UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Dragana Vasiljević

KRETANJE RELEVANTNIH EVROPSKIH TRŽIŠNIH INDEKSA

-MASTER RAD-

Mentor
dr Nataša Krklec Jerinkić

Novi Sad, septembar 2016.

Predgovor

„Znati ne znači biti. Naučeno morate pokušati preneti u svakodnevni život.”

Blez Paskal (1623 – 1662) - francuski matematičar, fizičar i filozof

Nisam pobornik standardnih i uobičajenih predgovora, a i sigurnost ne trpi uštogljen pristup. Rad započinjem osvrtom na sve one kritike i grimase koje se javljaju kada ljudima kažete da studirate matematiku. Uz to još i primenjenu. Veoma mali broj ljudi može da shvate ljubav prema matematici. I dok pokušavate da im objasnite šta je lepo u toj egzaktnoj nauci i sami shvatite da ne postoje razlozi. Jednostavno je volite.

Ovaj master rad ima za cilj da objektivno sagleda situaciju na pet evropskih tržišta i da utvrdi ko ima ulogu vodeće sile. Verujem da ovaj rad može doprineti boljem sagledavanju problema međusobnog uticaja relevantnih tržišta, kao i donošenju određenih zaključaka koji se vezuju za tržišne indekse, posmatrane kroz vremenske serije.

Da se nisam u zimskom semestru 2016. godine srela sa predmetom Vremenske serije, verovatno mi ne bi palo na pamet da u master radu izučavam temu koja se tiče berzi i indeksa. Međutim, predmetni profesor je najbitniji faktor u procesu shvatanja tematike predmeta. Zbog toga, veliku zahvalnost dugujem svom mentoru docentu doktoru Nataši Krklec Jerinkić, koja me je svojim predavanjima uvela u svet vremenskih serija, približila njihovu problematiku i tako omogućila da proširim svoje vidike. Dugujem joj zahvalnost i na nesebičnoj pomoći pruženoj pri rešavanju ove problematike i na nizu korisnih sugestija koje su mi pomogle da uobličim svoj master rad.

Hvala prijateljima sa kojima mogu prijatno da ćutim. Hvala Vanji i Veljku, koji me ne puštaju da odrastem.

Na kraju, posebnu zahvalnost upućujem svojim roditeljima. Sve što jesam, i verujem da mogu biti, dugujem njima.

Novi Sad, 7. jul 2016. Dragana Vasiljević

Sadržaj

Uvod **1**

1 Teorijska pozadina istraživanja **3**

1.1 Tržišna kapitalizacija . . . 3
1.2 Ekonomski odnosi odabranih zemalja Evropske unije . . . 4
1.3 Berzanski indeksi . . . 7

2 Metodologija istraživanja **8**

2.1 Prostor verovatnoća, slučajne promenljive i stohastički procesi . . . 8
2.2 Uvod u analizu vremenskih serija . . . 10
2.3 Finansijske vremenske serije . . . 13
2.3.1 Prinosi akcija . . . 13
2.3.2 Logaritamska transformacija podataka . . . 15
2.3.3 Karakteristike finansijskih vremenskih serija . . . 15
2.4 Stacionarnost vremenske serije . . . 16
2.4.1 Striktna stacionarnost vremenske serije . . . 16
2.5 Test jediničnih korena . . . 17
2.6 Modeli višedimenzionih jednačina, testovi i kriterijumi . . . 18
2.6.1 Vektorski autoregresivni (VAR) modeli . . . 19
2.6.2 AIC kriterijum . . . 21
2.6.3 Grendžerov test kauzalnosti . . . 21
2.6.4 Koeficijent determinacije (R^2) . . . 23
2.7 Kointegracija . . . 24
2.8 Vektorski model korekcije ravnotežne greške ($VECM$) . . . 25
2.8.1 Johansenov test kointegracije . . . 26
2.9 Funkcija impulsivnog odziva (IRF) . . . 27
2.10 LM test autokorelacije među rezidualima . . . 27
2.11 BP test heteroskedastičnosti među rezidualima . . . 28
2.12 Robusne standardne greške . . . 29
2.13 Predikcije . . . 29
2.13.1 Osobine grešaka predviđanja . . . 30
2.14 $CUSUM_t$ test stabilnosti modela . . . 31

3 Istraživanje **32**

3.1 Statističke osobine berzanskih indeksa i grafički prikaz . . . 33
3.2 Testiranje stacionarnosti . . . 38
3.3 Formiranje VAR modela na osnovnom nivou i određivanje optimalnog koraka . . . 39
3.4 Testiranje kointegracije Johansenovim testom . . . 41
3.5 Ocenjeni VAR model . . . 42
3.5.1 Testiranje Grendžerove kauzalnosti . . . 43

3.6 Testiranje uticaja šokova na promenljive 45
3.7 Redukcija modela 47
3.8 Osobine reziduala 48
3.9 Određivanje prediktivnih vrednosti i ispitivanje stabilnosti modela 51
3.10 Ispitivanje kredibilnosti statičkih predikcija na osnovnom nivou 57
3.11 Analiza dešavanja na tržištima u periodu 2004 – 2009. 63

Zaključak **65**

Literatura **66**

Popis grafika

3.1 Vrednosti berzanskih indeksa na logaritamskom nivou 34
3.2 Vrednosti prinosa berzanskih indeksa na logaritamskom nivou 35
3.3 Grafički prikaz rezultata stabilnosti modela dobijenih $CUSUM_t$ testom 52
3.4 Statičke predikcije i stvarne vrednosti za promenljive na logaritamskom nivou . . . 54
3.5 Statičke predikcije i stvarne vrednosti za promenljive na osnovnom nivou 58
3.6 Statičke predikcije i stvarne vrednosti na osnovnom nivou za nemačko tržište 61

Popis tabela

1.1 Tržišna vrednost izabranih tržišta za 2012. godinu 4
3.1 Deskriptivna statistika za logaritamske prinose 36
3.2 Matrica koeficijenata korelacije 37
3.3 Rezultati PP testa za serije na logaritamskom nivou 38
3.4 Rezultati PP testa za logaritamske prinose 39
3.5 Rezultati AIC kriterijuma 39
3.6 Rezultati Johansenovog testa kointegracije 41
3.7 Ocenjeni VAR model za logaritamske prinose 42
3.8 Rezultati Grendžerovog testa kauzalnosti 44
3.9 Vrednosti funkcije impulsivnog odziva 46
3.10 Rezultati LM testa 49
3.11 Rezultati BP testa 49
3.12 Deskriptivna statistika reziduala modela 50
3.13 Upoređivanje stvarnih i dinamički predviđenih vrednosti 57
3.14 Vrednosti APE pokazatelja na osnovnom nivou 63

Uvod

Stepen nezavisnosti između evropskih tržišta proučavan je u raznim empirijskim studijama, tokom prethodnih nekoliko decenija. Interes za ovakvim proučavanjem leži u težnji investitora da predvidi kretanje cena akcija i da, ako je to moguće, što bolje diverzifikuje svoj portfolio.

Berza se, tradicionalno, posmatra kao prediktor ekonomije. Međutim, posmatranje berze kao indikatora ekonomskih aktivnosti ne ide bez kontroverznih mišljenja. Skeptici ukazuju na snažan ekonomski rast, koji je usledio nakon berzanske krize iz 1987. godine, poznate kao „Crni ponedeljak”. Ovaj jednodnevni pad je bio procentualno najveći pad u berzanskoj istoriji. Taj slom je okružen izvesnim stepenom misterije i označen je kao događaj Crnog labuda[1]. Naime, i pored ovog iznenadnog pada neki indeksi su uspeli da zabeleže pozitivne promene na kraju godine. Ovakva dešavanja služe skepticima kao razlog da se iskaže sumnja u sposobnost predviđanja tržišta kapitala. S obzirom na kontraverze koje okružuju tržište kapitala, kao jednog od pokazatelja budućih ekonomskih aktivnosti, čini se relevantnim dalje istraživanje ove tematike [2].

Teoretski razlozi zašto dešavanja na berzama mogu predvideti ekonomsku situaciju leže u, takozvanom, „efektu bogatstva”. Naime, vrednosti akcija na berzi reflektuju očekivanja o budućim stanjima ekonomije i, kao takve, mogu predvideti šta će se dešavati na tržištu.

Kasa [3] je u svojoj studiji izneo da niske korelacije mogu biti precenjene za investitore sa dugoročnim investicionim horizontima, ako se tržišta kapitala zajedno kreću. To znači da je za investitora koji planira dugoročna ulaganja korisnije da razmotri mogućnost kointegracije tržišta, nego da se vezuje za korelacionu analizu. Naime, niski koeficijenti korelacije mogu da navedu investitora da posumnja u vezu između dva tržište, te tako odustane od investiranja u kombinaciju akcija sa oba tržišta i na taj način izgubi moguću dobit. Kointegracija između tržišta širom Evrope (kao i sveta) postala je interesantna tema, koja kaže da tržišta teže da se zajedno kreću tokom dužeg vremenskog perioda. Proučavajući kointegrisanost tržišta, razne studije su pokazale da tržišta širom Evrope nisu nezavisna (kako se ranije mislilo). To znači da je postalo sasvim prihvatljivo mišljenje kako tržišta „dele” zajednički trend. To implicira da su tržišni indeksi usko povezani i da kretanja, odnosno promene na jednom tržištu imaju efekta na drugo tržište.

Pearce [4] je u naučnom radu 1983. godine podržao ideju o povezanosti kretanja cena akcija i ekonomije. Naime, on iznosi da ukoliko cene akcija rastu investitori su bogatiji i više troše i obrnuto. S druge strane, Peek and Rosengren [5] u svojoj studiji iznose istraživanja o tome kako je između 1955. i 1986. godine pad akcija u indeksu S&P500 praćen, većinom, nepoznatim faktorima, a ne recesijom ili ekonomskom krizom.

Cilj ovog istraživanja jeste da utvrdi da li prinosi akcija na tržištima razvijenih zemalja mogu da reflektuju snagu tih zemalja, da li su tržišta nezavisna i, ako nisu, ko na koga najviše utiče. Tržišta Austrije, Francuske, Nemačke, Španije i Portugala služiće kao reprezentativna tržišta u daljoj analizi. Razlog odabira baš ovih, razvijenih, tržišta leži u njihovim istorijskim, političkim i regionalnim povezanostima. Podaci su uzeti za period od januara 2010. do decembra 2015. godine. Ukratko ćemo razmotriti i šta se dešava sa kretanjima tržišta u periodu od januara 2004. do decembra 2009. godine i videti da ukazuju na neke druge odnose.

