Modeliranje procesa formiranja deviznog kursa

Marko Nedeljkov

Radionica iz upravljanja deviznim rizikom, SECCF, DMI, Novi Sad, 2009

Naivna teorija verovatnoće

- $\Omega \ni \omega$ je prostor dogadjaja, $A \subset \Omega$ je dogadjaj, a $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $P(\Omega) = 1$, se zove verovatnoća. Dogadjaj $A \subset \Omega$ za koji je $P(A) = 1$ zovemo skoro siguran dogadjaj.

Naivna teorija verovatnoće

- $\Omega \ni \omega$ je prostor dogadjaja, $A \subset \Omega$ je dogadjaj, a $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $P(\Omega) = 1$, se zove verovatnoća. Dogadjaj $A \subset \Omega$ za koji je $P(A) = 1$ zovemo skoro siguran dogadjaj.
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva, a $F_X(x) := P(\{\omega : X(\omega) < x\}) = P(X < x)$ je njena kumulativna gustina. Ako postoji funkcija f takva da je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ onda je zovemo gustina od X.

Naivna teorija verovatnoće

- $\Omega \ni \omega$ je prostor dogadjaja, $A \subset \Omega$ je dogadjaj, a $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $P(\Omega) = 1$, se zove verovatnoća. Dogadjaj $A \subset \Omega$ za koji je $P(A) = 1$ zovemo skoro siguran dogadjaj.
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva, a $F_X(x) := P(\{\omega : X(\omega) < x\}) = P(X < x)$ je njena kumulativna gustina. Ako postoji funkcija f takva da je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ onda je zovemo gustina od X.
- (Matematičko) očekivanje je definisano sa $E(X) := \int_{\Omega} XdP$. U slučaju da X ima gustinu, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. U diskretnom slučaju je $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

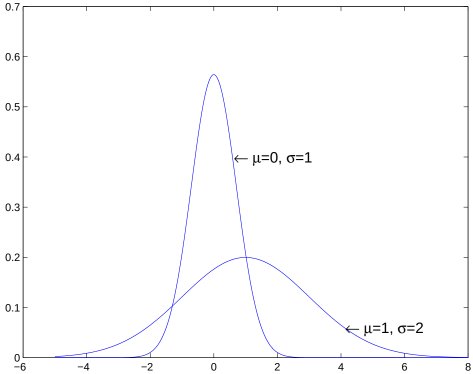
Naivna teorija verovatnoće

- $\Omega \ni \omega$ je prostor dogadjaja, $A \subset \Omega$ je dogadjaj, a $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $P(\Omega) = 1$, se zove verovatnoća. Dogadjaj $A \subset \Omega$ za koji je $P(A) = 1$ zovemo skoro siguran dogadjaj.
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva, a $F_X(x) := P(\{\omega : X(\omega) < x\}) = P(X < x)$ je njena kumulativna gustina. Ako postoji funkcija f takva da je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ onda je zovemo gustina od X.
- (Matematičko) očekivanje je definisano sa $E(X) := \int_\Omega X dP$. U slučaju da X ima gustinu, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$. U diskretnom slučaju je $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.
- Varijansa (standardna devijacija) je definisana sa $\mathrm{Var}(X) := E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$. Specijalno, $\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx$, ako je f gustina, $\mu = E(X)$. U diskretnom slučaju, $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i$.

