Parcijalne diferencijalne jednačine

Marko Nedeljkov

Izrada i štampanje ovog priručnika je deo aktivnosti na
TEMPUS CD JEP 17017-2002
"Mathematics Curricula for Technological Development"
koji funansira EU

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Novi Sad 2004

Ova skripta pokriva deo gradiva iz predmeta parcijalne diferencijalne jednačine za studente matematike.

Predznanje koje se očekuje od čitalaca je linearna algebra, matematička analiza u $\mathbb{R}^n$, obične diferencijalne jednačine i preskočeni delovi standardnog kursa iz PDJ:

- Klasifikacija sistema i jednačina
- Karakteristične mnogostrukosti
- Klasični metodi za rešavanje talasne jednačine
- Integral energije
- Princip maksimuma za parabolične i eliptične jednačine
- Elementarne metode rešavanja paraboličnih i eliptičnih PDJ
- Furijeova metoda razdvajanja promenljivih

U prvom delu skripte su što je više moguće na elementarniji način opisani pojmovi slabog rešenja, distribucija, kao i razni primeri njihove primene.

U drugom delu su dati različiti delovi jednostavnije teorije nelinearni PDJ, sa naglaskom na hiperbolične sisteme PDJ prvog reda i sisteme zakone održanja.

Na kraju ovog dela su date dve sistemske mogućnosti za rad sa nelinearnim PDJ.

Sadržaj

GLAVA 1

Linearne parcijalne diferencijalne jednačine

1. Uvodni pojmovi i definicije

1.1. Klasični prostori funkcija.

1.1.1. *Prostori diferencijabilnih funkcija.* Označimo sa $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup, sa $\overline{\Omega}$ njegovo zatvorenje, a sa $\partial\Omega$ njegovu granicu.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$ je skup svih funkcija $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$, što kasnije nećemo označavati) koja ima sve neprekidne izvode zaključno sa redom $0 \leq k \leq \infty$.

$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ je skup svih funkcija $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ za koje postoji funkcija $\phi \in \mathcal{C}^k(\Omega')$, $u \equiv \phi$ na $\overline{\Omega} \subset \Omega'$, Ω' je otvoren skup.

$\mathcal{C}_b^k(\Omega)$ je skup svih ograničenih funkcija, zajedno sa svim svojim izvodima, iz $\mathcal{C}^k(\Omega)$.

Važi:

$$\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)|_\Omega \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}^k(\Omega).$$

Ako je Ω ograničen skup, tada je $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{C}_b^k(\Omega)$.

Označimo sa $\operatorname{supp} u$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, kao komplement najvećeg otvorenog skupa Ω' na kom je u identički jednako nuli. Skup $\operatorname{supp} u$ zovemo nosačem funkcije u. Kako je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : \ u(x) \neq 0\}}.$$

Oznaka $A \subset\subset B$ znači da postoji kompaktan skup K, takav da važi $A \subset K \subset B$.

$\mathcal{C}_0^k(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \ \operatorname{supp} u \subset\subset \Omega\}$.

Skup $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ ćemo zvati prostor test funkcija.

1.1.2. *L^p-prostori.* Kažemo da je $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ Lebegove mere nula, u oznaci $\mathcal{L}(A) = 0$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prebrojiva unija C_i paralelopipeda u $\mathbb{R}^n$ takva da je

$$\operatorname{mes} \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i < \varepsilon \text{ (mera paralelopipeda je proizvod njegovih stranica).}$$

Na primer, prebrojiv skup tačaka je Lebegove mere nula u jednodimenzionalnom slučaju, regularne krive su mere nula u dvodimenzionalnom slučaju,...

Među funkcijama $u : \Omega \to \mathbb{R}$ koje su Lebeg merljive (sve elementarne funkcije i njihove kompozicije su Lebeg merljive, na primer) uvodimo relaciju ekvivalencije "jednake skoro svuda na Ω", u oznaci $f \sim g$, ako je

$$\mathcal{L}(\{x :\ f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Primedba 1. Ovde nećemo tačnu definiciju Lebeg merljivih funkcija, jer je to netrivijalan pojam koji se intenzivno izučava u posebnom kursu o teoriji mera. Koristićemo samo skupove Lebegove mere nula.

Neka je $1 \leq p < \infty$. Od sada će Ω uvek označavati otvoren, povezan skup.

$$L^p(\Omega) = \{f/\sim: \Omega \to \mathbb{R} :\ f \text{ je merljiva },\ \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\}.$$

Ovo je Banahov prostor sa normom

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

Prostor $L^2(\Omega)$ je osim toga i Hilbertov, sa unutrašnjim proizvodom $(f|g)$ definisanim sa

$$(f|g) = \int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,$$

gde oznaka $\overline{g(x)}$ označava kompleksno konjugovanu vrednost od $g(x)$. Naravno, ako radimo sa realno-vrednosnim funkcijama, što će i biti slučaj ako se ne napomene drugačije, onda je unutrašnji proizvod $(f|g)$ definisan sa

$$(f|g) = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Za $p = \infty$ imamo malo drugačiju definiciju:

$$\begin{aligned} L^\infty(\Omega) = &\{f/\sim: \Omega \to \mathbb{R} :\ f \text{ je merljiva i postoji realno } M \\ &\text{tako da važi } |f(x)| \leq M, \text{ za svako } x \in \Omega\}. \end{aligned} \tag{1}$$

$L^\infty(\Omega)$ je takođe Banahov prostor sa normom

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf M, \text{ gde je konstanta } M \text{ iz (1)}.$$

Najvažniji prostori za nas su L^2-prostori, kao i L^1_{loc}-prostori, koje ćemo sada definisati.

$$\begin{aligned} L^p_{loc}(\Omega) = &\{f/\sim: \Omega \to \mathbb{R} :\ f \text{ je merljiva i za svako } K \subset\subset \Omega \\ &\int_K |f(x)|^p \mathrm{d}x \leq \infty\}. \end{aligned}$$

Funkcije iz L^1_{loc} zovemo lokalno integrabilnim funkcijama.

Često ćemo koristiti Helderovu nejednakost:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\mathrm{d}x \le \|u\|_{L^p}\|v\|_{L^q},\ u \in L^p(\Omega),\ v \in L^q(\Omega),\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \quad (2)$$

Specijalan slučaj ove nejednakosti, $p = q = 2$ se zove Švarcova nejednakost.

Posledice Helderove nejednakosti:

1.
$$\mathrm{mes}(\Omega)^{-1/p}\|u\|_{L^p} \le \mathrm{mes}(\Omega)^{-1/q}\|u\|_{L^q},\ u \in L^q(\Omega),\ p \le q.$$

2.
$$\|u\|_{L^q} \le \|u\|_{L^p}^{\lambda}\|u\|_{L^r}^{1-\lambda},\ u \in L^r(\Omega),\ p \le q \le r,\ \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}.$$

3.
$$\int_\Omega u_1...u_m \mathrm{d}x \le \|u\|_{L^{p_1}}...\|u\|_{L^{p_m}},$$
$$u_i \in L^{p_i}(\Omega),\ i = 1, ..., m,\ \frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1.$$

1.2. Slabi izvodi i slaba rešenja.

1.2.1. *Slabi izvodi.* Uvedimo oznaku $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ za multiindeks $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Koristićemo oznaku

$$\partial^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1}x_1...\partial^{\alpha_n}x_n}.$$

Ako je $\alpha_i = 0$ za neko i, to znači da nemamo izvoda po promenljivoj x_i.

Definicija 1. Funkcija $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ima slabi izvod reda α, $|\alpha| \le m$, koji ćemo opet označavati sa $\partial^\alpha f$, ako postoji funkcija $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ takva da za svako $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ važi

$$\int_\Omega f(x)\partial^\alpha\phi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega g(x)\phi(x)\mathrm{d}x.$$

Funkciju g ćemo zvati slabim izvodom reda α od f.

Sada ćemo probati pomoću jednostavnih primera pokazati šta su to u stvari slabi izvodi.

Primer 1. Uzmimo $\Omega = \mathbb{R}$ i $f(x) = |x|$. Ova funkcija nije diferencijabilna u nuli, ali ćemo pokazati da postoji njen prvi izvod.

(a) Neka je $\phi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty$

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\phi'(x)\mathrm{d}x \\
=& -\int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} x\phi'(x)\mathrm{d}x \\
&\text{sada koristimo parcijalnu integraciju} \\
=& -\left(x\phi(x)\right)\big|_{x=-\infty}^{x=0} + \int_{-\infty}^{0} \phi(x)\mathrm{d}x + \left(x\phi(x)\right)\big|_{x=0}^{x=-\infty} - \int_{0}^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x \\
=& -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

gde je

$$g(x) = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Ovde smo koristili da je $(x\phi(x))$ jednaka nuli za $x = 0$, i $(x\phi(x))$ je nula za $x = \pm\infty$, jer ϕ ima kompaktan nosač (tj. limes ovog člana je 0 kada $x \to \pm\infty$.

Primetimo da nismo imali problema sa domenom integracije, jer ϕ, a samim tim i ϕ' imaju kompaktne nosače.

(b) Potražimo sada drugi slabi izvod funkcije f, tj. slabi izvod funkcije g.

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = \\
=& -\int_{-\infty}^{0} \phi'(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \phi'(x)\mathrm{d}x \\
&\text{sada koristimo parcijalnu integraciju} \\
=& -\left(\phi(x)\right)\big|_{x=-\infty}^{x=0} + \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \phi(x)\mathrm{d}x \\
&+ \left(\phi(x)\right)\big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_{0}^{\infty} 0 \cdot \phi(x)\mathrm{d}x = -2\phi(0).
\end{aligned}$$

Kako ne postoji lokalno integrabilna funkcija h takva da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\phi(x)\mathrm{d}x = 2\phi(0)$$

(jer je skup $\{0\}$ Lebegove mere nula), ne postoji drugi izvod funkcije f.

PRIMER 2. Uzmimo sada dvodimenzionalni slučaj. Neka je $\Omega = L_0(1)$ (otvorena lopta sa centrom u 0 poluprečnika 1) i funkcija f je data sa

$$f(x,y) = \begin{cases} a, & y < 0 \\ b, & y > 0 \end{cases},$$

$a \neq b$. Kako funkcija ne zavisi od x, lako je pokazati da svaki izvod po x postoji, tako da ćemo posmatrati samo izvod po y-u. Zbog kompaktnosti nosača test funkcije ϕ možemo koristiti Fubinijevu teoremu.

$$\int_{-1}^{1} \Big(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} a\partial_y \phi(x,y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} b\partial_y \phi(x,y)\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^{1} (b-a)\phi(x,0)\mathrm{d}x.$$

Kako duž $[-1,1]$ ima Lebegovu meru nula u dvodimenzionalnom prostoru, a ϕ ima proizvoljnu vrednost na tom intervalu, kao i u prethodnom slučaju zaključujemo da ne postoji izvod ove funkcije po y.

Sledeća teorema je veoma važna za traženje slabog izvoda, ali je nećemo dokazivati.

TEOREMA 1. *Ako postoji slabi izvod za lokalno integrabilnu funkciju u, tada je funkcija u skoro svuda diferencijabilna, i u tim tačkama je jaki jednak slabom izvodu.*

Koristeći ovu teoremu, odmah vidimo da je $|x|' = \mathrm{sgn}(x)$ (samo nam još treba dokaz da je to zaista slabi izvod).

1.2.2. *Slabo rešenje parcijalne diferencijalne jednačine.* Pojam slabog rešenja nije jedinstveno definisan, tj. definiše se tako da što je više moguće odgovara fizičkom modelu koji jednačina opisuje.

Mi ćemo ovde dati prvo definiciju za jednačinu prvog reda u divergentnom obliku. Kasnije ćemo koristiti i jednačine višeg reda, kao i sisteme jednačina.

Kažemo da je jednačina prvog reda data u divergentnom obliku ako se može zapisati kao

$$\partial_t a_0(t,x,u) + \partial_{x_1} a_1(t,x,u) + ... + \partial_{x_n} a_n(t,x,u) = b(t,x,u), \qquad (3)$$

gde je nepoznata funkcija $u = u(t, x_1, ..., x_n)$. Pretpostavimo da funkcija u zadovoljava početni uslov $u(x,0) = u_0(x)$. Kažemo da je

$$u \in L^1_{loc}([0,T) \times \Omega)$$

Slabo rešenje jednačine (3) uz dati početni uslov, ako važi

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \partial_t \phi(t,x) a_0(t,x,u) + \partial_{x_1}\phi(t,x) a_1(t,x,u) + ... \\
&+ \partial_{x_n}\phi(t,x) a_n(t,x,u) \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_\Omega u_0(x)\phi(0,x)\mathrm{d}x \\
=& \int_0^T \int_\Omega b(t,x,u)\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

za svako $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty((-\infty,T)\times\Omega)$. Kao što vidimo, za slabo rešenje nije potrebno da funkcija u bude diferencijabilna, pa joj otud i naziv.

Osim ovoga, lako je proveriti (parcijalnom integracijom) da svako $\mathcal{C}^1$ rešenje od (3) istovremeno zadovoljava i relaciju (4), tj. ono je automatski i slabo rešenje.

U praksi se često, radi jednostavnosti, koristi i slabiji uslov

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega \partial_t \phi(t,x) a_0(t,x,u) \partial_{x_1}\phi(t,x) a_1(t,x,u) + ... \\
&+ \partial_{x_n}\phi(t,x) a_n(t,x,u) \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
=& \int_0^T \int_\Omega b(t,x,u)\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\lim_{t\to 0} u(t,x) = u_0 \text{ skoro svuda na } \Omega,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

za svako $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,T)\times\Omega)$, kao definicija slabog rešenja. Obratimo pažnju da je sada ϕ definisano na manjem domenu, odnosno da je jednako 0 na x-osi ($t=0$).

Svi gornji integrali su Lebegovi. No, za one studente koji se još nisu sreli sa tim pojmom, ovi integrali skoro uvek mogu da se zamene se Rimanovim, što ćemo mi i raditi u konkretnim primerima.

Primedba 2. Ako jednačina nije data u divergentnom obliku, tada je definicija slabog rešenja mnogo teža i specifičnija, ukoliko je uopšte moguća. Na kraju ovog teksta se nalaze dve mogućnosti kako se može prići tom problemu. Sada ćemo dati dva karakteristična jednodimenzionalna primera, $\Omega \subset \mathbb{R}$, a promenljiva t je vremenska promenljiva. Inače, jednačine gde je vreme izdvojena promenljiva zovemo evolucionim jednačinama, i obično nas interesuje slučaj $t>0$.

Na ovom mestu ćemo dati dva ilustrativna primera. U oba primera se koristi definicija (5).

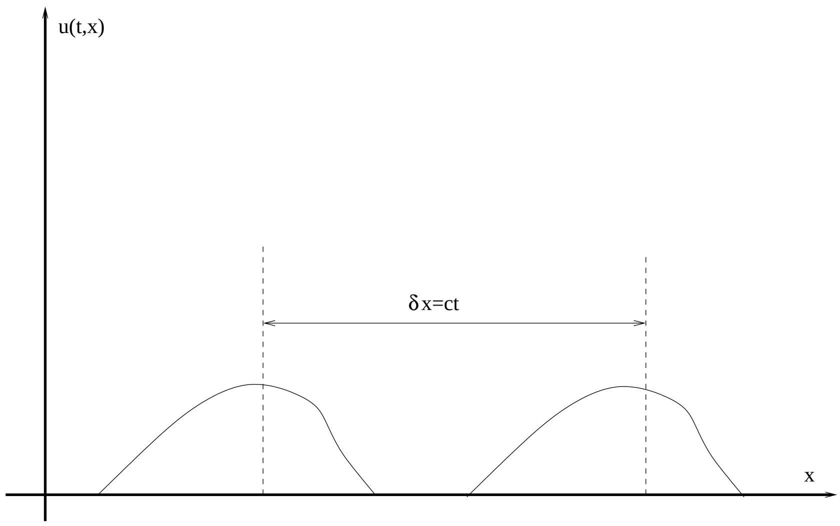
Primer 3. (Kretanje konstantnom brzinom) Posmatrajmo jednačinu sa početnim uslovom

$$\begin{aligned} &\partial_t u(t,x) + c\partial_x(t,x) = 0,\ c \in \mathbb{R} \\ &u(t,0) = a(x). \end{aligned} \tag{6}$$

Ova jednačina, između ostalog, predstavlja model migracije konstantnom brzinom bez uticaja okoline.

Ako je $a \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, tada se lako može videti da je klasično rešenje dato sa

$$u(t,x) = a(x - ct) \text{ (vidi sliku 1)}$$



Sl. 1. Migracija konstantnom brzinom

Pretpostavimo sada da je funkcija a samo lokalno integrabilna. Tada gore napisano klasično rešenje nema smisla. No, pokazaćemo da je to slabo rešenje.

Koristimo definiciju slabog rešenja datog sa (5). Očigledno je

$$\lim_{t\to 0} a(x - ct) = a(x)$$

skoro svuda. Koristeći pomenutu definiciju, imamo

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty a(x-ct)(\partial_t\phi(t,x)+c\partial_x\phi(t,x))\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\text{(posle smene promenljivih:}\xi = x-ct,\ \tau = t)\\
=&-\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty a(\xi)(\partial_t\phi(\tau,\xi+c\tau)+c\partial_x\phi(\tau,\xi+c\tau))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\
&\text{(koristeći Fubinijevu teoremu)}\\
=&-\int_{-\infty}^\infty a(\xi)\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\phi(\tau,\xi+c\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\xi\\
=&-\int_{-\infty}^\infty a(\xi)\phi(\tau,\xi+c\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=\infty}=0,
\end{aligned}
$$

jer je $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R})$. Tako smo pokazali da funkcija $u = a(x-ct)$ ostaje slabo rešenje, iako a nije dovoljno glatka funkcija.

U sledećem primeru ćemo videti slabo rešenje koje je tipično za zakone održanja (kada je $b \equiv 0$ u (4) i (5)).

Posmatrajmo sledeći početni problem. Ona se zove Burgersova bezviskozna jednačina i fizički je zakon održanja brzine (što je inače veštačka tvorevina), no njena prava uloga je kada je samo jedna od jednačina u nekom realnom fizičkom modelu opisanim sistemom parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Teorema 2. *Rimanov problem (početni uslov je stepenasta funkcija)*

$$
\begin{aligned}
&\partial_t u + \partial_x(u^2/2) = 0\\
&u(0,x) = \begin{cases} u_l, & x<0\\ u_d, & x>0\end{cases}
\end{aligned}
$$

ima slabo rešenje oblika

$$
u(t,x) = \begin{cases} u_l, & x<ct\\ u_d, & x>ct\end{cases},
$$

gde je $c = (u_l+u_d)/2$.

Dokaz. Početni uslov je očigledno zadovoljen. Imamo

$$\begin{aligned}
I &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u(t,x)\partial_t\phi(t,x) + (u^2/2)\partial_x\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^{ct} (u_l\partial_t\phi(t,x) + (u_l^2/2)\partial_x\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\quad -\int_0^\infty \int_{ct}^\infty (u_d\partial_t\phi(t,x) + (u_d^2/2)\partial_x\phi(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Kako važi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{ct} \partial_t\phi(t,x)\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{-\infty}^{ct}\phi(t,x)\mathrm{d}x\Big) - c\phi(t,ct) \\
\int_{ct}^{\infty} \partial_t\phi(t,x)\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\int_{ct}^{\infty}\phi(t,x)\mathrm{d}x\Big) + c\phi(t,ct)
\end{aligned}$$

imamo

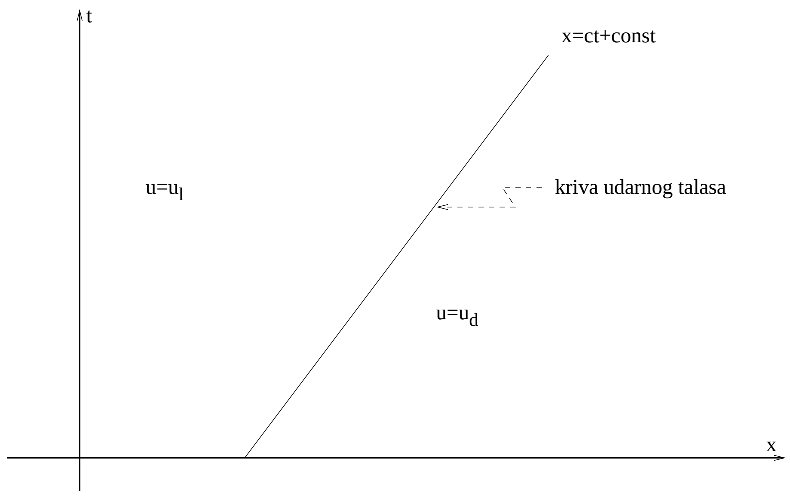
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty (u_l c\phi(t,ct) - (u_l^2/2)\phi(t,ct))\mathrm{d}t \\
&\quad - \int_0^\infty (u_d c\phi(ct,t) - (u_d^2/2)\phi(t,ct))\mathrm{d}t \\
&\quad \Big(\text{jer je} \\
&\quad \int_{-\infty}^{ct}\phi(t,x)\mathrm{d}x|_{t=0}^{t=\infty} = 0 \text{ i } \int_{ct}^{\infty}\phi(t,x)\mathrm{d}x|_{t=0}^{t=\infty} = 0\Big) \\
&= \int_0^\infty (c(u_l - u_d) - (u_l^2 - u_d^2)/2)\phi(t,ct)\mathrm{d}t = 0,
\end{aligned}$$

za

$$c = \frac{u_l + u_d}{2}. \tag{7}$$

□

Primedba 3. Rešenje u ovog oblika zovemo udarni talas sa brzinom c. Uslov (7) se zove Rankin-Igonoov uslov. Ovde je data specijalan slučaj, a opšti oblik Rankin-Igonoovog uslova se kasnije može videti u relaciji (30).



Sl. 2. Udarni talas

Čitaocu ostavljamo za vežbu da pokaže sledeće: Rimanov problem za jednačinu

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$$

ima rešenje u u obliku udarnog talasa sa brzinom

$$c = \frac{[f(u)]}{[u]} := \frac{f(u_d) - f(u_l)}{u_d - u_l}.$$

Postupak dokazivanja je isti kao kod prethodne teoreme.

2. Distribucije i Furijeova transformacija

2.1. Prostor distribucija. U ovoj glavi ćemo dati uprošćenu definiciju prostora distribucija. Nećemo koristiti topologiju (vektorsko topološkeke prostore), već će njeno mesto zauzeti odgovarajuća konvergencija u vektorskim prostorima.

Funkciju iz nekog vektorskog prostora nad određenim vektorskim poljem, u to isto polje (najčešće $\mathbb{R}$, ili $\mathbb{C}$) zovemo funkcionela.

Prvo uvedimo konvergenciju u prostoru $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$.