Rad ćemo započeti teorijskom osnovom, kako bismo ekonomski i politički pristupili odabranoj temi. Sve odabrane države su razvijene, te će biti zanimljivo razmatrati u kojoj meri utiču jedne na druge. Kako su Nemačka i Francuska dve vodeće sile, tako se očekuje da će one imati bitan uticaj u celokupnom istraživanju. Zatim ćemo preći na metode kojima ćemo vršiti istraživanja. Naime,

[1]Crni labud je događaj koji ima tri odlike: retkost (ne spada u domen uobičajenih očekivanja), izuzetan značaj (uticaj mu je ogroman) i retrospektivna predvidljivost (pored toga što je vanredan, ljudska priroda nagoni na smišljanje naknadnih objašnjenja za njegovu pojavu, usled čega on postaje objašnjiv i predvidljiv). Crni labud je i nešto što je krajnje očekivano, a ne desi se. Po pravilu simetrije, zbivanje krajnje neverovatne pojave ekvivalentno je nedešavanju krajnje verovatne pojave [1].

utvrdićemo i objasniti sve statističke testove i relevantne pojmove iz teorije verovatnoće, koje ćemo koristiti u okviru ovog istraživanja. U drugom poglavlju ćemo objasniti i modele (VAR i $VECM$), funkciju impulsivnog odziva i robusne standardne greške. Na kraju, sledi istraživanje i primena svih objašnjenih metoda na konkretnom uzorku, što predstavlja glavnu temu i doprinos ovog rada.

Rezultati testova, grafici i modeli u radu dobijeni su korišćenjem računarskih programa *EViews* i *Matlab*.

1 Teorijska pozadina istraživanja

U poslednjih nekoliko decenija imamo povećanu trgovinu i investicije na međunarodnom nivou. Jedan od razloga za to je liberalizacija[2] tržišta. Drugi razlog je globalizacija[3] svetske ekonomije, koja je doprinela lakšem investiranju na bilo kom tržištu sveta [6].

Jedan od mnogih motiva ulaganja na međunarodnom nivou je diverzifikovanje portfolija, kako bi se umanjio rizik i uvećao očekivani prinos akcija. Povećana međunarodna trgovina dovela je do jačanja zavisnosti među tržištima, odnosno dolazi do veće konkurentnosti među tržištima, kao i do većeg odliva kapitala „preko granice” (naročito na relaciji od razvijenih zemalja ka zemljama u razvoju). Proces globalizacije je bitan faktor koji je doprineo jačanju međuzavisnosti tržišta. Globalizacija, iz ekonomske perspektive, znači porast međuzavisnosti među nacionalnim ekonomijama, što dovodi do otvaranja nacionalne ekonomije ka spoljnoj trgovini, liberalizaciji tržišta i rastu toka kapitala kroz države [7].

Jedan od najvažnijih faktora za jačanje veza između tržišta je razvoj tehnologije i kompjuterskih sistema. Prosto je nemoguće zamisliti današnja tržišta bez odgovarajuće tehnologije, koja će skratiti vreme neophodno za trgovanje. Značajna informacija je postojanje mnogih institucija koje obavljaju trgovinu akcijama među tržištima i time smanjuju transakcione i druge troškove.

Rezultati istraživanja kointegracije imaju značajan uticaj na svetsku ekonomiju. Stepen međunarodne tržišne kointegracije je važan za investitore, njihovu strategiju i portfolio. Mi ćemo se u ovom radu baviti i testiranjem kointegracije.

Phengpis and Apilado [8] su 2004. godine analizirali koliko jaka ekonomska međuzavisnost tržišta doprinosi kointegraciji među njima. Uzeli su za primer pet najvećih tržišta u Ekonomskoj i monetarnoj uniji (EMU), u periodu od 1979. do 2002. godine. EMU je dobar primer, jer ona promoviše jaku ekonomsku međuzavisnost i harmonizaciju ekonomske politike zemalja članica. Rezultat istraživanja je ukazivao na jaku kointegrisanost. Ista analiza sprovedena na pet zemalja koje nisu članice EMU-a pokazala je da ne postoji kointegrisanost među tim zemljama. U njihovom radu, zaključak je da je jaka ekonomska međuzavisnost između zemalja od visokog značaja za kointegraciju i zajednički stohastički trend[4] između tržišta.

Otkrića u radu [8] sugerišu da, teoretski, postoji mogućnost kointegrisanosti između Austrije, Francuske, Nemačke, Španije i Portugala. Ipak, sve navedene zemlje su članice Evropske unije. Međutim, imajmo u vidu i njihovu ekonomsku moć iz koje će, možda, proisteći njihova nezavisnost od drugih ekonomija. Sve su to bitni faktori, koji će uticati na ishod rada.

1.1 Tržišna kapitalizacija

Jedan od osnovnih paramatera koji se koristi prilikom sagledavanja kapaciteta i performansi nekog tržišta je njegova tržišna kapitalizacija (iliti tržišna vrednost). Ovaj podatak govori o veličini posmatranog tržišta, kao i o nagoveštaju potencijala za ulaganje na takvoj lokaciji. Stavljanjem ovog pokazatelja u odnos sa nekim makroekonomskim podacima, kao što je na primer BDP[5], dobijamo relativne pokazatelje koji govore i o stepenu razvijenosti nekog tržišta kapitala u globalnim okvirima. Dakle, tržišna kapitalizacija neke berze predstavlja ukupnu vrednost svih hartija od vrednosti kojima je u odnosu ponude i tražnje (tržišno) utvrđena cena. U najgrubljem smislu to predstavlja ceo investicioni univerzum jednog organizovanog tržišta. Naravno ono što se može primeniti na nivou

[2] Ukidanje krutih propisa u poslovanju privrede, naročito u spoljnotrgovinskom prometu.

[3] Proces širenja nekih poduhvata na ceo svet.

[4] Stohastički trend označava dugoročnu tendenciju rasta koja se ne može predvideti na osnovu poznavanja podataka u prošlosti. Najveći broj ekonomskih vremenskih serija poseduje trend stohastičkog tipa.

[5] Bruto domaći proizvod (BDP) predstavlja ukupnu proizvodnju roba i usluga, ostvarenu u nacionalnoj ekonomiji, bez obzira na vlasništvo.

celog tržišta analogno se primenjuje i na svaku pojedinačnu kompaniju, što bi značilo da je tržišna kapitalizacija neke kompanije jednaka proizvodu njene tržišne cene i ukupnog broja emitovanih akcija.

Tržišta sa iznosom tržišne kapitalizacije iznad deset biliona dolara svrstavaju se u velika tržišta, dok su mega tržišta ona sa tržišnom kapitalizacijom iznad dvesta biliona dolara. Postoje još i nano, mikro, mala i tržišta srednje veličine[6].

U Tabeli 1.1 imamo vrednosti tržišnih kapitalizacija za pet izabranih tržišta, u bilionima dolara.

Tabela 1.1: Tržišna vrednost izabranih tržišta za 2012. godinu

Država	Tržišna vrednost
Francuska	1 823
Nemačka	1 486
Španija	995
Austrija	106
Portugal	66

Izvor: www.quandl.com

Po spomenutom kriterijumu, sva izabrana tržišta se svrstavaju u kategoriju velikih tržišta, s tim što se tržišta Francuske, Nemačke i Španije mogu svrstati i u mega tržišta.

Akcije sa berzi velikih tržišta, odnosno njihovih domaćih firmi, važe za akcije sa kojima se najviše trguje. Kad se kaže da je tržište veliko, uglavnom se misli na to da je rizik trgovine, sa akcijama takvih tržišta, mali. Međutim, mnoge studije su pokazale da nije baš uvek tako. Ono što je istina je to da što je veće tržište, teže će da propadne.

1.2 Ekonomski odnosi odabranih zemalja Evropske unije

Kako bismo uvideli povezanost odabranih zemalja i njihov način funkcionisanja, razmotrićemo međusobnu saradnju, kao i političku i ekonomsku pozadinu saradnje odabranih zemalja. Da bi jedna zemlja bila tržišno efikasna, potrebno je da ima dobru saradnju sa susednim zemljama, političku i ekonomsku stabilnost, kao i dobar geografski položaj. Razmotrićemo svaku od izabranih zemalja i dati moguće, teorijske indicije o jačini veza među izabranim zemljama.

Austrija je zemlja sa visokim životnim standardima[7]. Njen glavni grad, Beč, je 2010. godine proglašen za jedan od gradova sa najvišim standardima i kvalitetima življenja. Uprkos izveštajima o visokom nivou deficita u trgovinskom bilansu[8], kao i budžetskom deficitu[9], u

[6] *Izvor: www.investopedia.com*

[7] Životni standard je, prema širem shvatanju, ukupnost uslova života i rada pojedinih slojeva stanovništva jedne zemlje u određenom vremenskom periodu. Obuhvata materijalne, radne i društvene uslove života, kao i mogućnosti zadovoljenja duhovnih potreba, slobodnog kretanja i slobodne razmene ljudi i dobara.

[8] Trgovinski bilans predstavlja razliku između ukupnog izvoza i ukupnog uvoza jedne zemlje. Ukoliko je izvoz veći od uvoza, onda je trgovinski bilans zemlje u suficitu, a ako je uvoz veći od izvoza onda je trgovinski bilans u deficitu.

[9] Budžetski suficit i budžetski deficit nastaju usled neravnoteže između ukupnih prihoda i primanja s jedne strane i ukupnih rashoda i izdataka budžeta države, pokrajine ili jedinice lokalne samouprave, s druge strane. Budžetski suficit postoji kada su ukupni prihodi i primanja veći od ukupnih rashoda i izdataka. Jednostavno rečeno, to bi značilo da država, pokrajina ili jedinica lokalne samouprave ima na raspolaganju više novca nego što iznose planirani rashodi u budžetskoj godini. Češća pojava jeste budžetski deficit, ili ono što popularno zovemo manjak u državnoj kasi. Budžetski deficit nastaje kada su rashodi i izdaci veći od prihoda i primanja. To zapravo znači da država, ili drugi nivo vlasti, nije u mogućnosti da obezbedi dovoljno novca za finansiranje planiranih rashoda i izdataka. U ovakvoj situaciji, država je prinuđena da uvodi mere štednje, tj. smanjuje rashode, iznađe način da poveća naplatu prihoda ili da budžetski deficit finansira zaduživanjem.

prethodnih nekoliko godina Austrija važi za jednu od bogatijih zemalja. U prilog tome govori činjenica da je 2015. godine Austrija imala jedan od najviših nivoa BDP-a. Dok BDP ove zemlje raste, stopa nezaposlenosti pada, te je jedna od najnižih u Evropskoj uniji. Na kraju, Austrija ima dobar geografski položaj, jer je okružena najvećim i najuspešnijim ekonomijama Evropske unije (uticaj susedne Nemačke), te joj se predviđa svetla budućnost.