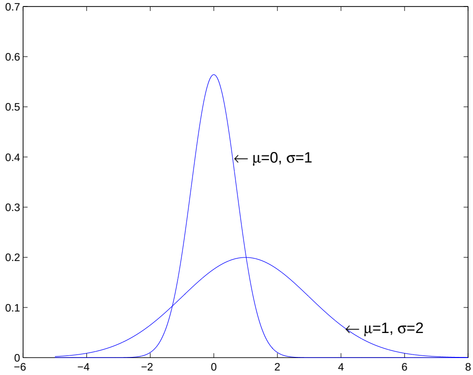
Naivna teorija verovatnoće

- $\Omega \ni \omega$ je prostor dogadjaja, $A \subset \Omega$ je dogadjaj, a $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$, $P(\Omega) = 1$, se zove verovatnoća. Dogadjaj $A \subset \Omega$ za koji je $P(A) = 1$ zovemo skoro siguran dogadjaj.
- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna promenljiva, a $F_X(x) := P(\{\omega : X(\omega) < x\}) = P(X < x)$ je njena kumulativna gustina. Ako postoji funkcija f takva da je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ onda je zovemo gustina od X.
- (Matematičko) očekivanje je definisano sa $E(X) := \int_\Omega XdP$. U slučaju da X ima gustinu, $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. U diskretnom slučaju je $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.
- Varijansa (standardna devijacija) je definisana sa $\mathrm{Var}(X) := E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$. Specijalno, $\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx$, ako je f gustina, $\mu = E(X)$. U diskretnom slučaju, $\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 p_i$.
- Kovarijansa je definisana sa $\mathrm{Cov}(X, Y) := E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

- Gustina normalne raspodele je data sa $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.



- Gustina normalne raspodele je data sa $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.



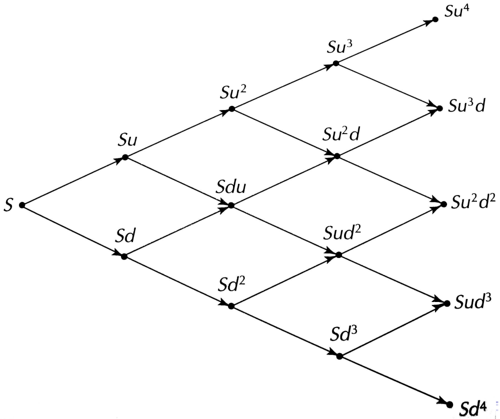
- X ima normalnu raspodelu, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ako je gustina za X data sa gornjim f. X ima lognormalnu raspodelu ako $\ln X$ ima normalnu.

Binomni model

- Znamo početnu vrednost $X_0 = S$, vremenski period dt izmedju promena je fiksiran, a cena može da na kraju svakog vremenskog perioda uzme samo dve vrednosti: staru cenu pomnoženu konstantom u ili konstantom d.

Binomni model

- Znamo početnu vrednost $X_0 = S$, vremenski period dt izmedju promena je fiksiran, a cena može da na kraju svakog vremenskog perioda uzme samo dve vrednosti: staru cenu pomnoženu konstantom u ili konstantom d.
- Binomni model - grafički prikaz



- Slučajna promenljiva posle n-tog perioda je data sa

$$X_n = \begin{pmatrix} x_i \\ f_i \end{pmatrix}_{i=0,\ldots\ldots,n},\ x_i = Su^i d^{n-i},\ f_i = \binom{n}{k} p^i (1-p)^{n-i},$$

$$x_i = \begin{pmatrix} Sd^n, Sud^{n-1}, & \ldots\ldots, Su^i d^{n-i}, & \ldots\ldots, Su^{n-1}d, & Su^n, \\ (1-p)^n, np(1-p)^{n-1}, & \ldots\ldots, \binom{n}{k} p^i (1-p)^{n-i}, & \ldots\ldots, np^{n-1}(1-p), & p^n \end{pmatrix}.$$

- Slučajna promenljiva posle n-tog perioda je data sa

$$X_n = \begin{pmatrix} x_i \\ f_i \end{pmatrix}_{i=0,\ldots\ldots,n}, \; x_i = Su^i d^{n-i}, \; f_i = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i},$$

$$X_i = \begin{pmatrix} Sd^n, Sud^{n-1}, & \ldots\ldots, Su^i d^{n-i}, & \ldots\ldots, Su^{n-1}d, & Su^n, \\ (1-p)^n, np(1-p)^{n-1}, & \ldots\ldots, \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i}, & \ldots\ldots, np^{n-1}(1-p), & p^n \end{pmatrix}.$$

- $E(X_n) = S(up + d(1-p))^n = E(X_1)^n S^{-n+1}$,
$E(\ln X_n) = nS(p \ln u + (1-p) \ln d) = nE(\ln(X_1))$.

