4\delta,$$

$$\mathcal{M}_{xz} = \iiint\limits_T y\,\delta\,dV = \delta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^2\int\limits_0^r r^2\sin\theta\,dz\,dr\,d\theta = \delta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^2 r^3\sin\theta\,dr\,d\theta = 4\delta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta = 4\delta,$$

$$\mathcal{M}_{yz} = \iiint\limits_T z\,\delta\,dV = \delta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^2\int\limits_0^r z\,r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\delta}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^2 r^3\,dr\,d\theta = 2\delta\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \pi\delta.$$

Zadatak je završen kada se izračunaju odgovarajući količnici, odakle se dobija da su koordinate težišta ovog tela T upravo $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{\mathcal{M}_{yz}}{M}, \frac{\mathcal{M}_{xz}}{M}, \frac{\mathcal{M}_{xy}}{M}\right) = \left(\frac{3}{\pi}, \frac{3}{\pi}, \frac{3}{2}\right)$.

□

Primer 2.6 *Data je homogena lopta u $\mathbb{R}^3$, radijusa $a > 0$, sa centrom u koordinantnom početku. Naći težište one hemisfere $\mathcal{H}$ ove lopte, kojoj pripadaju sve tačke za koje važi $0 \leq x \leq a$.*

Rešenje.

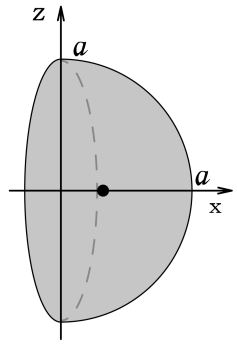
Najpre, na osnovu naglašene simetrije ovakvoga tela, *Principa simetrije*, te na osnovu gornjih razmatranja, lako se pokazuje da je $\bar{y} = 0$ i $\bar{z} = 0$. Da bi se odredile koordinate težišta, treba još jedino izračunati vrednost $\bar{x}$, a ovo se najlakše radi primenom odgovarajućeg obrasca.

Masa ove oblasti se definiše kao trostruki integral gustine nad zapreminom hemisfere. Koristeći integraciju u sfernim koordinatama, lako se dobija da je ona sledeće vrednosti:

$$M = \delta \iiint\limits_{\mathcal{H}} dV = \delta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{a} r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{\delta a^3 \pi}{3} \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi \, d\varphi = \frac{2\delta}{3} a^3 \pi.$$

Sa druge strane, kako je moment hemisfere oko yz-ravni dat sa:

$$\mathcal{M}_{yz} = \delta \iiint\limits_{\mathcal{H}} x \, dV = \delta \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{a} r^3 \sin^2\varphi \cos\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta = \frac{\delta a^4}{4} \frac{\pi}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta = \frac{\delta}{4} a^4 \pi,$$



direktno po definiciji važi:

$$\bar{x} = \frac{\mathcal{M}_{yz}}{M} = \frac{\frac{\delta}{4} a^4 \pi}{\frac{2\delta}{3} a^3 \pi} = \frac{3a}{8}.$$

Težište ove hemisfere je, dakle, u tački $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{3a}{8}, 0, 0\right)$.

□

2.4 Papusova teorema položaja težišta

U trećem veku nove ere, aleksandrijski polihistor Papus otkrio je kako se težište unije dve površi, koje se međusobno ne seku, nalazi na pravoj, koja spaja njihova pojedinačna težišta. Preciznije:

Teorema 2.2 (Teorema položaja težišta) *Ako se pretpostavi da su m_1 i m_2 redom mase tela T_1 i T_2 u $\mathbb{R}^3$, koje se međusobno ne seku, a da su $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ vekori položaja odgovarajućih težišta tela T_1 i T_2, tada je težište unije $T_1 \cup T_2$ obeju tela određeno vektorom položaja:*

$$\vec{r} = \frac{M_1 \vec{r_1} + M_2 \vec{r_2}}{M_1 + M_2}. \qquad [2.10]$$

Jednačina [2.10] *poznata je kao jednačina* Papusove teoreme položaja težišta. *Ukoliko ima više od dva tela, njih ukupno n, od kojih se nijedna dva međusobno ne seku, dokle god je njihov broj konačan, formula se prirodno generalizuje do:*

$$\vec{r} = \frac{M_1 \vec{r_1} + M_2 \vec{r_2} + \cdots + M_n \vec{r_n}}{M_1 + M_2 + \cdots + M_n}. \qquad [2.11]$$

Dokaz.

Ova teorema biće dokazana u prostoru $\mathbb{R}^3$, odakle direktno sledi da važi i za prostore nižih dimenzija. Dokaz za prostore viših dimenzija u potpunosti je analogan ovome, i ukazuje na univerzalnost ove teoreme i njenu nezavisnost od broja tela, koji se posmatraju.

Bez gubitka na opštosti, neka se tela T_1 i T_2, masa M_1 i M_2, nalaze u prvom oktantu nekog pravougaonog koordinatnog početka, tako da su im koordinate težišta $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ i $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$, respekivno. Ovo direktno znači i da su vektori položaja njihovih težišta redom $\vec{r}_1 = \bar{x}_1\vec{i} + \bar{y}_1\vec{j} + \bar{z}_1\vec{k}$ i $\vec{r}_2 = \bar{x}_2\vec{i} + \bar{y}_2\vec{j} + \bar{z}_2\vec{k}$.

Dati sistem se može uprostiti ako se tela T_1 i T_2 tretiraju kao materijalne tačke masa M_1 i M_2, smeštene u tačkama sa odgovarajućim vektorima položaja $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$. Unija ova dva tela, kao i tela pojedinačno, ima momente oko svih koordinatnih ravni. Iz ranije apsolviranog (vidi [2.1]), ukupan momenat diskretnog sistema materijalnih tačaka jednak je zbiru svih pojedinačnih momenata:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_{yz}^{(1)} &= M_1\bar{x}_1 \\ \mathcal{M}_{yz}^{(2)} &= M_2\bar{x}_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{yz}^{(uk)} = \mathcal{M}_{yz}^{(1)} + \mathcal{M}_{yz}^{(2)} = M_1\bar{x}_1 + M_2\bar{x}_2.$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_{xz}^{(1)} &= M_1\bar{y}_1 \\ \mathcal{M}_{xz}^{(2)} &= M_2\bar{y}_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{xz}^{(uk)} = \mathcal{M}_{xz}^{(1)} + \mathcal{M}_{xz}^{(2)} = M_1\bar{y}_1 + M_2\bar{y}_2.$$

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{M}_{xy}^{(1)} &= M_1\bar{z}_1 \\ \mathcal{M}_{xy}^{(2)} &= M_2\bar{z}_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M}_{xy}^{(uk)} = \mathcal{M}_{xy}^{(1)} + \mathcal{M}_{xy}^{(2)} = M_1\bar{z}_1 + M_2\bar{z}_2.$$

Kada se primeti da je ukupna masa tela $T_1 \cup T_2$ jednaka zbiru pojedinačnih masa tela M_1 i M_2, $M^{(uk)} = M_1 + M_2$, lako je po definiciji doći do izraza za koordinate $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ težišta unije dva tela:

$$\bar{x} = \frac{\mathcal{M}_{yz}^{(uk)}}{M^{(uk)}} = \frac{M_1\bar{x}_1 + M_2\bar{x}_2}{M_1 + M_2}, \quad \bar{y} = \frac{\mathcal{M}_{xz}^{(uk)}}{M^{(uk)}} = \frac{M_1\bar{y}_1 + M_2\bar{y}_2}{M_1 + M_2} \quad \text{i} \quad \bar{z} = \frac{\mathcal{M}_{xy}^{(uk)}}{M^{(uk)}} = \frac{M_1\bar{z}_1 + M_2\bar{z}_2}{M_1 + M_2}.$$

Ove tri skalarne jednačine mogu se zameniti jednom vektorskom, koja i predstavlja jednačinu Papusove teoreme položaja težišta:

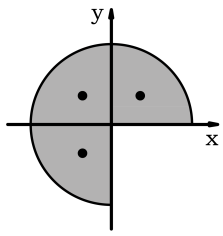
$$\vec{r} = \frac{M_1\vec{r_1} + M_2\vec{r_2}}{M_1 + M_2},$$

gde je $\vec{r}$ vektor položaja težišta unije dva tela, $\vec{r} = \bar{x}\vec{i} + \bar{y}\vec{j} + \bar{z}\vec{k}$.

Na kraju, treba napomenuti još jedino da se formula [2.11] dokazuje matematičkom indukcijom.

■

Primer 2.7 *Data su tri površi, takvog oblika da zajedno formiraju površ, koja predstavlja tri četvrtine centralnog jediničnog kruga. Naći pojedinačna težišta, kao i težište čitavog sistema.*



Rešenje.

Zadatak će se rešiti na taj način što će biti određene koordinate težišta jedne četvrtine jediničnog kruga, a onda, na osnovu podudarnosti tri tela, doći do koordinata težišta ostalih tela. Drugi deo zadatka biće urađen primenom Teoreme 2.2.