Austrija i Francuska - Francuska je na šestom mestu na listi zemalja od kojih Austrija uvozi robu i usluge, sa tržišnim učešćem od oko 3,2%. Luksuzna dobra i hrana iz Francuske su veoma popularni među austrijskim potrošačima. U proteklih deset godina, uvoz proizvoda iz Austrije u Francusku je počeo kontinuirano da raste, što je doprinelo deficitu u trgovinskom bilansu Francuske. Takođe, Francuska je jedna od deset najvećih zemalja investitora u austrijsku ekonomiju, sa preko 260 firmi pozicioniranih u Austriji. Politička pozadina ove dve zemlje je tradicionalno bliska, što dokazuje i osnivanje Austrijsko-francuskog centra. Francuski jezik je u Austriji na drugom mestu najizučavanijih jezika, što daje značaj kulturnoj pozadini ovih odnosa. Na kraju, iako ove dve zemlje nisu geografski povezane, očekujemo jaku vezu, koja će nam omogućiti da vrednosti austrijskog indeksa predvidimo pomoću vrednosti francuskog indeksa.

Austrija i Nemačka - veza Austrije i Nemačke ne počiva samo na zajedničkom jeziku i kulturi, već i na vekovno dugoj istoriji. Nemačka je najvažniji ekonomski partner Austriji, što se ogleda u tome što mnoge nemačke kompanije imaju svoje registrovane proizvodne pogone u Austriji. Austrija je i jedna od najpopularnijih turističkih destinacija za Nemačku. Ove dve zemlje imaju i blisku političku i ekonomsku saradnju. Tokom 2013. godine, Austrija je izvezla oko 29% svojih proizvoda u Nemačku, a oko 42,9% njenog uvoza čine nemački proizvodi. S druge strane, Nemačka je izvezla 4,6% svojih proizvoda u Austriju, dok 4% njenog uvoza čine austrijski proizvodi. Tu su i razvoji u kulturi, umetnosti, muzici. Sve u svemu, tržišta ove dve zemlje su blisko povezana, te se očekuje i visoka vrednost uzoračkog koeficijenta korelacije.

Austrija i Španija - Austrija je zemlja koja ima viši životni standard od Španije. S jedne strane, Austrija je ekonomski jaka zemlja koja daje novac Evropskoj uniji, dok je Španija zemlja koja se još uvek oporavlja od Velike ekonomske krize i koja mora da pozajmljuje novac od Evropske unije. Zatim, veoma mali broj austrijskih turista posećuje Španiju i obrnuto. Mali je i broj austrijskih studenata koji dođu na studije u Barselonu. U suštini, Austrija je geografski udaljena od Španije i ove dve zemlje nemaju posebne veze, sem što su obe članice Evropske unije i nekada su bile deo iste, Habzburške imperije.

Austrija i Portugal - i u ovom slučaju je Austrija predstavnik razvijenije ekonomije. U suštini, situacija je slična kao sa Španijom. Za Austriju je Nemačka najvažniji partner za uvoz i izvoz, dok je za Portugal to Španija. Austrija je zemlja kod koje je razvijeno mašinstvo, metalna industrija, dok je Portugal zemlja kod koje je, u najvišem nivou, razvijena agrikultura, proizvodnja hrane, vina, ulja... No, u suštini, ovu saradnju karakteriše nizak nivo razmene. U ovom slučaju ne očekujemo veći nivo povezanosti, odnosno značajan međusobni uticaj.

Francuska funkcioniše dosta dobro, sa BDP-om za koji se očekuje neprekidan rast u sledećih nekoliko godina i sa stabilnom stopama zaposlenosti i inflacije. Francuska je popularna kao turistička destinacija, ali i kao veliki izvoznik aviona, lekova, automobila i automobilskih delova, nafte, vina i mesa u zemlje poput Nemačke, Belgije i Sjedinjenih Američkih Država. U Francuskoj imamo i visok životni standard, čemu u prilog govori i činjenica da se populacija u Francuskoj konstantno uvećava. No, Francusku karakteriše i deficit u trgovinskom bilansu, koji se javio u proteklih par godina. Međutim, i pored toga, Francuska nije osetila tako jake posledice Velike ekonomske krize iz 2008. godine, kao recimo njen sused Španija.

Francuska i Nemačka - tržišta Nemačke i Francuske su dva jaka tržišta među odabranim, štaviše to su dve vodeće evropske ekonomije. Govoreći u kontekstu Evropske unije, saradnja između ove dve zemlje je na vrlo visokom nivou. Iako je Francuska bila evroskeptična[10], to nije uticalo na unapređenje francusko-nemačkog plana evrointegracija[11]. Često je taj savez nazivan i kao savez centralnih zemalja iliti „dvopogonski" savez, koji utiče na poboljšanje plana evrointegracija. No, ove dve ekonomije su i najjače povezane, među svim odabranim, pa ta činjenica može doprineti postojanju multikolinearnosti.

Francuska i Španija - Francuska je za Španiju na prvom mestu na listi trgovinskih partnera. Što se tiče uvoza, za Francusku je Španija na četvrtom mestu na listi zemalja iz kojih Francuska nabavlja robu i usluge, dok je za Španiju Francuska na drugom mestu. Što se tiče izvoza, Španija je za Francusku na petom mestu, dok je Francuska za Španiju na prvom mestu, po podacima iz 2014. godine. Tokom 2014. godine, oko šest miliona Španaca je posetilo Francusku, što je porast od 12% u odnosu na 2012. godinu. Takođe, Francuska je na trećem mestu na listi najvećih zemalja investitora u Španiji (odmah posle Velike Britanije i SAD-a), sa preko 2 000 kompanija, dok su španske kompanije locirane na 1 300 mesta u Francuskoj. Francuske kompanije u Španiji se baziraju na telekomunikacijama i maloprodaji automobila. Takođe, francuske banke su nosioci španskog javnog duga. Na celokupnu saradnju utiče i geografska povezanost ove dve zemlje, te očekujemo veći međusobni uticaj među njima.

Francuska i Portugal - tokom 2003. godine, Francuska i Portugal su započeli pregovore o boljoj saradnji. Danas se njihovi odnosi zasnivaju na načelima evropskih integracija. Ove dve zemlje svoju saradnju zasnivaju na zajedničkoj želji za razvojem evropske pomorske politike, evropske energetske politike, kao i rešavanje problema sa migrantima. Veliki nivo roba i usluga Portugal uvozi iz Francuske, ali isto tako postoje proizvodi koje Francuska uvozi iz Portugala. Pored toga, ove dve zemlje nemaju visok nivo saradnje i ne očekujemo usku povezanost među njima.

Nemačka je najsnažnija zemlja među izabranima. Iako je, poslednjih godina, Evropu zadesila finansijska i ekonomska kriza, nemačka privreda je ostala stabilna. Uspeh Nemačke mnogi objašnjavaju kombinacijom socijalnih i tržišnih komponenti. Koreni nemačkog sistema potiču iz 19. veka, kada je Bizmark postavio osnovu za socijalne zakone, tako što je uspostavio penziono i zdravstveno osiguranje. Takođe, Nemačka je zemlja u kojoj broj zaposlenih konstantno raste. Ide joj u prilog i njen dobar geografski položaj, te u njoj, vekovima, vladaju povoljniji uslovi za rast i proizvodnju, nego na obodima Evrope.

Nemačka i Španija - Nemačka je za Španiju na drugom mestu liste najvećih trgovinskih partnera (posle Francuske). Izvoz iz Španije u Nemačku je manji nego uvoz. Ipak, u poslednjih nekoliko godina, Španija je redukovala svoj trgovinski deficit sa Nemačkom. Nemačka je i veliki investitor u Španiji, sa preko 1 200 kompanija, koje su pozicionirane u Španiji. Nemački turizam igra bitnu ulogu u ekonomskim odnosima ove dve zemlje (tokom 2015. godine, oko 10,3 miliona Nemaca je posetilo Španiju).

Nemačka i Portugal - Nemačka je za Portugal drugi po redu trgovinski partner. Prvi trgovinski partner je, naravno, Španija. Suficit u trgovinskom bilansu Nemačke je, u prethodnih nekoliko godina, opao zbog uvoza iz Portugala. Nemačke kompanije, već oko jednog veka, imaju svoje pogone u Portugalu i one su među prvima po snazi u industrijskom sektoru Portugala. Kako su mnoge nemačke kompanije aktivne u izvoznom sektoru, one su manje pogođene

[10]Evroskepticizam označava pristup evropskim integracijama koji je suprotan centralizaciji i federalizaciji Evropske unije. Odnosi se i na protivnost prema evru, kao valuti.

[11]Evrointegracija je proces industrijskog, političkog, zakonskog, ekonomskog, društvenog i kulturnog udruživanja zemalja Evrope.

ekonomskom krizom. Mnoge od njih su bile u stanju da održe, ili čak povećaju broj radnika. Među deset najjačih portugalskih izvoznih firmi, ubrajaju se tri nemačke. Nemačka, još uvek, ima značajan uticaj u Portugalu, posebno u automobilskom proizvodnom sektoru. Takođe, Portugal je jedna od popularnijih turističkih destinacija za Nemce.

Španija je bila u ozbiljnoj neprilici tokom ekonomske krize, 2008. godine. Tada joj je skočila stopa nezaposlenosti, tako da i danas važi za jednu od najviših stopa nezaposlenosti u Evropskoj uniji. Očekuje se i da će bruto domaći proizvod ove države, nakon niske vrednosti u 2015. godini, dostići nešto bolji nivo i da će polako početi da raste. Španija ostvaruje najveći profit iz turizma, što pokazuje i činjenica da je u 2015. godini Španija bila, po posećenosti, na trećem mestu u svetu.

Španija i Portugal - ove dve zemlje su u istoriji, generalno, više gledale jedna na drugu kao na pretnju, nego kao na šansu za trgovinu. Ali, pogođene krizom u Evrozoni, morale su više da se oslone jedna na drugu i tako izmene trgovinske odnose, koji do tad nisu bili dobri. Po mnogim ekonomistima, Španija je danas najvažniji trgovinski partner Portugalu. Dominantna Španija se ekonomski širi na portugalskom tržištu, dok je Portugal suviše mali da se odupre tom uticaju. Ali, u poslednjih nekoliko godina, Španija je smanjila investicije u Portugalu, dok je Portugal povećao svoje investicije u Španiji. Kako god, ove dve zemlje povećavaju integraciju svojih ekonomija i to preko rastuće trgovine i investicija među njima. Portugal je za Španiju na trećem mestu na listi zemalja u koje Španija izvozi svoje proizvode, dok je za Portugal Španija na prvom mestu i po izvozu i po uvozu.