- Slučajna promenljiva posle n-tog perioda je data sa

$$X_n = \binom{x_i}{f_i}_{i=0,\dots\dots,n},\ x_i = Su^i d^{n-i},\ f_i = \binom{n}{k} p^i (1-p)^{n-i},$$

$$x_i = \begin{pmatrix} Sd^n, Sud^{n-1}, & \dots\dots, Su^i d^{n-i}, & \dots\dots, Su^{n-1}d, & Su^n, \\ (1-p)^n, np(1-p)^{n-1}, & \dots\dots, \binom{n}{k} p^i (1-p)^{n-i}, & \dots\dots, np^{n-1}(1-p), & p^n \end{pmatrix}.$$

- $E(X_n) = S(up + d(1-p))^n = E(X_1)^n S^{-n+1}$,
  $E(\ln X_n) = nS(p \ln u + (1-p) \ln d) = nE(\ln(X_1))$.
- Neka je $\mu = E(\ln(X_T/X_0))$ očekivana godišnja stopa rasta, a $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\ln(X_T/X_0))$ godišnja standardna devijacija. Tada se mogu odrediti p, u i $d = 1/u$ tako da je $E(X_1) = \mu\Delta t$, $\mathrm{Var}(\ln(X_1)) = \sigma^2 \Delta t$, ako je $X_0 = 1$:
  $p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu\Delta t}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + (\mu\Delta t)^2}}\right)$, $\ln u = \sqrt{\sigma^2 \Delta t + (\mu \Delta t)^2}$.

- Slučajna promenljiva posle n-tog perioda je data sa
$$X_n = \begin{pmatrix} x_i \\ f_i \end{pmatrix}_{i=0,\dots\dots,n}, \; x_i = Su^i d^{n-i}, \; f_i = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i},$$
$$X_i = \begin{pmatrix} Sd^n, Sud^{n-1}, & \dots\dots, Su^i d^{n-i}, & \dots\dots, Su^{n-1}d, & Su^n, \\ (1-p)^n, np(1-p)^{n-1}, & \dots\dots, \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^i (1-p)^{n-i}, & \dots\dots, np^{n-1}(1-p), & p^n \end{pmatrix}.$$
- $E(X_n) = S(up + d(1-p))^n = E(X_1)^n S^{-n+1}$,
$E(\ln X_n) = nS(p \ln u + (1-p) \ln d) = nE(\ln(X_1))$.
- Neka je $\mu = E(\ln(X_T/X_0))$ očekivana godišnja stopa rasta, a $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\ln(X_T/X_0))$ godišnja standardna devijacija. Tada se mogu odrediti p, u i $d = 1/u$ tako da je $E(X_1) = \mu \Delta t$, $\mathrm{Var}(\ln(X_1)) = \sigma^2 \Delta t$, ako je $X_0 = 1$:
$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu \Delta t}{\sqrt{\sigma^2 \Delta t + (\mu \Delta t)^2}}\right), \; \ln u = \sqrt{\sigma^2 \Delta t + (\mu \Delta t)^2}.$$
- Ako pustimo da Δt ide u nulu, binomni model će se približavati lognormanloj raspodeli.

Procena parametara

- Recimo da imamo podatke u $N+1$ tački koje spajaju N vremenskih perioda. Možemo koristiti sledeće ocene:

Procena parametara

- Recimo da imamo podatke u $N+1$ tački koje spajaju N vremenskih perioda. Možemo koristiti sledeće ocene:
- $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \ln\left(\frac{X(k+1)}{X(k)}\right) = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{X(N)}{X(0)}\right).$

Procena parametara

- Recimo da imamo podatke u $N+1$ tački koje spajaju N vremenskih perioda. Možemo koristiti sledeće ocene:
- $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \ln\left(\frac{X(k+1)}{X(k)}\right) = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{X(N)}{X(0)}\right).$
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\ln\left(\frac{X(k+1)}{X(k)}\right) - \hat{\mu}\right)^2.$

Procena parametara

- Recimo da imamo podatke u $N+1$ tački koje spajaju N vremenskih perioda. Možemo koristiti sledeće ocene:
- $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \ln\left(\frac{X(k+1)}{X(k)}\right) = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{X(N)}{X(0)}\right).$
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\ln\left(\frac{X(k+1)}{X(k)}\right) - \hat{\mu}\right)^2.$
- Greške u ocenama su $\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \sigma^2/N$ i $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) = 2\sigma^4/(N-1)$.