Neka se posmatra četvrtina jedničnog kruga, data sa $\vec{r}(\theta) = (\cos\theta)\vec{i} + (\sin\theta)\vec{j}$, za $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Njeno težište ima koordinate:

$$\bar{x}_1 = \frac{\mathcal{M}_y}{M} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 \cos\theta \, dr \, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r \, dr \, d\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3\pi}, \qquad \text{i} \qquad \bar{y}_1 = \frac{\mathcal{M}_x}{M} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r \, dr \, d\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3\pi}.$$

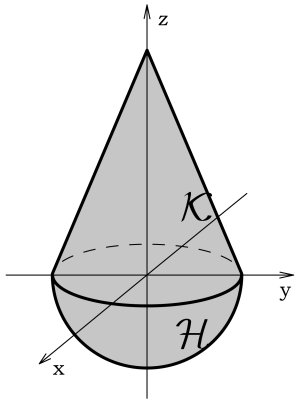
Ovo znači da su koordinate težišta ostale dve površi $(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = \left(-\frac{4}{3\pi}, \frac{4}{3\pi}\right)$ i $(\bar{x}_3, \bar{y}_3) = \left(-\frac{4}{3\pi}, -\frac{4}{3\pi}\right)$. Dalje, primenom Teoreme 2.2, dobijaju se koordinate težišta čitavog sistema $(\bar{x}, \bar{y})$:

$$\bar{x} = \frac{M\bar{x}_1 + M\bar{x}_2 + M\bar{x}_3}{M + M + M} = -\frac{4}{9\pi}, \qquad \text{i} \qquad \bar{y} = \frac{M\bar{y}_1 + M\bar{y}_2 + M\bar{y}_3}{M + M + M} = \frac{4}{9\pi}.$$

□

Primer 2.8 *Neka je data prava kupa $\mathcal{K}$ baze radijusa $r > 0$ i visine $h > 0$, ispod koje je konstruisana donja hemisfera $\mathcal{H}$ radijusa r, tako da se baza kupe potpuno poklapa sa bazom hemisfere. Ako se zna da je težište prave kupe na četvrtini rastojanja od baze do vrha, a da je težište hemisfere na tri osmine rastojanja od njene baze do vrha, kakav odnos mora postojati između r i h, pa da se težište tela $\mathcal{K}\cup\mathcal{H}$ nalazi na zajedničkoj bazi ova dva tela?*

Rešenje.



Bez gubitka na opštosti, unija tela $\mathcal{K}\cup\mathcal{H}$ može se posmatrati u takvom pravougaonom koordinatnom sistemu, u kojem se se zajednička baza nalazi čitava u ravni $z = 0$, tako da joj je centar smešten u koordinatnom početku, a da se kupa nalazi iznad ove ravni, a hemisfera ispod. Ovakav izbor koordinatnog sistema omogućuje uprošćavanje zadatka, jer pitanje praktično postaje utvrđivanje z-koordinate težišta (a ovo se lako određuje iz skalarnih jednačina *Papusove teoreme*), dok su x i y-koordinate $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

Kako su već u postavci zadatka naglašeni položaji težišta svakog zasebnog tela, njihove z-koordinate u ovom koordinatnom sistemu postaju $\bar{z}_{\mathcal{K}} = \frac{1}{4}h$ i $\bar{z}_{\mathcal{H}} = -\frac{3}{8}r$. Pritom su pojedinačne mase:

$$M_{\mathcal{K}} = \delta\, V_{\mathcal{K}} = \frac{\delta}{3}\, r^2\, h\, \pi \qquad \text{i} \qquad M_{\mathcal{H}} = \delta\, V_{\mathcal{H}} = \frac{2\delta}{3}\, r^3\, \pi.$$

Sada, kako težište tela $\mathcal{K}\cup\mathcal{H}$ mora ležati u ravni $z = 0$, sledi da i njena z-koordinata (ovde obeležena sa $\bar{z}$) mora biti jednaka nuli. Posmatranjem skalarnih jednačina *Papusove teoreme*, postaje jasno da se ovo dešava ako i samo ako je ukupan momenat oko xy-ravni jednak nuli, odnosno kada je:

$$0 = \mathcal{M}_{xy}^{(uk)} = M_{\mathcal{K}}\, \bar{z}_{\mathcal{K}} + M_{\mathcal{H}}\, \bar{z}_{\mathcal{H}} = \frac{1}{4}\frac{\delta}{3}\, r^2\, h^2\, \pi - \frac{3}{8}\frac{2\delta}{3}\, r^4 \pi = \frac{\delta}{12}\, r^2 \pi \left(h^2 - 3r^2\right),$$

a kako je član $\frac{\delta\, r^2 \pi}{12}$ po uslovima zadatka različit od nule, sledi da mora važiti $h = \sqrt{3}r$.

Dakle, da bi se težište tela $\mathcal{K}\cup\mathcal{H}$ našlo na zajedničkoj bazi ova dva tela, veličina h mora biti $\sqrt{3}$ puta veća od r.

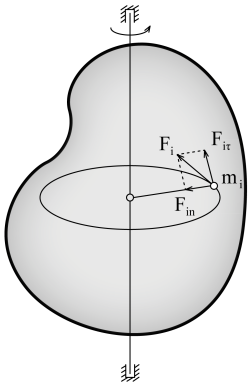
$\square$

Glava 3

Momenti inercije

Momenti $\mathcal{M}_x$ i $\mathcal{M}_y$, koji se inače koriste za lakše utvrđivanje koordinata centra mase, se nekada nazivaju i *prvim* momentima oko neke ose. U svakom slučaju, one se definišu kao proizvod mase i rastojanja. Međutim, u ovoj glavi će biti razmatran drugačiji tip momenata, tzv. *drugi*[1] *momenat*, ili, češće, *momenat inercije*. Štaviše, biće pokazano da, kao što masa predstavlja meru težnje tela da se opire pravolinijskom kretanju, tako i momenat inercije predstavlja meru težnje tela da se opire *rotacionom kretanju*.

U tehnici i fizici, momenat inercije se koristi kako bi se odredilo vreme, koje je potrebno telu određene mase da dostigne zadatu ugaonu brzinu oko neke ose. Što je veći momenat inercije, to se veća sila mora uložiti kako bi telo dostiglo datu brzinu.



Na primer, neka se neko čvrsto telo može bez trenja obrtati oko nepokretne ose, pod dejstvom rezultujuće sile $\vec{F}$. Ono se može razložiti na veliki broj materijalnih tačaka mase m_i, i vektora položaja $\vec{r}_i$, na koje dejstvuju sile $\vec{F}_i$. Pri obrtanju tela oko ose, svaka njegova tačka opisuje kružnu putanju poluprečnika $\vec{r}_i$, čiji se centri nalaze na osi rotacije. Sila $\vec{F}_i$ može se razložiti na tangencijalnu $\vec{F}_{i\tau}$ i normalnu komponentu $\vec{F}_{in}$.

Pod dejstvom sile $\vec{F}_{i\tau}$, koja dejstvuje u pravcu tangente, materijalna tačka dobija ugaono ubrzanje $\vec{\alpha}$, koje se može predstaviti sledećom jednakošću:

$$\vec{F}_{i\tau} = m_i\,\vec{a}_{i\tau} = m_i(\vec{\alpha} \times \vec{r}_i),$$

gde je $a_{i\tau} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_i$. Momenat sile $\vec{F}_{i\tau}$ tada iznosi:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\tau} = \vec{r}_i \times m_i\,(\vec{\alpha} \times \vec{r}_i).$$

Posle razvijanja dvostrukog vektorskog proizvoda i, imajući u vidu da je $r_i \perp \vec{\alpha}$, prethodna jednačina se može zapisati i kao:

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\tau} = m_i\,r_i^2\,\vec{\alpha}.$$

Ovo govori da će, pri istom dejstvu momenta sile, ugaono ubrzanje $\vec{\alpha}$ zavisiti od izraza $m_i r_i^2$, a da će, za isti momenat sile i masu m_i, ugaono ubrzanje $\vec{\alpha}$ zavisiti od rastojanja $\vec{r}_i$ te mase od ose obrtanja.

[1] nazivi *prvi* i *drugi* momenti potiču od uopštenja pojma $\mathfrak{p}$-tog momenta oko neke date tačke ξ, definisanog sa:

$$M_{x=\xi}^{(\mathfrak{p})} = \int_a^b (x-\xi)^{\mathfrak{p}}\,f(x)\,dx.$$

Sumiranjem jednačina poput gornje, za sve materijalne tačke krutog tela dobija se ukupni momenat sila u odnosu na osu rotacije, koji se sa njom poklapa po pravcu i smeru:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2\, \vec{\alpha} = \vec{\alpha} \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2,$$

jer je $\vec{\alpha}$ isto za celo kruto telo. Pri tome, veličina:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 =: \mathcal{I} \qquad [3.1]$$

naziva se *momenat inercije* $\mathcal{I}$ u odnosu na osu rotacije. Uočljivo je odavde da je inercijalno svojstvo tela, koje rotira, određeno ne samo njegovom masom, nego i rasporedom te mase. Momenat inercije $\mathcal{I}$ nije vektorska veličina, jer se ne menja pri promeni smera obrtanja tela, ali se menja pri promeni položaja i pravca ose rotacije, usled čega je zavisna skalarna veličina.

Da bi se izračunao momenat inercije tela, prema jednačini [3.1], neoprhodno je poznavati osu rotacije i raspored masa u odnosu na tu osu. U slučaju da je telo neprekidna homogena fizička sredina na koju se može primeniti infinitezimalni račun, onda se momenat inercije može izračunati po jednačini:

$$\mathcal{I} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i\, r_i^2 := \int_0^m r^2\, dm,$$

gde je r rastojanje mase dm od ose rotacije.

Koristeći gustinu tela $\delta = \lim\limits_{\Delta v\to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}$, gde je dV element zapremine, momenat inercije tela može se izraziti u obliku:

$$\mathcal{I} := \delta \int_V r^2\, dV, \qquad [3.2]$$

gde se integracija vrši po čitavoj zapremini tela. Mada postoje direktnije metode određivanja momenta inercije, ovde će biti pokazan jedan primer određivanja po definiciji.

Primer 3.1 *Neka je dat tanki, ravnomerni štap mase m i dužine L. Naći njegov momenat inercije oko ose koja prolazi kroz tačku A, na proizvoljnoj udaljenosti l od jednog kraja.*

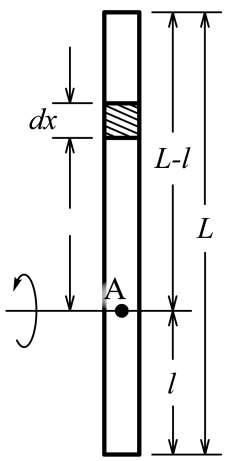
Rešenje.