Portugal je, ekonomski, 2012. godine zabeležio najveći godišnji pad, od 1975. godine, po evidenciji portugalske Agencije za statistiku. Jedan od razloga za taj pad je i povećanje poreza, kao i smanjenje plata i penzija, kako bi se smanjio državni dug. Ovakvo usporavanje ekonomije je posledica pada lične potrošnje i slabijeg rasta izvoza. Napomenimo i da je po stopi nezaposlenosti, u Evropi, Portugal na petom mestu[12]. Siromašni obrazovni sistem i veliki nivo korupcije u državi su predstavljali poteškoće u rastu ekonomije i privrede Portugala[13]. Ipak, portugalski univerziteti spadaju među najstarije u Evropi i postoje od 1290. godine, te je naučna reputacija Portugala dosta dobra.

1.3 Berzanski indeksi

Berzanski indeksi predstavljaju najkvalitetnije instrumente analize kretanja berzanskih tržišta, u određenom vremenskom periodu. Oni služe za analizu istorijskih kretanja na finansijskom tržištu, ali predstavljaju i vodeće indikatore kretanja tržišta, na osnovu kojih se daju prognoze budućih kretanja i to ne samo na finansijskom tržištu, već i u ekonomiji uopšte.

Berzanski indeksi predstavljaju ponderisani prosek cena i obima trgovanja akcijama ili obveznicama. Izražavaju se kroz kretanje tržišne kapitalizacije u posmatranom vremenskom periodu. Oni su najbolji pokazatelji stanja i kretanja cena akcija na finansijskom tržištu. U praksi postoji više vrsta indeksa koji se koriste. Najčešće su to „benchmark” indeksi, koji služe kao reper za praćenje kretanja cena akcija na tržištu, ali su sve značajniji i „blue chip”[14] indeksi.

Berzanski indeksi se izračunavaju tako što se podeli ukupna tržišna vrednost odabranih kompanija sa liste, u sadašnjem vremenu, sa njihovom tržišnom vrednošću u baznom periodu. Tržišna

[12] *Izvor: www.statista.com*

[13] *Izvor: www.portugal.com*

[14] Blue chip akcije - naziv je akcija kompanija koje imaju veliki ugled i dobru tržišnu poziciju. Takve akcije važe za kvalitetne, poverljive i stabilne, čak i u doba cenovnih fluktuacija. Nose mali rizik, ali i mali prinos. Jedna od teorija o poreklu ovog naziva govori o tome da je termin preuzet iz kartaške igre poker, gde je najvredniji žeton (engl. *chip*), u većini slučajeva, bio plave boje (engl. *blue*).

vrednost odabranih kompanija se izračunava množenjem broja emitovanih akcija, koje drže investitori, sa njihovom cenom, što se naziva tržišna kapitalizacija. Ponder kompanije u indeksu određen je veličinom tržišne kapitalizacije realizovanih akcija, što znači da kompanije sa većim brojem prodatih akcija i višom cenom presudno utiču na kretanje indeksa.

Indeksi se mogu direktno porediti samo ako imaju isti bazni datum[15]. Mi smo za bazni datum odabrali 2. januar 2004, jer ćemo, kasnije, taj datum koristiti u analizi ponašanja tržišta za vreme Velike ekonomske krize.

2 Metodologija istraživanja

Zbog već spomenutog uticaja globalizacije, u prethodnih nekoliko godina, i odražavanja tog fenomena na kretanje cena na različitim tržištima (stvaranje međuzavisnosti tržišta), došli smo do zaključka da treba razmatrati međusobni (zajednički) uticaj tržišta, kako bismo bolje razumeli dinamiku globalnih finansija. Jedno tržište može određivati cene na drugom tržištu pod jednim okolnostima, dok pod nekim drugim okolnostima situacija može biti obrnuta. Takođe, za investitora koji poseduje više različitih akcija bitno je u kom su odnosu tržišta, čije akcije poseduje. U ovom poglavlju ćemo predstaviti ekonometrijske metode i modele korisne za izučavanje vektorskih ili višedimenzionih vremenskih serija, kao i vektorski autoregresivni model, vektorski model korekcije greške, ali i sve neophodne pojmove iz teorije verovatnoće, statistike i stohastičke analize, neophodne za dalje izučavanje.

2.1 Prostor verovatnoća, slučajne promenljive i stohastički procesi

Teorija verovatnoće je polazna osnova za matematičku statistiku, jednu od oblasti matematike sa najviše primena. U ovom poglavlju ćemo objasniti osnovne pojmove iz teorije verovatnoće.

Definicija 2.1 *Prostor verovatnoća, određen slučajnim eksperimentom, je trojka* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$, *gde je* $\mathbf{\Omega}$ *skup skup svih (logički) mogućih ishoda slučajnog eksperimenta,* $\mathcal{F}$ σ*-algebra (polje), a* P *funkcija koja svakom skupu* $A \in \mathcal{F}$ *dodeljuje broj* $P(A)$*, koji se naziva verovatnoća da se desi događaj* A.

Definicija 2.2 *Preslikavanje* $X : \mathbf{\Omega} \longmapsto \mathbb{R}^n$*, se zove n-dimenzionalna slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$*, ako važi da je* X $\mathcal{F}$*-merljivo, tj.* $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$*, za svaki Borelov skup* S.

Definicija 2.3 *Funkcija* $F_X(x) = F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n)$*, za* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, zove se zajednička funkcija raspodele slučajnih promenljivih* $(X_1, \ldots, X_n)$.

Definicija 2.4 *Slučajna promenljiva* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *je apsolutno neprekidna ako postoji integrabilna funkcija* $f_X(x) = f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n)$*,* $x_i \in \mathbb{R}$*,* $i = 1, \ldots, n$*, takva da* $P(X \in S) = \int \cdots \int_S f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1 \ldots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$*, za* $S \in \mathcal{B}^n$*. Specijalno, za* $S = \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n, u_i < x_i\}$*, dobićemo* $F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{(X_1,\ldots,X_n)}(u_1, \ldots, u_n) du_n \cdots du_1$.

U slučaju jednodimenzionalne promenljive, imamo da je $F_X(x) = P(X \leq x)$, što se zove i kumulativna funkcija raspodele (CDF) za X. Ona je nerastuća, tj. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ za $x_1 \leq x_2$, i zadovoljava $F_X(-\infty) = 0$ i $F_X(+\infty) = 1$. Za datu verovatnoću p najmanji broj x_p, takav da zadovoljava $p \leq F_X(x_p)$, naziva se kvantil reda p slučajne promenljive X. Mi ćemo u istraživanju koristiti CDF da bismo izračunali p vrednosti, prilikom vršenja statističkih testiranja.

[15]Bazni datum je datum formiranja vrednosti indeksa.

Definicija 2.5 *Neka je X apsolutno neprekidna slučajna promenljiva. Očekivanje slučajna promenljive X dato je sa*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

i ono postoji ako i samo ako $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) < +\infty$.

Lema 2.1 *Neka je* $X : \mathbf{\Omega} \longmapsto \mathbb{R}^n$ *slučajna promenljiva. Tada je*

$$\mathcal{F}(X) := \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}^n\}$$

jedna σ*-algebra koja se zove* σ*-algebra generisana sa* X.

Teorema 2.1 *Ako je X proizvoljna slučajna promenljiva na* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ *i Y prosta slučajna promenljiva, onda:*

1. $E(X|Y)$ *je (prosta) slučajna promenljiva;*

2. $E(X|Y)$ *je* $\mathcal{F}(Y)$*-merljiva;*

3. $\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP$, *za sve* $A \in \mathcal{F}(Y)$.

Definicija 2.6 *Neka je Y proizvoljna slučajna promenljiva na* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$. *Tada je* $E(X|Y)$ *proizvoljna* $\mathcal{F}(Y)$*-merljiva slučajna promenljiva, takva da je* $\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP$, *za sve* $A \in \mathcal{F}(Y)$, *pri čemu je X proizvoljna slučajna promenljiva na* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$.

Definicija 2.7 *Neka je* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ *prostor verovatnoća i neka je* ν *jedna* σ *algebra,* $\nu \subseteq \mathcal{F}$. *Neka je* $X : \mathbf{\Omega} \longmapsto \mathbb{R}^n$ *integrabilna (postoji očekivana vrednost) slučajna promenljiva definisana na* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$. *Tada definišemo* $E(X|\nu)$ *kao proizvoljnu* ν*-merljivu slučajnu promenljivu takvu da*

$$\int_A X dP = \int_A E(X|\nu) dP,$$

za sve $A \in \nu$.

Teorema 2.2 *Osobine uslovnog očekivanja:*

1. *ako je X* ν*-merljivo, tada je* $E(X|\nu) = X$ *skoro svuda;*

2. *ako su a i b konstante, tada* $E(aX + bY|\nu) = aE(X|\nu) + bE(Y|\nu)$;

3. *ako je X* ν*-merljivo i ako je XY integrabilna, tada* $E(XY|\nu) = XE(Y|\nu)$ *skoro svuda;*

4. *ako je X nezavisno od* ν, *tada* $E(X|\nu) = E(X)$ *skoro svuda.*

Pojam slučajne promenljive je nezavisan o vremenu. Međutim, mnogi procesi čiji je ishod neizvestan, a koji se odvijaju u vremenu, zahtevaju da se koncept slučajne promenljive uopšti, tako da uključuje i vremensku komponentu. Na taj način, posmatrajući familiju slučajnih promenljivih, koja zavisi od vremena, doći ćemo do pojma stohastičkog procesa.

Definicija 2.8 *Stohastički (slučajni) proces* $\{X(t), t \in \tilde{T}\} := \{X_t, t \in \tilde{T}\}$ *je familija slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$.

Skup $\tilde{T}$ zove se parametarski (ili indeksni) skup. Parametarski skup $\tilde{T}$ je najčešće skup koji predstavlja vremenski interval. Neki primeri parametarskih skupova su: $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, $\{0, 1, 2, \ldots\}$, $(-\infty, +\infty)$ i $[0, +\infty)$.

Ako je parametarski skup konačan, dobićemo konačno mnogo slučajnih promenljivih. Ako je prebrojiv, onda govorimo o nizu slučajnih promenljivih. Specijalno, ako je neprebrojiv, onda govorimo o „pravom" stohastičkom procesu.

Uočimo i to da je iz formalnog zapisa stohastičkog procesa $\{X(t, \omega), t \in \tilde{T}, \omega \in \mathbf{\Omega}\}$, stohastički proces funkcija dve promenljive - t i ω. Kad se fiksira t, dobijamo jednu slučajnu promenljivu, a kada se fiksira ω, dobijamo jednu realnu funkciju vremena (nema slučajnosti), koja se naziva realizacija (trajektorija).