Procena parametara

- Recimo da imamo podatke u $N+1$ tački koje spajaju N vremenskih perioda. Možemo koristiti sledeće ocene:
- $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \ln\left(\frac{X(k+1)}{X(k)}\right) = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{X(N)}{X(0)}\right)$.
- $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=0}^{N-1}\left(\ln\left(\frac{X(k+1)}{X(k)}\right) - \hat{\mu}\right)^2$.
- Greške u ocenama su $\mathrm{Var}(\hat{\mu}) = \sigma^2/N$ i $\mathrm{Var}(\hat{\sigma}^2) = 2\sigma^4/(N-1)$.
- Tipične vrednosti za akcija na godišnem nivou su $\mu = 0.12$, $\sigma = 0.15$. Ako je p deo godine, tada je $\mu_p = p\mu$, $\sigma_p = \sqrt{p}\sigma$.

Stohastički procesi

- Stohastički proces X_t je preslikavanje vremenskog intervala $[0, \infty)$ u skup slučajnih promenljivih, tj. za svako t, X_t je slučajna promenljiva.

Stohastički procesi

- Stohastički proces X_t je preslikavanje vremenskog intervala $[0, \infty)$ u skup slučajnih promenljivih, tj. za svako t, X_t je slučajna promenljiva.
- Put SP-a X_t je deterministička funkcija $X_t(\omega)$ kada je $\omega \in \Omega$ fiksirano. X_t je skoro sigurno (s.s.) neprekidan ako je $P(\{\omega : X_t(\omega) \text{ je neprekidno}\}) = 0$.

Stohastički procesi

- Stohastički proces X_t je preslikavanje vremenskog intervala $[0, \infty)$ u skup slučajnih promenljivih, tj. za svako t, X_t je slučajna promenljiva.
- Put SP-a X_t je deterministička funkcija $X_t(\omega)$ kada je $\omega \in \Omega$ fiksirano. X_t je skoro sigurno (s.s.) neprekidan ako je $P(\{\omega : X_t(\omega) \text{ je neprekidno}\}) = 0$.
- SP X_t je martingal ako je očekivanje u budućnosti daje baš sadašnje stanje – SP nema nikakvu težnju.

Stohastički procesi

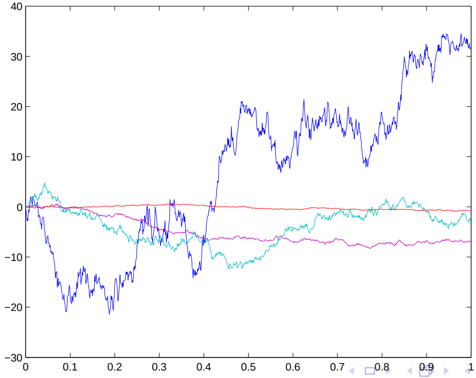
- Stohastički proces X_t je preslikavanje vremenskog intervala $[0, \infty)$ u skup slučajnih promenljivih, tj. za svako t, X_t je slučajna promenljiva.
- Put SP-a X_t je deterministička funkcija $X_t(\omega)$ kada je $\omega \in \Omega$ fiksirano. X_t je skoro sigurno (s.s.) neprekidan ako je $P(\{\omega : X_t(\omega) \text{ je neprekidno}\}) = 0$.
- SP X_t je martingal ako je očekivanje u budućnosti daje baš sadašnje stanje – SP nema nikakvu težnju.
- SP X_t ima Markovsku osobinu ako nema pamćenje – znanje o prošlosti procesa daje iste imformacije kao i znanje sadašnjeg stanja.