Kao element mase dm, posmatra se jedan mali deo štapa dužine dx, na rastojanju x od tačke A. Pošto je štap ravnomeran (ovo znači da ima konstantu gustinu), može se reći da je:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{L}, \qquad \text{ili} \qquad dm = \frac{m}{L}\, dx.$$

Tada je:

$$\mathcal{I}_A = \int x^2\, dm = \frac{m}{L} \int_{L-l}^{-l} x^2\, dx = \frac{m}{L} \frac{x^3}{3} \Big|_{-l}^{L-l} = \frac{1}{3}(L^2 - 3Ll + 3l^2).$$



Iz ovog opštog izraza može se naći momenat inercije oko ose kroz ma koju tačku štapa. Na primer, ako je osa na levom kraju, onda je $l = 0$ i $\mathcal{I} = \frac{1}{3}mL^2$, a ako prolazi kroz centar štapa, $l = \frac{L}{2}$ i $\mathcal{I} = \frac{1}{12}mL^2$.

□

3.1 Momenat inercije dvodimenzionalnog sistema

Kao i kod momenata mase, koncept se lako može generalizovati da bi se odredili momenti oko, na primer, x ili y-ose površi promenljive gustine. Ovi momenti inercije su označeni sa $\mathcal{I}_x$ i $\mathcal{I}_y$, i, u oba slučaja, predstavljaju proizvod mase i kvadrata rastojanja od odgovarajuće ose:

$$\mathcal{I}_x := \iint\limits_{\Pi} (y^2)\,\delta(x,y)\,dA \qquad \text{i} \qquad \mathcal{I}_y := \iint\limits_{\Pi} (x^2)\,\delta(x,y)\,dA.$$

Zapravo, ovi integrali označavaju Rimanove integrale. Naime, kada se aporoksimira momenat inercije svakog pojedinačnog elementa površi Π oko x-ose, pa se odredi granica sume sve finijih aproksimacija, kao zbir se dobija *ukupan momenta inercije površi oko x-ose*:

$$\mathcal{I}_x := \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (y_{ij}^*)^2\,\delta(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint\limits_{\Pi} y^2\,\delta(x,y)\,dA.$$

Slično, *ukupan momenta inercije površi oko y-ose* se definiše kao:

$$\mathcal{I}_y := \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (x_{ij}^*)^2\,\delta(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint\limits_{\Pi} x^2\,\delta(x,y)\,dA.$$

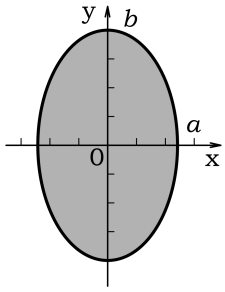
Otuda sledi njihova definicija. Takođe, od značaja je takođe i *momenat inercije oko koordinatnog početka* (neki puta se naziva i *polarnim momentom*), koji se definiše kao:

$$\mathcal{I}_0 := \lim_{m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left[(x_{ij}^*)^2 + (y_{ij}^*)^2\right]\delta(x_{ij}^*, y_{ij}^*)\,\Delta A = \iint\limits_{\Pi} (x^2+y^2)\,\delta(x,y)\,dA.$$

Uputno je primetiti da važi $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_x + \mathcal{I}_y$.

Primer 3.2 *Naći momenat inercije $\mathcal{I}_0$ homogene ravne ploče, koja zauzima oblast u obliku elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sa centrom u koordinatnom početku.*

Rešenje.



Koristeći smenu u eliptične koordinate $x = a\,\rho\cos\varphi$, $y = b\,\rho\sin\varphi$, za $\rho \in [0,1]$ i $\varphi \in [0, 2\pi]$ (za koju je Jakobijan $|\mathcal{J}| = ab\rho$), zaključuje se da je:

$$\mathcal{I}_0 = \iint\limits_{E} (x^2+y^2)\,\delta\,dA = ab\,\delta \int\limits_0^{2\pi}\!\!\int\limits_0^{1} \rho^3(a^2\,\cos^2\varphi + b^2\,\sin^2\varphi)d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8}ab\,\delta\left(a^2\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi + b^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi\right) = \frac{1}{4}\,ab\pi\,\delta\,(a^2+b^2).$$

Poželjno je primetiti još dve stvari:

i. kako je masa elipse data sa $M = ab\,\pi\,\delta$, gornji izraz postaje: $\mathcal{I}_0 = \frac{1}{4}M(a^2+b^2)$,

ii. u slučaju kružnice važi da je $a = b$, te je za nju $\mathcal{I}_0 = \frac{1}{2}a^4\pi$.

□

Dakle, kako se povećava masa elipse, tako se povećava momenat inercije. Štaviše, momenat inercije igra isto toliko veliku ulogu u rotacionom kretanju, koliko i masa u linearnom. Dodatno, ma kakav da je oblik tela ili površi, uvek je moguće naći takvo rastojanje o određene ose na kojoj bi masa tela, ako bi tamo cela bila sakupljena, imala isti momenat inercije, kao i samo telo u odnosu na istu osu.

Ovo rastojanje naziva se *krakom inercije* tela ili površi oko date ose i obeležava se sa $\mathcal{R}$. Ako bi masa M stvarno bila sakupljena na tom rastojanju, moment inercije bio bi jednak momentu inercije čestice mase M na rastojanju $\mathcal{R}$ od ose, ili $M\mathcal{R}^2$. Pošto je ovo jednako momentu inercije $\mathcal{I}$, dobija se:

$$M\mathcal{R}^2 = \mathcal{I},$$

gde je M masa površi, a $\mathcal{I}$ momenat inercije oko zadate ose. Prethodna jednačina govori o tome se momenat inercije površi može predstaviti kao momenat inercije neke matrerijalne tačke, ukoliko je masa površi skoncentrisana na rastojanju $\mathcal{R}$ od ose.

Posebno, krak inercije $\hat{y}$, u odnosu na x-osu i krak inercije $\hat{x}$ u odnosu na y-osu, dati su izrazima:

$$M\hat{y}^2 = \mathcal{I}_x \quad \text{i} \quad M\hat{x}^2 = \mathcal{I}_y. \tag{3.3}$$

Tačka $(\hat{x}, \hat{y})$ je, dakle, tačka u kojoj se masa čitave površi može skoncentrisati tako da se uopšte ne javi promena momenata inercije u odnosu na koordinatne ose.

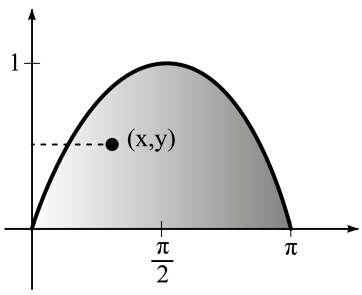
Primer 3.3 *Naći krak inercije $\hat{x}$ u odnosu na y-osu za onu površ, koja odgovara regionu ispod sinusne funkcije, za $0 \le x \le \pi$, ako je njena gustina data sa $\delta(x, y) = x$.*

Rešenje.

Jednostavnom integracijom gustine $\delta(x, y) = x$, brzo se dobija da je masa površi tačno π jedinica mase. Momenat inercije oko y-ose je tada:

$$\mathcal{I}_y = \int_0^\pi x^3 \left(\int_0^{\sin x} dy \right) dx = \int_0^\pi x^3 \sin x \, dx =$$

$$= \Big[(3x^2 - 6) \sin x - (x^3 - 6x) \cos x \Big]_0^\pi = \pi^3 - 6\pi.$$



Ovo omogućuje lako određivanje kraka inercije:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\mathcal{I}_y}{m}} = \sqrt{\frac{\pi^3 - 6\pi}{\pi}} = \sqrt{\pi^2 - 6}.$$

□

3.2 Momenat inercije trodimenzionalnog sistema

Ovde se sada elaborira izvođenje obrasca za momenat inercije tela prostoru $\mathbb{R}^3$. Definicije i ideje momenata i centra mase u trodimenzionalnom sistemu su slične onima u slučajevima nižih dimenzija, ali odgovaraju nešto više realističnim situacijama.

Ako je $r(x, y, z)$ rastojanje od tačke (x, y, z) na telu B do prave L, tada inercija k-te mase $\Delta m_k = \delta(x, y, z)\, \Delta V_k$ oko ose L iznosi približno $\Delta \mathcal{I}_k = r^2(x_k, y_k, z_k)\, \Delta m_k$. Momenat inercije oko ose L čitavog tela je tada:

$$\mathcal{I}_L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta \mathcal{I}_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} r^2(x_k, y_k, z_k)\, \delta(x_k, y_k, z_k)\, \Delta V_k := \iiint_T r^2\, \delta\, dV.$$

Ukoliko je prava L baš x-osa, tada je $r^2 = y^2 + z^2$, te je:

$$\mathcal{I}_x := \iiint_T (y^2 + z^2)\, \delta(x, y, z)\, dV. \tag{3.4a}$$

Analogno, ukoliko je osa L zapravo y ili z-osa, dobijaju se izrazi:

$$\mathcal{I}_y := \iiint\limits_T (x^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dV \quad \text{i} \quad \mathcal{I}_z := \iiint\limits_T (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dV. \qquad [3.4b]$$

Pri tome, *polarni momenat*, odnosno *momenat inercije oko koordinatnog početka*, dobija oblik:

$$\mathcal{I}_0 := \iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,\delta(x,y,z)\,dV. \qquad [3.4c]$$

U slučajevima gde je nužno izračunati momente oko sve tri ose, od velike je pomoći korištenje aditivnog svojstva trostrukih integrala, te koristiti sledeće teoreme:

Teorema 3.1 *Momenat inercije materijalnog tela proizvoljne mase u odnosu na datu pravu jednaka je sumi momenata inercije tela u odnosu na dve međusobno normalne ravni, čijem preseku pripada data prava:*

$$\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_{xz} + \mathcal{I}_{xy}, \qquad \mathcal{I}_y = \mathcal{I}_{xy} + \mathcal{I}_{yz} \qquad i \qquad \mathcal{I}_z = \mathcal{I}_{xz} + \mathcal{I}_{yz}.$$

Dokaz.