Kako je tema rada vezana za finansijske vremenske serije, odnosno kretanje berzanskih indeksa, razmatraćemo niz slučajnih promenljivih uređenih u odnosu na skup prirodnih brojeva, tj. $\tilde{T} = \mathbb{N}$.

2.2 Uvod u analizu vremenskih serija

Podaci o pojavama u ekonomiji i drugim područjima istraživanja najčešće se prikupljaju kao vremenske serije. U vremenskoj seriji uređenje numeričkih vrednosti promenljive nije slučajno, u smislu da su podaci hronološki uređeni. Spoznaja važnosti takvog uređenja karakteristika je po kojoj se analiza vremenskih serija razlikuje od ostalih statističkih analiza. U vremenskoj seriji pretpostavlja se da postoji zavisnost među vrednostima narednih varijabli i da je ta zavisnost povezana s položajem opažanja u seriji. Istraživanje i modeliranje takve zavisnosti, te njeno korišćenje u svrhe predviđanja, predstavljaju ključne elemente analize vremenskih serija. Dinamička struktura vremenske serije može se istraživati na temelju jedne jednačine (u smislu jedne vremenske serije) ili predmet analize može biti uzročno-posledična veza više vremenskih serija, koja se sprovodi na temelju vektorskih modela.

Razumevanje analize vremenskih serija zahteva, pre svega, definisanje njenih ciljeva. Statistička analiza vremenskih serija ima za cilj uočavanje i definisanje mehanizma koji je niz generisao, opisivanje karakteristika i osobina niza i predviđanje evolucije pojave u vremenu. Vremenska serija se objašnjava kao skup merenja x_t, od kojih je svako merenje dobijeno za poseban trenutak t.

Definicija 2.9 *Vremenski niz ili vremenska serija je skup hronološki uređenih vrednosti promenljive, koja predstavlja pojavu ili stohastički proces u vremenu.*

U literaturi ne postoji jedinstven stav oko toga šta je vremenska serija. Izdvajaju se sledeća dva mišljenja:

1. **Vremenska serija predstavlja jednu realizaciju stohastičkog procesa.** U tom smislu odnos vremenske serije i stohastičkog procesa odgovara odnosu uzorka i populacije u standardnoj teoriji statističkog zaključivanja. Kao što uzorak predstavlja deo populacije na osnovu kojeg se izvode zaključci o karakteristikama populacije, tako i analiza konkretne vremenske serije mora omogućiti sagledavanje karakteristika stohastičkog procesa.

2. **Ne postoji razlika između stohastičkog procesa i vremenske serije.** To znači da se vremenska serija može smatrati nizom neprekidnih slučajnih promenljivih, koje su uređene u odnosu na vreme. Dakle, termini stohastički proces i vremenska serija smatraju se sinonimima.

Da bismo mogli da radimo sa vremenskim serijama, kao neprekidnim slučajnim promenljivama, potrebni su nam još neki pojmovi iz teorije verovatnoće.

Momenat reda k apsolutno neprekidne slučajne promenljive X se definiše kao

$$m'_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f_X(x)dx,$$

gde je E oznaka za očekivanje, a f_X funkcija gustine za X.

Momenat reda jedan naziva se očekivana vredost ili sredina slučajne promenljive X. Ona meri centralnu poziciju raspodele. Označavaćemo je sa μ_x.

Centralni momenat reda k neprekidne slučajne promenljive X definiše se kao

$$m_k = E[(X - \mu_x)^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^k f_X dx,$$

pod uslovom da dati integral postoji.

Centralni momenat reda dva naziva se varijansa ili disperzija promenljive X. Ona meri „rasipanje" vrednosti slučajne promenljive oko sredine. Označavaćemo je sa σ_x^2.

Standardna devijacija neprekidne slučajne promenljive X je pozitivan kvadratni koren iz disperzije. Označavamo je sa σ_x.

Normalizovani momenat reda tri neprekidne slučajne promenljive X definiše se kao

$$S(x) = E\left[\frac{(X - \mu_x)^3}{\sigma_x^3}\right].$$

Naziva se koeficijent asimetrije i meri simetričnost raspodele slučajne promenljive, u odnosu na srednju vrednost.

Normalizovani momenat reda četiri neprekidne slučajne promenljive X, definiše se kao

$$K(x) = \left[\frac{(X - \mu_x)^4}{\sigma_x^4}\right].$$

Naziva se koeficijent ekscesa i meri „debljinu repova" raspodele.

Kovarijansa slučajnih promenljivih X i Y je data sa

$$Cov(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Može se pokazati da važi $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Koeficijent korelacije između slučajnih promenljivih X i Y dat je sa

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}.$$

Neka je vremenska serija $x = \{x_1, \ldots, x_T\}$ slučajni uzorak, uzet iz populacije X, koji ima T vrednosti. Tada je:

- Uzoračka sredina

$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t. \tag{2.1}$$

- Medijana uzorka

$$\widehat{me}_x = \begin{cases} \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, & T = 2n \\ x_{n+1}, & T = 2n+1 \end{cases}, \tag{2.2}$$

pod uslovom da su vrednosti u uzorku poređane u neopadajućem redosledu.

- Najveća vrednost u uzorku

$$x_{max} = max\{x_1, \ldots, x_T\}. \tag{2.3}$$

- Najmanja vrednost u uzorku

$$x_{min} = min\{x_1, \ldots, x_T\}. \tag{2.4}$$

- Centrirana disperzija uzorka

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_x)^2. \tag{2.5}$$

- Standardna devijacija uzorka

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2}. \tag{2.6}$$

- Koeficijent asimetrije uzorka

$$\hat{S}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_x)^3. \tag{2.7}$$

- Koeficijent ekscesa (spljoštenosti) uzorka

$$\hat{K}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4} \sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_x)^4. \tag{2.8}$$

- Uzorački koeficijent linearne korelacije za dva uzorka $\{x_1, \ldots, x_T\}$ i $\{y_1, \ldots, y_T\}$

$$\hat{\rho}_{x,y} = \frac{\sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_x)(y_t - \hat{\mu}_y)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T} (x_t - \hat{\mu}_x)^2 \sum_{t=1}^{T} (y_t - \hat{\mu}_y)^2}}, \tag{2.9}$$

gde se izraz u brojiocu naziva uzoračka kovarijansa uzorka pomnožena sa T.

Bitno je napomenuti da $\hat{S}(x)$ i $\hat{K}(x) - 3$ imaju asimptotski normalnu raspodelu, sa očekivanjem nula i disperzijom 6/T i 24/T, respektivno. Njihove asimptotske osobine ćemo koristiti za testiranje normalnosti naših serija. Ukoliko imamo seriju $x = \{x_1, \ldots, x_T\}$, da bismo testirali vrednosti koeficijenta asimetrije uzimamo da je nulta hipoteza $H_0 : S(x) = 0$, dok je alternativna $H_1 : S(x) \neq 0$. Vrednosti test statistike, za uzorački koeficijent asimetrije, se dobija kao

$$t = \frac{\hat{S}(x)}{\sqrt{6/T}}.$$

Nultu hipotezu ćemo odbaciti na nivou poverenja α, ako je $|t| > z_{\alpha/2}$, gde je $z_{\alpha/2}$ kvantil standarne normalne raspodele. U suštini, mi ćemo izračunati verovatnoću p za test statistiku t i odbaciti nultu hipotezu ako je p manje od α.

Za testiranje koeficijenta ekscesa koristimo nultu hipotezu $H_0 : K(x) - 3 = 0$, protiv alternativne $H_1 : K(x) - 3 \neq 0$. Test statistika je oblika

$$t = \frac{\hat{K}(x) - 3}{\sqrt{24/T}}.$$

Ponovo se koriste ista pravila za odlučivanje o odbacivanju ili prihvatanju nulte hipoteze.

Jarque i Bera su 1987. godine iskombinovali ova dva prikazana testa i uveli test statistiku

$$JB = \frac{\hat{S}^2(x)}{6/T} + \frac{(\hat{K}(x) - 3)^2}{24/T},$$

koja ima asimptotsku χ^2 raspodelu sa dva stepena slobode, da bi testirali normalnost serije x_t. Nultu hipotezu o postojanju normalnosti odbacujemo ako je verovatnoća p test statistike JB manja nego nivo poverenja[16].

2.3 Finansijske vremenske serije

Analiza finansijskih vremenskih serija se zasniva na izučavanju procene vrednosti neke imovine (npr. akcija) tokom vremena. Zbog postojanja faktora nepouzdanosti u merenju određenih vrednosti u finansijskim vremenskim serijama (recimo volatilnosti), metodi i teorija verovatnoće i statistike su bitni u izučavanju ovakve vrste serija.

2.3.1 Prinosi akcija

Mnoge finansijske studije izučavaju prinose akcija, umesto cena istih. Postoje dva razloga za ovakav pristup. Prvi razlog je što je, za prosečnog investitora, prinos akcije „imun na skaliranje", odnosno lakše ga je uporediti sa drugim prinosima. Ukoliko zamislimo investitora koji želi da uporedi vrednosti akcija dva tržišta, pri čemu ta dva tržišta imaju različite valute u kojima izražavaju vrednosti akcija, prvi razlog se čini sasvim logičan. Drugi razlog je taj što je prinosima lakše „rukovati", jer imaju lepše statističke osobine. Oni mogu biti negativni, te možemo koristiti normalnu raspodelu u izučavanju.

Nadalje ćemo sa P_t označavati cenu akcije u trenutku t. Razmotrimo sad nekoliko vrsta prinosa.

Neto prinos se koristi kao mera efikasnosti investicije. On predstavlja današnju dobit od investicije u odnosu na jučerašnje troškove ulaganja i definiše kao

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Bruto prinos predstavlja prinos ako držimo akciju u trajanju od jednog perioda, tj. od trenutka $t - 1$ do trenutka t, odnosno

$$G_t = 1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}. \tag{2.10}$$

[16]Za nivo poverenja se, obično, uzima vrednost 95%.

Bruto prinos za k perioda predstavlja prinos ako držimo akciju u trajanju od k perioda, tj. od trenutka $t-k$ do trenutka t, odnosno

$$\begin{aligned} G_t[k] &= \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \cdots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\ &= G_t \cdot G_{t-1} \cdots G_{t-k+1} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} G_{t-j}. \end{aligned}$$

Bruto prinos za k perioda je proizvod k bruto prinosa za jedan period. Ovo se još naziva i složeni prinos.

Neprekidni složeni prinos je prirodni logaritam bruto prinosa akcije. Naziva se i logaritamski prinos i predstavljen je kao

$$r_t = \ln G_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}}. \tag{2.11}$$

Logaritamski prinos za k perioda se definiše kao

$$r_t[k] = \ln G_t[k] = \ln(G_t \cdot G_{t-1} \cdots G_{t-k+1}) = \ln G_t + \ln G_{t-1} + \ldots + \ln G_{t-k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j} \tag{2.12}$$

To znači da je logaritamski prinos za k perioda jednak zbiru logaritamskih prinosa za po jedan period. Ovo je korisna osobina logaritamskih prinosa i zato ćemo mi, od sad, koristiti ovakvu vrstu prinosa.