Brown-ovsko kretanje (Wiener-ov proces)

- SP W_t se zove Brown-ovsko kretanje ako za $t > s \geq 0$ važi
  1. $W_0 = 0$ s.s.
  2. $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.
  3. $W_t - W_s$ ne zavisi od dogadjaja u vremenu pre s.

Brown-ovsko kretanje (Wiener-ov proces)

- SP W_t se zove Brown-ovsko kretanje ako za $t > s \geq 0$ važi
  1. $W_0 = 0$ s.s.
  2. $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$.
  3. $W_t - W_s$ ne zavisi od dogadjaja u vremenu pre s.
- Brown-ovsko kretanje za 1, 10, 100, 1000 ponavljanja



- Diskretna verzija ovog stohastičkog procesa može se predstaviti kao $W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \epsilon_{t_n}\sqrt{\Delta t}$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Ovde je $\epsilon_{t_n} \sim N(0,1)$.

- Diskretna verzija ovog stohastičkog procesa može se predstaviti kao $W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \epsilon_{t_n}\sqrt{\Delta t}$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Ovde je $\epsilon_{t_n} \sim N(0,1)$.
- Brown-ovsko kretanje dobijamo kada pustimo Δt u nulu, $dW_t = \epsilon_t\sqrt{dt}$.

- Diskretna verzija ovog stohastičkog procesa može se predstaviti kao $W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \epsilon_{t_n}\sqrt{\Delta t}$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Ovde je $\epsilon_{t_n} \sim N(0,1)$.
- Brown-ovsko kretanje dobijamo kada pustimo Δt u nulu, $dW_t = \epsilon_t \sqrt{dt}$.
- W_t je neprekidna s.s. funkcija koja s.s. nema izvod ni u jednoj tački. (Postoji uopšten izvod, tzv. beli šum, $\dot{W}_t$, koji ima velike primene u tehnici pre svega (označava sasvim slučajne smetnje kod prenosa signala, recimo).)

- Diskretna verzija ovog stohastičkog procesa može se predstaviti kao $W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \epsilon_{t_n}\sqrt{\Delta t}$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Ovde je $\epsilon_{t_n} \sim N(0,1)$.
- Brown-ovsko kretanje dobijamo kada pustimo Δt u nulu, $dW_t = \epsilon_t \sqrt{dt}$.
- W_t je neprekidna s.s. funkcija koja s.s. nema izvod ni u jednoj tački. (Postoji uopšten izvod, tzv. beli šum, $\dot{W}_t$, koji ima velike primene u tehnici pre svega (označava sasvim slučajne smetnje kod prenosa signala, recimo).)
- Uopšteni Wiener-ov proces je dat sa $dX_t = adt + bdW_t$, $a, b \in \mathbb{R}$. Integraljenjem dobijamo $X_t = X_0 + at + bW_t$.

- Diskretna verzija ovog stohastičkog procesa može se predstaviti kao $W_{t_{n+1}} = W_{t_n} + \epsilon_{t_n}\sqrt{\Delta t}$, $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Ovde je $\epsilon_{t_n} \sim N(0,1)$.
- Brown-ovsko kretanje dobijamo kada pustimo Δt u nulu, $dW_t = \epsilon_t \sqrt{dt}$.
- W_t je neprekidna s.s. funkcija koja s.s. nema izvod ni u jednoj tački. (Postoji uopšten izvod, tzv. beli šum, $\dot{W}_t$, koji ima velike primene u tehnici pre svega (označava sasvim slučajne smetnje kod prenosa signala, recimo).)
- Uopšteni Wiener-ov proces je dat sa $dX_t = adt + bdW_t$, $a, b \in \mathbb{R}$. Integraljenjem dobijamo $X_t = X_0 + at + bW_t$.
- Ito-ov proces je dat sa $dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$ i ne može se integraliti u opštem slučaju. On se i koristi u opisivanju finansijskog ponašanja.

Black-Scholes-ova formula

- Neka je X_0^0 uplata na bankovni račun, a r kamatna stopa. Za vremenski period t bi vrednost narasla do $X_0^0 e^{rt}$, tj. $\ln X_0^t = lnX_0^0 + rt$.