Ovde će biti izveden dokaz za tela u nediskretnom trodimenzionalnom sistemu, za momenat inercije tela oko x-ose. Da ovo važi i za momenti inercije oko ostalih osa, kao i one u nediskretnim sistemima, analogno se dokazuje.

Usled definicija momenata $\mathcal{I}_{xy}$, $\mathcal{I}_{xz}$ tela oko xy i xz-ravni, direktno sledi:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{I}_{xy} &:= \iiint\limits_T z^2\,\delta\,dV \\ \mathcal{I}_{xz} &:= \iiint\limits_T y^2\,\delta\,dV \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{I}_{xy} + \mathcal{I}_{xz} = \iiint\limits_T z^2\,\delta\,dV + \iiint\limits_T y^2\,\delta\,dV = \iiint\limits_T (y^2+z^2)\,\delta\,dV := \mathcal{I}_x,$$

gde je $\delta = \delta(x,y,z)$ funkcija gustine materijalnog tela.

■

Primer 3.4 *Neka je data kupa $\mathcal{K}$ konstantne gustinu δ, čije sve izvodnice grade ugao od $\frac{\pi}{4}$ rad sa xy-ravni. Pokazati da je njen momenat inercije oko z-ose $\mathcal{I}_z = \frac{3}{10}Mr^2$, gde je r radijus njene baze.*

Rešenje.

Za početak, kako izvodnice ove kupa grade ugao od $\frac{\pi}{4}$ rad sa xy-ravni, direktno sledi da je poluprečnik baze kupe jednak visini kupe, $r \equiv h = const$. Posmatrajući kupu u cilindričnim koordinatama, izraz za $\mathcal{I}_z$ postaje:

$$\mathcal{I}_z = \delta \iiint\limits_{\mathcal{K}} (x^2+y^2)\,dV = \delta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^h\!\!\int_r^h r^3\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\delta \int_0^h\!\!\int_r^h r^3\,dz\,dr = 2\pi\delta \int_0^h r^3(h-r)\,dr = \frac{h^5\pi\delta}{10},$$

a zadatak postaje utvrditi da li zaista važi izraz $\mathcal{I}_z = \frac{3}{10}Mh^2$. Sa druge strane, masa ove kupe je:

$$M = \delta \iiint\limits_{\mathcal{K}} dV = \delta \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^h\!\!\int_r^h r\,dz\,dr\,d\theta = 2\pi\delta \int_0^h r(h-r)\,dr = \frac{h^3\pi\delta}{3}.$$

Zadatak je završen kada se primeti da je:

$$\mathcal{I}_z = \frac{h^5\pi\delta}{10} = \frac{\cancel{3}}{10}\,\frac{h^3\pi\delta}{\cancel{3}}\,h^2 = \frac{3}{10}Mh^2 = \frac{3}{10}Mr^2.$$

Na analogan način se pokazuje da momenat inercije oko z-ose bilo koje kupe iste vrednosti.

□

Primer 3.5 *Naći momenat inercije oko ose simetrije tela T, ograničenog sa paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i sa ravni $z = 4$. Gustina tela u svakoj tački je proporcionalna rastojanju između tačke i z-ose.*

Rešenje.

Kako je z-osa osa simetrije, te kako je $\delta(x, y, z) = \kappa\sqrt{x^2 + y^2}$, gde je κ realna konstantna, sledi, na osnovu [3.4], da je:

$$\mathcal{I}_z = \iiint\limits_T \kappa\sqrt{x^2 + y^2}\,(x^2 + y^2)\,dV,$$

odnosno, u cilindričnim koordinatama:

$$\mathcal{I}_z = \kappa \int\limits_0^4\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{z}} r^4\,dr\,d\theta\,dz = \kappa \int\limits_0^4\int\limits_0^{2\pi} \frac{z^{5/2}}{5}\,d\theta\,dz = 2\pi\frac{\kappa}{5}\int\limits_0^4 z^{5/2}\,dz = \frac{2\pi\kappa}{5}\,\frac{2}{7}\,z^{7/2}\Big|_0^4 = \frac{512}{35}\pi.$$

Ovde će biti naglašeno da bi momenti inercije oko x i y-ose, kada bi se računali, bili međusobno jednaki baš usled simetrije tela, ali opet različite vrednosti od $\mathcal{I}_z$. Kako je vrednost $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y = \frac{208}{3}\pi$, sledi da telo ima veći otpor prema rotaciji oko x ili y-ose, nego oko svoje ose simetrije.

□

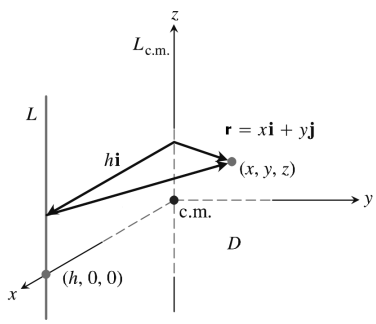
3.3 Štajnerova teorema o paralelnim osama

Teorema o paralelnim osama je korisna veza, koja omogućava da lakše računanje momenta inercije datog čvrstog tela oko ma koje ose, ako je poznat njegov momenat inercije oko neke paralelne ose. Stav su nezavisno izveli Lagranž[2] i Štajner[3]. Ovde će biti dokazano u trodimenzionalnom sistemu, odakle direktno sledi da važi i u prostorima nižih dimenzija.

Teorema 3.2 (Štajnerova teorema o paralelnim osama) *Neka je $L_{c.m.}$ prava, koja prolazi kroz centar mase tela mase m, i neka je prava L paralelna $L_{c.m.}$ i na rastojanju h od nje. Tada momenti inercije $\mathcal{I}_{c.m.}$ i $\mathcal{I}_L$ zadovoljavaju sledeću relaciju:*

$$\mathcal{I}_L = mh^2 + \mathcal{I}_{c.m.}. \qquad [3.5]$$

Dokaz.



Bez gubitka na opštosti, neka je dat koordinatni sistem, tako postavljen da je centar mase u njegovom koordinatnom početku (ovo implicira da je $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$). Neka je prava $L_{c.m.}$ postavljena duž z-ose tog sistema, a prava L normalna na xy-ravan u tački koordinate $(h, 0, 0)$. Na kraju, neka je T oblast u $\mathbb{R}^3$, koju zauzima telo.

Svaki element mase dm može se posmatrati kao da leži u u nekoj ravni paralelnoj xy-koordinatnoj ravni. Neka je dat njegov vektor položaja u toj ravni $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ u odnosu na z-osu. U istoj ravni je smešten i vektor, čija je inicijalna tačka na pravi $L_{c.m.}$, a terminalna na L, ovde označen sa $h\vec{i}$. Tada postaje jasno da je vektor položaja elementarne mase dm u odnosu na pravu L upravo $|\vec{r} - h\vec{i}|$, kao i da bi trostruki integral po T kvadrata ovog rastojanja po definiciji dao izraz za $\mathcal{I}_L$.

[2] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), francuski matematičar italijanskog porekla, koji je dao značajan doprinos klasičnoj i nebeskoj mehanici.

[3] Jakob Steiner (1796–1863), švajcarski matematičar, čije je područje ineresovanja uglavnom obuhvatalo geometriju.

Međutim, ako se detaljnije posmatra kvadrat ovog rastojanja, $|\vec{r}-h\vec{i}|^2$, primenom Kosinusne teoreme, dobija se:

$$|\vec{r}-h\vec{i}|^2 = |h\vec{i}|^2 + |\vec{r}|^2 - 2|h\vec{i}||\vec{r}|\cos\theta,$$

ili, pošto je $|\vec{r}|\cos\theta$ zapravo x-koordinata mase dm, a $|h\vec{i}| = h$:

$$|\vec{r}-h\vec{i}|^2 = h^2 + |\vec{r}|^2 - 2hx.$$

Posledično, izraz za $\mathcal{I}_L$ postaje:

$$\mathcal{I}_L = \iiint\limits_T |\vec{r}-h\vec{i}|^2\,dm = \iiint\limits_T h^2\,dm + \iiint\limits_T |\vec{r}|^2\,dm - 2h\iiint\limits_T x\,dm =$$
$$= mh^2 + \mathcal{I}_{c.m.} - 2h\bar{x}\iiint\limits_T dm = mh^2 + \mathcal{I}_{c.m.}.$$

Treći integral u raspisanom zbir jednak je nuli zato što je, po definiciji, $\iiint x\,dm = \bar{x}\iiint dm$, a usled položaja centra mase važi $\bar{x} = 0$.

■

Primer 3.6 *Iskoristiti teoremu o paralelnim osama i naći momenat inercije tankog štapa oko ose, koja prolazi kroz jedan kraj štapa normalno na njegovu dužinu, ako je poznato da je momenat inercije oko paralelne ose, koja prolazi kroz centar masa upravo* $\frac{1}{12}mL^2$. [*Vidi Primer 3.1.*]

Rešenje.

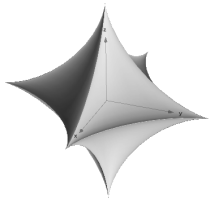
Koristeći obrazac [3.5], i podatke date u postavci, lako se dobija:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_0 + mh^2 = \frac{1}{12}mL^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}mL^2.$$

Ovaj račun predstavlja svojevrsnu potvrdu tačnosti Primera 3.1.