Definicija 2. Kažemo da niz $\{\phi_j\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ konvergira nuli, ako važi

- Postoji kompaktan skup $K \subset\subset \Omega$ takav da je $\operatorname{supp} \phi_j \subset K$, za svako $j \in \mathbb{N}$.
- Za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\|\partial^\alpha \phi_j\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0$, kada $j \to \infty$.

Ovu konvergenciju označavamo sa $\xrightarrow{\mathcal{D}}$.

Skup $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ sa ovako definisanom konvergencijom, ćemo označavati sa $\mathcal{D}(\Omega)$. Elemente ovog prostora zovemo test funkcije.

Definicija 3. Linearnu neprekidnu funkcionelu S na prostoru $\mathcal{D}(\Omega)$ zovemo distribucijom. Njeno delovanje na test funkciju ϕ označavamo sa $\langle S, \phi\rangle$.

Neprekidnost posmatramo u smislu konvergencije: Kažemo da je S neprekidna ako za svaki niz test funkcija $\{\phi_j\}_j$ koji konvergira ka nuli važi $\langle S, \phi_j\rangle \to 0$, kada $j \to \infty$

Vektorski prostor ovih distribucija označavamo sa $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Sada ćemo dati neke važnije primere distribucija. Prvi primer nam daje injektivno preslikavanje prostora lokalno integrabilnih funkcija u prostor distribucija, a drugi nam daje primer distribucije koja nije slika neke (lokalno integrabilne) funkcije.

Primer 4. Neka je $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, a ϕ test funkcija. Tada preslikavanje is $\mathcal{D}$ u $\mathbb{R}$

$$S_f : \langle S_f, \phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$$

definiše distribuciju, jer je funkcionela S_f očigledno linearna i važi

$$|\langle S_f, \phi\rangle| \leq \|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\operatorname{supp}\phi} |f(x)|\mathrm{d}x.$$

Ovo znači da ako niz $\{\phi_j\}$ teži nuli, tada i $\langle S_f, \phi_j\rangle \to 0$, kada $j \to \infty$, to jest S_f je distribucija.

Primer 5. Neka je $a \in \Omega$. Izraz

$$\langle \delta_a, \phi\rangle = \phi(a)$$

definiše Dirakovu delta distribuciju u tački a. Ako je $a = 0$, onda pišemo samo δ umesto δ_a.

2.1.1. *Osobine i operacije sa distribucijama.* Sada ćemo navesti neke osobine distribucija, pojmove i operacije sa distribucijama, bez dubljeg ulaženja u suštinu i dokaze.

(1) Za niz distribucija $\{S_j\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ kažemo da *konvergira ka nuli* ako za svaku test funkciju $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi

$$\langle S_j, \phi\rangle \to 0, \text{ kada } j \to \infty.$$

Konvergenciju u prostoru distribucija označavamo sa $\xrightarrow{\mathcal{D}'}$. (U teoriji distribucija se ova konvergencija naziva šlaba"). Kako je prostor distribucija vektorski prostor, ovo je dovoljno za definiciju konvergencije na celom prostoru distribucija. Naime $S_j \to T$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, ako i samo ako za svaku test funkciju ϕ važi

$$\langle S_j - T, \phi\rangle \to 0, \text{ kada } j \to \infty.$$

(2) Za $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$ kažemo da je nula na $\omega \subset \Omega$, ako je

$$\langle S, \phi \rangle = 0$$

za svaku test funkciju ϕ sa nosačem u ω.

Definicija 4. *Nosač distribucije* $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\operatorname{supp} S$, je komplement najvećeg otvorenog skupa na kome je $S = 0$ (odnosno skup tačaka iz Ω za koje ne postoji otvorena okolina ω na kojoj je $S = 0$).

Definicija 5. Označimo sa $\mathcal{E}(\Omega)$ prostor glatkih funkcija $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ sa konvergencijom definisanom na sledeći način:

Niz $\{\phi_j\}$ konvergira nuli ako i samo ako važi

$$\lim_{j \to 0} \|\partial^\alpha \phi_j\|_{L^\infty(\Omega)} = 0,$$

za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Dual top prostora, $\mathcal{E}'(\Omega)$, ćemo zvati *prostor distribucija sa kompaktnim nosačem*. Svaki element ovog prostora se može identifikovati sa distribucijom (elementom iz $\mathcal{D}'(\Omega)$) koja zaista ima kompaktan nosač prema prethodnoj definiciji.

Primer 6. $\operatorname{supp} \delta = \{0\}$, jer za svako $x \in \Omega$, $x \neq 0$, postoji okolina te tačke ω koja ne sadrži tačku nula i postoji test funkcija ϕ sa nosačem u ω. To u stvari znači da je

$$\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0) = 0.$$

Definicija 6. *Izvod distribucije* S reda $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ definišemo sa

$$\langle \partial^\alpha S, \phi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle S, \partial^\alpha \phi \rangle, \text{ za svako } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Kako je $\partial^\alpha \phi$ takođe u $\mathcal{D}(\Omega)$, vidimo da definicija uvek ima smisla, to jest svaka distribucija ima izvod proizvoljnog reda. Ova činjenica je i razlog korišćenja distribucija u PDJ.

Lema 1. *Operacija diferenciranja je neprekidna u prostoru distribucija.*

Dokaz. Neka niz distribucija $S_j \xrightarrow{\mathcal{D}'} 0$, $j \to \infty$, što znači da

$$\lim_{j \to \infty} \langle S_j, \phi \rangle \to 0,$$

za svaku test funkciju ϕ. Tada i

$$\lim_{j \to \infty} \langle \partial^\alpha S_j, \phi \rangle = \lim_{j \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle S_j, \partial^\alpha \phi \rangle \to 0,$$

jer je $\partial^\alpha \phi$ takođe test funkcija. $\square$

Primer 7. Lako možemo izračunati svaki izvod delta distribucije,

$$\langle \partial^\alpha \delta, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \delta, \partial^\alpha \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha \phi(0).$$

Ako pogledamo definiciju slabog izvoda za lokalno integrabilne funkcije, odmah vidimo da se on slaže sa izvodom distributivne slike te funkcije. Naime, ako je $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ slabi izvod reda α od $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, tada je $S_g = \partial^\alpha S_f$, gde je S_f (ili S_g) označena distributivna slika od f (ili g).

Primer 8. Definišimo takozvanu Hevisajdovu funkciju

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Kako je H lokalno integrabilna funkcija, možemo je poistovetiti sa distribucijom na $\mathbb{R}$. Pokazaćemo da je njen izvod δ. Neka je ϕ proizvoljna test funkcija na $\mathbb{R}$. Tada

$$\langle H', \phi \rangle = -\langle H, \phi' \rangle = -\int_0^\infty \phi'(x)\mathrm{d}x = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle.$$

Sada vidimo da je u distributivnom smislu

$$|x|'' = 2\delta.$$

(Podsetimo se da slabi izvod $|x|''$ nije postojao.)

Sledeća dva primera ostavljamo za vežbu.

- Pokažite da je drugi distributivni izvod od $|x|$ jednak sa 2δ.
- Definišimo

$$K_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^n/n!, & x > 0. \end{cases}$$

  Nađite sve distribucione izvode ove funkcije.

Ako sa $W^k(\Omega)$ označimo prostor lokalno integrabilnih funkcija na Ω koje imaju sve slabe izvode reda zaključno sa k, onda možemo reći da važi

$$\mathcal{C}^k(\Omega) \subset W^k(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

U ovoj relaciji smo poistovetili funkciju sa njenom slikom.

Ako je $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, tada možemo definisati proizvod distribucije S sa f, $T = Sf$, na sledeći način

$$\langle T, \phi \rangle := \langle S, f\phi \rangle, \ \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dokazaćemo da je ova definicija dobra. Preslikavanje T je očigledno linearna funkcionela. Takođe se lako vidi (koristeći samo definiciju konvergencije) da $f\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ kada niz $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$. Dovoljno je da primenimo pravilo diferenciranja proizvoda funkcija i da primetimo da je $\operatorname{supp}(f\phi) \subset \operatorname{supp}\phi$.

Na isti način kao i za izvod distribucije, lako se pokazuje da je i operacija množenja glatkom funkcijom neprekidna operacija u prostoru distribucija.

Na žalost, za dobru definisanost proizvoda neke funkcije koja nije glatka i distribucije ne postoji uniformna formula (a pogotovo za proizvod dve distribucije). Ovo je glavna prepreka korišćenju distribucija u nelinearnim problemima.

2.1.2. *Konvolucija distribucija.* Prvo ćemo dati klasičnu definiciju konvolucije. Neka su $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Tada definišemo konvoluciju ove dve funkcije sa

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y,\ x \in \mathbb{R}.$$

Smenom promenljivih odmah vidimo da je $f * g = g * f$. Na osnovu Fubinijeve leme vidimo da je i $f * g \in L^1(\mathbb{R})$. Štaviše,

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1}.$$

Sada ćemo dati motiv za definisanje *konvolucije distribucija.* Neka je data proizvoljna funkcija $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Tada važi

$$\begin{aligned}
\langle f * g, \phi\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y\phi(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\phi(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\phi(z+y)\mathrm{d}z\Big)\mathrm{d}y \\
&=\langle f(y), \langle g(z), \phi(z+y)\rangle\rangle \\
&=\langle g(y), \langle f(z), \phi(z+y)\rangle\rangle \\
&\quad \text{(jer je } f * g = g * f).
\end{aligned}$$

Definicija 7. Za $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ i $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ definišemo konvoluciju distribucija

$$\langle T * S\rangle := \langle T(x), \langle S(y), \phi(x+y)\rangle\rangle,\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Definicija je dobra, jer $\langle S(y), \phi(x+y)\rangle \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, zbog činjenice da je $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Istim rezonovanjem vidimo da i definicija

$$\langle S * T\rangle := \langle S(x), \langle T(y), \phi(x+y)\rangle\rangle,\ \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

ima smisla, jer je $\langle T(y), \phi(x+y)\rangle \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

U sledećoj teoremi su date osnovne osobine konvolucije distribucija. Za dokazivanje nekih delova ove teoreme je potrebno dublje znanje funkcionalne analize i teorije distribucija, pa je nećemo dokazivati. Samo ćemo koristiti tvrđena teoreme.

TEOREMA 3. *Neka* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $U \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ *i* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. *Tada važe sledeća tvrđenja*

(a) $T * S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
(b) $T * S = S * T$.
(c) $(T * S) * U = T * (S * U)$.
(d)

$$\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp} T + \operatorname{supp} S$$
$$(A + B = \{x : \ x = y + z, \ y \in A, \ z \in B\}).$$

(e) $(S * f)(x) = \langle S(y), f(x-y)\rangle \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

POSLEDICA 1. *Neka* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *i* $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. *Tada je*

$$\partial^\alpha (T * S) = \partial^\alpha T * S = T * \partial^\alpha S.$$

Dokaz. Neka je ϕ proizvoljna test funkcija. Tada važi

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha (T * S), \phi\rangle =& (-1)^{|\alpha|}\langle T * S, \partial^\alpha \phi\rangle \\
=& (-1)^{|\alpha|}\langle T(x), \langle S(y), \partial^\alpha \phi(x+y)\rangle\rangle \\
=& \langle T(x), \langle (-1)^{|\alpha|} S(y), \partial^\alpha \phi(x+y)\rangle\rangle \\
=& \langle T(x), \langle \partial^\alpha S(y), \phi(x+y)\rangle\rangle \\
=& \langle T * \partial^\alpha S, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Ovo znači da je $\partial^\alpha(T * S) = T * \partial^\alpha S$. Drugi deo tvrđenja sledi iz (b) kod prethodne teoreme. □

PRIMER 9. Neka je $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Kako je $\delta \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, važi

$$S * \delta = \delta * S = S,$$

jer za svaku test funkciju ϕ važi

$$\begin{aligned}
\langle S * \delta, \phi\rangle =& \langle S(x), \langle \delta(y), \phi(x+y)\rangle\rangle \\
=& \langle S(x), \phi(x)\rangle = \langle S, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Generalno je

$$S * \partial^\alpha \delta = \partial^\alpha S,$$

jer prema prethodnoj teoremi važi

$$S * \partial^\alpha \delta = \partial^\alpha S * \delta = \partial^\alpha S.$$

Pre uvođenja pojma Furijeove transformacije, definisaćemo novi potprostor prostora distribucija, temperirane distribucije. Razlog za njihovo uvođenje će biti vrlo brzo objašnjen, kada budemo dali definiciju Furijeove transformacije.

DEFINICIJA 8. Vektorski prostor brzoopadajućih funkcija je definisan skupom

$$\mathcal{S} = \{\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) : \lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha \partial^\beta \phi(x)| = 0, \text{ za svako } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n\}$$

i konvergencijom koja je opisana na sledeći način. Kažemo da niz $\{\phi_j\}_j \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ konvergira ka nuli u $\mathcal{S}$, $S_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, kada $j \to \infty$, ako važi

$$\lim_{j\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \phi_j(x)| = 0, \text{ za svako } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n.$$

DEFINICIJA 9. Vektorski prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ zovemo prostor temperiranih (spororastućih) distribucija i označavamo ga sa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

2.1.3. *Furijeova transformacija.* Definišimo prvo klasičnu Furijeovu transformaciju na prostorima $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$ na sledeći način. Neka je $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \hat{f}(x) := (2\pi)^{-n/2} \int f(y) e^{ix\cdot y} \mathrm{d}y \in L^q(\mathbb{R}^n),$$

gde je q određeno iz relacije $1/p + 1/q = 1$ (podsetimo se da je $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$). Nadalje ćemo izostavljati simbol $\mathbb{R}^n$ ili Ω kod oznaka za normu, ako je jasno u kom smo osnovnom domenu. Važi sledeće tvrđenje

TEOREMA 4. (a) *Ako je $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tada je $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R}^n)$.*

(b) *Ako je $y_j f(y) \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \ge 1$, tada postoji $\partial_{x_j}\hat{f}$, $\hat{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1/p + 1/q = 1$, i važi*

$$\partial_{x_j}\hat{f}(x) = -i(\widehat{y_j f(y)})(x), \; x \in \mathbb{R}^n.$$

(c) *Ako je $\partial_{y_j} f(y) \in L^p(\mathbb{R}^n) \cup \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le 2$, tada je*

$$(\widehat{\partial_{y_j} f(y)})(x) = i x_j \hat{f}(x), \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Za $f \in L^2$, važi još i $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f(x))) = (2\pi)^{-n} f(-x)$. Kako je $\mathcal{S} \subset L^2$, ovo tvrđenje važi i za $f \in \mathcal{S}$.

Sledeća teorema se koristi kod definisanja Furijeove transformacije temperiranih distribucija.

TEOREMA 5. *Neka su $\phi, \psi \in \mathcal{S}$. Tada važi*

- *$\phi \mapsto \hat{\phi}$ je injektivno i neprekidno iz $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$.*

- $\widehat{(\hat{\phi})}(x) = (2\pi)^{-n}\phi(-x)$.
- $(\widehat{-i\partial_{x_j}\phi(x)})(y) = y_j\hat{\phi(x)}(y)$.
- $(\widehat{x_j\phi(x)})(y) = i\partial_{y_j}\hat{\phi(x)}(y)$.
- $\widehat{(\phi * \psi)} = (2\pi)^{n/2}\hat{\phi}\hat{\psi}$, *ako postoji konvolucija* $\phi * \psi$.
- $\widehat{(\phi\psi)} = (2\pi)^{n/2}\hat{\phi} * \hat{\psi}$, *ako postoji konvolucija* $\hat{\phi} * \hat{\psi}$.

Sada možemo definisati Furijeovu transformaciju temperirane distribucije.

Definicija 10. Ako je $S \in \mathcal{S}$, tada definišemo njenu Furijeovu transformaciju $\hat{S}$ sa

$$\langle \hat{S}, \phi\rangle := \langle S, \hat{\phi}\rangle, \text{ za svako } \psi \in \mathcal{S}.$$

Definicija je dobra, jer ako $\phi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, tada $\langle \hat{S}, \hat{\phi}_j\rangle = \langle S, \hat{\phi}_j\rangle \to 0$, zbog (i).

Primer 10. Ako je $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tada imamo

$$\langle \hat{\delta}, \phi\rangle = \langle \delta, \hat{\phi}\rangle = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i0\cdot x}\phi(x)\mathrm{d}x = (2\pi)^{-n/2}\langle \mathbf{1}, \phi\rangle,$$

odnosno $\hat{\delta} = (2\pi)^{-n/2}\mathbf{1}$.

Na sličan način se može pokazati da je

$$\begin{aligned}
&\langle \widehat{e^{ia\cdot x}}(y), \phi(y)\rangle = \langle e^{ia\cdot x}, \hat{\phi}(x)\rangle = \int e^{ia\cdot x}\hat{\phi}(x)\mathrm{d}x \\
=&(2\pi)^{-n/2}\int\int e^{-ix\cdot(y-a)}\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
&\text{(posle smene promenljivih)} \\
=&(2\pi)^{-n/2}\int\int e^{-ix\cdot y}\phi(y+a)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\
=&(2\pi)^{-n/2}\langle \mathbf{1}, \phi\widehat{(y+a)}\rangle \\
&\text{(prema prethodnom primeru)} \\
=&\langle \delta, \phi(y+a)\rangle = \langle \delta_a, \phi\rangle.
\end{aligned}$$

Prema tome, $\widehat{e^{ia\cdot x}}(y) = \delta_a(y)$.

Sada ćemo samo formulisati najbitniju teoremu u ovom delu. Svi domeni prostora distribucija su $\mathbb{R}^n$, pa ćemo tu oznaku izbaciti iz teksta do kraja ovog poglavlja.

Teorema 6. *Preslikavanje* $S \mapsto \hat{S}$ *iz* $\mathcal{S}'$ *na* $\mathcal{S}'$ *je injektivno i neprekidno. Takođe važi*

(i) *Ako je* $S \in \mathcal{E}'$, $T \in \mathcal{S}'$, *tada je* $\hat{S} \in \mathcal{C}^\infty$ *i* $T * S \in \mathcal{S}'$.

(ii) *Ako je* $S \in \mathcal{E}'$, $T \in \mathcal{S}'$, *tada je* $\widehat{(S * T)} = \hat{S}\hat{T}$ *(zbog pretpostavki na* S *i* T*, konvolucija uvek postoji).*

(iii) *Ako je* P *polinom, tada je*

$$(\widehat{P(\partial)u(x)})(\xi) = P(i\xi)\hat{u}(\xi)$$

za svako $u \in \mathcal{S}'$.

(iv) $(\widehat{y_j S(y)})(x) = i\partial_{x_j}\hat{S}(x)$.

Inverzna Furijeova transformacija

$$\mathcal{F}^{-1}(\phi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{ix\cdot y}\phi(y)\mathrm{d}y$$

ima iste osobine i važi

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\phi)) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\phi)) = (2\pi)^{-n}\phi.$$

Primedba 4. Primenom Furijeove transformacije je rešen problem postojanja opšteg rešenja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ PDJ sa konstantnim koeficijentima

$$P(D)u = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \partial^\alpha u = f,$$

gde su $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, i $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

3. Prostori Soboljeva i primena

3.1. Prostori Soboljeva.

3.1.1. *Definicije.* Neka je $m \in \mathbb{N}_0$, $p \ge 1$ i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$. Označimo sa $W^k(\Omega)$ vektorski prostor lokalno integrabilnih funkcija nad Ω koje poseduju sve slabe izvode zaključno do reda k. Sada ćemo definisati njegove podprostore, koji će imati tu prednost da su normirani (prostori $W^k(\Omega)$ su samo lokalno konveksni, definisani familijom seminormi).

Definicija 11. Prostor Soboljeva $H^{m,p}(\Omega)$ je skup funkcija $u \in W^m(\Omega)$, takvih da za svako $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| \le m$, važi $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$. Norma u tom skupu je data sa

$$\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p,\Omega} := \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \le m} |\partial^\alpha u(x)|^p \mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

Ekvivalentna norma gore pomenutoj je data sa

$$\|u\|'_{H^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \le m} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

U ostatku teksta ih nećemo razlikovati po oznakama, to jest, za bilo koju od ovih normi ćemo koristiti oznaku $\|u\|_{H^{m,p}(\Omega)}$.

U slučaju da je $p = 2$, izostavljaćemo taj broj u gornjem indeksu za Soboljeve prostore ili norme u tim prostorima.

Lako je videti da se prostori Soboljeva mogu posmatrati kao potprostori prostora temperiranih distribucija.

Sada ćemo pažnju posvetiti najvažnijem (za nas u ovom tekstu, ali se može reći i generalno, jer se on prirodno javlja u mnogo fizičkih pojava opisanim parcijalnim diferencijalnim jednačinama) prostoru Soboljeva, $H^1(\Omega)$.

Lema 2. *Prostor $H^1(\Omega)$ poseduje unutrašnji proizvod koji je saglasan sa njegovom normom, i dat je sa*

$$\begin{aligned}(u|v) &= \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n \partial_{x_j}u(x)\partial_{x_j}v(x)\mathrm{d}x\Big).\end{aligned} \tag{8}$$

Dokaz. Norma indukovana datim unutrašnjim proizvodom je

$$\sqrt{(u|u)} = \sqrt{\int_\Omega |u(x)|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x},$$

a ona je identična jednoj od datih normi prostora $H^1(\Omega)$, čime je dokaz završen. □

Lema 3. *$H^1(\Omega)$ je Hilbertov prostor.*

Dokaz. Da bi dokazali ovu lemu, preostalo je da pokažemo da je ovaj prostor kompletan. Uzećemo kao poznatu činjenicu da je $L^2(\Omega)$ kompletan prostor.

Konstruišimo preslikavanje

$$\begin{aligned}F :H^1(\Omega) &\to \big(L^2(\Omega)\big)^{n+1} \\ v &\mapsto (v, \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}) = w := (v := w_0, w_1, ..., w_n).\end{aligned}$$

U $\big(L^2(\Omega)\big)^{n+1}$ definišemo normu

$$\|w\| = \sqrt{\sum_{j=0}^n \int_\Omega |w_j(x)|^2\mathrm{d}x},$$

koja je saglasna sa topologijom proizvoda za $\big(L^2(\Omega)\big)^{n+1}$.

F je očigledno izomerija, a specijalno je i linearna bijekcija prostora $H^1(\Omega)$ i $F(H^1(\Omega)) \subset \big(L^2(\Omega)\big)^{n+1}$.