Raspodele prinosa

Uglavnom se pretpostavlja neka raspodela prinosa akcija, kako bi se moglo pristupiti proučavanju tih prinosa. Posmatraćemo kolekciju od k akcija, koje se drže tokom T perioda i posmatraćemo različite trenutke $t = 1, \ldots, T$. Sa r_{it} ćemo označavati logaritamski prinos akcije i u trenutku t. Zajednička funkcija raspodele za logaritamske prinose $r_{it}; i = 1, \ldots, k; t = 1, \ldots, T$ je data sa

$$F_r(r_{11}, \ldots, r_{k1}; r_{12}, \ldots, r_{k2}; \ldots; r_{1T}, \ldots, r_{kT}; \boldsymbol{Y}; \boldsymbol{\theta}), \tag{2.13}$$

gde je $\boldsymbol{Y}$ vektor stanja promenljivih, koji sumira sve informacije iz sadašnjih i prošlih vrednosti vremenske serije, koje su relevantne za predviđanje budućih vrednosti serije (istorijski podaci poznati do sadašnjeg trenutka T), a $\boldsymbol{\theta}$ vektor parametara, koji jedinstveno određuju funkciju raspodele $F_r(\cdot)$. Funkcija raspodele, $F_r(\cdot)$, određuje stohastičku prirodu prinosa r_{it} i vektora $\boldsymbol{Y}$. U mnogim finansijskim studijama, vektor stanja $\boldsymbol{Y}$ se posmatra kao zadat. Empirijska analiza prinosa se sastoji u tome da se ocene nepoznati parametar $\boldsymbol{\theta}$ i donesu zaključci o ponašanju prinosa $\{r_{it}\}$, na osnovu znanja o prinosima za prethodni period. Na osnovu svega rečenog, zajednička raspodela se predstavlja kao

$$\begin{aligned} F(r_{i1}, \ldots, r_{iT}; \theta) &= F(r_{i1}) F(r_{i2}|r_{1t}) \cdots F(r_{iT}|r_{i,T-1}, \ldots, r_{i1}) \\ &= F(r_{i1}) \prod_{t=2}^{T} F(r_{it}|r_{i,t-1}, \ldots, r_{i1}), \end{aligned} \tag{2.14}$$

pri čemu smo izostavili parametar $\boldsymbol{\theta}$. Prinose, uglavnom, posmatramo kao apsolutno neprekidne slučajne promenljive, posebno u slučajevim kada razmatramo prinose indeksa i tada koristimo funkciju gustine verovatnoća. U tom slučaju, zajednička funkcija gustine je data sa

$$f(r_{i1}, \ldots, r_{iT}; \theta) = f(r_{i1}; \theta) \prod_{t=2}^{T} f(r_{it}|r_{i,t-1}, \ldots, r_{i1}; \boldsymbol{\theta}). \tag{2.15}$$

2.3.2 Logaritamska transformacija podataka

Logaritamska transformacija je veoma popularna u ekonometrijskoj analizi, iz više razloga. Prvo, mnoge ekonomske vremenske serije imaju jak uticaj trenda[17]. Ukoliko je taj trend predstavljen kao eksponencijalna funkcija vremena, logaritmovanjem podataka dobijamo jednu linearnu funkciju vremena. Drugi razlog je taj što se logaritmovanjem nelinearnog modela može dobiti linearan model. Primer je Cobb-Douglas-ova funkcija proizvodnje u obliku $Y = AL^{\beta}K^{\alpha}$, gde Y predstavlja ukupnu proizvodnju, L radnu snagu, K uloženi kapital, A faktor produktivnosti, a α i β koeficijente elastičnosti u odnosu $\alpha + \beta = 1$. Logaritmovanjem ove funkcije dobićemo linearan model. Treći razlog je što korišćenjem logaritamske transformacije podataka možemo posmatrati promene u logaritamskim vrednostima kao relativne promene u originalnim vrednostima.

Nama je najvažiji treći razlog, te ćemo ga zato bolje objasniti. Ukoliko uložimo u banku svotu novca P_1, pri godišnjoj kamatnoj stopi od r%, mi ćemo na kraju godine raspolagati sa $P_2 = P_1(1 + r)$. Uopšteno, ako imamo godišnju stopu r i n perioda kapitalisanja, mi ćemo na kraju godine imati iznos $P_n = P_1(1 + r/n)^n$. Kada broj perioda kapitalisanja, n, ide u beskonačno, formula $(1 + r/n)^n$ konvergira ka vrednosti e^r, gde je e Ojlerov broj, odnosno $\lim_{n\to\infty}(1 + r/n)^n = e^r$. To znači da pri godišnjoj kamatnoj stopi od r% i neprekidnom kapitalisanju, iznos našeg novca će na kraju godine porasti za $P_n/P_1 = e^r$. Primenom prirodnog logaritma na ovaj izraz dobijamo $\ln(P_n/P_1) = r$. To dalje znači da ćemo koeficijente uz odgovarajuće promenljive u modelu moći da interpretiramo kao procentualnu promenu jedne promenljive uzrokovanu rastom od 1% u drugoj promenljivoj. Ovako ocenjeni koeficijenti se nazivaju koeficijenti elastičnosti.

Ukoliko imamo serije samo na logaritamskom nivou, odgovarajuće koeficijente ćemo interpretirati kao procentualnu promenu tako što ćemo vrednost 1,01 stepenovati određenim koeficijentom[18].

2.3.3 Karakteristike finansijskih vremenskih serija

Finansijske vremenske serije, u praksi, najlakše možemo prepoznati ukoliko vremenska serija, koja je predmet izučavanja, poseduje neku od sledećih osobina:

1. Nestabilna disperzija
   Najčešće cena finansijskog instrumenta nije stabilna. Do promena cena akcije na tržištu dolazi usled novih informacija koje stalno pristižu. Dakle, dolazak nove vesti utiče na rast varijabiliteta, koji se potom smiruje, pa ponovo može porasti ukoliko nova vest pristigne. Stepen promene cene akcije zavisi od toga kako na novopristiglu vest investitori gledaju.

2. Trend
   Dugoročna komponenta u kretanju finansijske vremenske serije naziva se trend. Ukoliko serija sistemski raste (opada) tokom vremena, trend je rastući (opadajući). Takođe, trend može biti deterministički ili stohastički u zavisnosti od toga da li se kretanje vremenske serije može predvideti na osnovu prošlih vrednosti ili ne.

3. Sezonska komponenta
   Ukoliko vremenska serija ispoljava pravilnosti u kretanju u toku jednog perioda, tada se ona naziva sezonska vremenska serija. Postojanje ove komponente ukazuje da postoji veći stepen korelacije između opservacija istog perioda.

[17]Trend predstavlja dugoročnu razvojnu tendenciju variranja podataka posmatrane pojave, koja je izražena kao funkcija vremena. U vremenskim serija se oslikava kao rastuće ili opadajuće kretanje u vrednostima.

[18]Za više informacija pogledati [9].

4. Strukturni lom
   Strukturni lom predstavlja skup opservacija koje odstupaju od prethodnog toka vremenske serije. On je najčešće rezultat neke intervencije, u smislu događaja koji će uticati na kretanje vremenske serije.

2.4 Stacionarnost vremenske serije

Grubo rečeno, vremenska serija je stacionarna, ako se njene statističke osobine ne menjaju tokom vremena. Naši zaključci se, uglavnom, zasnivaju na vrednostima sredine i kovarijanse, te imamo sledeću definiciju.

Definicija 2.10 *Vremenska serija $\{r_t\}$ je slabo stacionarna, ako*

1. $E(r_t) = \mu$, *za* $\forall t$,
2. $Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$, *za proizvoljan broj* $l \in \mathbb{N}$ *i* $\forall t$.

Vrednost l se naziva korak ili „vrednost zaostajanja”. Nadalje, ako nije drugačije naznačeno, pod navođenjem pojma stacionarnosti mislimo na slabu stacionarnost.

Implicitno, slaba stacionarnost implicira da su momenti prvog i drugog reda konačni. U praksi, slaba stacionarnost nam je neophodna da bismo mogli da određujemo predikcije.

2.4.1 Striktna stacionarnost vremenske serije

Ova osobina vremenskih serija je veoma restriktivna, te se zbog toga uvodi slaba stacionarnost. No, mi ćemo je ipak definisati i navesti neke osobine.

Definicija 2.11 *Vremenska serija $\{r_t\}$ je striktno stacionarna ako su raspodele slučajnih vektora*

$$(r_{t_1}, \ldots, r_{t_k}) \quad i \quad (r_{t_1+h}, \ldots, r_{t_k+h})$$

iste za sve $k, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{N}$ *i* $h \in \mathbb{Z}$.

Najpoznatija stacionarna vremenska serija je beli šum.

Definicija 2.12 *Vremenska serija $\{r_t\}$ naziva se beli šum, ako je $\{r_t\}$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom i sa konačnim očekivanjem i disperzijom. Gausov beli šum je beli šum sa normalnom $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ raspodelom.*

Definicija 2.13 *Vremenska serija $\{r_t\}$ je linearna, ako se može zapisati kao $r_t = \mu + \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i e_{t-i}$, gde je $\mu = E(r_t)$, $\psi_0 = 1$, a $\{e_t\}$ niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa očekivanjem nula i dobro definisanom disperzijom.*

Vrednost e_t predstavlja novu informaciju u trenutku t i još se naziva i šok.

Za linearne vremenske serije, dinamiku u nizu $\{r_t\}$ određuju koeficijenti ψ_i. Ukoliko je serija $\{r_t\}$ slabo stacionarna, dobija se da je

$$E(r_t) = \mu, \qquad D(r_t) = \sigma_e^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2,$$

gde je σ_e^2 disperzija šumova. Takođe, za stacionarne serije, uticaj šoka e_{t-i} na prinos r_t opada, kako i raste.

2.5 Test jediničnih korena

U stacionarnim vremenskim serijama, šokovi su privremeni i njihov efekat, tokom vremena, opada. S druge strane, očekivanje i disperzija nestacionarnih vremenskih serija zavise od trenutka t, dok disperzija takvih serija osciluje, kad vreme teži u beskonačnost.

Jedinični koreni

Posmatrajmo model

$$r_t = \phi r_{t-1} + e_t, \tag{2.16}$$

gde je e_t beli šum.