□

Primer 3.7 *Neka je astroidalna sfera* $\mathcal{A}$ *konstantne gustine data jednačinom* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *(a je pozitivna realna konstanta). Naći njene momente inercije oko x, y, z-ose i polarni momenat inercije, te ih izraziti sve u obliku* $\mathcal{I} = \kappa Ma^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$. *Potom izračunati momenat inercije oko ose paralelne z-osi, koja dotiče sferu* $\mathcal{A}$ *u tački* $(0, a, 0)$.



Najpre treba postaviti parametrizaciju astroidalne sfere $\mathcal{A}$. Ovo je naročito značajno jer će se parametrizacija krive tretirati kao transformacija, te će masa biti određena kao trostruki integral Jakobijana transformacije, u odgovarajućim granicama, a slično i za momente. Drugi deo zadatka biće urađen korišćenjem Teoreme 3.2.

Parametrizacija $\vec{r}(\rho, u, v) = (\rho\sin^3 u\cos^3 v)\vec{i} + (\rho\sin^3 u\sin^3 v)\vec{j} + (\rho\cos^3 u)\vec{k}$ za $\rho \in [0, a]$, $u \in [0, \pi]$ i $v \in [0, 2\pi]$ predstavlja parametarsku reprezentaciju date astoridalne sfere. Ovo znači da je Jakobijan:

$$|\mathcal{J}| = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,u,v)} = \begin{vmatrix} \sin^3 u\cos^3 v & 3\rho\cos^3 v\sin^2 u\cos u & -3\rho\sin^3 u\cos^2 v\sin v \\ \sin^3 u\sin^3 v & 3\rho\sin^3 v\sin^2 u\cos u & 3\rho\sin^3 u\sin^2 v\cos v \\ \cos^3 u & -3\rho\cos^2 u\sin u & 0 \end{vmatrix} = 9\rho^2\sin^5 u\cos^2 u\sin^2 v\cos^2 v.$$

Masa, kao integral gustine po telu $\mathcal{A}$, dakle, postaje:

$$M = \iiint\limits_{\mathcal{A}} \delta\,dV = 9\delta\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{a}(\rho^2\sin^5 u\cos^2 u\sin^2 v\cos^2 v)\,d\rho\,du\,dv = \frac{3a^3\pi\delta}{32}\int\limits_0^{\pi}\sin^3 u(1-\cos 4u)\,du =$$
$$= \frac{3a^3\pi\delta}{128}\int\limits_0^{\pi}(3\sin u - \sin 3u)(1-\cos 4u)\,du = \frac{3}{128}\left[6 - \frac{2}{3} + \frac{6}{15} - \frac{6}{7}\right]a^3\pi\delta = \frac{4}{35}a^3\pi\delta.$$

Sa druge strane, kako je telo simetrično i u odnosu na x i y i z-osu, sledi da su momenti inercije oko ovih osa jednaki, te je dovoljno izračunati samo jedan. Sudeći po parametrizaciji, najlakše će biti potražiti izraz za $\mathcal{I}_z$:

$$\mathcal{I}_z = \delta \iiint\limits_{\mathcal{A}} (x^2+y^2)\, dV = 9\delta \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{a} \left(\rho^4\, sin^{11} u\, \cos^2 u\, \sin^2 v\, \cos^2 v\, [\cos^6 v + \sin^6 v]\right) d\rho\, dv\, du =$$

$$= \frac{9a^5\,\delta}{5}\left[\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 v\, \cos^8 v \left(\int\limits_0^{\pi} \sin^{11} u\, \cos^2 u\, du\right) dv + \int\limits_0^{2\pi} \sin^8 v\, \cos^2 v \left(\int\limits_0^{\pi} \sin^{11} u\, \cos^2 u\, du\right) dv\right] =$$

$$= \frac{512a^5\,\delta}{5005}\left[\int\limits_0^{2\pi} (\sin^2 v\, \cos^8 v + \sin^8 v\, \cos^2 v) dv\right] = \frac{8a^5\,\delta}{5005}\int\limits_0^{2\pi} (1-\cos 4v)(5+3\cos 4v)\, dv = \frac{8\delta}{715}\, a^5\pi\delta.$$

Sada, kada je dobijen izraz za $\mathcal{I}_z$, može se zaključiti da važi:

$$\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y = \mathcal{I}_z = \frac{8\delta}{715}\, a^5\pi = \frac{14}{143}\cdot\frac{4}{35} a^3\pi\delta\cdot a^2 = \frac{14}{143} M a^2.$$

Gornji račun se može i iskoristiti za računanje polarnog momenta inercije, jer usled aditivnog svojstva trostrukih integrala sledi:

$$\mathcal{I}_0 := \delta \iiint\limits_{T} (x^2+y^2+z^2)\, dV = \mathcal{I}_z + \delta \iiint\limits_{T} z^2\, dV = \mathcal{I}_z + \delta \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{a} |\mathcal{J}|\, \rho^2 \cos^6 u\, d\rho\, du\, dv =$$

$$= \frac{8\, a^5\pi\delta}{715} + 9\delta \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{a} \left(\rho^4 \sin^5 u \cos^8 u \sin^2 v \cos^2 v\right) d\rho\, dv\, du = \frac{8\, a^5\pi\delta}{715} + \frac{9\, a^5\pi\delta}{20}\int\limits_0^{\pi} \sin^5 u \cos^8 u\, du =$$

$$= \frac{8\, a^5\pi\delta}{715} + \frac{4\, a^5\pi\delta}{715} = \frac{12\, a^5\pi\delta}{715} = \frac{21}{143}\cdot\frac{4\, a^3\pi\delta}{35}\cdot a^2 = \frac{21}{143} M a^2.$$

Na kraju, momenat inercije sfere $\mathcal{A}$ oko ose paralelne z-osi, koja dotiče sferu $\mathcal{A}$ u tački $(0, a, 0)$, direktno se određuje primenom *Štajnerove teoreme* (Teorema 3.2):

$$\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_z + Ma^2 = \frac{14}{143} M a^2 + M a^2 = \frac{157}{143} M a^2.$$

□

Glava 4

Pritisak fluida

Među mnogim primenama integralnog računa u fizici i tehnici, ovde se detaljnije obrazlaže još jedna: sila nastala usled pritiska vode, odnosno bilo kojeg drugog [barem približno idealnog] fluida.

4.1 Sila

Ukoliko se javi slučaj da se čestica mase m kreće ubrzanjem a, proizvod mase i ubrzanja se naziva silom:

$$F = ma,$$

a za kretanje se kaže da se javlja usled dejstva sile. Pri tome, kako je ubrzanje vektorska veličina, sledi da je i sila iste prirode.

Ukoliko nekoliko sila deluje na istu česticu, njihovo sadejstvo se može prezentovati vektorom *rezultante* (rezultantne sile), čiji je pravac, smer i intenzitet obično jednostavno izračunati.

Međutim, od značaja je prodiskutovati još dva slučaja: kada više različitih sila deluje na telo, ali nemaju istu napadnu tačku na telu, te slučaj kada je sila raspoređena po površini tela. Prvi slučaj se ovde neće detaljnije razmatrati, jer nije uvek moguće odrediti rezultantu pod tim uslovima, dok će o drugom biti reči u nastavku.

4.2 Sila ravnomerno raspoređena po površini

Postoji mnoštvo veoma čestih primera u prirodi, gde neka sila deluje po površini: pritisak vode na branu, pritiska čoveka na stolicu, i stolice na pod, let diska kroz vazduh, itd. Ukoliko se telo, na koju deluje sila, smatra sačinjenom od manjih sastavnih delova, onda se raspoređena sila može opisati kao sačinjena od sila, koje deluju na zasebne delove. Rezultanta ovih sila se tada naziva *ukupna sila*, koja deluje na telo.

Posmatrajmo silu, koja deluje u istom pravcu u svim tačkama tela (ravni) S, i neka je ta sila normalna na površinu tela. Ako sa ΔF označimo ukupnu silu, koja deluje na element površine ΔS, onda se odnos $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ naziva *srednjim pritiskom* na ΔS. Međutim, ukoliko ΔS teži nuli, na taj način da je neka tačka $Q \supseteq S$ uvek obuhvaćena, tada odnos $\frac{\Delta F}{\Delta S}$ u opštem slučaju dostiže graničnu vrednost, koja se naziva *pritiskom u tački* Q:

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}.$$

Kada je pritisak u svakoj tački dat kao funkcija koordinata, ukupna sila F se računa integracijom. U najopštijem slučaju, sila se javlja kao dvostruki integral:

$$F = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p \Delta S = \iint_S p \, dS,$$

ali se u većini slučaja element ravni S može tako birati, da je jedna integracija dovoljna.

4.3 Pritisak fluida

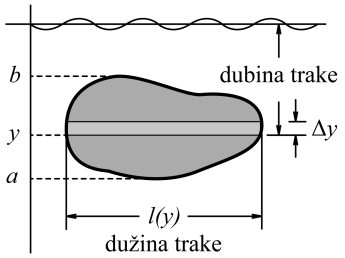
Uobičajeni primer sile, koja deluje uspravno na površinu tela je, na primer, dejstvo pritiska fluida na zid suda, koji ga sadrži. Pritisak je, u bilo kojoj tački nestišljivog fluida, jednak proizvodu težine po jedinici zapremine i dubine h tačke ispod površine fluida, baš usled težine samog fluida:

$$p = \frac{mg}{\frac{m}{\rho}} h = \rho g h,$$

što se zapravo dobija iz defniciji pritiska:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho \cancel{A} h g}{\cancel{A}} = \rho g h = w h. \qquad [4.1]$$

Ovde je sa w označena nova fizička veličina, tzv. *težinska gustina*, nasuprot uobičajne ρ, sa kojom se obeležava *masena gustina*. Ovo sve važi ako se smatra da je sam fluid u stanju mirovanja.