Kako je $L^2(\Omega)$ kompletan kompletan je i prostor $\big(L^2(\Omega)\big)^{n+1}$, tako da za svaki Košijev niz $\{v^{(j)}\} \subset H^1(\Omega)$ postoji $w \in \big(L^2(\Omega)\big)^{n+1}$ takvo da $F(v^{(j)}) \to w$, u $\big(L^2(\Omega)\big)^{n+1}$, kada $j \to \infty$, to jest

$$\begin{aligned} &v^{(j)} \to w_0, \\ &\partial_{x_k} v^{(j)} \to w_k,\ k = 1, ..., n \ \text{ u } L^2(\Omega),\ j \to \infty. \end{aligned}$$

Za $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ na osnovu Helderove nejednakosti imamo

$$\begin{aligned} &|\int_\Omega (v^{(j)} - w_0)\phi \mathrm{d}x| \\ \leq &\|v^{(j)} - w_0\|_{L^2(\Omega)} \|\phi\|_{L^2(\Omega)} \to 0,\ j \to \infty, \end{aligned}$$

jer $v^{(j)} \overset{L^2}{\to} w_0$, što znači da i

$$v^{(j)} \overset{\mathcal{D}'}{\to} w_0.$$

Analogno zaključujemo da

$$\partial_{x_k} v^{(j)} \overset{\mathcal{D}'}{\to} w_k.$$

Na osnovu neprekidnosti izvoda u prostoru distribucija, zaključujemo da

$$\partial_{x_k} v^{(j)} \overset{\mathcal{D}'}{\to} \partial_{x_k} w_0,$$

to jest

$$w_k = \partial_{x_k} w_0,\ k = 1, ..., n.$$

Ovo znači da je $w = F(w_0)$, i kako je F izometrija, imamo tvrđenje da je $H^1(\Omega)$ kompletan. $\square$

Na sličan način se dokazuje i sledeća teorema.

Teorema 7. *Za svako $m \in \mathbb{N}_0$, prostor $H^m(\Omega)$ je Hilbertov. Ako je $p \geq 1$, prostor $H^{m,p}(\Omega)$ je Banahov.*

Sada smo u prilici da iskoristimo činjenicu da Furijeova transformacija preslikava L^2 na L^2 kao i osobine Furijeove transformacije.

Teorema 8. *Označimo sa $\langle \xi \rangle = \sqrt{1 + \xi^2}$. Tada je norma od u u $H^m(\mathbb{R}^n)$ ekvivalentna sa*

$$\|\langle \xi \rangle^m \hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Drugim rečima, $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pripada prostoru $H^m(\mathbb{R}^n)$ ako je

$$\|\langle \xi \rangle^m \hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} < \infty.$$

Sledeći prostori su bitni za rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina, jer daju smisao zadovoljavanja graničnih uslova u slabom smislu.

Definicija 12. Prostor $H_0^{m,p}(\Omega)$ je zatvaranje skupa $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ u normi prostora $H^{m,p}(\Omega)$: Činjenica da $v \in H_0^{m,p}(\Omega)$, u stvari znači da postoji niz $\{\phi_j\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ takav da

$$\phi_j \stackrel{H^{m,p}}{\to} v,\ j \to \infty.$$

Granični uslov $u|_{\partial\Omega} = 0$, $u \in H^{m,p}(\Omega)$ u slabom smislu sada jednostavno znači da je $u \in H_0^{m,p}(\Omega)$. Ako je i $v \in H^{m,p}(\Omega)$, tada je $u = v$ na $\partial\Omega$ ako i samo ako je $u - v \in H_0^{m,p}(\Omega)$.

Naravno, funkcija može biti i nenula na granici, ali opet da bude jednaka nuli u slabom smislu.

Inače, neki autori uvode *funkciju traga*, $\mathrm{Sp} : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, tako da je $\mathrm{Sp}(u) = 0$, ako $u \in H_0^{m,p}(\Omega)$. No, to nije jednostavna procedura i nije neophodno da se koristi ako je granica đovoljno glatka", što ćemo mi stalno pretpostavljati.

3.1.2. *Teoreme ulaganja.* U ovom delu ćemo samo navesti samo neke od vrlo bitnih teorema ulaganja prostora Soboljeva koje su neophodne za ozbiljniji rad u oblasti parcijalnih diferencijalnih jednačina.

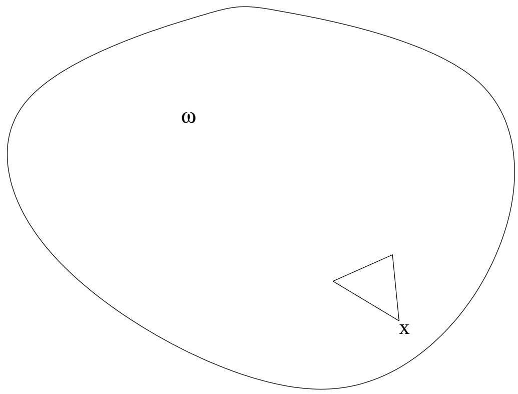
Definicija 13. Kažemo da je Banahov prostor B_1 *neprekidno uložen* u Banahov prostor B_2, $B_1 \to B_2$ ako postoji ograničeno linearno injektivno preslikavanje iz B_1 u B_2.

Teorema 9. *Za otvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ važi*

$$\begin{aligned}
&H^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega),\ mp > n,\ p \leq q \leq \infty\\
&H^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega),\ mp = n,\ p \leq q < \infty\\
&H^{m,p}(\Omega) \to \mathcal{C}_b^0(\Omega),\ mp > n
\end{aligned}$$

Teorema 10. *Neka je Ω ograničena i ima konusnu osobinu: Za svako $x \in \Omega$ postoji konus visine h sa vrhom u x koji leži u Ω. Tada važi*

$$\begin{aligned}
&H^{m,p}(\Omega) \to L^q(\Omega),\ p \leq q \leq np/(n - mp)\\
&H^{m+j,1}(\Omega) \to \mathcal{C}_b^j(\Omega),\ mp > n
\end{aligned}$$



Sl. 3. Oblast sa konusnom okolinom

4. Slabo rešenje Dirihleovog problema za eliptičnu jednačinu

U ovoj glavi ćemo se baviti rešavanjem Dirihleovog (I granični problem) za Laplasovu jednačinu, no isti metodi se mogu primeniti na bilo koju strogo eliptičnu linearnu jednačinu drugog reda.

LEMA 4. *(Poenkare) Neka je Ω otvoren i ograničen u pravcu jedne od osa, podskup od $\mathbb{R}^n$. Tada postoji konstanta $C>0$ takva da je*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\Big(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 \mathrm{d}x\Big)^{1/2} \tag{9}$$

za svako $v \in H_0^1(\Omega)$.

Dokaz. Možemo smatrati da je Ω ograničen u pravcu x_1-ose, bez smanjenja opštosti. Tada postoje konstante $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takve da je

$$\Omega \subset \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \alpha \leq x_1 \leq \beta\}.$$

Neka je $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Tada je

$$\phi(x) = \int_\alpha^{x_1} \partial_{x_1}\phi(\xi, x')\mathrm{d}\xi, \ x' = (x_2, ..., x_n).$$

Iz Helderove nejednakosti imamo

$$\begin{aligned}
|\phi(x)| \leq& \Big(\int_\alpha^{x_1} 1^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}\Big(\int_\alpha^{x_1} |\partial_{x_1}\phi(\xi, x')|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}\\
=&\sqrt{x_1-\alpha}\Big(\int_\alpha^{x_1} |\partial_{x_1}\phi(\xi, x')|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}\\
\leq&\sqrt{\beta-\alpha}\Big(\int_\alpha^{\beta} |\partial_{x_1}\phi(\xi, x')|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

Prema tome je

$$
\begin{aligned}
&\int\int_{(x_1,x')\in\Omega} |\phi(x_1,x')|^2 \mathrm{dx'dx_1} \\
\le &\int\int_{(x_1,x')\in\Omega} (\beta-\alpha)\int_\alpha^\beta |\partial_{x_1}\phi(\xi,x')|^2 \mathrm{d}\xi\mathrm{dx_1dx'} \\
\le &(\beta-\alpha)^2 \int\int_\Omega |\partial_{x_1}\phi(\xi,x')|^2 \mathrm{d}\xi\mathrm{dx'}
\end{aligned}
$$

Odavde je

$$\|\phi\|_{L^2(\Omega)} \le (\beta-\alpha)\Big(\int_\Omega |\nabla\phi(x)|^2 \mathrm{d}x\Big)^{1/2}. \tag{10}$$

Kako, po definiciji, za svako $v \in H_0^1(\Omega)$ postoji niz $\{\phi_j\} \subset \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, $\phi_j \overset{H^1}{\to} v$, kada $j \to \infty$, primenivši graničnu vrednost na nejednakost (10), kada $j \to \infty$, dobijamo da (10) važi za proizvoljno $v \in H_0^1(\Omega)$. $\square$

Teorema 11. *Neka je $\lambda \ge 0$ i neka je Ω otvoren skup, ograničen po jednoj promenljivoj (u pravcu neke od koordinatnih osa). Tada je*

$$a_\lambda(u,v) = \lambda\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x$$

unutrašnji proizvod ekvivalentan sa ranije definisanim $(u|v)$ u $H_0^1(\Omega)$ (to jest, definišu istu normu).

Dokaz. Treba da pokažemo da postoje pozitivne konstante C_1 i C_2, takve da je

$$C_1\|u\|^2_{H^1} \le \underbrace{a_\lambda(u,u)}_{\text{kvadrat norme indukovane sa } a_\lambda} \le C_2\|u\|^2_{H^1}.$$

Za $\lambda > 0$ možemo uzeti

$$\min\{1,\lambda\}\|u\|^2_{H^1} \le a_\lambda(u,u) \le \max\{1,\lambda\}\|u\|^2_{H^1}.$$

Za $\lambda = 0$, na osnovu leme 4, imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+C^2}\|u\|^2_{H^1} =&\frac{1}{1+C^2}\Big(\|u\|^2_{L^2} + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x \\
\le&\frac{1}{1+C^2}\Big(C^2\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x \\
&\text{gde je konstanta } C \text{ iz nejednakosti (9)} \\
\le&\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\mathrm{d}x = a_0(u,u) \le \|u\|^2_{H^1}
\end{aligned}
$$

$\square$

Sledeća teorema je u funkcionalnoj analizi poznata kao Teorema Risa. Ovde ćemo je samo navesti, bez dokaza, koji se inače nalazi u standardnom kursu funkcionalne analize.

TEOREMA 12. *(Ris) Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor sa unutrašnjim proizvodom $a(\cdot,\cdot)$. Neka je $F:\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) linearno i neprekidno preslikavanje. Tada postoji jedinstveno $u\in\mathcal{H}$ takvo da je*

$$a(u,v)=F(v),$$

za svako $v\in\mathcal{H}$.

Sada ćemo navesti glavnu teoremu ove glave, koju je sada lako dokazati posle pređašnjih tvrđenja.

TEOREMA 13. *Neka je $\lambda\geq 0$ i Ω otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$, ograničen po jednoj promenljivoj. Tada za svako $f\in L^2(\Omega)$ postoji $u\in H_0^1(\Omega)$ takvo da je*

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x+\int_\Omega\nabla u(x)\nabla v(x)\mathrm{d}x\\ =\int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x,\ \textit{za svako } v\in H_0^1(\Omega).\end{aligned}\tag{11}$$

Ovo znači da je ovako nađeno u slabo rešenje (rešenje u $\mathcal{D}'$) Dirihleovog problema

$$\begin{aligned}(\lambda-\triangle)u&=f\\ u|_{\partial\Omega}&=0\end{aligned}$$

Dokaz. $H_0^1(\Omega)$, sa $a_\lambda(\cdot,\cdot)$ definisano u teoremi 11, je Hilbertov prostor, a preslikavanje

$$\begin{aligned}F:&H_0^1(\Omega)&&\to\mathbb{R}\\ &v&&\mapsto\inf_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

je linearno i neprekidno. Pokažimo to. Iz činjenice da

$$v_j\xrightarrow{H^1}v$$

odmah sledi

$$\|v_j-v\|_{L^2(\Omega)}\to 0,\ \text{kada } j\to\infty.$$

Na osnovu Helderove nejednakosti imamo

$$|\int_\Omega(f(x)v_j(x)-f(x)v(x))\mathrm{d}x|\leq\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v_j-v\|_{L^2(\Omega)}\to 0,$$

kada $j\to\infty$. Na osnovu Risove teoreme, postoji $u\in H_0^1(\Omega)$ takvo da je

$$a_\lambda(u,v)=\int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x,\ \text{za svako } v\in H_0^1(\Omega).$$

U ovom slučaju, imamo

$$\lambda\langle u,\phi\rangle+\sum_{k=1}^{n}\langle\partial_{x_k}u,\partial_{x_k}\phi\rangle=\langle f,\phi\rangle$$

u $\mathcal{D}'(\Omega)$, jer gornja jednakost važi za svako $\phi\in\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)\subset H_0^1(\Omega)$. Ovo znači da je

$$\lambda\langle u,\phi\rangle-\sum_{k=1}^{n}\langle u,\partial_{x_k}^2\phi\rangle=\langle f,\phi\rangle$$

to jest, u je distributivno rešenje jednačine

$$\lambda u-\triangle u=f.\ \square$$

Ako početni uslov nije nula, već neka funkcija $g\in H_1(\Omega)$, tada konstruišemo slabo rešenje $w=u-g$ za homogeni problem kao u prethodnoj teoremi, samo je

$$\int_\Omega f(x)v(x)\mathrm{d}x$$

u (11) zamenjeno sa

$$\int_\Omega (f(x)+\lambda g(x)+\nabla g(x))\mathrm{d}x.$$

Pojmovi koje smo ovde koristili se mogu koristiti i na širu klasu parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Definicija 14. Linearni diferencijalni operator L koji je zapisan u obliku

$$\begin{aligned}Lu=&\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)\partial_{x_j}u+b_j(x)u\Big)\\&+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\partial_{x_i}u+d(x)u\end{aligned}\tag{12}$$

zovemo operatorom zapisanim u *divergentnom obliku.*

Operator opšteg oblika možemo zapisati u ovom obliku ako su njegovi koeficijenti dovoljno puta diferencijabilni. Obrnuto, ako su a_{ij}, b_i, $i,j=1,...,n$ diferencijabilni, divergentni oblik možemo prevesti u uobičajeni. No, divergentni oblik je baš pogodan za definiciju slabog rešenja, kao što smo to i pre napomenuli.

DEFINICIJA 15. Kažemo da $u \in H^1(\Omega)$ u *slabom smislu* zadovoljava jednačinu

$$Lu = 0$$

ako je

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_j}u(x) + b_j(x)u(x)\Big)\partial_{x_i}v(x) \\ - \Big(\sum_{i=1}^n c_i(x)\partial_{x_i}u(x) + d(x)u(x)\Big) v(x)\mathrm{d}x = 0$$

za svako $v \in \mathcal{C}_0^1$ (nekad koristimo i $v \in H_0^1(\Omega)$).

Neka su g, f_i, $i = 1, ..., n$ lokalno integrabilne funkcije u Ω. Tada se $u \in H^1(\Omega)$ zove *slabo rešenje nehomogene jednačine*

$$Lu = g + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i \text{ u } \Omega$$

ako važi

$$\mathcal{L}(u,v) = F(v) := \int_\Omega \Big(-g(x)v(x) + \sum_{i=1}^n f_i(x)\partial_{x_i}v(x)\Big)\mathrm{d}x$$

za svako $v \in \mathcal{C}_0^1$ $(v \in H_0^1(\Omega))$.

Kao što smo već rekli za Laplasovu jednačinu, granični uslov

$$u|_{\partial\Omega} = h|_{\partial\Omega}$$

zamenjujemo sa

$$u - h \in H_0^1(\Omega).$$

DEFINICIJA 16. Operator L iz (12) je strogo eliptičan u Ω, ako su mu koeficijenti ograničeni u Ω i ako važi

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2,$$

za svako $x \in \Omega$ i svako $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Dirihleovog problem za eliptičnu PDJ je dat u sledećoj teoremi.

TEOREMA 14. *Neka su $a_{ij}, b_i, c_i, d, f_i, g$ kao i gore i $h \in H^1(\Omega)$. Tada, ako je $d(x) \leq 0$, jednačina*

$$Lu = g + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} f_i \text{ u } \Omega \text{ i } u = h \text{ na } \partial\Omega$$

ima jedinstveno rešenje u $H^1(\Omega)$.

5. Linearna talasna jednačina

5.1. Postojanje rešenja. Posmatramo sada Košijev problem za n-dimenzionalnu talasnu jednačinu

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \triangle u = g(x,t) \\ &u|_{t=0} = a(x),\ u_t|_{t=0} = b(x) \\ &a \in H^2(\mathbb{R}^n),\ b \in H^1(\mathbb{R}^n),\ g(\cdot,t) \in H^1(\mathbb{R}^n),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{13}$$

Za rešavanje ovog problema ćemo upotrebiti Furijeovu transformaciju po promenljivoj x.

Teorema 15. *Pod gornjim uslovima postoji rešenje $u \in \mathcal{C}^2((0,T) : H^2(\mathbb{R}^n))$ Košijevog problema (13) za svako $T > 0$. Rešenje je definisano svojom Furijeovom transformacijom*

$$\begin{aligned} \hat{u}(y,t) = &\cos(|y|t)\hat{a}(y) + \frac{\sin(|y|t)}{|y|}\hat{b}(y) \\ &+ \int_0^t \frac{\sin(|y|(t-s))}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{14}$$

Dokaz. Primenimo Furijeovu transformaciju $\mathcal{F}_{x\mapsto y}$ na PDJ i početne uslove (13). Nova promenljiva $y = (y_1, ..., y_n)$ će tada biti n - dimenzionalni parametar obične diferencijalne jednačine po t

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\hat{u}(y,t) + |y|^2\hat{u}(y,t) = \hat{g}(y,t) \\ &\hat{u}(y,0) = \hat{a}(y),\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{u}(y,0) = \hat{b}(y). \end{aligned}$$

Rešenje homogenog dela ove jednačine je dato sa

$$\hat{u}_h(y,t) = C_1\sin(|y|t) + C_2\cos(|y|t).$$

Za nehomogeni deo, varijacija konstanti daje

$$\begin{aligned} C_1(y,t) &= -\int_0^t \frac{\sin(|y|s}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s, \\ C_2(y,t) &= \int_0^t \frac{\cos(|y|s}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

što nam daje

$$\begin{aligned} \hat{u}_p(y,t) &= \int_0^t \frac{\cos(|y|s)\cos(|y|t) - \sin(|y|s)\sin(|y|t)}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \frac{\sin(|y|(t-s))}{|y|}\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Zamenom početnih uslova dobijamo

$$C_2(y,t) = \hat{a}(y),\ C_1(y,t) = \frac{\hat{b}(y)}{|y|},$$

i formula (14) je dokazana.

Kako su funkcije $\cos(|y|t)$ i $|y|^{-1}\sin(|y|t)$ ograničene za svako t, a $\hat{a}$, $\hat{b}$ i $\hat{g}$ su u L^2, Helderova nejednakost povlači da je $\hat{u}$ takođe u L^2.

Ostaje da dokažemo da je $\hat{u}$ u H^2. Za to će biti dovoljno pokazati da je $|y|^2\hat{u}$ u L^2 za svako t. Pomnoživši (14) sa $|y|^2$, dobijamo

$$\begin{aligned}|y|^2\hat{u}(y,t) = &\cos(|y|t)|y|^2\hat{a}(y) + \sin(|y|t)|y|\hat{b}(y)\\ &+ \int_0^t \sin(|y|(t-s))|y|\hat{g}(y,s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Sada koristimo činjenice da su funkcije $|y|^2\hat{a}(y)$, $|y|\hat{b}(y)$ i $|y|\hat{g}(y,t)$ u L^2 (jer je $a \in H^2$, $b, g \in H^1$) za svako t, tako da Helderova nejednakost povlači da je i $|y|^2\hat{u}(y,t)$ u L^2. Ovim je teorema dokazana. □

Primedba 5. Za Klajn-Gordonovu jednačinu

$$u_{tt} - \triangle u + m^2 u = g(x,t)$$

važi slično tvrđenje, samo umesto $|y|$ na svim mestima imamo $\sqrt{m^2 + |y|^2}$. Dokaz ovog tvrđenja se ostavlja čitaocima za vežbu.

5.2. Jedinstvenost rešenja. U sledećoj teoremi koristimo metod *integrala energije*, specifičan za hiperbolične jednačine i sisteme.

Teorema 16. *t-intenerg Posmatrajmo Košijev problem za višedimenzionalnu talasnu jednačinu*

$$\begin{aligned}&u_{tt} - \triangle u = 0\\ &u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Jedino rešenje $u \in \mathcal{C}^2((0,T) : H^2(\mathbb{R}^n))$ ovog problema je trivijalno, $u \equiv 0$.

Dokaz. Pomnožimo jednačinu u (15) sa u_t i integralimo po x. Tada za svako t dobijamo

$$\int u_{tt}(x,t)u_t(x,t) - \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} u(x,t)_t(x,t)\mathrm{d}x = 0$$

(posle parcijalne integracije)

$$= \int \frac{1}{2}(u_t(x,t)^2)_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x,t)u_{x_i t}(x,t)\mathrm{d}x = 0$$

$$= \int \frac{1}{2}(u_t(x,t)^2)_t + \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}(x,t)u_{x_i t}(x,t)\mathrm{d}x = 0$$

$$= \frac{1}{2}\int (u_t(x,t)^2)_t + \sum_{i=1}^{n}(u_{x_i}(x,t)^2)_t\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int (u_t(x,t)^2)_t + ((\nabla u(x,t))^2)_t\mathrm{d}x = 0.$$

Ako definišemo integral energije za talasnu jednačinu

$$E(t) := \frac{1}{2}\int (u_t(x,t))_t^2 + (\nabla u(x,t))_t^2\mathrm{d}x,$$

na osnovu prethodnog računa vidimo da je E konstantna funkcija. Kako je na osnovu homogenih početnih uslova $E(0) = 0$, sledi da je i $E(t) \equiv 0$. To znači da je u konstantna funkcija, to jest identički jednaka nuli. □

Posledica 2. *Rešenje $u \in \mathcal{C}^2((0,T) : H^2(\mathbb{R}^n))$ Košijevog problema (13) je jedinstveno.*

Dokaz ovog tvrđenja jednostavno sledi iz prethodne teoreme. Dovoljno je da pretpostavimo da postoje bar dva rešenja u i v problema (13). Tada funkcija $w := u - v$ zadovoljava homogenu jednačinu, i prema gornjoj teoremi, identički je jednaka nuli, tj. $u \equiv v$.

Primedba 6. Na sličan način se može dokazati jedinstvenost rešenja Klajn-Gordonove jednačine, i to se ostavlja čitaocima za vežbu.

GLAVA 2

Nelinearne PDJ

1. Semilinearni hiperbolični sistemi

Semilinearni hiperbolični sistemi mogu modelovati procese kao što su prenošenje i širenje talasa, kao i njihove nelinearne interakcije. Procesi koji sadrže difuziju, disperziju i udarne talase se ne mogu modelovati sistemima ovog oblika, već kvazilinearnim sistemima, koji će biti kasnije obrađeni.