Teorema 2.3 *[10] Neka r_t prati AR(1) model, tj. $r_t = \phi r_{t-1} + e_t$, gde je $\{e_t\}$ beli šum. Ako je $\{r_t\}$ slabo stacionaran proces, tada je $|\phi| < 1$.*

Pod uslovom da je očekivanje uniformno ograničeno, imali bismo da iz uslova $|\phi| < 1$ sledi da je serija stacionarna. Na osnovu Teoreme 2.3, za koeficijenat ϕ imamo tri moguća slučaja:

1. ako je serija stacionarna, tada je $|\phi| < 1$;
2. ako serija eksplodira, tada je $|\phi| > 1$;
3. ako serija ima jedinični koren i nestacionarna je, tada je $|\phi| = 1$.

Neka je $\phi = 1$. Oduzmimo r_{t-1} od obe strane jednačine (2.16)

$$\begin{aligned} r_t - r_{t-1} &= r_{t-1} - r_{t-1} + e_t \\ \Delta r_t &= e_t, \end{aligned}$$

pa, pošto je e_t beli šum, tada je Δr_t stacionarna vremenska serija. Na taj način, diferenciranjem dolazimo do stacionarnosti.

Definicija 2.14 *Vremenska serija r_t je integrisana stepena jedan (u oznaci $r_t \sim I(1)$) i sadrži jedinični koren, ako je r_t nestacionarna, a Δr_t stacionarna vremenska serija.*

U opštem slučaju, nestacionarne vremenske serije moraju se diferencirati više od jednog puta da bi postale stacionarne. Tako dolazimo do sledeće definicije.

Definicija 2.15 *Vremenska serija r_t je integrisana stepena d (u oznaci $r_t \sim I(d)$), ako je r_t nestacionarna, ali postaje stacionarna nakon d diferenciranja, pri čemu je $d \in \mathbb{N}$ najmanje takvo da važi da su sve $\Delta^{d-j} r_t$ nestacionarne serije, za $j = 1, \ldots, d-1$, gde je $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$, $\Delta^2 r_t = \Delta(\Delta r_t) = \Delta r_t - \Delta r_{t-1}, \ldots$*

Sve gore navedeno znači da je red integracije ekvivalentan broju diferenciranja koje je potrebno da bi se od nestacionarne vremenske serije dobila stacionarna vremenska serija, a što je ekvivalentno broju jediničnih korena početne vremenske serije. U primerima koje imamo, najviše nas zanimaju $I(1)$ serije.

***PP* test jediničnih korena**

Phillips i Perron [11] su 1988. osmislili proceduru za testiranje stacionarnosti. Ključna misao, kojom su se vodili, je da je testiranje nestacionarnosti neke serije ekvivalentno testiranju postojanja jediničnog korena. Testiranje se zasniva na posmatranju tri jednačine

$$\Delta r_t = (\phi - 1)r_{t-1} + e_t = \gamma r_{t-1} + e_t, \tag{2.17}$$
$$\Delta r_t = \alpha_0 + \gamma r_{t-1} + e_t, \tag{2.18}$$
$$\Delta r_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \gamma r_{t-1} + e_t, \tag{2.19}$$

gde je (2.17) jednačina bez konstante i bez trenda, (2.18) jednačina sa konstantom, ali bez trenda, a (2.19) jednačina i sa konstantom i sa trendom. Sve tri jednačine se testiraju na postojanje jediničnog korena, gde je nulta hipoteza $H_0 : \gamma = 0$, a alternativna $H_1 : \gamma \neq 0$. Odnosno, nulta hipoteza je da imamo jedinični koren u seriji podataka, tj. serija je nestacionarna. PP test je jedan vid t testa, gde se testira statistička značajnost koeficijenta uz prethodnu vrednost, r_{t-1}, tako što se uzme količnik vrednosti koeficijenta i njegove standardne greške i uporedi sa kritičnom vrednosti. PP test nema klasičnu t raspodelu, već se uzimaju specijalne kritične vrednosti koje je odredio MacKinnon [12].

No, ovaj test je zasnovan na proširenom testu Dickey-a i Fuller-a [13], koji nećemo izvoditi. Napomenimo da se u ovom testu koriguje t test statistika za koeficijent γ, ukoliko je e_t serijski korelisana vremenska serija.

2.6 Modeli višedimenzionih jednačina, testovi i kriterijumi

Modeli višedimenzionih jednačina korišćeni su u makroekonomskoj analizi sve do 1980. godine, kada je Sims [14] izdvojio VAR (vektorske autoregresivne) modele kao alternativne. VAR modeli su posebno podesni za izučavanje dinamičke strukture promenljivih u jednačinama. Ovi modeli tretiraju sve varijable kao endogene[19]. Ova osobina je navela Simsa da podrži ovakvu vrstu modela, jer se tretiranje pojedinih varijabli kao egzogenih (u sistemima jednačina), po njemu, kosi sa savremenim makroekonomskim teorijama. No, uvek možemo uključiti neku varijablu kao striktno egzogenu, ukoliko nam to zatreba u modelu.

VAR modeli su najpodesniji za predviđanja. Oni se grade tako što se sadašnje (trenutne) vrednosti niza varijabli „objašnjavaju” preko prethodnih vrednosti svih uključenih varijabli. Ovi modeli se mogu koristiti i za ekonomsku analizu, jer objašnjavaju zajednički uticaj uključenih varijabli kao jedan mehanizam. Sastavni deo VAR analize je i analiza impulsivnog odziva, analiza odstupanja stvarnih od predviđenih vrednosti, kao i sama analiza predikcija.

Tradicionalni VAR modeli su stvarani za stacionarne vremenske serije, kod kojih nema uticaja trenda. Međutim, osamdesetih godina prošloga veka, Grendžer (Granger) [15], Engle [16], Johansen [17] i mnogi drugi dolaze do zaključka da su stohastički trend i kointegracija itekako bitni za izučavanje ekonomskih varijabli i da ih treba uključiti u VAR modele. Ukoliko postoji trend u vremenskim serijama, tada može biti poželjno razdvojiti dugoročne od kratkoročnih veza u sistemu jednačina. Vektorski modeli korekcije greške ($VECM$) nude pogodan način za razdvajanje dugoročnih i kratkoročnih veza u procesu obrade podataka. Prednost VAR modela nad $VECM$ je ta što se VAR modeli mogu koristiti ako je nepoznata kointegracijska veza.

Tipična VAR analiza započinje određivanjem i ocenjivanjem modela u redukovanoj formi (koju ćemo tek objasniti), a potom sledi provera adekvatnosti modela. Svi nedostaci modela, koji se uoče u kasnijim koracima, mogu se otkloniti modifikacijom modela. Ukoliko modifikovani model prođe testove adekvatnosti, on se koristi za predikcije, Grendžerovu i strukturalnu analizu.

[19]Endogena varijabla je varijabla određena drugim varijablama unutar sistema. Nasuprot njoj je egzogena varijabla, koja utiče na druge varijable u sistemu, dok na nju ostale varijable ne mogu da vrše uticaj.

2.6.1 Vektorski autoregresivni (VAR) modeli

U radu [14] je izneseno da ukoliko postoji više varijabli koje istovremeno deluju, tada sve te varijable treba tretirati jednako. Drugim rečima, ne treba praviti razlike između endogenih i egzogenih varijabli. To znači da ukoliko imamo sistem jednačina, svaka jednačina ima isti skup regresora, što vodi ka razvitku VAR modela.

Vremenska serija reda k (k-dimenzioni vektor) $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \ldots, r_{kt})$ je VAR proces reda 1 ili $VAR(1)$, ako prati model

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{r}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t, \tag{2.20}$$

gde je $\boldsymbol{\phi}_0$ k-dimenzionalan vektor, $\boldsymbol{\Phi}_1$ matrica dimenzija $k \times k$, a $\{\boldsymbol{e}_t\}$ niz serijski nekorelisanih slučajnih vektora sa očekivanjem nula i matricom kovarijansi $\boldsymbol{\Sigma}$. U praksi je potrebno da matrica kovarijansi bude pozitivno definitna[20] ili se prelazi na redukovanje dimenzije vektora $\boldsymbol{r}_t$.

Posmatrajmo slučaj za $k = 2$. Model $VAR(1)$ se može predstaviti pomoću sledeće dve jednačine

$$r_{1t} = \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + e_{1t}, \tag{2.21}$$

$$r_{2t} = \phi_{02} + \Phi_{21} r_{1,t-1} + \Phi_{22} r_{2,t-1} + e_{2t}, \tag{2.22}$$

gde je Φ_{ij} elemenat u i-toj vrsti i j-toj koloni matrice $\boldsymbol{\Phi}_1$, a ϕ_{0i} elemenat u i-toj vrsti vektora $\boldsymbol{\phi}_0$. Koeficijent Φ_{12} predstavlja linearan uticaj promenljive $r_{2,t-1}$ na r_{1t}, u prisustvu promenljive $r_{1,t-1}$. Drugačije rečeno, Φ_{12} predstavlja uslovni efekat promenljive $r_{2,t-1}$ na promenljivu r_{1t}, ako je dato $r_{1,t-1}$. Ukoliko je $\Phi_{12} = 0$, tada r_{1t} ne zavisi od prethodnih vrednosti promenljive r_{2t}, već samo od sopstvenih prethodnih vrednosti. Analogno razmatranje se sprovodi i za koeficijent Φ_{21}.

Ukoliko je $\Phi_{12} = 0$, a $\Phi_{21} \neq 0$, tada postoji jednosmerna veza dve promenljive. Ukoliko su oba koeficijenta jednaka nuli, tada su promenljive nepovezane, a ukoliko su oba koeficijenta različita od nule, tada postoji povratna veza dve serije.

U ekonometrijskoj literaturi, model dat jednačinom (2.20) naziva se $VAR(1)$ model u redukovanoj formi, jer ne pokazuje eksplicitno konkurentsku zavisnost između komponenata serija. Linearnom tranformacijom se može dobiti druga forma modela, poznatija kao strukturalna forma, koja ukazuje na uticaj trenutne vrednosti jedne serije na trenutnu vrednost druge. Kako je $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitivno definitna, postoje gornja trougaona matrica $\boldsymbol{L}$ sa jedinicama na glavnoj dijagonali i dijagonalna matrica $\boldsymbol{G}$, takve da važi $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{LGL}'$. Ovakvo razlaganje kvadratne matrice naziva se Cholesky dekompozicija. Tada važi da je $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{G}$.