U vezi sa time, često se javlja potreba računanja pritiska tela potopljenog na nekoj dubini h. Ukoliko je to telo oblika neke ploče, koja je horizonalno potopljena, problem se trivijalno rešava računanje količnika izvršene sile po površini ploče, odnosno korišćenjem obrasca [4.1]. Međutim, ovo je tek najprostiji primer.

U praksi, mnogo češće se sreće potreba računanja pritiska neke vertikalno postavljene ploče, koja biva potopljena po širini, u kojem se slučaju ne može koristiti pomenuti obrazac, upravo zato što h varira. Razmatranjem ovakvog primera biće ustanovljen opšti obrazac za rešavanje sličnih problema.

Neka je data vertikalna ploča, potopljena u tečnost težinske gustine w. Da bi se utvrdila ukupna sila, koja deluje bočno na tu ploču od neke dubine c do neke dubine d, nužno je podeliti interval $[c, d]$ na n podintervala, svaki širine Δy. Posmatra se neki i-ti podinterval y_i na dubini $h(y_i)$ i dužine $l(y_i)$. Na osnovu relacije [4.1], sila, koju tečnost vrši na taj podinterval jednaka je:

$$\Delta F_i = w\, h(y_i) A_i = w\, h(y_i)\, l(y_i)\, \Delta y.$$

Sila, usmerena prema n takvih podintervala jednaka je tada:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta F_i = w \sum_{i=1}^{n} h(y_i)\, l(y_i)\, \Delta y,$$

jer se w smatra konstantom, te se može faktorizovati ispred sume.

Kada $n \to \infty$, svaki podinterval ima infitezimalnu veličinu, te gornja suma, pod takvim uslovima, daje izraz za silu F, koju vrši fluid na potopljenu vertikalnu ploču od od $y = c$ do $y = d$:

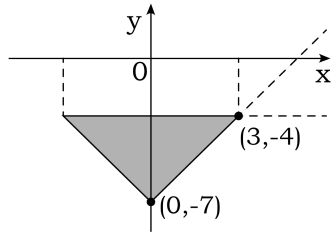
$$F = w \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} h(y_i)\, l(y_i)\, \Delta y = w \int_c^d h(y)\, l(y)\, dy, \qquad [4.2]$$

gde je $h(y)$ dubina fluida u y, a $l(y)$ horizontalna dužina potopljene ploče u y.

Primer 4.1 *Zaštitna kapija na brani ima oblik jednakokrakog trougla čije je teme okrenuto nadole. Baza trougaone kapije je* 6 *metara, a visina* 3 *metara. Kolika je sila pritiska vode na kapiju, kada se gornji kraj kapije nalazi potopljen* 4 *metara?* (*Težinska gustina vode je* $1000 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}$.)

Rešenje.

Pri postavljanju matematičkog modela ovoga zadatka, moguće je bez gubitka na opštosti konstrisati takav koordinatni sistem, u kojem bi y-osa bila osa simetrije kapije, a x osa postavljena na visini površine vode. Ovo omogućuje da se dubina vode u y u metrima označi sa: $h(y) = -y$.



Da bi se našla dužina $l(y)$ u y, nužno je naći analitički oblik prave, koja ide duž svakog kraka (mada je dovoljno naći samo duž jednog kraka, kada je telo simetrično). Kako bi u ovom koordinatnom sistemu, prava duž desnog kraja kapije prolazila kroz tačke $(0,-7)$ i $(3,-4)$, nije teško utvrditi da je tražena jednačina prave $y = x - 7$, odnosno $x = y + 7$.

Još ranije je pomenuto, da nije potrebno odrediti jednačinu prave, koja prolazi duž drugog kraka, baš zbog simetrije tela. Ovo govori da je dužina jedne karakteristične trake u y zapravo dvostuko veća od rastojanja između y-ose i jednog kraka. Drugim rečima, usled simetrije kapije, nužno sledi da je $l(y) = 2x = 2y + 14$.

Konačno, vršenjem integracije od $y = -7$ do $y = -4$, dobija se da je sila pritisak fluida:

$$F = w \int_c^d h(y)\, l(y)\, dy = 1000 \int_{-7}^{-4} (-y)\,(2y+14)\, dy = -2000 \int_{-7}^{-4} (y^2 + 7y)\, dy = 45\,\mathrm{kN}.$$

□

Primer 4.2 *Kružni prozor na podmornici ima prečnik* 1 m. *Ako se centar prozora nalazi na* 100 m *od nivoa mora, koliki je pritisak vode na prozor?*

Rešenje.

Neka je dat koordinatni sistem, čiji je početak upravo centar prozora, x-osa paralelna nivou vode, a y-osa normalna na nju. Dubina u y je tada $h(y) = 100 - y$.

Usled simetrije, horizonalna dužina prozora je $l(y) = 2x$, odnosno $l(y) = 2\sqrt{\frac{1}{2} - y^2}$. Kako y ide od $y = -\frac{1}{2}$ do $y = \frac{1}{2}$, te kako je težinska gustina vode $1000\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^3}$, sledi na osnovu [4.2]:

$$F = w \int_c^d h(y)\, l(y)\, dy = 2000 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (100 - y)\sqrt{\frac{1}{2} - y^2}\, dy = 2000 \left[100 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - y^2}\, dy - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} y \sqrt{\frac{1}{2} - y^2}\, dy \right]$$

Ako se sada primeti da je drugi integral jednak nuli, zato što je podintegralna funkcija neparna, dok granice su simetrične u odnosu na koordinatni početak, a da prvi integral zapravo predstavlja površinu polukružnog diska poluprečnika $\frac{1}{2}$, lako se dobija da je izvršena sila:

$$F = 200000\,\frac{\pi}{4}\,\mathrm{N},$$

odakle se dobija da je pritsak vode na prozoru:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{200000\,\cancel{\frac{\pi}{4}}}{\cancel{\frac{\pi}{4}}}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 200\,\mathrm{kPa}.$$

□

4.4 Veza između sila pritiska fluida i položaja težišta

Ukoliko su data kordinate položaja težišta neke potopljene, ravne vertikalne površi, ili ga je relativno lako izračunati, sila pritiska fluida na to telo može se ustanoviti i na sledeći način. Iz jednačine [4.2] sledi:

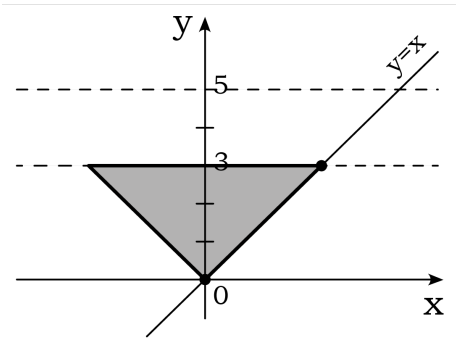
$$F = w \int_c^d h(y)\, l(y)\, dy = w\mathcal{M}_{nivo} = w\bar{h}A, \quad \text{gde je:}$$

- $\mathcal{M}_{nivo}$ — momenat površi oko prave, koja se prostire duž (gornjeg) nivoa fluida,
- $\bar{h}$ — dubina na kojoj se nalazi težište (u većini će slučaja odgovarati $\bar{y}$ iz formule [2.9]), i
- A — površina potopljene površi.

Gornji identitet govori o tome kako je sila pritiska fluida na potopljenu vertikalnu površ jednaka onoj, koju bi fluid vršio da je sva površina površi na dubini $\bar{h}$, u odnosu na nivo fluida. Za mnoge standardne oblike, koje se koriste u tehnici, položaji težišta određeni su i prikazani tablično, što, naravno, olakšava upotrebu gornjeg identiteta.

Primer 4.3 *Data je ravna površ oblika jednakokrakog trougla baze dužine* 6 m*, i visine* 3 m*, okrenut nadole i potopljen vertikalno, tako da se baza trougla nalazi* 2 m *ispod nivoa fluida. Naći silu pritiska, kojom fluid dejstvuje na površ.*

Rešenje.



Konstruiše se koordinatni sistem, takav da donje teme trougla leži u njegovom koordinatnom početku, a da y-osa predstavlja osu simetrije datog trougla. Tada se gornji nivo fluida nalazi duž prave $y = 5$, a baza trougla duž prave $y = 3$. Isto tako, desni kraj trougla leži duž prave $y = x$.

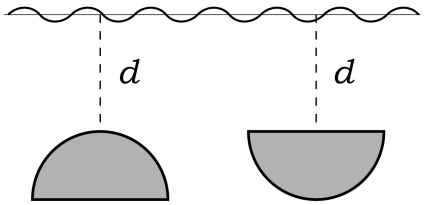
Težište površi leži na y-osi, i na trećini rastojanja od baze do donjeg temena trougla, što znači da je $\bar{h} = 3$ (zato što se trougao nalazi potopljen 2 m ispod nivoa fluida). Sa druge strane, površina ovakvog trougla je $A = \frac{1}{2}\, 6 \cdot 3\,\mathrm{m}^2 = 9\,\mathrm{m}^2$, te je sila pritiska:

$$F = w\bar{h}A = 1000 \cdot 3 \cdot 9\,\mathrm{N} = 27\,\mathrm{kN}.$$

□

Primer 4.4 *Dva identična polukružna prozora postavljena su na istu dubinu na vertikalnom zidu akvarijuma (vidi sliku). Koji prozor je podvrgnut većoj sili pritiska fluida?*

Rešenje.