Hiperboličnost sistema znači da je vremenska promenljiva izdvojena i da je Košijev problem dobro postavljen unapred i unazad po vremenu (globalno u linearnim sistemima sa konstantnim koeficijentima, a bar lokalno u semilinearnom sistemu) za proizvoljne početne uslove.

Prototip semilinearne hiperbolične jednačine je

$$\partial_t u + \lambda \partial_x u = F,$$

gde pretpostavljamo da F zavisi od t, x i u, a $\lambda = \lambda(x,t)$.

Pre nego što se budemo bavili opštim slučajem, evo nekih karakterističnih primera.

(1) Model kretanja lovca i žrtve:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \lambda_1 \partial_x u &= uv \\ \partial_t v + \lambda_2 \partial_x v &= -uv. \end{aligned}$$

(2) Bolcmanov model kinetičke teorije gasova sa diskretnom brzinom:

$$\partial_t u + \Lambda \partial_x u = Q(u),$$

gde je $u = (u_1, ..., u_n)$, Λ konstantna dijagonalna matrica, a Q je kvadratna forma. Specijalni slučaj je Karlemanov sistem:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= v^2 - u^2 \\ \partial_t v - \partial_x v &= u^2 - v^2 \end{aligned}$$

i Brodvelov model

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= w^2 - uv \\ \partial_t v - \partial_x v &= w^2 - uv \\ \partial_t w &= -2(w^2 - uv). \end{aligned}$$

(3) Model dinamike stanovništva u zavisnosti od godišta:

$$(\partial_t + \partial_x)u_i = G_i(x, u)u_i, \ i = 1, ..., n,$$

gde x označava godište a $u_i(x, t)$ je količina ljudi godišta x u vremenu t.

(4) Klasična teorija polja, gde je tipičan primer Klajn-Gordonova jednačina:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -V'(u),$$

za promenljivu u polja i potencijalom V. Posle aproksimacije funkcije V u stepeni red, dobijamo jednačine oblika

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + m^2 u + cu^3 = 0.$$

Drugi primer je sinus-Gordonova jednačina

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u \pm \sin u = 0$$

koja modelira fenomen magnetskog fluksa u kristalima u mehaničkim sistemima.

Najistraživanija jednačina ovog tipa je Klajn-Gordon-Dirakova jednačina:

$$\begin{aligned} \partial_t \psi - \alpha \partial_x \psi &= (M - g\varphi)\beta\psi \\ \partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + m^2 \varphi &= g\bar{\psi}\psi, \end{aligned}$$

gde je $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C^2$ Dirakovo spinorsko polje, φ je mezonsko polje, $M, g, m > 0$,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \beta = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Opšti semilinearni hiperbolični $(n \times n)$ sistem za dve nezavisne promenljive $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ je oblika

$$(\partial_t + M(x, t)\partial_x)v(x, t) = G(x, t, v(x, t)),$$

gde je $v = (v_1, ..., v_n)$, M je $n \times n$ matrica sa glatkim koeficijentima i $G = (G_1, ..., G_n)$ je glatki vektor. Hiperboličnost u ovom slučaju znači da se matica $M(x, t)$ može dijagonalizovati nad $\mathbb{R}$, odnosno, postoji regularna glatka matrica $Q(x, t)$ takva da je $\Lambda = Q^{-1}MQ$ realna dijagonalna matrica. Ovo je sigurno tačno u slučaju striktne hiperboličnosti, odnosno onda kada $M(x, t)$ ima n realnih i različitih karakterističnih korena

$$\lambda_1(x, t) > ... > \lambda_n(x, t).$$

Smena zavisne promenljive $u = Q^{-1}v$ daje semilinerni hiperbolični sistem istog oblika, gde je M realna dijagonalna matrica.

U ovom delu ćemo posmatrati Košijev problem

$$(\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)u = F(x,t,u),\ u(x,0) = a(x), \tag{16}$$

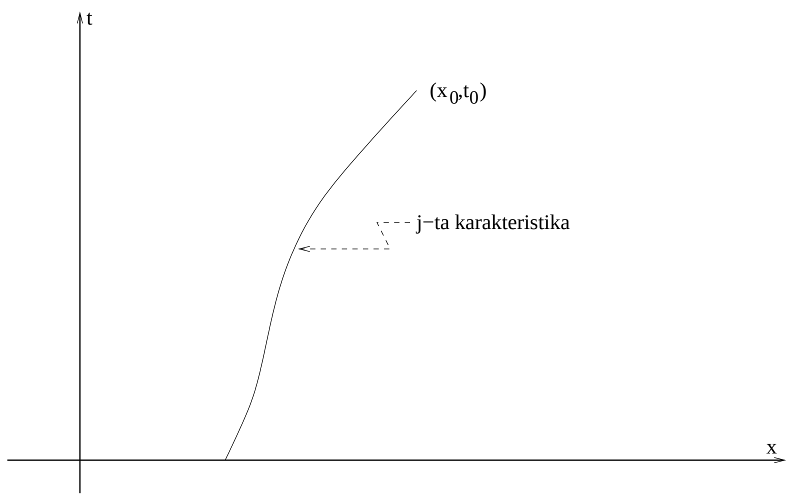
gde je $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ glatka, realna, dijagonalna matrica, F je glatka vektorska funkcija od x, t, u. Po komponentama, ovaj sistem je dat sa

$$(\partial_t + \lambda_j(x,t)\partial_x)u_j = F_j(x,t,u) \tag{17}$$

$$u_j(x,0) = a_j(x). \tag{18}$$

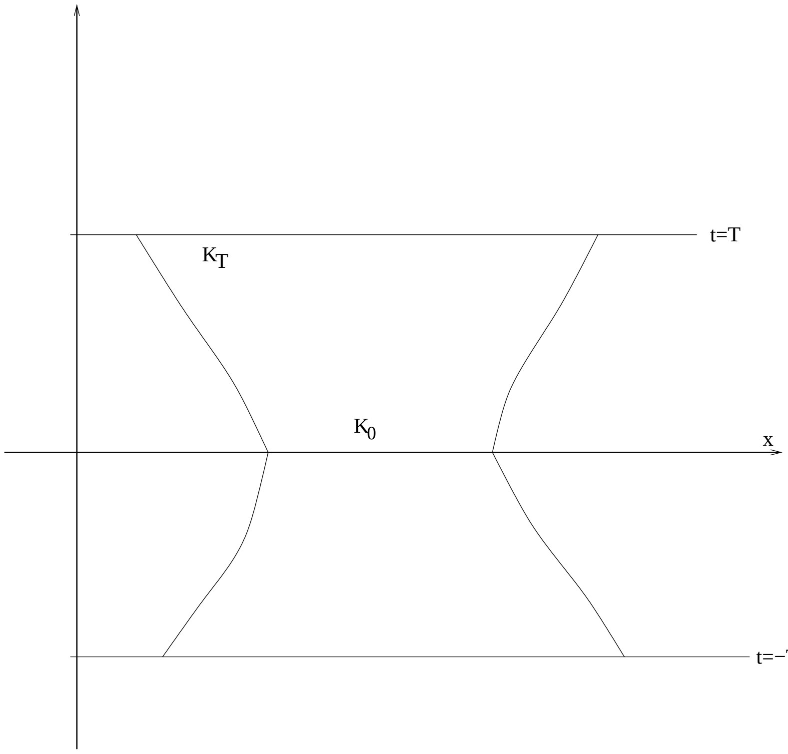
Diferencijalni operatori na levoj strani su glatka vektorska polja $\partial_t + \lambda_j(x,t)\partial_x$. Označimo sa $x = \gamma_j(x_0, t_0, t)$ odgovarajuću integralnu krivu tog vektorskog polja koja prolazi kroz (x_0, t_0) u vremenu $t = t_0$, to jest rešenje početnog problema za sledeću diferencijalnu jednačinu

$$\begin{aligned} &\partial\gamma_j(x_0,t_0,t)/\partial t = \lambda_j(\gamma_j(x_0,t_0,t),t) \\ &\gamma_j(x_0,t_0,t_0) = x_0. \end{aligned} \tag{19}$$



Sl. 4. j-ta karakteristika kroz tačku (x_0, t_0)

Neka je $K_0 \subset \mathbb{R}$ kompaktan interval. K je domen definisanosti za K_0 ako je $K \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = K_0$ i ako za svako $(x,t) \in K$ sve karakteristike koje spajaju (x,t) sa x-osom ostaju svom svojom dužinom u K. Tipičan primer je skup K_T koji je ograničen ekstremalnim karakterističnim krivama iz krajnjih tačaka skupa K_0 i pravama $t = \pm T$.



Sl. 5. Skup K_T

Sada ćemo transformisati problem (17), (18) u sistem integralnih jednačina. To ćemo postići posmatranjem sistema (17) kao sistem običnih diferencijalnih jednačina duž karakterističnih krivih (19). To znači da integraleći

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u_j(\gamma_j(x,t,\tau),\tau) = F_j(\gamma_j(x,t,\tau),\tau,u(\gamma_j(x,t,\tau),\tau))$$

od 0 do t, dobijamo

$$u_j(x,t) = a_j(\gamma_j(x,t,0)) + \int_0^t F_j(\gamma_j(x,t,\tau),\tau,u(\gamma_j(x,t,\tau),\tau))\mathrm{d}\tau \quad (20)$$

Ekvivalencija ovog sistema, uz pretpostavku da je $F(x,t,u(x,t))$ lokalno integrabilna funkcija za svaku lokalno integrabilnu funkciju u (ovo je recimo slučaj kada je $\nabla_u F$ ograničeno), sa polaznim važi za sva distributivna rešenja koja pripadaju $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$, no ovo nećemo dokazivati, već ćemo samo iskoristiti.

Propozicija 1. *(a) Neka je $a \in \mathcal{C}(K_0)$. Tada postoji $T > 0$ takvo da problem (20) ima rešenje $u \in \mathcal{C}(K_T)$.*
(b) Za svako $T_0 > 0$ postoji najviše jedno rešenje $u \in \mathcal{C}(K_T)$.

Dokaz ove teoreme se izvodi pomoću primene teoreme o nepokretnoj tački.

Dokaz. (a) Desna strana od (20) definiše operator

$$S : \mathcal{C}(K_T) \to \mathcal{C}(K_T).$$

Definišimo $u^0 \in \mathcal{C}(K_T)$ sa

$$u_j^0(x,t) - a_j(\gamma_j(x,t,0))$$

i neka je

$$B_T = \{u \in \mathcal{C}(K_T) : \ \|u - u^0\|_{L^\infty(K_T)} \leq 1\}.$$

Vidimo da je B_T jedinična lopta u Banahovom prostoru. Fiksirajmo $T_0 > 0$ i neka je $T \leq T_0$. Ako $u \in B_T$, tada je

$$\|(Su)_j - u_j^0\|_{L^\infty(K_T)} \leq \int_{-T}^{T} \|F_j(\cdot, u)\|_{L^\infty(K_T)} \mathrm{d}\tau. \tag{21}$$

Kako za $u \in B_T$ važi

$$\|u\|_{L^\infty(K_T)} \leq \|u^0\|_{L^\infty(K_T)} + 1$$

i F_j je uniformno ograničeno za takve funkcije u, kada $(x,t) \in K_{T_0} \subset\subset \mathbb{R}^2$.

Ovo znači da je desna strana od (21) manja od 1 za dovoljno malo T, odnosno preslikavanje S ima osobinu

$$S : B_T \to B_T.$$

Ostalo je jos da pokažemo da je S kontrakcija. Neka su $u, v \in B_T$.

$$\begin{aligned}
&\|(Su)_j - (Sv)_j\|_{L^\infty(K_T)} \\
&\leq \int_{-T}^{T} \|F_j(\cdot, u) - F_j(\cdot, v)\|_{L^\infty(K_T)} \mathrm{d}\tau \\
&\text{(koristimo teoremu srednje vrednosti)} \\
&\leq \int_{-T}^{T} \|\nabla F_j\|_{L^\infty(K_T)} \|u - v\|_{L^\infty(K_T)} \mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

Opet, kako je ∇F_j ograničeno na kompaktnom skupu (jer $(x,t) \in K_{T_0}$, $u, v \in B_T$), za dovoljno malo T postoji $\eta < 1$ takvo da je

$$\|(Su)_j - (Sv)_j\|_{L^\infty(K_T)} \leq \eta \|u - v\|_{L^\infty(K_T)}.$$

Kako ovo važi za svako j, na osnovu teoreme o nepokretnoj tački postoji rešenje u jednačine

$$u = Su, \ u \in B_T, \ \text{za } T \text{ dovoljno malo.}$$

(b) Neka su u i v dva rešenja sa početnim uslovima a i b, respektivno. Tada je

$$\begin{aligned}\|u_j - v_j\|_{L^\infty(K_T)} \leq & \|a-b\|_{L^\infty(K_0)} \\ & + \int_{-T}^{T} \|\nabla F_j\|_{L^\infty(K_T)} \|u-v\|_{L^\infty(K_T)} \mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

za $j = 1, ..., n$.

Gronvalova nejednakost sada daje

$$\|u-v\|_{L^\infty(K_T)} \leq \|a-b\|_{L^\infty(K_0)} \exp(T_0 \|\nabla F_j\|_{L^\infty(K_T)}),$$

tako da $a \equiv b$ povlači $u \equiv v$.□

Primedba 7. (i) U (b) smo istovremeno pokazali da rešenje ovog problema neprekidno zavisi od početne vrednosti u supremum normi, tj./ ako $\|a-b\|_{L^\infty(K_0)} \to 0$, tada i $\|u-v\|_{L^\infty(K_T)} \to 0$.
(ii) Po diskusiji ispred teoreme vidimo da je u istovremeno i lokalno slabo rešenje originalno dijagonalnog strogo hiperboličnog sistema.

Sada ćemo samo navesti dva tvrđenja, od kojih se prvo odnosi na postojanje i jedinstvenog globalnog rešenja problema (17), (18), a drugo tvrđenje kaže da glatkost početnog uslova obezbeđuje odgovarajuću glatkost rešenja tog problema.

Propozicija 2. *Pretpostavimo da je gradijent od $F(x,t,u)$ po u uniformno ograničen kada (x,t) pripada nekom kompaktnom skupu. Tada problem (17), (18) ima jedinstveno rešenje $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ za početni uslov $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.*

Propozicija 3. *Neka je $a \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq \infty$ i pretpostavimo da postoji rešenje $u \in \mathcal{C}(K_T)$ od (17), (18) za neko $T_0 > 0$. Tada je i $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R} \times (0,T))$.*

2. Talasno kretanje

2.1. Uvod. Ne postoji precizna definicija šta je u stvari talas, no možemo talas opisati intuitivno kao signal koji se prenosi sa jednog mesta u medijumu do drugog sa prepoznatljivom brzinom. Signal može biti bilo koji poremećaj, kao što su maksimum ili nagla promena neke veličine.

Izdvojićemo dve vrste talasa:

(i) Hiperbolični talasi. Oni su matematički formulisani kao rešenja hiperboličkih jednačina.

(ii) Disperzivni talasi. Oni imaju rešenja oblika

$$\varphi = a\psi(kx - \omega t), \tag{22}$$

gde je frekvenca ω neka realna funkcija talasnog broja k, a $\omega(k)$ je određena sistemom parcijalnih, običnih diferencijalnih ili integralnih jednačina.

Fazna brzina je definisana izrazom $\frac{\omega(k)}{k}$. Kažemo da je talas disperzivan ako $\omega'(k)$ nije konstanta, tj. $\omega''(k) \neq 0$.

Grupna brzina definisana sa

$$c(k) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dk}}$$

je posebno važna kod posmatranja kretanja talasa.

Postoji i grupa PDJ koja leži u preseku, recimo Klajn-Gordonova jednačina

$$u_{xx} - u_x + u = 0.$$

Ona je hiperbolična PDJ, a ima rešenja oblika (22) i to za $\omega^2 = k^2 + 1$. No ova grupa PDJ je relativno mala.

2.2. Jednačina kontinuiteta. U mnogim problemima se javlja neprekidna promena u materijalu ili stanju medijuma, pa ćemo koristiti pojam gustine, $\rho(x,t)$ i fluksa $q(x,t)$ kao osnovne veličine. Napomenimo da gustina ne mora biti samo fizička gustina materije, može biti i mera neke druge veličine, kao na primer gustina energije, broj određenih čestica u nekoj materiji,...

Za ove pojmove je neraskidivo povezana i brzinu tečenja

$$v(x,t) = \frac{q(x,t)}{\rho(x,t)} = \frac{\text{fluks}}{\text{gustina}}.$$

Sada ćemo izvesti osnovnu jednačinu koja povezuje gornje pojmove, takozvanu *jednačinu kontinuiteta.*

posmatrajmo proizvoljan prostorni, $[x, x_1]$, i vremenski interval, $[t, t_1]$. Zakon o održanju mase možemo formulisati kao integralnu vezu

$$\begin{aligned} &\int_x^{x_1} \rho(y,t_1)\mathrm{d}y - \int_x^{x_1} \rho(y,t)\mathrm{d}y = \int_t^{t1} q(x,s)\mathrm{d}s - \int_t^{t1} q(x_1,s)\mathrm{d}s \\ &+ \int_t^{t_1}\int_x^{x_1} f(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{23}$$

Sa leve strane jednakosti imamo promenu ukupne mase od vremenskog trenutka t do t_1, dok je sa desne strane razlika mase koja uđe kroz tačku x i ona koja izađe kroz tačku x_1 tokom vremenskog intervala $[t, t_1]$ plus nezavisan izvor ili uvir definisan funkcijom f.

Deljenjem sa $t_1 - t$ i puštanjem da $t_1 \to t$, dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_x^{x_1} \rho(y,t)\mathrm{d}y = q(x,t) - q(x_1,t) + \int_x^{x_1} f(y,t)\mathrm{d}y.$$

Deljenjem sa $x_1 - x$ i puštenjem da $x_1 \to x$, dobijamo jednačinu kontinuiteta

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}q(x,t) = f(x,t).$$

U više prostornih promenljivih je jednačina kontinuiteta

$$\rho_t + \operatorname{div} q = f.$$

Najjednostavniji slučaj veze ρ i q je homogeni slucaj, $q = Q(\rho)$. Označimo sa $c(\rho) = Q'(\rho)$. Za model bez izvora ili uvira, jednačina tada izgleda

$$\rho_t + q_x = 0 \tag{24}$$

odnosno

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0. \tag{25}$$

Pre svega, primetimo da su karakteristike za (25) date pomoću ODJ

$$\gamma : \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c(\rho),$$

a kako je u pitanju zakon održanja, t.j. desna strana od (25) je jednaka nuli, tada je $\rho = \text{const}$, pa su γ-e u stvari prave linije, to jest brzina prostiranja talasa, $c(\rho)$, je konstantna.

2.3. Kretanje u saobraćaju. U ovom modelu je očigledno da je brzina tečenja

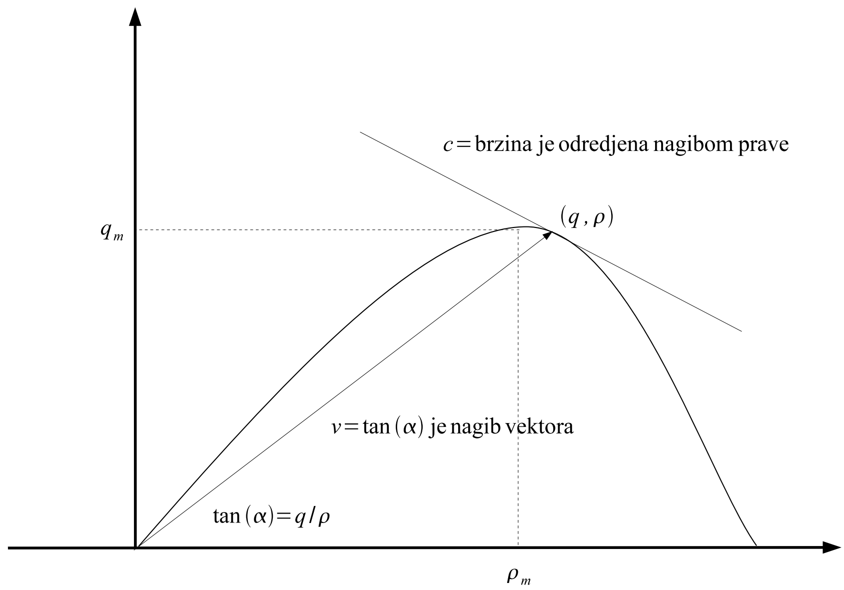
$$v(\rho) = \frac{q(\rho)}{\rho}$$

opadajuća funkcija od ρ koja ide od maksimalne vrednosti pri gustini $\rho = 0$ i opada do nule kada $\rho \to \rho_y$, gde je ρ_y maksimalna gustina kola na putu (kola su jedna do drugih). Prema ovome $q(0) = q(\rho_y) = 0$, ima maksimalnu vrednost q_m za neku gustinu ρ_m i u opštem slučaju je konveksna funkcija (slika 1).

Praktično posmatranje je za jednostazni put dalo eksperimentalne podatke: $\rho_y \approx 225\frac{\text{vozila}}{\text{milji}}$, $\rho_m \approx 80\frac{\text{vozila}}{\text{sat}}$. Grubi model za autoputeve sa više linija se dobija množenjem ovih vrednosti sa višestrukošću linija. (Interesantno je da je najveći protok u ovom slučaju $q_m \approx 20\frac{\text{milja}}{\text{sat}}$).

Brzina prostiranja talasa je

$$c(\rho) = Q'(\rho) = v(\rho) + \rho v'(\rho).$$



Slika 1. Model kretanja u saobraćaju

U ovom slučaju je brzina prostiranja talasa, c, u stvari brzina kretanja vozila, a brzina proticanja je relativno kretanje puta u odnosu na sva vozila. Kako je $v'(\rho) < 0$, brzina kretanja je manja od brzine proticanja (ovde je to brzina kola), što znači da vozači vide poremećaj ispred njih. Primetimo da je $c > 0$ za $\rho < \rho_m$ (vozila se kreću brze od proseka ako je gustina mala) i $c < 0$ za $\rho > \rho_m$ (obrnuto - velika gustina vozila, mala brzina vozila u gužvi).