Black-Scholes-ova formula

- Neka je X_0^0 uplata na bankovni račun, a r kamatna stopa. Za vremenski period t bi vrednost narasla do $X_0^0 e^{rt}$, tj. $\ln X_0^t = lnX_0^0 + rt$.
- Cena akcije u vremenu t označavamo sa X_t^1. U ovom slučaju imamo uticaj slučajnosti, pa je $\ln X_t^1 = lnX_0^1 + \tilde{b}t + \text{rnd}$.

- Neka je X_0^0 uplata na bankovni račun, a r kamatna stopa. Za vremenski period t bi vrednost narasla do $X_0^0 e^{rt}$, tj. $\ln X_0^t = lnX_0^0 + rt$.
- Cena akcije u vremenu t označavamo sa X_t^1. U ovom slučaju imamo uticaj slučajnosti, pa je $\ln X_t^1 = lnX_0^1 + \tilde{b}t + \mathrm{rnd}$.
- rnd zavisi od vremena, pa ćemo ga smatrati SP i označiti sa w_t. Na početku nema lučajnosti, pa je $w_0 = 0$ s.s. Osim toga

Black-Scholes-ova formula

- Neka je X_0^0 uplata na bankovni račun, a r kamatna stopa. Za vremenski period t bi vrednost narasla do $X_0^0 e^{rt}$, tj. $\ln X_0^t = lnX_0^0 + rt$.
- Cena akcije u vremenu t označavamo sa X_t^1. U ovom slučaju imamo uticaj slučajnosti, pa je $\ln X_t^1 = lnX_0^1 + \tilde{b}t + \text{rnd}$.
- rnd zavisi od vremena, pa ćemo ga smatrati SP i označiti sa w_t. Na početku nema lučajnosti, pa je $w_0 = 0$ s.s. Osim toga
- Kako vreme ide, slučajnost je sve veća – sve više ima dogadjaja.

Black-Scholes-ova formula

- Neka je X_0^0 uplata na bankovni račun, a r kamatna stopa. Za vremenski period t bi vrednost narasla do $X_0^0 e^{rt}$, tj. $\ln X_0^t = lnX_0^0 + rt$.
- Cena akcije u vremenu t označavamo sa X_t^1. U ovom slučaju imamo uticaj slučajnosti, pa je $\ln X_t^1 = lnX_0^1 + \tilde{b}t + \text{rnd}$.
- rnd zavisi od vremena, pa ćemo ga smatrati SP i označiti sa w_t. Na početku nema lučajnosti, pa je $w_0 = 0$ s.s. Osim toga
- Kako vreme ide, slučajnost je sve veća – sve više ima dogadjaja.
- Najčešće slučajnost ima normalnu raspodelu.

Black-Scholes-ova formula

- Neka je X_0^0 uplata na bankovni račun, a r kamatna stopa. Za vremenski period t bi vrednost narasla do $X_0^0 e^{rt}$, tj. $\ln X_0^t = lnX_0^0 + rt$.
- Cena akcije u vremenu t označavamo sa X_t^1. U ovom slučaju imamo uticaj slučajnosti, pa je $\ln X_t^1 = lnX_0^1 + \tilde{b}t + \mathrm{rnd}$.
- rnd zavisi od vremena, pa ćemo ga smatrati SP i označiti sa w_t. Na početku nema lučajnosti, pa je $w_0 = 0$ s.s. Osim toga
- Kako vreme ide, slučajnost je sve veća – sve više ima dogadjaja.
- Najčešće slučajnost ima normalnu raspodelu.
- Ne postoji unapred poznata težnja promene cena akcija.