Jednostavan račun pokazuje da je centroida prvog prozora na dubini $d+r-\frac{4r}{3\pi}$, a drugoga $d+\frac{4r}{3\pi}$, gde je r radijus prozora, a d dubina gornjeg kraja oba prozora. Sledi:

$$F_1 = w(d + r - \frac{4r}{3\pi})A \geq w(d + \frac{4r}{3\pi})A = F_2,$$

što jasno pokazuje da veća sila pritiska deluje na prvi prozor.

□

4.5 Papusove teoreme obrtnih tela

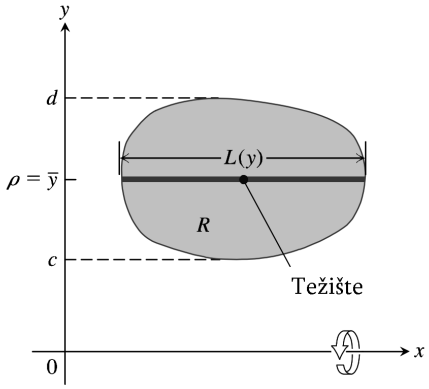
Osim teoreme o položaju težišta, aleksandrijski polihistor Papus otkrio je još dve veoma korisne formule, kojima se opisuju veze između težišta i obrtnih površina, odnosno tela. Ove formule znatno pojednostavljuju proračune, koji bi inače bili veoma dugi i zamorni.

Teorema 4.1 (Prva Papusova Teorema) *Neka je data oblast R, koji jednim obrtom oko ose, koja leži u tom regionu, ne seče unutrašnost tako nastalog obrtnog tela. Tada je zapremina nastalog obrtnog tela jednaka proizvodu površine oblasti R i puta, koji je težište oblasti prešlo tokom obrtanja. Odnosno, ako je ρ rastojanje od ose obrtanja do težišta, tada je:*

$$V = 2\pi\rho A. \qquad [4.3]$$

Dokaz.

Posmatrajmo sliku. Neka je sa $l(y)$ obeležena dužina osenčenog elementa oblasti R, normalnog na y-osu, u tački y. Tada je zapremina obrtnog tela oko x-ose:



$$V = \int_c^d 2y\pi\, l(y)\, dy = 2\pi \int_c^d y\, l(y)\, dy, \qquad [4.4]$$

zato što se vršenjem particije obrtnog tela na šuplje cilindre, ukupna zapremina tela računa kao suma zapremina pojedinačnih cilindara, a zapremina svakog pojedinačnog cilindra aproksimira prizvodom površine omotača cilindra i debljinom njegovog zida, odnosno kao $2y\pi \cdot l(y) \cdot \Delta y$[1].

Sada, na osnovu definicije formule za y-koordinatu težišta (vidi: [2.9]), sledi:

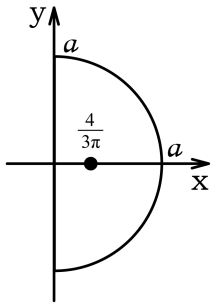
$$\bar{y} = \frac{\int_c^d y\, l(y)\, dy}{A} \quad \Leftrightarrow \quad \int_c^d y\, l(y)\, dy = A\bar{y}. \qquad [4.5]$$

Zamenom $A\bar{y}$ sa poslednjim integralnom u [4.4] dobija se $V = 2\pi\bar{y}A$, te je teorema dokazana, ukoliko se primeti da $\bar{y}$ odgovara gore označenom ρ.

■

Primer 4.5 *Naći zapreminu sfere radijusa r.*

Posmatra se polukružna oblast data parametrizacijom $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, za $u \in [0, r]$ i $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Prostim računom, lako se dobija da su koordinate težišta ove oblasti $\left(\frac{4r}{3\pi}, 0\right)$, a da je površina oblasti $\frac{1}{2}r^2\pi$.



Odatle sledi, primenom obrasca [4.3]:

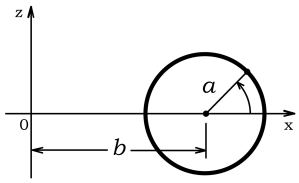
$$V = 2\pi\rho A = \cancel{2\pi} \cdot \frac{4r}{3\cancel{\pi}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} r^2\pi = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

Zapremina sfere je, dakle, $\frac{4}{3}r^3\pi$.

□

Primer 4.6 *Naći zapreminu torusa dobijenog obrtanjem diska radijusa a oko ose smeštene u ravni, u kojoj se disk nalazi, na rastojanju $b \geq a$ od centra diska.*

Rešenje.



Koristi se Teorema 4.1. Centroida diska se nalazi u njegovom centru (dakle, na rastojanju b od ose rotacije), a površina diska je $A = a^2\pi$. Zamenom ovih vrednosti u [4.3], dolazi se do najelegantnijeg načina utvrđivanja zapremine datog torusa:

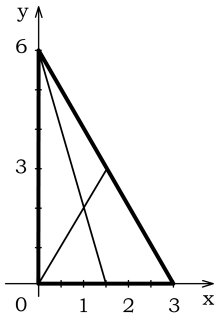
$$V = 2\pi \cdot b \cdot a^2\pi = 2\pi^2 b a^2.$$

□

[1] ovaj metod se u engleskoj literaturi navodi kao *Shell Method*.

Primer 4.7 *Koristeći Teoremu 4.1, naći zapreminu tela generisanu rotiranjem trougaone oblasti ograničene pravama $y = 6 - 2x$, $x = 0$ i $y = 0$, oko prave $x = 5$.*

Rešenje.



Najpre će se odrediti koordinate težišta ove oblasti, a potom će se pristupiti računanju tražene zapremine. Ova oblast zapravo predstavlja oblast, čija temena imaju koordinate $(0, 0)$, $(0, 6)$ i $(3, 0)$, površine 9 (jedinica površine). Ukoliko je poznato da se težište trougla nalazi na preseku medijana (ovo će biti dokazano malo kasnije), dovoljno je naći jednačine dve medijane, i potražiti njihov presek.

Ona medijana, koja prolazi kroz tačke $(\frac{3}{2}, 3)$ i $(0, 0)$ ima jednačinu $y = 2x$, dok je medijana, koja prolazi kroz tačke $(0, \frac{1}{2})$ i $(0, 6)$, data sa $y = 6-4x$. U njihovo se preseku nalazi tačka $(1, 2)$, koja je udaljena od ose rotacije $\rho = 4$ jedinice dužine. Odatle sledi:

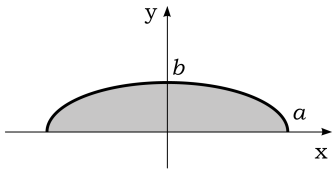
$$V = 2\pi\rho A = 2\pi \cdot 4 \cdot 9 = 72\pi \text{ jedinica zapremine.}$$

□

Na isti način, Teorema 4.1 se može koristiti da bi se izračunale koordinate težišta oblasti poznate površine A, ako se zna zapremina obrtnog tela nastalog obrtanjem oblasti. Ako je $\bar{y}$ koordinata ona koja se traži[2], onda se ispituje slučaj kada se oblast obrće oko x-ose, tako da je $\bar{y} = \rho$ rastojanje od težišta do ose obrtanja. Analogno se određuje i koordinata $\bar{x}$.

Primer 4.8 *Površ, koja zauzima oblast ograničenu gornjom poluelipsom $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ i pravom $y = 0$, površine je $\frac{1}{2}\, ab\,\pi$, a zapremina elipsoida, koji nastaje rotacijom ove oblasti oko x-ose je $\frac{4}{3}\, ab^2\,\pi$. Naći koordinate težišta ove površi.*

Rešenje.



Malo pažljivija obzervacija otkriva da se zapravo radi o „gornjoj" polovini *centralne* elipse. Na osnovu simetrije oblasti, lako je primetiti da je x-koordinata težišta $\bar{x} = 0$. Pritom, kako je $\bar{y} = \rho$ u [4.3], dobija se:

$$\bar{y} = \frac{V}{2\pi A} = \frac{\frac{4}{3}\, ab^{\cancel{2}}\cancel{\pi}}{\cancel{2}\pi \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\, a\cancel{b}\cancel{\pi}} = \frac{4}{3\pi} b.$$

Primetno je da je, y-koordinata potpuno nezavisna od dužine velike ose elipse, kao i da se odavde može lako doći do zaključka o koordinatama centralne kružnice, ako se samo b zameni sa radijusom r kružnice.

□

Sada sledi druga Papusova teorema.

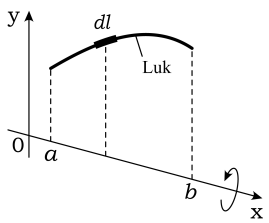
Teorema 4.2 (Druga Papusova Teorema) *Ako se luk glatke ravanske krive obrne jednom oko linije u toj ravni a ne seče krivu, tada se površina omotača obrtnog tela može izraziti kao proizvod dužine luka L i rastojanja, koje je težište krive prešlo tokom obrtanja. Odnosno, ako se sa ρ obeleži rastojanje od težišta do ose obrtanja, tada je:*

$$M = 2\pi\rho L, \tag{4.6}$$

gde je sa M označena površina omotača obrtnog tela.

[2] obično se jedna koordinata trivijalno određuje, jer se, po Principu simetrije, centroida nalazi na osi simetrije oblasti.

Dokaz.



Dokaz će biti izveden za slučaj gde se osa obrtanja nalazi upravo na x-osi. Ostali slučajevi su potpuno analogni.

Na osnovu slike, jasno je da je površina nastala rotacijom krive:

$$M = \int_a^b 2y\pi \, dl = 2\pi \int_a^b y \, dl, \qquad [4.7]$$

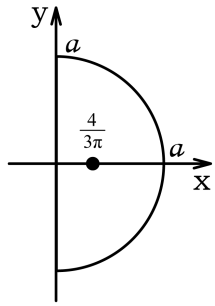
a y-koordinata težišta krive je, na osnovu relacije [2.4]:

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b y \, dl}{L} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^b y \, dl = \bar{y}L.$$

Zamenom $\bar{y}L$ sa poslednjim integralom u [4.7], dobija se $M = 2\pi\bar{y}L$, te je teorema dokazana, ukoliko se primeti da $\bar{y}$ odgovara gore označenom ρ.