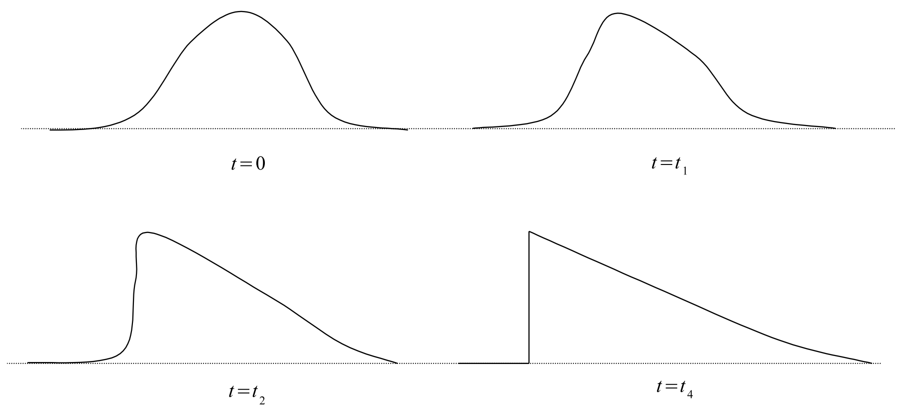
Grinberg je dao model za Linkolnov tunel u Njujorku, gde je $Q(\rho) = a\rho \log \frac{\rho_j}{\rho}$, $a = 17.2\frac{m}{h}$, $\rho_j = 228\frac{v}{m}$. $\rho_m = 83\frac{v}{m}$, $\rho_m = 1430\frac{v}{h}$ se mogu izračunati. Logaritmovana formula očigledno ne aproksimira stanje oko $\rho = 0$, ali ono i nije interesantno. Rešenje ovog problema ćemo samo opisati grafikom.

2.4. Sedimentacija u rekama, hemijske reakcije. Ovaj model opisuje procese razmene između korita i fluida koji prolazi preko njega, preciznije transport sedimentacije u rekama. Neka je

ρ_1 . . . . gustina fluidne supstance
ρ_0 . . . . gustina čvrste supstance

Tada je ukupna gustina

$$\rho = \rho_0 + \rho_1$$



Slika 2. Grafik gustine vozila, $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$

a fluks $q = u\rho_1$, gde je u brzina kretanja fluida. Zakon održanja mase je dat sa

$$(\rho_1 + \rho_0)_t + u\rho_{1x} = 0,$$

gde smo pretpostavili da je brzina konstantna.

Specijalan slučaj, kada možemo zanemariti promene u gustini kod čvrste materije koje nastaju zbog hemijskih reakcija, tj.

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0,$$

nazivamo kvaziekvilibrijum.

Inače su reakcije između dve supstance su date sa

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = k_1(A_1 - \rho_0)\rho_1 - k_2\rho_0(A_2 - \rho_1),$$

gde su k_1, k_2 koeficijenti brzina reakcija, a A_1, A_2 konstante koje zavise od specifičnosti materijala koje sačinjavaju fluid i čvrstu materiju.

Takođe ćemo pretpostaviti da položaj u prostor - vremenu nema velikog uticaja, tj.

$$\rho_0 = r(\rho_1).$$

Tada sistem jednačina izgleda

$$\rho_{1t}(1 + r'(\rho_1)) + u\rho_{1x} = 0$$

odnosno

$$\rho_{1t} + \frac{u}{1 + r'(\rho_1)}\rho_{1x} = 0.$$

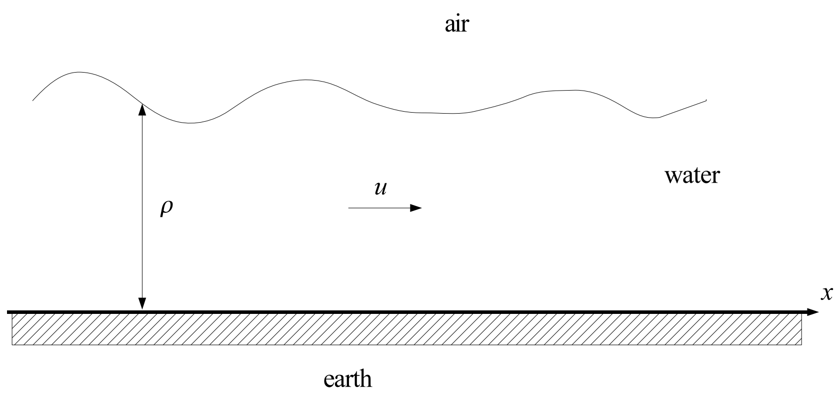
U nekim modelima se može uzeti da je

$$r(\rho_1) = \frac{k_1 A_1 \rho_1}{k_2 B + (k_1 - k_2)\rho_1}.$$

Ova PDJ koja opisuje ovu vrstu talasa je nastala samo iz zakona o održanju mase. U opštem slučaju je fluks $q = \rho u$, gde $u \neq \text{const}$, pa nam treba još jedna jednačina za brzinu u.

2.5. Talasi u plitkoj vodi. Koristimo sledeće oznake:

ρ . . . . visina vodenog stuba - dubina ($\approx$ gustina)
u . . . . brzina kretanja vode



Slika 3. Talasi u plitkoj vodi

Ovaj model ćemo koristiti za opisivanje toka reka kada dubina nije velika (tada bi uzeli da je beskonačna), tj. kada igra značajnu ulogu, poplave, okean ili more – ali u kanalima ili kod obale (fjordovi), lavine("avelanž"), ... Osnovna stvar u ovom modelu je da materija fluida koji teče nije stišljiva i da je homogena (moguće je formiranje "talasa" – ono što vidimo na površini vode, recimo). Ravno dno nije neophodno, ali ako ga smatramo takvim dobijamo homogenu jednačinu – fluks ne zavisi od prostorvremena, što je znatno olakšanje u globalnom rešavanju PDJ.

Zakon o održanju mase daje

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0.$$

Za u ćemo formirati novu PDJ koristeći Njutnov zakon

$$(\dot{mu}) = f.$$

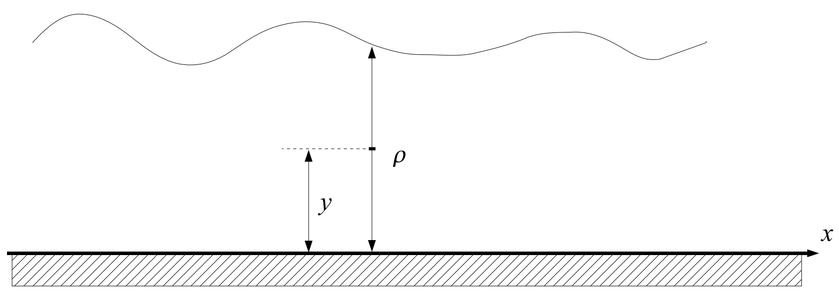
Posmatramo prostorni interval $[x_1, x_2]$ u vremenskom intervalu $[t_1, t_2]$. Važi sledeća relacija

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t_2)u(x,t_2)\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t_1)u(x,t_1)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \big(\rho(x_1,t)u^2(x_1,t) - \rho(x_2,t)u^2(x_2,t)\big)\mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \big(p(x_1,t) - p(x_2,t)\big)\mathrm{d}t$$

Kada pustimo da $t_1, t_2 \longrightarrow t$, $x_1, x_2 \longrightarrow x$ za neku fiksiranu tačku (x,t), dobijamo sledeću PDJ

$$(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + p_x = 0.$$

Ovde je pritisak u stvari hidraulički pritisak, to jest imamo (uzimamo da je fizička gustina vode jednaka jedinici)



Slika 4. Hidraulički pritisak

$$\pi(y) = g(\rho - y) \text{ . . . . hidraulički pritisak,}$$

gde je g gravitaciona konstanta (videti sliku 4). Preme tome

$$p = \int_0^\rho \pi(y)\mathrm{d}y = \int_0^\rho g(\rho - y)\mathrm{d}y = g\frac{\rho^2}{2}.$$

Smenom u gornju jednačinu dobijamo

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ &(\rho u)_t + \big(\rho u^2 + g\frac{\rho^2}{2}\big)_x = 0. \end{aligned} \tag{26}$$

Pretpostavljajući dovoljnu glatkost funkcija, diferencirajmo drugu jednačinu,

$$\rho_t u + \rho u_t + 2\rho u u_x + \rho_x u^2 + g\rho\rho_x = 0.$$

Zatim iz prve jednačine zamenimo ρ_t u ovu jednačinu i dobijamo

$$u_t + uu_x + g\rho\rho_x = 0,$$

odnosno sledeći sistem

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ &u_t + \big(\frac{u^2}{2} + g\rho\big)_x = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

S druge strane, bez pretpostavke o glatkosti rešenja, ako u sistem (26) stavimo smenu $\omega = \rho u$ (ω je moment sile), dobijamo

$$\begin{aligned} &\rho_t + \omega_x = 0 \\ &\omega_t + \big(\frac{\omega^2}{\rho} + g\frac{\rho^2}{2}\big)_x = 0 \end{aligned} \tag{28}$$

2.6. Gasna dinamika (viskozna). Koristimo sledeće oznake:

ρ . . . . gustina gasa

u . . . . brzina gasa (molekula u gasu)

σ . . . . pritisak (sila/površina)

Kao i ranije, imamo sledeće zakone održanja

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ &(\rho u)_t + (\rho u^2)_x - \sigma_x = 0. \end{aligned}$$

U opštem slučaju važi sledeća relacija

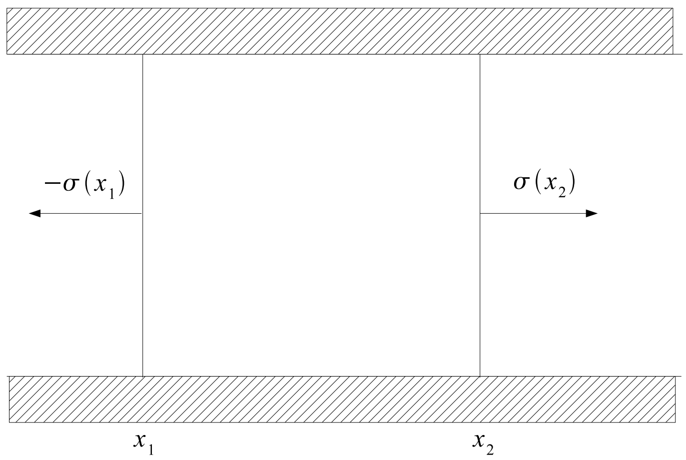
$$\sigma = -p + \nu u_x,$$

gde je p pritisak gasa u mirovanju, a ν je viskoznost ($\ll 1$) (vidi sliku 5).

Prema tome, dobijamo sledeći sistem

$$\begin{aligned} &\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ &(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + p_x = \nu u_{xx} \end{aligned}$$

za viskozne fluide. Viskoznost kod gasova i nekih tečnosti je relativno mala, pa često uzimamo $\nu \equiv 0$.



Slika 5. Pritisak u delu gasa

2.6.1. *Termodinamički efekat kod gasova.* Uz sve oznake iz prethodnog dela, stavimo $p = p(\rho, S)$, gde sada nezavisna promenljiva S označava entropiju.

Da bi zatvorili sistem, treba nam još jedna PDJ (ili jednačina drugog tipa) za entropiju. Na primer, za adijabatski proces imamo

$$S_t + uS_x = 0.$$

Za izotropan, idealan gas imamo

$$S \equiv \text{const}, \ \nu \equiv 0.$$

Sada viskozni sistem izgleda

$$\begin{aligned}
&\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\
&(\rho u)_t + (\rho u^2)_x + (p(\rho))_x = 0 \\
&p(\rho) = \kappa\rho^\gamma, \ 1 < \gamma < 3, \ \gamma = 1 + 2/n,
\end{aligned}$$

gde je κ gasna konstanta, a n je broj atoma u molekulu gasa.

Primetimo da ako se gustina ne menja, $\rho = \rho_0 \in \mathbb{R}$, tada se ni brzina ni pritisak ne menjaju – nema kretanja u fluidu.

Model za više prostornih dimenzija je poznata Navijer-Stoksova jednačina

$$\rho_t + \mathrm{div}(\rho\vec{u}) = 0$$
$$(\rho u)_t + \vec{u}\cdot\mathrm{grad}(\rho\vec{u}) + (\rho\vec{u})\cdot\mathrm{div}\vec{u} + \mathrm{grad}\, p = 0$$
$$(\text{ili} = \nu\triangle\vec{u} \text{ za viskozne fluide}).$$

3. Slaba rešenja i elementarni talasi

3.1. Rankin-Igonoovi uslovi za PDJ. Neka je $u \in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ rešenje PDJ

$$\begin{aligned} &u_t + (f(u))_x = 0 \\ &u(x,0) = u_0(x). \end{aligned} \tag{29}$$

Uzmimo $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$, tj. glatke funkcije sa nosačem čiji je presek sa $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ kompaktan skup.

Tada imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (u_t(x,t) + (f(u))_x\varphi(x,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty f(u)\varphi_x\mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^\infty u(x,t)\varphi(x,t)\mathrm{d}x|_{t=0}^{t=\infty} \\ &\quad - \int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty u\varphi_t\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (u\varphi_t + f(u)\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Na osnovu ovoga uvodimo definiciju slabog rešenja za (29).

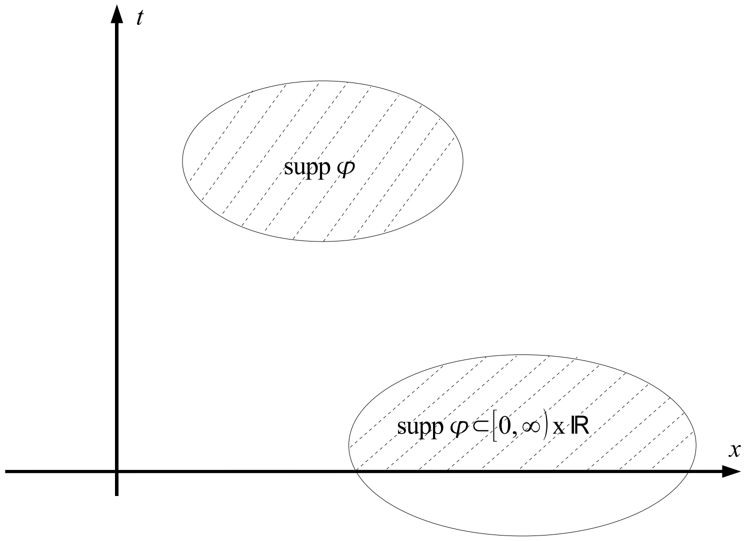
Definicija 17. $u \in L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ (u je do na skup mere nula ograničena funkcija) zovemo slabim rešenjem za (29) ako za sve $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ važi

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty (u\varphi_t + f(u)\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x = 0.$$

Primedba 8. (1) Sva klasična rešenja su slaba.
(2) Ako je u slabo rešenje, tada je u je rešenje i u distributivnom smislu.
(3) Ako je $u \in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ slabo rešenje, onda je i klasično.

Od sada nadalje , dok ne napomene drugačije , "rešenje" če značiti slabo rešenje.

U nekoliko delova ćemo pokazati koji je uslov potreban da bi prekidna funkcija bila rešenje nekog zakona održanja.



SLIKA 6. Nosači test funkcija u poluravni

TEOREMA 17. *Potreban i dovoljan uslov da je*

$$u(x,t)=\begin{cases}u_l(x,t), & x<\gamma(t)\\ u_d(x,t), & x>\gamma(t),\end{cases}$$

gde su u_l i u_d funkcije klase C^1 na svojim domenima, slabo rešenje od (29) je da važi

$$\dot{\gamma}=\frac{f(u_d)-f(u_l)}{u_d-u_l}=:\frac{[f(u)]_\gamma}{[u]_\gamma}. \tag{30}$$

Dokaz. Dokaz će biti dat u nekoliko delova.
1. Uzmimo da je

$$u(x,t)=\begin{cases}u_l(x,t), & x<\gamma(t)\\ u_d(x,t), & x>\gamma(t),\end{cases}$$

gde su u_l i u_d funkcije klase C^1 na svojim domenima, slabo rešenje od (29). Tada imamo

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty(u\varphi_t+f(u)\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^\infty u(x,0)\varphi(x,0)\mathrm{d}x=0,$$

za svako $\varphi\in(\mathbb{R}\times[0,\infty))$.

Tada mora važiti da je $(u_l)_t + f(u_l)_x = 0$ za $x < \gamma(t)$, $t > 0$. To je posledica činjenice da je

$$\begin{aligned} 0 &= \int\int (u_l\varphi_t + f(u_l)\varphi_x \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= -\int\int (u_l)_t\varphi + f(u_l)_x\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

za svako φ, $\operatorname{supp}\varphi \subset \{(x,t):\ x < \gamma(t),\ t > 0\}$ i C^1-funkciju u_l. A ako je φ proizvoljno, imamo

$$(u_l)_t + (f(u_l))_x = 0.$$

Isto tvrđenje važi i za u_d, $(u_d)_t + f(u_d)_x = 0$ za $x > \gamma(t)$, $t > 0$.

2. Imamo

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u\varphi_t + f(u)\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x \\ =&\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} (u_l\varphi_t + f(u_l)\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^\infty \int_{\gamma(t)}^\infty (u_d\varphi_t + f(u_d)\varphi_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+ \int_{-\infty}^\infty u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

3. Računamo prvi integral iz gornjeg izraza. Imamo

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\gamma(t)} u_l\varphi \mathrm{d}x \\ =&\dot\gamma(t)u_l(\gamma(t),t)\varphi(\gamma(t),t) + \int_{-\infty}^{\gamma(t)} ((u_l)_t\varphi + u_l\varphi_t)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Odavde je

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} u_l\varphi_t \mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} (u_l)_t\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &-\int_0^\infty \dot\gamma(t)u_l(\gamma(t),t)\varphi(\gamma(t),t)\mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\gamma(t)} u_l\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} f(u_l)\varphi_x \mathrm{d}x\mathrm{d}t = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\gamma(t)} f(u_l)_x\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &+\int_0^\infty f(u_l(\gamma(t),t))\varphi(\gamma(t),t))\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Kada saberemo ove izraze i iskoristimo činjenicu da je u_l (kao i u_d) rešenje ove PDJ van $(\gamma(t), t)$, dobijamo vrednost za prvi integral

$$\int_0^\infty (f(u_l) - \dot\gamma u_l)\varphi \mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\gamma(t)} u_l \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

4. Analogno, za desnu stranu imamo da je drugi integral

$$-\int_0^\infty (f(u_d) - \dot\gamma u_d)\varphi \mathrm{d}t + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\gamma(t)}^{\infty} u_d \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

5. Saberimo sve integrale:

$$\begin{aligned} 0 = &\int_0^\infty (f(u_l) - f(u_d) - (u_l - u_d)\dot\gamma)\varphi \mathrm{d}t \\ &+ \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} u\varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\varphi(x,t)\mathrm{d}x|_{t=0}^{t=\infty} = -\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x)\varphi(x,0)\mathrm{d}x$$

da bi jednakost bila tačna mora biti

$$\dot\gamma = \frac{f(u_d) - f(u_l)}{u_d - u_l} =: \frac{[f(u)]_\gamma}{[u]_\gamma}. \tag{31}$$

Obrnuto tvrđenje je očigledno. Ovim je kompletno tvrđenje teoreme dokazano. □

Uslov (30) zovemo Rankin-Igonoov (RH) uslov.

Primer 11. Neka je dat Rimanov problem

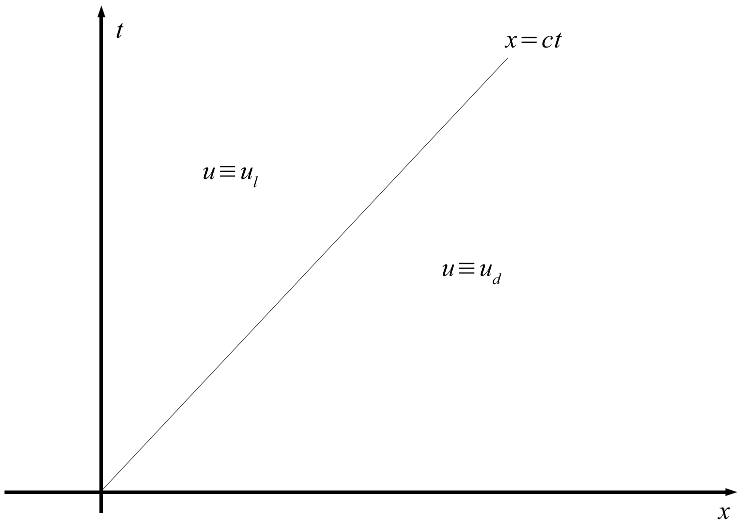
$$\begin{aligned} &u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \\ &u_0 = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_d, & x > 0, \end{cases} \quad u_l, u_d \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{32}$$

Kako su u_l i u_d konstante, dva su trivijalna rešenja PDJ za (32), a RH-uslov daje (slika 7)

$$\dot\gamma(t) = \frac{u_d^2 - u_l^2}{2(u_d - u_l)} = \frac{u_d + u_l}{2},$$

to jest $\dot{\gamma}(t) = ct$, $c = \frac{u_l + u_d}{2}$ i

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < ct. \\ u_d, & x > ct \end{cases} \tag{33}$$



Slika 7. Udarni talas

Ako je $u_l < u_d$, onda osim gornjeg, imamo i sledeća rešenja (8)

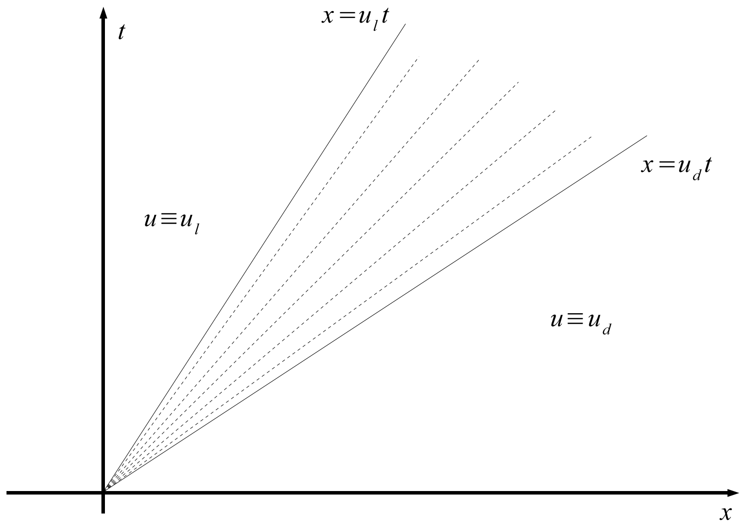
$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < u_l t \\ \frac{x}{t}, & u_l t \leq x \leq u_d t \\ u_d, & x > u_d t \end{cases} \tag{34}$$

ili, recimo (slika 9)

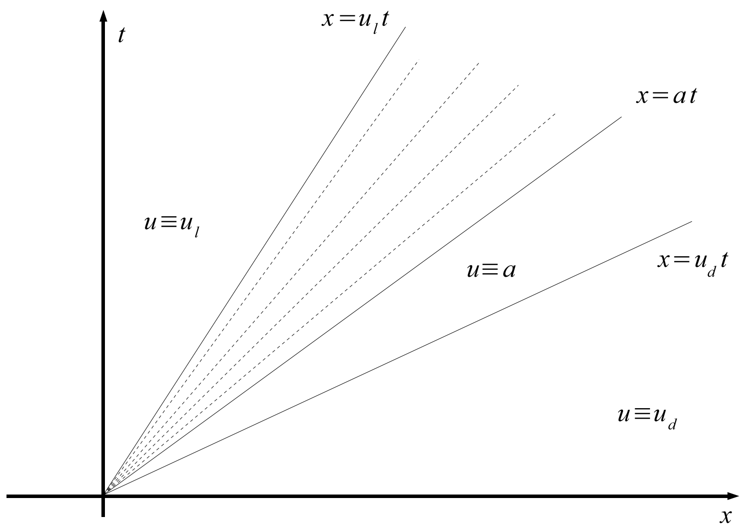
$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < u_l t \\ \frac{x}{f}, & u_l t \leq x \leq at \\ a, & at \leq x \leq \frac{a+u_d}{2} t \\ u_d, & x \geq \frac{a+u_d}{2} t, \end{cases} \tag{35}$$

Za neko $a \in (u_l, u_d)$.