Black-Scholes-ova formula

- Neka je X_0^0 uplata na bankovni račun, a r kamatna stopa. Za vremenski period t bi vrednost narasla do $X_0^0 e^{rt}$, tj. $\ln X_0^t = lnX_0^0 + rt$.
- Cena akcije u vremenu t označavamo sa X_t^1. U ovom slučaju imamo uticaj slučajnosti, pa je $\ln X_t^1 = lnX_0^1 + \tilde{b}t + \text{rnd}$.
- rnd zavisi od vremena, pa ćemo ga smatrati SP i označiti sa w_t. Na početku nema lučajnosti, pa je $w_0 = 0$ s.s. Osim toga
- Kako vreme ide, slučajnost je sve veća – sve više ima dogadjaja.
- Najčešće slučajnost ima normalnu raspodelu.
- Ne postoji unapred poznata težnja promene cena akcija.
- Sve to nam dozvoljava da pretpostavimo da je $w_t \sim N(0, \sigma^2 t)$, za neko $\sigma \in \mathbb{R}$.

- Broj dogadjaja izmedju vremena s i t je proporcionalan sa $t-s$, tako da protpostavljamo $w_t - w_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$.

- Broj dogadjaja izmedju vremena s i t je proporcionalan sa $t - s$, tako da protpostavljamo $w_t - w_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$.
- Cena akcija pre s ne utiče na cenu posle, za neko $t > s$. To znači da $w_t - w_s$ ne zavisi od w_u, $u < s$.

- Broj dogadjaja izmedju vremena s i t je proporcionalan sa $t - s$, tako da protpostavljamo $w_t - w_s \sim N(0, \sigma^2(t - s))$.
- Cena akcija pre s ne utiče na cenu posle, za neko $t > s$. To znači da $w_t - w_s$ ne zavisi od w_u, $u < s$.
- Kada uporedimo ove osobine sa osobinama W_t, zaključujemo da je $w_t = \sigma W_t$.

- Broj dogadjaja izmedju vremena s i t je proporcionalan sa $t-s$, tako da protpostavljamo $w_t - w_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$.
- Cena akcija pre s ne utiče na cenu posle, za neko $t > s$. To znači da $w_t - w_s$ ne zavisi od w_u, $u < s$.
- Kada uporedimo ove osobine sa osobinama W_t, zaključujemo da je $w_t = \sigma W_t$.
- Stavimo $b = \tilde{b} + \sigma^2/2$ i dobijamo BS formulu $X_t^1 = X_0^1 e^{(b-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}$.

- Broj dogadjaja izmedju vremena s i t je proporcionalan sa $t - s$, tako da protpostavljamo $w_t - w_s \sim N(0, \sigma^2(t-s))$.
- Cena akcija pre s ne utiče na cenu posle, za neko $t > s$. To znači da $w_t - w_s$ ne zavisi od w_u, $u < s$.
- Kada uporedimo ove osobine sa osobinama W_t, zaključujemo da je $w_t = \sigma W_t$.
- Stavimo $b = \tilde{b} + \sigma^2/2$ i dobijamo BS formulu $X_t^1 = X_0^1 e^{(b-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}$.
- Ova formula je je rešenje stohastičke jednačine (BS jednačina) $d \ln X_t = bdt + \sigma dW_t$.

- Broj dogadjaja izmedju vremena s i t je proporcionalan sa $t - s$, tako da protpostavljamo $w_t - w_s \sim N(0, \sigma^2(t - s))$.
- Cena akcija pre s ne utiče na cenu posle, za neko $t > s$. To znači da $w_t - w_s$ ne zavisi od w_u, $u < s$.
- Kada uporedimo ove osobine sa osobinama W_t, zaključujemo da je $w_t = \sigma W_t$.
- Stavimo $b = \tilde{b} + \sigma^2/2$ i dobijamo BS formulu $X_t^1 = X_0^1 e^{(b-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}$.
- Ova formula je je rešenje stohastičke jednačine (BS jednačina) $d \ln X_t = bdt + \sigma dW_t$.
- Ili ekvivalentno $dX_t = \tilde{b} X_t dt + \sigma X_t dW_t$.

Primer korišćenja BS formule

- Procen μ i σ je data na osnovu prvih 100 dana.

Primer korišćenja BS formule

- Procen μ i σ je data na osnovu prvih 100 dana.
- Predikcija od 101-og do 214-og dana