■

Primer 4.9 *Naći površinu omotača sfere radijusa r.*



Posmatra se kriva data parametrizacijom $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, za $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Jednostavan proračun pokazuje da su koordinate težišta ove krive u tački $\left(\frac{2}{\pi}r, 0\right)$, a da joj je dužina $L = r\pi$. Prema obrascu [4.6], sledi:

$$M = 2\cancel{\pi} \cdot \frac{2}{\cancel{\pi}} r \cdot r\pi = 4\,r^2\pi.$$

Površina omotača sfere radijusa r, jednaka je, dakle, $4\,r^2\pi$.

□

Primer 4.10 *Naći površinu omotača kupe, čija je baza radijusa r, visina h i dužina izvodnice s.*

Rešenje.

Posmatra se trougaona oblast ograničena tačkama koordinata $(0,0)$, $(h,0)$ i $(0,r)$. Rotiranjem ove oblasti oko x-se, dobija se traženo obrtno telo, dok rotacija izvodnice daje omotač kupe. Težište izvodnice nalazi se na njenoj sredini, te je ona određena koordinatama $(\frac{s}{2}, \frac{r}{2})$. Prema Drugoj Papusovoj teoremi, tada važi:

$$M = 2\pi\rho L = \cancel{2}\pi \cdot \frac{r}{\cancel{2}} \cdot s = r\pi s.$$

□

Primer 4.11 *Koristeći Teoremu 4.2, odrediti površinu omotača torusa iz Primera 4.6.*

Rešenje.

Kako je činjenica da površina torusa nastaje okretanjem kruga radijusa a oko z-ose, te kako je $b \geq a$ rastojanje od težišta do ose obrtanja, dok da je dužina pređenog puta težišta obim kružnice njene putanje $L = 2a\pi$, zamenom ovih vrednosti u jednačinu [4.6], dobija se da je površina omotača torusa:

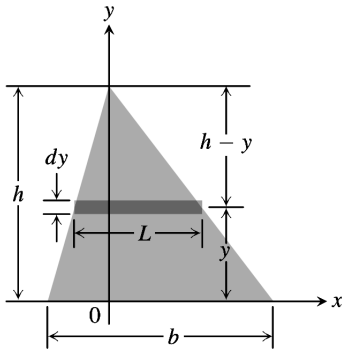
$$M = 2\pi \cdot b \cdot 2a\pi = 4\pi^2 ba.$$

□

Na kraju se navodi teorema o položaju težišta proizvoljnog trougla.

Teorema 4.3 *Tačka unutar trougla, koja leži na trećini rastojanja svake strane od naspramnog temena predstavlja tačku, u kojoj se medijane seku. Dokazati da se težište trougla leži na preseku medijana, pokazavši da se i ona nalazi na trećini rastojanja svake strane od naspramnog temena.*

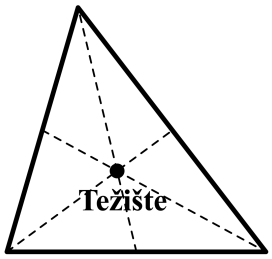
Dokaz.



Neka se trougao posmatra u takvom koordinatnom sistemu, gde izabrana strana trougla (dužine b) cela pripada x-osi, tako da joj jedno teme leži u koordinatnom početku. Tada je masa nekog elementa trougla $dm = \rho\, dA = \rho\, l(y)\, dy$. Istovremeno, iz sličnosti trougla sledi:

$$\frac{b}{h} = \frac{l(y)}{h-y} \quad \Leftrightarrow \quad l(y) = \frac{b}{h}(h-y),$$

odakle opet element mase postaje $dm = \rho\, \dfrac{b}{h}(h-y)\, dy$.



Po definiciji težišta, tada važi:

$$\bar{y} = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\displaystyle\int_0^h y(h-y)\, dy}{\displaystyle\int_0^h (h-y)\, dy} = \frac{\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}}{h^2 - \frac{h^2}{2}} = \frac{h}{3}.$$

Ovo takođe znači, na osnovu Talesove teoreme, da prava $y = \bar{y}$ ne samo da seče visinu trougla na b konstruisanu iz gornjeg temena, već seče i medijanu na b, deleći je na delove, čije se dužine odnose kao $2:1$. Kada se potpuno jednaka procedura primeni i na ostale dve strane trougla, postaje jasno da težište trougla pripada svim medijanama, te da leži na preseku medijana, čime je teorema dokazana.

■

Zaključak

Na kraju ovoga rada, uputno je sumirati apsolvirano.

Pošto materija ima različite oblike kretanja, onda se i fizika deli prema tim oblicima. Najjednostavniji oblik kretanja materije je mehanički. On se svodi na proučavanje premeštanja različitih tela jednog u odnosu na drugo, kao i promenu oblika tela. Štaviše, svako telo ili objekat u prostoru proizvoljne dimenzije može se posmatrati sa aspekta kinematike i sa aspekta dinamike.

U ovome radu, prikazana je osnovna deskripcija koncepta dinamike sa stanovišta realne analize:

- Koncepti linearne, arealne i zapreminske gustine i mase uvedeni su da bi se razvile intuitivne ideje o njima kao o univerzalnim pojmovima i svojstvima svakog objekta u prostoru proizvoljne dimenzije, a ovo je učinjeno upravo elaboracijom njihovih analognih načina posmatranja, merenja i opisa u prostorima jedne, dve i tri dimenzije, konstantno ukazujući i naglašavajući kako je priroda ovih koncepta u osnovi nepromenjena.

- Postupno je prikazano kako se najlakše može dobiti informacija to težištu (u slučaju kompozitnih objekata) ili centru mase (u slučaju uniformnih objekata), kako bi se označila pozicija u kome dato telo može balansirati, i naglasili pozicioni uslovi pod kojima se mogu primeniti osnovne hipoteze statike, kao subdiscipline dinamike. Imajući u vidu formule, koje se koriste za njihov proračun, i koje daju striktnu deskripciju istog, neupitno je koliko su zapravo pojmovi mase, centra mase i momenata mase povezani, te koliko zajedno daju precizan opis svojstva premeštanja, kretanja, balansiranja i ostalih komponenata pri proučavanju objektivne stvarnosti, koja nas okružuje.

- Momenat inercije pri rotacionom kretanju, kao svojevrstan analog pojmu mase translatornog kretanja, diskutovan je kao mera opiranja objekta rotacionom kretanju, a ovo je prikazano akcentovanjem činjenice da telo većeg momenta inercije treba jaču silu, koja deluje na njega, da bi dostigao zadatu ugaonu brzinu, kao što treba uložiti veću silu da bi se telo veće mase translatorno kretalo, čak i u slučajevima bez trenja. Uočeno je da inercijalno svojstvo rotirajućeg tela nije određeno samo njegovom masom, već i rasporedom te mase.

- Razmatrani su i koncepti pritiska i sile pritiska, na koje se relativno često nailazi u tehnici. Prikazano je kako se lako može odrediti pritisak na vertikalno potopljenu ploču ukoliko se zna tačna pozicija težišta ploče, i na taj je način pritisak doveden u vezu sa nekim fundamentalnim svojstvima potopljenog tela. Papusovim teoremama dodatno su povezana svojstva tela, kao što su zapremina, površina omotača i položaj težišta posebne klase (obrtnih) tela.

Dakle, prikazani su svi malopređašnje pomenuti koncepti. Ideja je, pre svega, bila ukazati da su, nezavisno od dimenzije u kojoj se vrši analiza, nezavisno od tipa kretanja, nezavisno od oblika postojanja materija, neki koncepti — ili klase koncepta — fundamentalna svojstva svakog posmatranog tela, kako su međusobno povezani, te kako jedino posmatrani zajedno, mogu dati validan sud o prirodi tela. Sekundarna namera je bila posredno pokazati kako su materija i kretanje uzajamno povezani pojmovi, i neodeljivi jedan od drugog. Raznovrsnošću i složenošću kretanja materije se, na kraju, i objašnjava tolika raznolikost prirodnih pojava od mikrosveta do makrosveta.

Bibliografija

[1] Charles J. de la Valée-Poussin,
Cours d'analyse infinitésimale,
Gauthier-Villars, Paris, 1992.

[2] Clyde E. Love
Differential and Integral Calculus,
Macmillan Company, New York, 1976.

[3] Édouard Goursat,
Cours d'analyse,
Gauthier-Villars, Paris, 1964.

[4] Edward. R.Huggins,
Undegraduate Calculus-based Physics
Moose Mountain Press, New Hampshire, 2000.

[5] George B. Thomas, Jr., Maurice D. Wier, Joel Hass,
Thomas' Calculus,
Addison-Wesley Publishing Company Inc., Boston, 2005.

[6] George B. Thomas, Ross L. Finney,
Calculus and Analytic Geometry,
Addison-Wesley Publishing Company Inc., Boston, 1998.

[7] Henry J. Keisler,
Elementary Calculus — An Infinitesimal Approach,
University of Wisconsin Press, Wisconsin, 2000.

[8] James Stewart,
Calculus,
Brooks/Cole, New York, 2008.

[9] Jerrold Marsden, Alan Weinstein,
Calculus III,
Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.

[10] John Bird,
Higher Engineering Mathematics,
Elsevier Ltd., Oxford, 2006.

[11] Ralph Palmer Agnew,
Analytic Geometry and Calculus, with Vectors,
McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1962.

[12] Ron Larson, Bruce H. Edwards,
Calculus,
Brooks/Cole, New York, 2010.