Vidimo da u slučaju $u_l < u_d$ imamo nejedinstvenost rešenja. Taj problem (tj. traženje takozvanih "entropijskih" rešenja) će biti kasnije obrađeno.



Slika 8. Centrirani razređujući talas



Slika 9. Neentropijsko rešenje

Primer 12. Pomnožimo sada PDJ (32) sa u i prebacimo je opet u divergentni oblik

$$\begin{aligned}&u_t + uu_x = 0 \quad / \cdot u\\&uu_t + u^2u_x = 0\\&\Big(\frac{1}{2}u^2\Big)_t + \Big(\frac{1}{3}u^3\Big)_x = 0.\end{aligned}$$

Napravimo nelinearnu smenu promenjivih $\frac{1}{2}u^2 \mapsto v$. Tada imamo sledeći zakon održanja

$$v_t + \Big(\frac{2\sqrt{2}}{3}v^{3/2}\Big)_x = 0$$

$$v|_{t=0} = \begin{cases} v_l = \frac{1}{2}u_l^2, & x < 0\\ v_d = \frac{1}{2}u_d^2, & x > 0.\end{cases}$$

RH uslovi daju brzinu udarnih talasa c i $\gamma = ct$:

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{[\frac{2\sqrt{2}}{3}v^{3/2}]}{[v]} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}(u_d^2)^{3/2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{1}{2\sqrt{2}}(u_l^2)^{3/2}}{\frac{1}{2}(u_d^2 - u_l^2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}(u_d^3 - u_l^3)}{\frac{1}{2}(u_d^2 - u_l^2)} \neq \frac{u_l + u_d}{2} \text{ u opštem slučaju.}$$

(Na primer, za $u_l = 1$, $u_d = 0$, imamo $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} \neq \frac{1}{2}$.)

Ovo je “nezgodan” primer, jer jednostavne, ali nelinearne transformacije promenjivih ne očuvavaju rešenje. Zbog ovoga je bitno naći tačnu interpetaciju modela.

3.2. Razređujući talasi za jedan zakon održanja. Rešenja za jednačinu (29) oblika $u(x,t) = \tilde{u}(\frac{x}{t})$ zovemo samoslično rešenje. Sada ćemo probati da nađemo takva rešenja, zamenivši ih u (29). Posle diferenciranja dobijamo

$$-\frac{x}{t^2}\tilde{u}'\Big(\frac{x}{t}\Big) + f'\Big(\tilde{u}(\frac{x}{t})\Big)\frac{1}{t}\tilde{u}'\Big(\frac{x}{t}\Big) = 0$$

posle množenja jednačine sa t i smene $\dfrac{x}{t} \mapsto y$ dobijamo ODJ

$$\tilde{u}'(y)(f'(\tilde{u}(y)) - y) = 0$$

Ako odbacimo konstantna, trivijalna rešenja ($\tilde{u}' \neq 0$), vidimo da su ta rešenja data implicitno vezom

$$f'(\tilde{u}) = y, \text{ tj. } \tilde{u}(y) = f'^{-1}(y),$$

ako je f' bijekcija (lokalno).

Rimanov problem se sada interpretira na sledeći način:

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_d, & x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \tilde{u}(+\infty) = u_d,\ \tilde{u}(-\infty) = u_l. \tag{36}$$

Ako je $f'' > 0$ (f je konveksna), tada je f' rastuće po argumentu koji je i rešenje $\tilde{u}$, uz uslov (36), postoji ako je $u_l < u_d$. To rešenje zovemo centrirani (početni uslovi imaju diskontinuitet u nuli) razređujući talas.

3.3. Linearni sistemi. Homogeni linearni skalarni Košijev problem sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned} &u_t + \lambda u_x = 0 \\ &u(x,0) = \bar{u}(x),\ \lambda \in C(\mathbb{R}),\ \bar{u} \in C^1([0,\infty) \times \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{37}$$

ima jednostavno rešenje u vidu putujućeg talasa

$$u(x,t) = \bar{u}(x - \lambda t). \tag{38}$$

Ako je $\bar{u} \in L^1_{loc}$, gornje rešenje (38) je slabo rešenje od (37), što je lako proveriti.

Posmatrajmo sada homogeni sistem sa konstantnim koeficijentima

$$\begin{aligned} &u_t + A u_x = 0 \\ &u(x,0) = \bar{u}(x) \end{aligned} \tag{39}$$

gde je A data $n \times n$ hiperbolična matrica sa realnim karakterističnim vrednostima $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ i levim l_i, odnosno desnim r_i, $i = 1, \ldots, n$, karakterističnim vektorima koji su tako izabrani da je $l_i \cdot r_i = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Nazovimo $u_i := l_i \cdot u$ koordinatama vektora $u \in \mathbb{R}^n$ u odnosu na bazu $\{r_1, \ldots, r_n\}$. Množeći (39) s leva sa l_i, dobijamo

$$\begin{aligned} &(u_i)_t + \lambda_i (u_i)_x = (l_i u)_t + \lambda_i (l_i u)_x = l_i u_t + l_i A u_x = 0 \\ &u_i(x,0) = l_i \bar{u}(x) =: \bar{u}_1(x). \end{aligned}$$

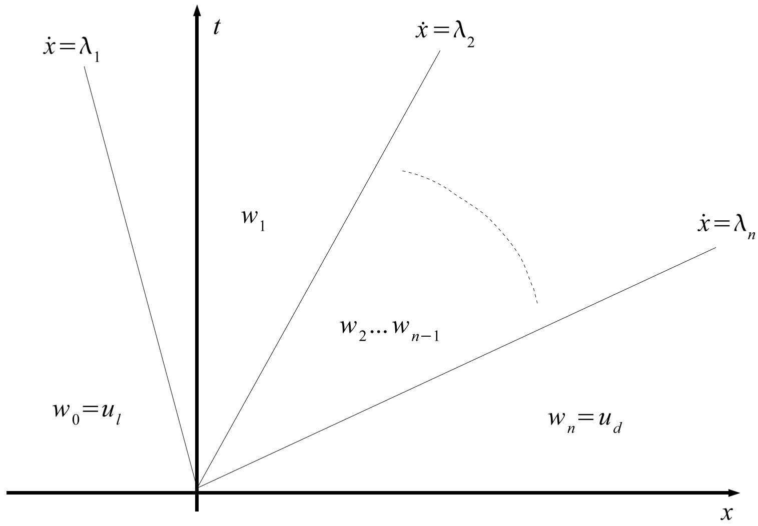
Prema tome , (39) se razbija u n skalarnih Košijevih problema, koji se, jedan po jedan, mogu rešiti kao i (37). Koristeći (38) vidimo da je

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i(x - \lambda_i t) r_i \tag{40}$$

rešenje od (39), jer je

$$u_t(x,t) = \sum_{i=1}^{n} -\lambda_i (l_i \bar{u}_x(x - \lambda_i t)) r_i = -A u_x(x,t).$$

Vidimo da se početni profil razbija na sumu n talasa od kojih svaki ima brzinu $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.



Slika 10. Talasi kod linearnog sistema

Kao specijalan slučaj, posmatrajmo Rimanov početni uslov

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_d, & x > 0. \end{cases}$$

Napišimo sada rešenje (40), koristeći

$$u_d - u_l = \sum_{j=1}^{n} c_j r_j.$$

Definišimo međustanja

$$w_i := u^l + \sum_{j \le i} c_j r_j, \ i = 0, \dots, n,$$

tako da je svaka razlika $w_i - w_{i-1}$ tačno $i-n$-ti karakteristični vektor od A. Rešenje je oblika (vidi sliku 10)

$$u(x,t) = \begin{cases} w_0 = u_l, & \frac{x}{t} < \lambda_1 \\ \dots, & \\ w_i, & \lambda_i < \frac{x}{t} < \lambda_{i+1} \\ \dots, & \\ w_n = u_d, & \frac{x}{t} > \lambda_n. \end{cases} \tag{41}$$

4. Elementarni talasi za zakone održanja

4.1. Osnovne definicije. Posmatrajmo $n \times n$ sistem PDJ jednodimenzionalnog zakona održanja

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u_1 + \frac{\partial}{\partial x}f_1(u_1, \ldots, u_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial t}u_n + \frac{\partial}{\partial x}f_n(u_1, \ldots, u_n) &= 0, \end{aligned} \tag{42}$$

gde koristimo oznake

$$u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n, \ f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Označimo sa $A(u) := Df(u)$ Jakobijevu matricu od f u tački u. Gornji sistem u vektorskoj notaciji pišemo sa

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{43}$$

Ako je rešenje dovoljno glatko, klase C^1, imamo ekvivalentan, kvazilinearan oblik

$$u_t + A(u)u_x = 0. \tag{44}$$

Sistem je striktno hiperboličan ako ima realne različite karakteristične vektore

$$\lambda_1(u) < \lambda_2(u) < .... < \lambda_n(u).$$

Leve, $l_1(u), ..., l_n(u)$, i desne $r_1(u), ..., r_n(u)$, karakteristične vektore tako odredimo da je

$$l_i(u)r_j(u) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

4.1.1. *Udarni talasi.* Kao i u slučaju $n = 1$, ako pretpostavimo da je $x = \gamma(t)$ kriva diskontinuiteta deo po deo glatkih rešenja $u_l(x, t)$ i $u_d(x, t)$, to jest

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l(x,t), & x < \gamma(t) \\ u_d(x,t), & x > \gamma(t) \end{cases}$$

da bi u bilo slabo rešenje, moramo tražiti γ iz Rankin-Igonoovih uslova

$$\dot{\gamma} \cdot (u_d - u_l) = f(u_d) - f(u_l), \tag{45}$$

gde su u_d, u_l, $f(u_d)$ i $f(u_l)$ sada n-dimenzionalni vektori. To znači da sada krivu prekida $x = \gamma(t)$ ne možemo lako odrediti kao u slučaju jedne jednačine, kako je to bilo u prethodnom delu. Odnosno, ne postoji rešenje u obliku udarnog talasa za svaki par početnih vektora u_l, u_d (za jednačinu je to bio slučaj, kao što smo već videli).

Ako sa

$$A(u,v) := \int A(\theta u + (1-\theta)v)\mathrm{d}\theta$$

označimo usrednjenu matricu, gde su $\lambda_i(u,v)$, $i = 1,\dots,n$ njeni karakteristični koreni, (45) možemo napisati u ekvivalentnoj formi

$$\dot\gamma \cdot (u_d - u_l) = f(u_d) - f(u_l) = A(u_d, u_l)(u_d - u_l). \tag{46}$$

Drugim rečima, RH uslovi važe ako je (u_d, u_l) karakteristični vektor usrednjene matrice $A(u_d, u_l)$, a brzina $\dot\gamma$ je jednaka odgovarajućoj karakterističnoj vrednosti.

4.1.2. *Razređujući talasi.* Potražimo sada rešenja oblika $u = u\left(\frac{x}{t}\right)$ (samoslično rešenje) za sistem (44):

$$u_t + A(u)u_x = -\frac{x}{t^2}u(y) + \frac{1}{t}A(u(y))u'(y) = 0,$$

gde je $y = \frac{x}{t}$. Iz zadnje jednačine imamo

$$A(u)u = yu',$$

što znači da je u' proporcionalno nekom desnom karakterističnom vektoru r_i, $u' = \xi r_i$, i $y = \lambda_i$, za $i = 1,\dots,n$.

4.1.3. *RW-krive i krive udarnih talasa.* Fiksirajmo $u_0 \in \mathbb{R}^n$ i $i \in \{1,\dots,n\}$. Integralna kriva od vektorskog polja r_i kroz u_0 zove se i-ta razređujuća kriva (RW_i-kriva). Ona se dobija rešavanjem Košijevog problema

$$\frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}\sigma} = r_i(u),\ u(0) = u_0. \tag{47}$$

Ovu krivu ćemo označavati sa

$$\sigma \mapsto R_i(\sigma)(u_0).$$

Primetimo da parametrizacija krive zavisi od izbora r_i. Ako je $|r_i| \equiv 1$ onda je kriva parametrizovana dužinom luka. Fiksirajmo opet $u_0 \in \mathbb{R}^n$ koja se mogu povezati sa u_0 i-tim udarnim talasom. (Koristimo RH-uslove i Laksov uslov (50)). Prema tome je vektor $u - u_0$ desni i-ti karakteristični vektor od $A(u, u_0)$. Po teoremi osnovne linearne algebre ovo je tačno ako i samo ako je $u - u_0$ ortogonalno na l_j, $j \neq i$, j-ti levi karakteristični vektor od $A(u, u_0)$, to jest

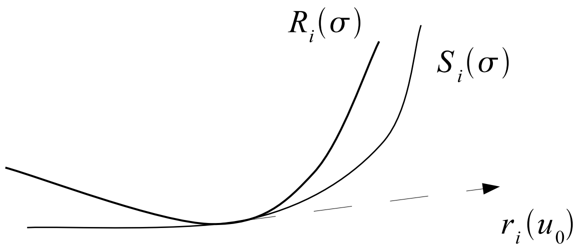
$$l_j(u,u_0)(u-u_0) = 0,\ \forall j \neq i,\ \dot\gamma = \lambda_i(u,u_0). \tag{48}$$

Vidimo da je (48) sistem $n-1$ skalarne jednačine od n nepoznatih (komponente od $u \in \mathbb{R}^n$). Ako linearizujemo (48) u okolini od u_0 dobijamo linearni sistem

$$l_j(u_0)(w - u_0) = 0,\ j \neq i$$

koji ima rešenje $w = u_0 + Cr_i(u_0)$, $C \in \mathbb{R}$. Prema teoremi o implicitnoj funkciji, imamo da je skup rešenja regularna kriva (klase C^1) u okolini od u_0, koja dodiruje vektor r_i u tači u_0. Ovu krivu ćemo zvati kriva i-tog udarnog talasa i označavati sa

$$\sigma \mapsto S_i(\sigma)(u_0).$$



Slika 11. Igonoova kriva i kriva razređujućeg talasa

Kao što vidimo, obe krive postoje u nekoj okolini tačke u_0 (ako pretpostavimo da je f dovoljno glatka), a može se pokazati da imaju u tački u_0 i zajedničku tangentu, paralelnu sa $r_i(u_0)$.

4.2. Entropijski uslovi. Kao što smo videli i u slučaju $n = 1$, kod slabih rešenja se pojavljuje problem jedinstvrnosti. Da bi odabrali fizički relevantno rešenje, koristimo takozvane entropijske uslove, a odgovarajuće rešenje ćemo zvati dozvoljenim.

4.2.1. *Entropijski uslovi 1 – nestajuća viskoznost.* Slabo rešenje u od (42) dozvoljeno ako postoji niz glatkih rešenja u_ε za

$$u_{\varepsilon t} + A(u_\varepsilon)u_{\varepsilon x} = \varepsilon u_{\varepsilon xx}$$

koji konvergira u L^1 ka u, kada $\varepsilon \to 0$.

4.2.2. *Entropijski uslov 2– entropijska nejednakost.* Funkciju $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, klase C^1, zovemo entropijom za sistem (42), sa odgovarajućim entropijskim fluksom $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ako važi

$$D\eta(u)Df(u) = Dq(u), \ u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{49}$$

Primetimo da (49) povlači

$$(\eta(u))_t + (q(u))_x = 0.$$

Neka je $u \in C^1$ rešenje od (42). Kada $u_t = -Df(u)u_x$ zamenimo u gornju jednačinu, imamo

$$D\eta(u)u_t + Dq(u)u_x = D\eta(u)(-Df(u)u_x) + Dq(u)u_x = 0.$$

Kažemo da je slabo rešenje u od (42) dozvoljeno, ako važi

$$(\eta(u))_t + (q(u))_x \leq 0$$

u distributivnom smislu, to jest, ako za svako $\varphi \geq 0$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ važi

$$-\int \eta(u)\varphi_t + q(u)\varphi_x \geq 0.$$

Ovo znači da van diskontinuiteta važi

$$D\eta(u)u_t + Dq(u)u_x \leq 0$$

i

$$\dot{x}_\alpha(\eta(u(x_\alpha+)) - \eta(u(x_\alpha-))) \geq q(u(x_\lambda+)) - q(u(x_\alpha-))$$

na liniji diskontinuiteta $x = \dot{x}_\alpha(t)$.

4.2.3. *Entropijski uslov 3 – Laksov uslov.* Udarni talas koji povezuje vrednosti u_l i u_d, a kreće se brzinom $\dot{\gamma} = \lambda_i(u_l, u_d)$ je dozvoljen ako je

$$\lambda_i(u_l) \geq \lambda_i(u_l, u_d) = \dot{\gamma} \geq \lambda_i(u_d). \tag{50}$$

Primetimo da zbog uređenosti λ-i važi i

$$\lambda_j(u_l) > \dot{\gamma},\ j > i$$
$$\lambda_j(u_d) < \dot{\gamma},\ j < i.$$

Ovakav talas zovemo i-ti udarni talas.

Kažemo da je i-ti razređujući talas dozvoljen ako je

$$u_d = R_i(\sigma_1)(u_0),\ \text{za neko } \sigma_1 \geq 0.$$

4.3. Rimanov problem.

Definicija 18. Kažemo da je i-to karakteristično polje stvarno nelinearno ako važi

$$D\lambda_i(u)r_i(u) \neq 0.$$

Ako važi

$$D\lambda_i(u)r_i(u) \equiv 0,$$

onda i-to polje zovemo linearno degenerisano.

Primetimo, da u slučaju da je i-to polje stvarno nelinearno, možemo izabrati orjentaciju (eventualno menjajući znak) od r_i tako da je

$$D\lambda_i(u)r_i(u) > 0,$$

odnosno, skaliranjem vektora r_i možemo postići da je

$$D\lambda_i(u)r_i(u) = 1.$$

U daljem tekstu ćemo koristiti ovu kao i sledeću opštu pretpostavku:

Sistem (42) je strogo hiperboličan sa glatkim koeficijentima. Za svako $i \in \{1, \dots, n\}$, *i-to polje je ili stvarno nelinearno ili linearno degenerisano.*

4.3.1. *Centrirani razređujući talas.* Neka je i-to polje nelinearno i pretpostavimo da u_d leži na pozitivnom delu RW-krive koja prolazi kroz u_l, tj. $u_d = R(\sigma)(u_l)$ za neko $\sigma > 0$.

TEOREMA 18. *Za svako $s \in [0, \sigma]$ definišimo*

$$\lambda_i(s) = \lambda_i(R_i(s)(u_l)).$$

Zbog stvarne nelinearnosti je preslikavanje $s \mapsto \lambda_i(s)$ strogo rastuće. Za $t \geq 0$ je funkcija

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < t\lambda_i(u_l) \\ R_i(s)(u_l), & x = t\lambda_i(s) \\ u_d = R_i(\sigma)(u_l), & x > t\lambda_i(u_d), \end{cases} \tag{51}$$

gde je $\frac{x}{t} = y = \lambda_i(s)$, $s \in [0, \sigma]$, deo po deo glatko rešenje Rimanovog problema

$$u_t + f(u)_x = 0$$

$$u|_{t=0} := u_0 = \begin{cases} u_l, & x < 0 \\ u_d, & x > 0. \end{cases}$$

Dokaz. Vidimo da je

$$\lim_{t \to 0} \|u(x,t) - u_0\|_{L^1} = 0.$$

Osim toga (42) je trivijalno zadovoljeno za $x < t\lambda_i(u_l)$ i $x > t\lambda_i(u_d)$ jer je $u_t = u_x = 0$. Pretpostavimo da je $x = t\lambda_i(s)$, za neko $s \in (0, \sigma)$. Kako je $u \equiv \text{const}$ duž svake poluprave $\{(x,t) : x = t\lambda_i(s)\}$ imamo

$$u_t(x,t) + \lambda_i(s) u_x(x,t) = 0. \tag{52}$$

Kako je

$$\lambda_i(s) = \frac{x}{t} \text{ i } \frac{\mathrm{d}\lambda_i(s)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{t},$$

imamo

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}R_i(s)(u_l)}{\mathrm{d}s}$$
$$\cdot \Big(\frac{\mathrm{d}\lambda_i(s)}{\mathrm{d}s}\Big)^{-1} \frac{\mathrm{d}\lambda_i(s)}{\mathrm{d}x} = r_i(u) \Big(\frac{\mathrm{d}\lambda_i(s)}{\mathrm{d}s}\Big)^{-1} \frac{1}{t}.$$

To znači da je u_x je karakteristični vektor od $A(u)$ za $\lambda_i(s) = \lambda_i(u(f,x))$, to jest,

$$A(u) u_x = \lambda_i u_x.$$

Iz ovoga vidimo da je (52) u stvari

$$u_t + A(u) u_x = 0. \square$$

Primetimo da je pretpostavka $\sigma > 0$ esencijalna za gornju konstrukciju. Ako bi bilo $\sigma < 0$, u (51) bi bila funkcija sa tri vrednosti u oblasti $\frac{x}{t} \in [\lambda_i(u_d), \lambda_i(u_l)]$.

4.3.2. *Udarni talasi.* Neka je i-to polje stvarno nelinearno i neka je u_d spojeno sa u_l pomoću i-tog udarnog talasa, $u_d = S_i(\sigma)(u_l)$. Tada je brzina udarnog talasa $\lambda := \lambda_i(u_d, u_l)$ i važi da je

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x < \lambda t \\ u_d, & x > \lambda t \end{cases} \tag{53}$$

deo po deo konstantno rešenje gornjeg Rimanovog problema.

Primetimo da je u slučaju $\sigma < 0$ rešenje dozvoljeno u smislu Laksa, jer je

$$\lambda_i(u_d) < \lambda_i(u_l, u_d) < \lambda_i(u_l).$$

Ako bi bilo $\sigma > 0$, tada bi bilo

$$\lambda_i(u_l) < \lambda_i(u_d)$$

i uslov ne bi mogao biti zadovoljen.

4.3.3. *Kontaktni diskontinuiteti.* Pretpostavimo da je i-to polje linearno degenerisano, i neka je $u_d = R_i(\sigma)(u_l)$ a neko σ. Po pretpostavci, λ_i je konstantno duž te krive. Stavljajući $\lambda := \lambda_i(u_l)$, deo po deo konstantna funkcija data sa (53) je rešenje gornjeg Košijevog problema, jer je RH-uslov zadovoljen u tački diskontinuiteta,

$$\begin{aligned} f(u_d) - f(u_l) &= \int_0^\sigma Df(R_i(s)(u_l)) r_i(R_i(s)(u_l)) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^\sigma \lambda_i(R_i(s)(u_l)) r_i(R_i(s)(u_l)) \mathrm{d}s \\ &= \lambda_i(u_l) \int_0^\sigma \frac{\mathrm{d}R_i(s)(u_l)}{\mathrm{d}s} \mathrm{d}s = \lambda_i(u_l)(R_i(\sigma)(u_l) - u_l). \end{aligned}$$

Ovde smo koristili definiciju linearne degenerisanosti, da je $r_i = \dfrac{\mathrm{d}R_i(s)}{\mathrm{d}s}$ i da je λ_i konstantno duž krive $s \mapsto R_i(s)(u_l)$

U ovom slučaju, Laksovi uslovi važe bez obzira na znak σ-e, jer je

$$\lambda_i(u_d) = \lambda_i(u_l, u_d) = \lambda_i(u_l).$$

Prema gornjem računu vidimo da je

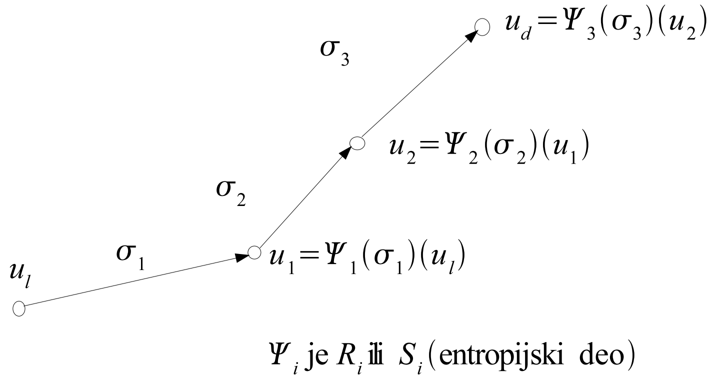
$$R_i(\sigma)(u_0) = s_i(\sigma)(u_0),$$

za svako σ.

4.3.4. *Opšta rešenja.* Kao što smo malo pre videli, skup tačaka $\{u_d : u \in \mathbb{R}^n\}$ koje se mogu povezati sa levom stranom Rimanovog početnog uslova jednim elementarnim talasom je kriva. Da bi spojili dve vrednosti, u_l, $u_d \in \mathbb{R}^n$, to jest da bi dobili entropijsko rešenje Rimanovog problema, možemo ubaciti najviše $n-1$ vektora,

$$u_l, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_d$$

tako da se između svaka dva para (u_l, u_1), (u_1, u_2), ..., (u_{n-1}, u_d), nalaze gore definisani elementarni talasi.



Slika 12. Skica rešenja Rimanovog problema

U slučaju da imamo početni uslov u L^∞, onda prvo tu funkciju aproksimiramo sa deo po deo konstantnim rešenjem. Tako smo dobili Rimanove probleme koje rešavamo. Dalje postoje dve procedure za rad.

(1) **Glimova shema**. Pre nego što nastupi prvi sudar početnih talasa, dotadašnje rešenje se ponovo aproksimira deo po deo konstantnim funkcijama, ali sada uzimajući druge tačke za aproksimaciju. Tako nastavljamo proceduru. Postupak će konvergirati za dovoljno malu varijaciju početnih uslova – totalna varijacija početnog uslova je mala.

(2) **Praćenje frontova ("Front-tracking")**. RW se aproksimira sa dovoljno mnogo neentropijskih udarnih talasa. U tački sudara ponovo imamo Rimanov početni uslov koji rešavamo kao pre. I nastavljamo dalje od sudara do sudara (sa malim

korekcijama – dobijamo nefizičke tačke pri sudaru čija je L^∞-norma dovoljno mala). I ovaj postupak konvergira za početne uslove sa dovoljno malom totalnom varijacijom.

5. Jednačine održanja za višedimenzionalne slučajeve

Rezultati izloženi u ovom odeljku su iz [**7**]. Do sada smo posmatrali sisteme jednačina za jednu (prostornu) promenljivu, a ovde ćemo posmatrati jedan zakon održanja za višedimenzionalnu prostornu promenljivu

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(f_i(u)) = 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{54}$$

gde je u funkcija $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Počećemo razmatranje jednačine difuzije,

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(f_i(u)) = \mu \triangle u, \\ &u(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{55}$$

gde je $\mu > 0$, što je analogno jednodimenzionalnom slučaju.

Pre rešavanja jednačine (54) ćemo dati neke ocene za rešenja Košijevog problema za parabolične jednačine

$$\begin{aligned} &\partial_t u + \sum_{i=1}^n \psi_i(x,t,u)\partial_{x_i} u = \mu \triangle u, \\ &u(x,0) = u_0(x), \end{aligned} \tag{56}$$

gde je $u_0 \in L^\infty$, $\triangle$ je Laplasijan i $\mu > 0$.

Pre svega, za ovu jednačinu važi *princip maksimuma*.

Teorema 19. *Neka je u rešenje Košijevog problema (56) u oblasti $\{(x,t):\ 0 \le t \le T\}$ za neko $T > 0$. Funkcija u, ako je ograničena, dostiže svoj supremum na pravoj $t = 0$.*

Dokaz. Konstruišimo funkciju

$$v(x,t) := u(x,t) - \varepsilon\Big(2\mu t + \frac{|\varepsilon x|^2}{2n}\Big),$$

gde je $\varepsilon > 0$.

Pretpostavimo da v dostiže svoj maksimum u nekoj tački (x_0, t_0) van prave $t = 0$, tj. $t_0 > 0$. Činjenica da je u ograničeno i znak minus ispred $|x|^2$ nam govori da je x_0 konačna vrednost (kada $|x| \to \infty$, tada

$v \to -\infty$, jer je t u ograničenom skupu). Računajući izvode funkcije v u tački (x_0, t_0) dobijamo

$$\partial_t v = \partial_t u - 2\varepsilon\mu \geq 0,$$

$$\partial_{x_i} v = 0 \text{ povlači } \partial_{x_i} u = \varepsilon^3 \frac{x_i}{n},$$

odnosno,

$$\triangle u - \varepsilon^3 \leq 0.$$

Uvrštavajući ovo u PDJ (56), dobijamo

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x_0, t_0, u)\partial_{x_i} u - \mu\triangle u|_{(x,t)=(x_0,t_0)} \geq 2\varepsilon\mu - C'\varepsilon^{3/2} - \mu\varepsilon^3 > 0,$$

ako je ε dovoljno malo. Ovde je C' konstanta koja zavisi od funkcija ψ_i, $i = 1, ..., n$i, a postoji, jer je u ograničeno. Kako je u rešenje PDJ (56) ovo je kontradikcija sa činjenicom da je maksimum dostignut van prave $t = 0$. Prema tome imamo

$$v(x,t) = u(x,t) - \varepsilon\Big(2\mu t + \frac{|\varepsilon x|^2}{2n}\Big) \leq \sup u_0, \ 0 \leq t \leq T,$$

za malo ε. Ovo nam konačno daje

$$|u| \leq M \text{ ako je } |u_0| < M.$$

Ovim je tvrđenje dokazano. $\square$

Primedba 9. (a) Menjajući znak ispred ε u definiciji funkcije v, na isti način kao gore dokazujemo da je

$$u \geq \inf u_0$$

(b) Na osnovu ove teoreme vidimo da je dovoljno sve pretpostavke o funkcijama ψ_i, $i = 1, ..., n$, dati za $|u| \leq M$, gde M zavisi od početnih uslova.

Sada ćemo navesti dve leme koje daju ocene rešenje u slučaju da nam trebaju globalne ocene rešenja za $t \geq 0$ u zavisnosti od početnih uslova.

Lema 5. *Neka u zadovoljava (56) i pretpostavimo da je $|u_0| \leq e^{\Phi(x)/\mu}$, gde je Φ ograničena od gore i ima Lipšicovu konstantu 1. Pretpostavimo da je*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\psi_i(x,t,u)|^2\Big)^{1/2} \leq A.$$

Tada sledi da postoji konstanta C, koja zavisi samo od dimenzije prostora n, tako da

$$|u(x,t)| \leq e^{Ct} e^{((A+1)t+\Phi+2)/\mu}.$$

Ako je $|u_0| \leq M$, možemo uzeti da je $\Phi(x) = \log M - \mathrm{dist}(x, \operatorname{supp} u_0)$, gde je dist oznaka za euklidsko rastojanje, a specijalno, ako u_0 iščezava van lopte poluprečnika R sa centrom u nuli, dobijamo

$$|u(x,t)| \leq \min(M, Me^{Ct} e^{((A+1)t+R-|x|)/\mu}).$$

Ovo možemo tumačiti da u uniformno eksponencijalno opada ka nuli van "domena uticaja početnog uslova", kada $\mu \to 0$.

Sledeća lema daje dualno tvrđenje.

Lema 6. *Ako je w rešenje Košijevog problema*

$$\begin{aligned} &\partial_t w + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(a_i(x,t)w) = \mu \triangle w, \\ &w(x,0) = w_0(x), \end{aligned}$$

gde je $w_0 \in C_0^\infty$, tako da w brzo opada kada x teži beskonačnosti i ako je $2 + |a| \leq K$, tada za malo μ važi

$$\int_{|x|<R} |w(x,T)| dx \leq \int |w_0(x)| e^{-(|x|-R-KT)_+/\mu} \mathrm{d}x.$$

Vratimo se sada na problem (54), gde ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da je $|u_0| \leq M$ i $u_0 \in C_0^3$. Nadalje ćemo pretpostaviti da je $f_i \in C^2$.

Neka je v rešenje sa ovim osobinama za

$$\begin{aligned} &\partial_t v + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i(v) = \mu \nabla v, \\ &v(x,0) = v_0(x), \end{aligned} \tag{57}$$

sa istim pretpostavkama na v_0: $|v_0| \leq M$ i $v_0 \in C_0^3$. Tada $w = u - v$ zadovoljava jednačinu

$$\begin{aligned} &\partial_t w + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(a_i w) = \mu \nabla w, \\ &w(x,0) = u_0(x) - v_0(x), \end{aligned} \tag{58}$$

gde je $a_i = (f_i(u) - f_i(v))/(u - v) \in C^1$ i $|a_i| \leq A$ ako je $|f_i'| \leq A$. Korišćenjem Leme 6 dobijamo

$$\int |u(x,t) - v(x,t)| dx \leq \int |u_0(x) - v_0(x)| dx. \tag{59}$$

Sumirajući sve ovo, dobijamo

TEOREMA 20. *Za svako $\mu > 0$, Košijev problem (55), kada je $u_0 \in C_0^3$, ima klasična rešenja za $t \geq 0$ sa istim ograničenjima kao i u_0. Izvodi $\partial_x^\alpha u$ i $\partial_t u$ su ograničeni za dovoljno malo t ako je $|\alpha| \leq 2$. Rešenje je jedinstveno i važi L^1-kontraktibilna osobina (59).*

Dokaz ove teoreme se izvodi metodom sukcesivnih aproksimacija, koristeći fundamentalno rešene jednačine provođenja toplote

$$E(x,t) = E_\mu := (4\pi\mu t)^{-n/2} e^{-|x|^2/(4\mu t)},\ t \geq 0. \tag{60}$$

Koristeći ove rezultate, dobijamo sledeće tvrđenje za skalarni zakon održanja u više prostornih dimenzija.

TEOREMA 21. *Ako $u_0 \in C_0^3$, tada Košijev problem (55) ima jedinstveno klasično rešenje u_μ, koje brzo opada, kada $x \to \infty$ i $\mu \to 0$, u_μ konvergira u L^1_{loc} za svako fiksirano $t \geq 0$, lokalno uniformno po t, slabom rešenju Košijevog problema (54), koje uzima granične vrednosti u smislu konvergencije u L^1_{loc}. Ovo rešenje zadovoljava uslove entropije*

$$\partial_t(\Phi(u)) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} Y_i(u) \leq 0 \tag{61}$$

za svako konveksno Φ, gde je $Y_i'(s) = \Phi'(s) f_i'(s)$. Za svako $u_0 \in L^\infty$ postoji jedinstveno rešenje Košijevog problema koje je neprekidna funkcija po t sa vrednostima u L^1_{loc} i zadovoljava uslov entropije (61). Za takva rešenja je

$$\int_{|x-x_0| \leq R-At} |u(x,t) - v(x,t)| \mathrm{d}x$$

opadajuća funkcija po t.

U sledećoj teoremi ćemo dati neke praktičnije uslove koji su ekvivalentni opisanom uslovu entropije.

TEOREMA 22. *Pretpostavimo da u zadovoljava uslov entropije (61) za svako konveksno Φ i da je u C^1 funkcija na svakoj strani površi S klase C^1 sa normalom $\nu = (\nu_0, \nu_1, ..., \nu_n)$, gde su granične vrednosti $u_\pm$ u pravcima $\nu_\pm$. Tada*

(1) *Rankin-Igonoov uslov*

$$[u]\nu_0 + \sum_{i=1}^{n} [f_i(u)]\nu_i = 0 \tag{62}$$

je zadovoljen.

(2) *Funkcija*

$$[u_-, u_+] \ni k \to \mathrm{sgn}(u_+ - u_-) \sum_{i=1}^{n} f_i(k)\nu_i$$

leži iznad linearne interpolacije između vrednosti $u_\pm$.

Sve je mnogo komplikovanije (ali izvodljivo) ako funkcija f nije konveksna, ali to ovde nećemo opisivati.

6. Uopštene funkcije

Ukratko ćemo opisati jednu od algebri uopštenih funkcija koja se može uspešno koristiti za rešavanje nelinearnih PDJ. Ponovićemo definicije iz knjige [**16**] i radova [**15, 17**]. Uvedimo sledeće oznake: $\mathbb{R}^2_+ := \mathbb{R} \times (0,\infty)$, $\overline{\mathbb{R}^2_+} := \mathbb{R} \times [0,\infty)$. Neka je $C_b^\infty(\Omega)$ algebra glatkih funkcija na Ω koje su ograničene zajedno sa svim svojim izvodima. $C_{\overline{b}}^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ je skup svih funkcija $u \in C^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ koje zadovoljavaju: $u|_{\mathbb{R}\times(0,T)} \in C_b^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$ za svako $T > 0$. Primetimo da svaki element iz $C_b^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ ima glatku ekstenziju na pravu $\{t = 0\}$, tj. $C_b^\infty(\mathbb{R}^2_+) = C_b^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+})$. Ovo je tačno i za $C_{\overline{b}}^\infty(\mathbb{R}^2_+)$.

Definicija 19. $\mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$ je skup svih preslikavanja $G : (0,1) \times \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$, $(\varepsilon, x, t) \mapsto G_\varepsilon(x,t)$, gde za svako $\varepsilon \in (0,1)$, $G_\varepsilon \in C_{\overline{b}}^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ zadovoljava:
Za svako $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^2$ i $T > 0$ postoji $N \in \mathbb{N}$ takvo da je

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta G_\varepsilon(x,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{-N}), \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

$\mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$ je multiplikativna algebra sa diferenciranjem, tj. ona je prsten funkcija sa uobičajeno definisanim operacijama uz dodatak diferenciranja koje zadovoljava Lajbnicovo pravilo.

$\mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$ je skup svih $G \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$, koje zadovoljavaju:
Za svako $(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}_0^2$, $a \in \mathbb{R}$ i $T > 0$

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} |\partial_x^\alpha \partial_t^\beta G_\varepsilon(x,t)| = \mathcal{O}(\varepsilon^{a}), \text{ as } \varepsilon \to 0.$$

Jasno, važi da je $\mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$ ideal multiplikativne algebre sa diferenciranjem $\mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$, tj. ako je $G_\varepsilon \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$ i $H_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$, tada $G_\varepsilon H_\varepsilon \in \mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$.

Definicija 20. Multiplikativna algebra sa diferenciranjem $\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ uopštenih funkcija je definisana sa $\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+) = \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)/\mathcal{N}_g(\mathbb{R}^2_+)$. Sve operacije u $\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ su definisane sa odgovarajućim operacijama u prostoru $\mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$.

Ako G_ε ne zavisi od promenljivih x i t, onda dobijamo definiciju skupa uopštenih brojeve

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathcal{E}_{M,g}/\mathcal{N}_g.$$

Ako uzmemo da G_ε uzima vrednosti u skupu realnih brojeva, dobijamo skup uopštenih realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$. Uopštene pozitivne brojeve definišemo kao klase ekvivalencija koje imaju predstavnika koji je pozitivan za sve $\varepsilon < \varepsilon_0$, kada je ε_0 dovoljno malo.

Ako koristimo $C_b^\infty(\mathbb{R})$ umesto $C_b^\infty(\mathbb{R}^2_+)$ (tj. ako funkcije ne zavise od promenljive t), tada dobijamo $\mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R})$, $\mathcal{N}_g(\mathbb{R})$, i onda odgovarajući prostor uopštenih funkcija $\mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ na x-osi.

Nadalje će G označavati element (klasu ekvivalencije) u $\mathcal{G}_g(\Omega)$ definisanu predstavnikom $G_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,g}(\Omega)$.

Kako je $C_{\overline{b}}^\infty(\mathbb{R}^2_+) = C_{\overline{b}}^\infty(\overline{\mathbb{R}^2_+})$, možemo definisati restrikciju uopštene funkcije na pravoj $\{t = 0\}$ na sledeći način.

Za dato $G \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, njena restrikcija $G|_{t=0} \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ je klasa funkcija definisana sa $G_\varepsilon(x, 0) \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R})$. Na isti način kao gore, $G(x - ct) \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ je definisano sa $G_\varepsilon(x - ct) \in \mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R})$.

Ako su $G \in \mathcal{G}_g$ i $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ polinomijalno ograničene zajedno sa svim svojim izvodima, tada se lako može pokazati da je kompozicija funkcija $f(G)$, data predstavnikom $f(G_\varepsilon)$, $G \in \mathcal{G}_g$ dobro definisana. Ovo znači da je $f(G_\varepsilon) \in \mathcal{E}_{M,g}$ ako $G_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,g}$, i $f(G_\varepsilon) - f(H_\varepsilon) \in \mathcal{N}_g$ ako $G_\varepsilon - H_\varepsilon \in \mathcal{N}_g$.

Primedba 10. Kako ćemo koristiti prostore definisane na $\mathbb{R}^2_+$, uveli smo odgovarajuće definicije. No, sasvim slobodno možemo sve gornje definicije napraviti za bilo koji otvoren podskup Ω od $\mathbb{R}^n$, bez ikakvih problema.

Jednakost u prostoru uopštenih funkcija $\mathcal{G}_g$ je "prejaka" za naše potrebe (kao u primeru 12, dobijamo različite brzine udarnih talasa posle množenja cele jednačine), tako da postoji potreba za definisanje takozvane relacije asociranosti.

Definicija 21. Uopštena funkcija $G \in \mathcal{G}_g(\Omega)$ je *asocirana sa* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $G \approx u$, ako za neki (a samim tim i svaki) predstavnik G_ε od G, $G_\varepsilon \to u$ u $\mathcal{D}'(\Omega)$ kada $\varepsilon \to 0$. Dve uopštene funkcije G i H su asocirane, $G \approx H$, ako je $G - H \approx 0$. Red konvergencije u $\mathcal{D}'$ u odnosu na ε se zove *stepen asociranosti*.

Definicija 22. Uopštena funkcija G je *ograničenog tipa* ako

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} |G_\varepsilon(x,t)| = \mathcal{O}(1) \text{ as } \varepsilon\to 0,$$

za svako $T>0$.

Uopštena funkcija G je *logaritamskog tipa* ako

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T)} |G_\varepsilon(x,t)| = \mathcal{O}(\log(\varepsilon)) \text{ as } \varepsilon\to 0,$$

za svako $T>0$.

Označimo sa $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbb{R})$ dual prostora $\mathcal{D}(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ (takozvani prostor *ograničenih distribucija.* Neka je $u\in\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbb{R})$ i neka je $\mathcal{A}_0$ skup svih funkcija $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ koje zadovoljavaju $\phi(x)\geq 0$, $x\in\mathbb{R}$, $\int\phi(x)dx=1$ i $\operatorname{supp}\phi\subset[-1,1]$, tj.

$$\mathcal{A}_0 = \{\phi\in C_0^\infty : (\forall x\in\mathbb{R})\phi(x)\geq 0,\ \int\phi(x)dx=1,\ \operatorname{supp}\phi\subset[-1,1]\}.$$

Neka je $\phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$, $x\in\mathbb{R}$. Tada

$$\iota_\phi : u\mapsto u*\phi_\varepsilon/\mathcal{N}_g,$$

gde $u*\phi_\varepsilon/\mathcal{N}_g$ označava klasu ekvivalencije u odnosu na ideal $\mathcal{N}_g$, definiše preslikavanje prostora $\mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbb{R})$ u $\mathcal{G}_g(\mathbb{R})$, a gde je $*$ konvolucija u $\mathcal{D}'$. Jasno je da ι_ϕ komutira sa izvodom, tj.

$$\partial_x\iota_\phi(u)=\iota_\phi(\partial_x u).$$

6.1. Viskozna granica skalarnog zakona održanja. Kao primer primene teorije uopštenih funkcija ćemo dati primer Rešavanje Burgersove jednačine u gornjim prostorima, kao i naknadno traženje granice rešenja.

Teorema 23. *Neka je μ pozitivan broj ili uopšten pozitivan broj. Tada za svako $A\in\mathcal{G}_g(\mathbb{R})$, postoji rešenje $U\in\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ za*

$$\begin{aligned} &U_t+UU_x=\mu U_{xx}\\ &U|_{t=0}=A. \end{aligned}\tag{63}$$

Dokaz. Neka je A_ε predstavnik uopštene funkcije A. Za svako ε definišemo predstavnika $U_\varepsilon\in\mathcal{E}_{M,g}(\mathbb{R}^2_+)$ koji je klasično rešenje za jednačinu

$$\begin{aligned} &\partial_t U_\varepsilon + U\partial_x U_\varepsilon = \mu_\varepsilon\partial_{xx}U_\varepsilon\\ &U_\varepsilon|_{t=0}=A_\varepsilon. \end{aligned}$$

Ono je dato na sledeći način. Radi jednostavnosti zapisa ćemo izostaviti ε u indeksu funkcija.

Neka je u rešenje PDJ $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$ sa početnim uslovom $u(x,0) = a(x)$, gde je a ograničena funkcija. Ako definišemo funkciju

$$w(x,t) = \exp\Big(-\frac{1}{2\mu}\int_0^x u(y,t)\mathrm{d}y\Big),$$

ona je rešenje Košijevog problema za jednačinu provođenja toplote

$$\begin{aligned} &w_t = \mu w_{xx} \\ &w(x,0) = \exp\Big(-\frac{1}{2\mu}\int_0^x a(y)\mathrm{d}y\Big). \end{aligned}$$

Kako je a ograničena funkcija, postoji jedinstveno rešenje gornje jednačine dato formulom:

$$w(x,t) = w(x,0) * E_\mu(x,t) = \int_{\mathbb{R}} w(x-y,0)(4\pi\mu t)^{-1/2} e^{-|y|^2/(4\mu t)}\mathrm{d}y,$$

gde je E_μ dato u (60). Rešenje originalnog problema (63) dobijamo vraćanjem na funkciju u:

$$u = -2\mu\frac{w_x}{w}.$$

Eksplicitno napisano,

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(x,t) =& \Big(\int_0^\infty A_\varepsilon(y)\exp(-F(x,y,t)/(2\mu_\varepsilon))\mathrm{d}y\Big) \\ &\cdot\Big(\int_0^\infty \exp(-F(x,y,t)/(2\mu_\varepsilon))\mathrm{d}y\Big)^{-1}, \end{aligned} \tag{64}$$

gde je

$$F(x,y,t) = \frac{1}{2t}(x-y)^2 + \int_0^y a(z)\mathrm{d}z.$$

Direktnim uvrštavanjem se proverava da je $U_\varepsilon(x,t)$ glatko klasično rešenje polazne jednačine u poluravni $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ koje početni uslov zadovoljava u slabom smislu.

Princip maksimuma daje ocenu

$$\|U_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))} \le \|A_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Ova ocena nam pokazuje da U_ε ima ocene nasleđene od A_ε.

Da bi pokazali da $U_\varepsilon \in \mathcal{E}_{M,g}$, potrebno je dokazati ocene za sve izvode funkcije U_ε. To je relativno dug, ali jednostavan postupak koji se svodi na diferenciranje eksplicitne formule (64) po x. Ocene izvoda po t, kao i mešovitih izvoda se dobijaju korišćenjem same jednačine. $\square$

Sledeća teorema daje jedinstvenost uopštenog rešenja date PDJ, ali je nećemo dokazivati. Dokaz se može naći u [**16**]. Preporučujemo ovu knjigu posebno onima koji žele da vide kako se teorija uopštenih funkcija koristi u teoriji PDJ.

TEOREMA 24. *Neka je μ pozitivan broj ili pozitivan uopšten broj. Za svako $T > 0$ postoji najviše jedno rešenje $U \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R} \times [0,T])$ problema (63) tako da je važi jedno od tvrđenja*
(a) U_x je logaritamskog tipa
(b) $U_x \geq 0$.
Ako je μ realan pozitivan broj, takođe postoji najviše jedno rešenje ograničenog tipa.

Sledeća posledica pokazuje konzistenciju prilaza pomoću uopštenih funkcija i metoda iščezavajuće viskoznosti.

POSLEDICA 3. *Neka je $\mu \approx 0$, $a \in L^\infty(\mathbb{R})$, $A = \iota(a) \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$. Tada je uopšteno rešenje U za (63) asocirano sa klasičnim, dozvoljenim rešenjem bezviskozne Burgersove jednačine.*

7. Nekonzervativni sistemi

Posmatrajmo sada nekonzervativan sistem

$$\begin{aligned} &\partial_t u + g(u)\partial_x u = 0, \\ &u(x,0) = a(x), \end{aligned} \tag{65}$$

gde je $u(x,t) = (u_1(x,t),...,u_n(x,t))$, $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, glatka vektorska funkcija, a g je glatka matrična funkcija.

Većina teksta koji sledi je iz knjige [**16**].

Ovde ćemo razmotriti tri interpretacije nekonzervativnog sistema (65): rešenja u smislu stroge jednakosti u $\mathcal{G}_g(\mathbb{R} \times [0,\infty))$, u smislu asociranosti u $\mathcal{G}_g(\mathbb{R} \times [0,\infty])$ i korištenjem usrednjenja (videti knjigu [**11**], a ideja je bazirana na radu ([**20**]).

Ima samo nekoliko rezultata za proizvoljni početni uslov u bilo kojem od ova tri smisla. Kao i u slučaju za konzervativne sisteme, može se pokazati da ne možemo naći rešenja od (65) u obliku udarnih talasa u smislu stroge jednakosti uopštenih funkcija.

Bavićemo se samo Rimanovim problemom, koji je bitan jer se može proširiti na slučaj sa opštijim početnim uslovom (videti [**1, 3, 18**] za ovakvo proširenje na širu klasu početnih uslova).

Uvešćemo sada koncept rešenja u kome koristimo usrednjenje ([**11**]). Pod funkcijom ograničene varijacije, $v \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^2)$, podrazumevamo lokalno integrabilnu funkciju čiji su prvi parcijalni izvodi mere. Neka je $v \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Definišimo prosečnu verziju $\hat{g}(v)$ superpozicije funkcija g i v na takav način da je $\hat{g}(v) = g(v)$ skoro svuda u odnosu na Lebegovu meru, ali je $\hat{g}(v)$ merljiva i lokalno integrabilna u odnosu na mere $\partial_x w$ i $\partial_t w$ za svako $w \in \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Tako, možemo $g(v)\partial_x w$ interpretirati kao $\hat{g}(v)\partial_x w$, pa će vektorsko rešenje od (65) biti element od $L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap \mathrm{BV}_{loc}(\mathbb{R}^2) \cap C([0,\infty) : \mathcal{D}'(\mathbb{R}))$ koje zadovoljava jednačinu

$$\partial_t u + \hat{g}(u)\partial_x u = 0$$

u smislu mera.

$\hat{g}(v)$ ćemo ovako definisati za specijalne slučajeve:

- Ako je v neprekidna funkcija, tada je $\hat{g}(v) = g(v)$.
- Ako su v i w funkcije sa skokom, to jest

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v_l + (v_d - v_l)H(x - ct), \\ w(x,t) &= w_l + (w_d - w_l)H(x - ct), \end{aligned}$$

  tada je

$$\begin{aligned} &\hat{g}(v)\partial_x w(x,t) \\ =&(w_d - w_l)\delta(x - ct)\int_0^1 g(v_t + \alpha(v_d - v_l))\mathrm{d}\alpha. \end{aligned}$$

Oba ova slučaja se svode na običnu superpoziciju u slučaju konzervativnog sistema, to jest, ako je $g = f'$, tada je $\hat{g}(u)\partial_x u = \partial_x(f(u))$.

Videćemo kako ova definicija deluje na sledećem jednostavnom primeru koji će imati skoro sve značajne osobine ovog metoda.

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= \sigma_x \\ \sigma_t + u\sigma_x &= u_x. \end{aligned} \tag{66}$$

Rešenja ovog problema ćemo tražiti u obliku udarnih talasa Rimanovog problema,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_l + (u_d - u_l)H(x - ct) \\ \sigma(x,t) &= \sigma_l + (\sigma_d - \sigma_l)H(x - ct), \end{aligned} \tag{67}$$

gde su $u_l, u_d, \sigma_l, \sigma_d$ konstante, a H Hevisajdova funkcija. Prema prethodnoj diskusiji, $u\sigma_x$ je interpretirano kao

$$\begin{aligned} \hat{u}\sigma_x = &\int_0^1 (u_l + \alpha(u_d - u_l))\mathrm{d}\alpha \\ &(\sigma_d - \sigma_l)\delta(x - ct) \\ =&(u_d + u_l)(\sigma_d - \sigma_l)\delta(x - ct)/2. \end{aligned}$$

Kako je

$$\partial_t \sigma(x,t) = -c(\sigma_d - \sigma_l)\delta(x - ct),$$

a

$$\partial_x \sigma(x,t) = (u_d - u_l)\delta(x - ct),$$

iz druge jednačine sistema (66) dobijamo

$$\begin{aligned}\sigma(x,t) = &- c\big(\sigma_d - \sigma_l + (u_d + u_l)(\sigma_d - \sigma_l)/2 \\ &- (u_d - u_l)\big)\delta(x - ct) = 0,\end{aligned}$$

što znači da je koeficijent ispred $\delta(x - ct)$ jednak nuli. koristeći isti metod za prvu jednačinu sistema, dolazimo do Rankin-Igonoovih uslova

$$\begin{aligned} c(u_d - u_l) &= (u_d + u_l)(u_d - u_l)/2 - (\sigma_d - \sigma_l), \\ c(\sigma_d - \sigma_l) &= (u_d + u_l)(\sigma_d - \sigma_l)/2 - (u_d - u_l). \end{aligned} \tag{68}$$

Kada eliminišemo c dobijamo

$$(\sigma_d - \sigma_l)^2 = (u_d - u_l)^2. \tag{69}$$

Za fiksirano (u_l, σ_l) ovo određuje par pravih u (u_d, σ_d) ravni, koje zovemo Igonoovim lokusom, kao što je bio slučaj za sisteme zakona održanja (konzervativne sisteme). Njegov značaj je u sledećem: Problem (66) ima rešenje oblika (67) ako i samo ako (u_d, σ_d) leže na jednoj od datih pravih. Iz (68) vidimo da je $c = (u_d + u_l)/2 \pm 1$ u zavisnosti koju smo pravu uzeli. Opšti Rimanov problem za date bilo koje (u_l, σ_l) i (u_d, σ_d) je rešiv pomoću superpozicije dva udarna talasa

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_l + (u_m - u_l)H(x - c_1 t) + (u_d - u_m)H(x - c_2 t) \\ \sigma(x,t) &= \sigma_l + (\sigma_m - \sigma_l)H(x - c_1 t) + (\sigma_d - \sigma_m)H(x - c_2 t). \end{aligned}$$

Međustanje (u_m, σ_m) je izabrano tako da (u_m, σ_m) leži na Igonoovom lokusu za (u_l, σ_l) i (u_d, σ_d), i tako da je $c_1 < c_2$. Ovo je analogno već viđenom kod konzervativnih sistema.

Sada ćemo rešavati sistem (66) u smislu uopštenih funkcija. Tražićemo rešenja u obliku udarnih talasa u $\mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$ koje ćemo zvati uopštene Hevisajdove funkcije.

Definicija 23. $Y \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$ je uopštena Hevisajdova funkcija ako je ograničenog tipa i ako svaki njen reprezent tačkasto teži ka klasičnoj Hevisajdovoj funkciji kada ε teži nuli.

Tražimo rešenje od (66), $(U, \Sigma) \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R}^2_+)$, u obliku

$$\begin{aligned} U(x,t) &= u_l + (u_d - u_l)Y(x - ct) \\ \Sigma(x,t) &= \sigma_l + (\sigma_d - \sigma_l)Z(x - ct), \end{aligned} \tag{70}$$

gde su Y i Z uopštene Hevisajdove funkcije. U asociranom smislu, sistem (66) postaje

$$\begin{aligned} U_t + UU_x &\approx \Sigma_x \\ \Sigma_t + U\Sigma_x &\approx U_x. \end{aligned} \tag{71}$$

Ako uzmemo da je $Y = Z$ tada kao uslov za postojanje rešenja oblika (70) za sistem (71) dobijamo klasične uslove (68). U slučaju da su ove dve funkcije različite, ne postoji obavezno rešenje od (71) u traženom obliku. Ostavljamo čitaocu za vežbu da ovo pokaže.

Ako stavimo jednakost umesto asociranosti u prvoj jednačini u (71), dobijamo sledeći sistem

$$\begin{aligned} U_t + UU_x &= \Sigma_x \\ \Sigma_t + U\Sigma_x &\approx U_x. \end{aligned} \tag{72}$$

Postoji fizički razlog zašto to radimo: Prvi red sistema (71) označava fizički princip održanja momenta:

$$U_t + (U^2)_x = \Sigma_x,$$

a drugi red je nastao praktičnim modeliranjem nekog procesa. Kako bi zakon održanja momenta trebalo da važi i za slaba rešenja, otuda znak jednakosti u prvoj jednačini.

Teorema 25. *Sistem jednačina (72) ima Igonoov lokus dat sa*

$$(\sigma_d - \sigma_l)^2 = (u_d - u_l)^2\Big(1 - \frac{1}{12}(u_d - u_l)^2\Big).$$

Dokaz. Zamenjujući oblik rešenja (70) u novi sistem (72), dobijamo

$$\begin{aligned} &(-c + u_l)(u_d - u_l)Y' + (u_d - u_l)^2 YY' = (\sigma_d - \sigma_l)Z' \\ &(-c + u_l)(\sigma_d - \sigma_l)Z' + (u_d - u_l)(\sigma_d - \sigma_l)YZ' \approx (u_d - u_l)Y'. \end{aligned}$$

Jednakost u prostoru uopštenih funkcija povlači asociranost, i kako je

$$YY' = \Big(\frac{1}{2}Y^2\Big) \approx \frac{1}{2}Y' \approx \frac{1}{2}\delta,\ Y' \approx Z',$$

iz prve jednačine dobijamo sledeći uslov za konstante, analogan Rankin-Igonoovom uslovu:

$$(\sigma_d - \sigma_l)^2 = (u_d - u_l)^2(1 - (u_d - u_l)^2/12). \tag{73}$$

S druge strane, kako imamo jednakost uopštenih funkcija, prvu jednačinu možemo integraliti po argumentu od Y i Z (taj argument će biti $x - ct$, u stvari). Tako dobijamo Z izraženo pomoću Y:

$$Z = \frac{u_d - u_l}{\sigma_d - \sigma_l}\Big((-c + u_l)Y + \frac{1}{2}(u_d - u_l)Y^2\Big). \tag{74}$$

Sada je proizvod dve uopštene funkcije YZ', koji se javlja u drugoj jednačini sistema, određen:

$$\begin{aligned} (\sigma_d - \sigma_l)YZ' &= (-c + u_l)(u_d - u_l)YY' + (u_d - u_l)^2 Y^2 Y' \\ &\approx (u_d - u_l)\Big(\frac{1}{2}(-c + u_l) + \frac{1}{3}(u_d - u_l)\Big)Y'. \end{aligned}$$

Ubacivanje ovog izraza u sistem (72) daje drugi uslov za brzinu udarnog talasa:

$$(-c+u_l)(\sigma_d-\sigma_l)+(u_d-u_l)^2\Big(\frac{1}{2}(-c+u_l)+\frac{1}{3}(u_d-u_l)\Big), \qquad (75)$$

koji je očigledno različit od klasičnih Rankin-Igonoovih uslova (68). konačno, možemo eksplicitno izračunati i Igonoov lokus eliminacijom c iz (75):

$$(\sigma_d-\sigma_l)^2=(u_d-u_l)^2\Big(1-\frac{1}{12}(u_d-u_l)^2\Big).\square \qquad (76)$$

Primedba 11. Parovi (u_d,σ_d) koji ga zadovoljavaju sačinjavaju daleko manji skup od klasičnog Igonoovog lokusa. Taj skup je kompaktan, što dodatno otežava rešavanje opšteg Rimanovog problema – javlja se problem “velikih početnih uslova”, tj. kada postoji velika razlika među levim i desnim stanjima početnog uslova.

Ovaj primer pokazuje opštu sliku koja se javlja u interpretaciji sistema uopštenim funkcijama: Uslovi analogni Igonoovim, koje dobijamo, zavise od koncepta rešenja koji koristimo (stroga jednakost ili asociranost) i od upotrebe različitih uopštenih Hevisajdovih funkcija.

Povežimo sada metod usrednjenja i metod uopštenih funkcija.
Neka su $u_d,u_l\in\mathbb{R}^2$ i c je realni broj. Definišimo

$$u_\varepsilon(x,t)=u_l+(u_d-u_l)H_\varepsilon(x-ct),$$

gde je H_ε reprezent jedne uopštene Hevisajdove funkcije. Tada važi sledeća propozicija za g iz (65).

Propozicija 4. *Sa prethodnim definicijama, imamo u distributivnom smislu*

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} g(u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon =&\int_0^1 g(u_t+\alpha(u_d-u_l))\mathrm{d}\alpha(u_d-u_l)\delta(x-ct)\\ =&\hat{g}(u)\partial_x u\end{aligned} \qquad (77)$$

Dokaz. Neka je $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Definišimo

$$G(\xi):=\int_0^\xi g(u_l+\alpha(u_d-u_l))\mathrm{d}\alpha,$$

tako da je $G'(\xi) = g(u_l + \xi(u_d - u_l))$. Sada računamo

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\iint g(u_l + (u_d - u_l)H_\varepsilon(x-ct))(u_d - u_l)H'_\varepsilon(x-ct)\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\lim_{\varepsilon\to 0}\iint \partial_x G(H_\varepsilon(x-ct))(u_d-u_l)\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&-\lim_{\varepsilon\to 0}\iint G(H_\varepsilon(x-ct))(u_d-u_l)\partial_x\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&-\iint G(1)H(x-ct)(u_d-u_l)\partial_x\psi(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
=&\langle G(1)(u_d-u_l)\delta(x-ct),\psi(x,t)\rangle.
\end{aligned}
$$

Ovde smo koristili činjenicu da $G(H_\varepsilon(x-ct))$ konvergira ka $G(1)$ za $x > ct$ i ka $G(0) = 0$ za $x < ct$. $\square$

Ova propozicija kaže da su rešenja sistema

$$\partial_t U + g(U)\partial_x U \approx 0 \tag{78}$$

asocirana rešenjima sistema

$$\partial_t u + \hat{g}(u)\partial_x u = 0$$

i zadovoljavaju isti Rankin-Igonoov uslov

$$c(u_d - u_l) = \int_0^1 g(u_t + \alpha(u_d - u_l))\mathrm{d}\alpha(u_d - u_l).$$

Kao ilustraciju ćemo posmatrati jednostavan nekonzervativni sistem:

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x = 0\\
&\sigma_t + u\sigma_x = 0\\
&u_{|t=0} = a,\ \partial_x u_{|t=0} = b.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Ovaj sistem se može rešavati metodom nestajuće viskoznosti, kao i uprošćenu Burgersova (Hofovu) jednačinu, to jest, rešavaćemo sistem

$$
\begin{aligned}
&u_t + uu_x = \mu u_{xx}\\
&\sigma_t + u\sigma_x = 0\\
&u_{|t=0} = a,\ \partial_x u_{|t=0} = b.
\end{aligned}
\tag{80}
$$

Propozicija 5. *Neka je μ uopšten pozitivan broj, $T > 0$ i $A, B \in \mathcal{G}_g(\mathbb{R})$.*

(a) Ako je $A' \geq 0$ (resp. A' i A^2/μ su logaritamskog tipa), tada problem

$$\begin{aligned} &U_t + UU_x = \mu U_{xx} \\ &\Sigma_t + U\Sigma_x = 0 \\ &U_{|t=0} = A,\ \Sigma_{|t=0} = B \end{aligned} \tag{81}$$

ima rešenje $(U, \Sigma) \in (\mathcal{G}_g(\mathbb{R}\times[0,T]))^2$ i $\partial_x U \geq 0$ (resp. $\partial_x U$ je logaritamskog tipa).
(b) Postoji najviše jedno rešenje $(U, \Sigma) \in (\mathcal{G}_g(\mathbb{R} \times [0,T]))^2$ za koje je $\partial_x U \geq 0$ ili je $\partial_x U$ logaritamskog tipa.

Uzmimo sada da su početni uslovi Rimanovi:

$$\begin{aligned} a(x) &= u_l + (u_d - u_l)H(x) \\ b(x) &= \sigma_l + (\sigma_d - \sigma_l)H(x). \end{aligned} \tag{82}$$

PROPOZICIJA 6. *Neka je (u_μ, σ_μ) rešenje od (80) uz početni uslov (82) za pozitivno μ. Tada niz (u_μ, σ_μ) slabo konvergira ka rešenju (u, σ) od (79) uz isti početni uslov kada $\mu \to 0$, gde*
(a) Za $u_l \geq u_d$ (u, σ) je udarni talas (67) sa brzinom $c = (u_d + u_l)/2$.
(b) Za $u_l < u_d$, (u, σ) je mešovit razređujuće-udarni talas

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x \leq u_l t \\ x/t, & u_l t < x \leq u_d t \\ u_d, & u_d t < x, \end{cases}$$

$$\sigma(x,t) = \sigma_l + (\sigma_d - \sigma_l)H(x - ct),$$

gde je $c = (u_d - u_l)/2$.

Za dokaze ove dve propozicije koristimo Teoremu 23.

Bibliografija

[1] A. Bressan, Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Preprints S.I.S.S.A., Trieste, Italy.

[2] J. F. Colombeau, Elementary Introduction in New Generalized Functions North Holland, 1985.

[3] C. Dafermos, Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics, Springer-Verlag, Heidelberg, 2000.

[4] V. G. Danilov, V. M. Shelkovich, Propagation and interaction of shock waves of quasilinear equation, Nonlinear Studies, **8,1** 135-169 (2001).

[5] R. DiPerna, Measure valued solutions to conservation laws, Arch. Ration. Mech. Anal. **88** 223-270 (1985).

[6] J. Glimm, Solutions in large for nonlinear hyperbolic systems of equations, Commun. Pure Appl. Math. **18** 697-715 (1965).

[7] L. Hörmander, Lectures on Nonlinear Hyperbolic Equations, Springer-Verlag, Heidelberg, 1997.

[8] B. L. Keyfitz, Conservation laws, delta shocks and singular shocks, In: M. Grosser et al: Nonlinear Theory of Generalized Functions, Research Notes in Math., Chapman Hall/CRC, 1999.

[9] B. L. Keyfitz, H. C. Kranzer, Spaces of weighted measures for conservation laws with singular shock solutions, J. Diff. Eq. **118,2** 420-451 (1995).

[10] P. D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II, Commun. Pure Appl. Math. **10** 537-566 (1957).

[11] P. G. LeFloch, Hyprebolic Systems of Conservtion Laes, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2002.

[12] R. LeVeque, Numerical Methods for Conservation Laws, Lecture Notes in Mathematics, Birkhäuser, Basel, 1990.

[13] P-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vols. I II, Oxford University Press, Oxford, 1996-1998.

[14] T. P. Liu, Admissible solutions of hyperbolic conservation laws, Am. Math. Soc. Mem. **240**, 1980.

[15] M. Nedeljkov, Delta and singular delta locus for one dimensional systems of conservation laws, Math. Meth. Appl. Sci. **27** 931-955 (2004).

[16] M. Oberguggenberger, Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations, Pitman Res. Not. Math. 259, Longman Sci. Techn., Essex, 1992.

[17] M. Oberguggenberger, Y-G. Wang, Generalized solutions to conservation laws, Zeitschr. Anal. Anw. **13**, 7-18 (1994).

[18] D. Serre, Systems of Conservation Laws Vols. I II, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[19] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, (Second Edition), Springer, New York, 1994.

[20] A. E. Vol'pert, The spaces BV and quasilinear equations, Math. USSR Sb. 2 225-267 (1967).

[21] G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons, New York, 1974.