Definišimo $\boldsymbol{u}_t = (u_{1t}, \ldots, u_{kt})' = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{e}_t$. Tada je

$$E(\boldsymbol{u}_t) = \boldsymbol{L}^{-1}E(\boldsymbol{e}_t) = 0 \qquad Cov(\boldsymbol{u}_t) = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}^{-1})' = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}')^{-1} = \boldsymbol{G}.$$

Kako je $\boldsymbol{G}$ dijagonalna matrica, komponente vektora $\boldsymbol{u}_t$ su nekorelisane. Ukoliko s leve strane pomnožimo izraz (2.20) sa $\boldsymbol{L}^{-1}$, dobićemo $VAR(1)$ model u strukturalnoj formi, kao

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{r}_{t-1} + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{e}_t = \boldsymbol{\phi}_0^* + \boldsymbol{\Phi}_1^*\boldsymbol{r}_{t-1} + \boldsymbol{u}_t,$$

gde je $\boldsymbol{\phi}_0^* = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\phi}_0$ k-dimenzionalan vektor, a $\boldsymbol{\Phi}_1^* = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Phi}_1$ matrica dimenzija $k \times k$.

Uslovi stacionarnosti i momenti u $VAR(1)$ modelu

Pretpostavimo da je $VAR(1)$ model u jednačini (2.20) stacionaran. Upotrebom očekivane vrednosti i činjenice da je $E(\boldsymbol{e}_t) = 0$ dobijamo

$$E(\boldsymbol{r}_t) = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1 E(\boldsymbol{r}_{t-1}).$$

[20] Simetrična kvadratna matrica A ($k \times k$) je pozitivno definitna ako su joj svi karakteristični koreni pozitivni.

Kako je zbog stacionarnosti $E(\boldsymbol{r}_t)$ nezavisno od vremena t, imamo

$$\boldsymbol{\mu} \equiv E(\boldsymbol{r}_t) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1)^{-1}\boldsymbol{\phi}_0,$$

pod pretpostavkom da je matrica $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1$ nesingularna, a $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica dimenzija $k \times k$. Korišćenjem jednakosti $\boldsymbol{\phi}_0 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1)\boldsymbol{\mu}$, model u jednačini (2.20) se može zapisati kao

$$(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{r}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{e}_t.$$

Neka je $\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu}$ vremenska serija korigovana za očekivanje. Tada $VAR(1)$ model postaje

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \boldsymbol{\Phi}_1\tilde{\boldsymbol{r}}_{t-1} + \boldsymbol{e}_t. \tag{2.23}$$

Ponavljanjem datog postupka, jednačinu (2.23) možemo zapisati kao

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \boldsymbol{e}_t + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{e}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_1^2\boldsymbol{e}_{t-2} + \boldsymbol{\Phi}_1^3\boldsymbol{e}_{t-3} + \dots.$$

Gornji izraz daje nekoliko karakteristika $VAR(1)$ modela. Prvo, kako su serije u vektoru $\boldsymbol{e}_t$ nekorelisane, sledi da je $Cov(\boldsymbol{e}_t, \boldsymbol{r}_{t-l}) = 0$, za sve $l > 0$. Iz tog razloga se elementi serija u vektoru $\boldsymbol{e}_t$ nazivaju *šokovi* ili *inovacije* u trenutku t. Takođe, množenjem izraza sa $\boldsymbol{e}_t'$ i primenom očekivanja, dobijamo da je $Cov(\boldsymbol{r}_t, \boldsymbol{e}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$. Treća karakteristika jeste da $\boldsymbol{r}_t$ zavisi od prethodnih šokova u vektorima $\boldsymbol{e}_{t-j}$ $(j > 0)$, uz koje stoje koeficijenti matrice $\boldsymbol{\Phi}^j$. Da bi ova zavisnost imala smisla, $\boldsymbol{\Phi}^j$ mora konvergirati ka nuli kada $j \longrightarrow \infty$. To znači da svih k karakterističnih korena matrice $\boldsymbol{\Phi}$ mora, po modulu, biti manje od jedan. Ovaj uslov je zapravo potreban i dovoljan uslov za slabu stacionarnost serije $\boldsymbol{r}_t$, pod uslovom dobre definisanosti matrice kovarijansi, $\boldsymbol{\Sigma}$.

$VAR(p)$ model

Vremenska serija $\boldsymbol{r}_t$ prati $VAR(p)$ model, ako zadovoljava

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{r}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p\boldsymbol{r}_{t-p} + \boldsymbol{e}_t, \qquad p > 0, \tag{2.24}$$

gde su $\boldsymbol{\phi}_0$ i $\boldsymbol{e}_t$ već definisani, a $\boldsymbol{\Phi}_i$ matrica dimenzija $k \times k$. Model $VAR(p)$ možemo još zapisati kao

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{e}_t,$$

gde je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica dimenzija $k \times k$, a B operator takav da je $B^k r_t = r_{t-k}$. Korišćenjem zapisa matričnog polinoma $\boldsymbol{\Phi}(B) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p$, model $VAR(p)$ možemo zapisati kao

$$\boldsymbol{\Phi}(B)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{e}_t.$$

Pod uslovima stacionarnosti važi da je

$$\boldsymbol{\mu} \equiv E(\boldsymbol{r}_t) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p)^{-1}\boldsymbol{\phi}_0 = [\boldsymbol{\Phi}(1)]^{-1}\boldsymbol{\phi}_0. \tag{2.25}$$

Karakteristike VAR modela

VAR model ima nekoliko veoma dobrih osobina. Kao prvo, veoma je jednostavan, što podrazumeva da se ne mora brinuti o tome da li su varijable endogene ili egzogene. Druga dobra osobina je ta što je ocenjivanje nepoznatih koeficijenata u modelu moguće sprovesti metodom najmanjih kvadrata Treće, predikcije koje se dobijaju pomoću VAR modela su, u većini slučajeva, bolje nego one dobijene preko nekih drugih, kompleksinijih modela [18].

No, u drugu ruku, postoje i određene kritike protiv ovih modela. Prvo, oni su više teorijski, nego ekonomski modeli. U početku ne postoje restrikcije, što se tiče parametara, već se kreće od činjenice da među svim činiocima postoji zavisnost. Ipak, statistički zaključci se koriste na ocenjenom modelu, te neki koeficijenti mogu biti odbačeni kao statistički neznačajni. Zaključak o statističkoj značajnosti se izvodi i na osnovu testova kauzalnosti[21], ali opet, nakon ocene koeficijenata modela.

Druga kritika se odnosi na gubitak stepeni slobode. Ako pretpostavimo da imamo tri promenljive u modelu i ukoliko odlučimo da idemo dvanaest koraka unazad za svaku promenljivu u svakoj jednačini, to će prouzrokovati ocenjivanje 37 parametara u svakoj jednačini. To znači da nam je zasigurno potrebno 37 vrednosti u svakoj seriji, kako bismo mogli da pristupimo ocenjivanju modela. Ukoliko veličina uzorka nije dovoljno velika, ocenjivanje velikog broja parametara može prouzrokovati probleme u tačnosti ocena.

Na kraju, značaj koeficijenata u VAR modelu je težak za objašnjavanje, pošto ovaj model nema dobru teorijsku pozadinu. Kako bismo nadjačali ove kritike, u prilog VAR modelu ide činjenica da mnoge zaključke možemo izvesti iz funkcije impulsivnog odziva. Funkcija impulsivnog odziva ispituje odgovor zavisne promenljive u VAR modelu na šokove. Problem predstavlja definisanje tih šokova. Generalno, mi bismo voleli da ocenimo šokove iz vektora $\boldsymbol{u}_t$, te bismo te šokove interpretirali kao partikularne šokove u strukturalnom modelu. No, mi možemo samo da ocenimo šokove iz vektora $\boldsymbol{e}_t$, odnosno iz modela u redukovanoj formi. Nezgoda sa ovim šumovima je u tome što su oni kombinacija šumova iz strukturalnog modela. Izvlačenje strkturalnih šumova iz redukovanih se naziva problem identifikacije, ali ga mi u ovom radu nećemo razmatrati.

2.6.2 AIC kriterijum

Postoji mnogo metoda za određivanje optimalnog broja vrednosti koje treba uključiti u model. Mi ćemo koristiti Akaike informacijski kriterijum (Akaike information criterion, AIC). Optimalan broj prethodnih vrednosti je broj koraka, i, koji minimizira vrednost AIC kriterijuma, gde je

$$AIC(i) = \ln(|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i|) + \frac{2k^2 i}{T}, \tag{2.26}$$

gde je $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T} \hat{\boldsymbol{e}}_t^{(i)}[\hat{\boldsymbol{e}}_t^{(i)}]'$ uzoračka matrica kovarijansi reziduala, $|\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i|$ oznaka za determinantu matrice $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_i$, $\hat{\boldsymbol{e}}_t^{(i)} = \boldsymbol{r}_t - \hat{\boldsymbol{\phi}}_0^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1^{(i)}\boldsymbol{r}_{t-1} - \ldots - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i^{(i)}\boldsymbol{r}_{t-i}$ vektor reziduala, T je broj merenja (odnosno veličina uzorka), dok je k broj koeficijenata u jednačini. Specijalno, za $i = 0$ reziduali se definišu kao $\hat{\boldsymbol{e}}_t^{(0)} = \boldsymbol{r}_t - \bar{\boldsymbol{r}}$, gde je $\bar{\boldsymbol{r}}$ uzoračka sredina za $\boldsymbol{r}_t$.

Kada odredimo red modela, pristupamo ocenjivanju koeficijenata metodom najmanjih kvadrata. Ta metoda je najčešće korišćena, jer pod uslovima odsustva autokorelacije i heteroskedastičnosti u rezidualima, daje nepristrasne ocenjivače. U ovom radu nećemo objašnjavati kako se metoda izvodi[22].

2.6.3 Grendžerov test kauzalnosti

Jedna od dobrih osobina VAR modela je ta što nam oni dozvoljavaju korišćenje testova kauzalnosti, te time možemo da utvrdimo smer kauzalne veze. Kauzalnost, u ekonometriji, ima nešto drugačije značenje nego što je ono u svakodnevnom govoru. U ekonometriji, kauzalnost predstavlja mogućnost da se vrednosti jedne promenljive predviđaju pomoću vrednosti druge varijable (odnosno jedna promenljiva prouzrokuje vrednosti druge). Pretpostavimo da imamo dve promenljive, r_{1t} i r_{2t}, koje deluju jedna na drugu u određenim koracima. Veza između te dve promenljive može se predstaviti VAR modelom. Tada je moguće da imamo sledeće slučajeve:

[21] Kauzalnost je veza, uzrok i posledica.

[22] Za više informacija pogledati [10].

1. r_{1t} uzrokuje r_{2t} i r_{2t} ne uzrokuje r_{1t};
2. r_{1t} ne uzrokuje r_{2t} i r_{2t} uzrokuje r_{1t};
3. r_{1t} uzrokuje r_{2t} i r_{2t} uzrokuje r_{1t} (dvosmerna kauzalna veza);
4. promenljive su nezavisne.

Problem predstavlja pronalaženje odgovarajućeg metoda za testiranje kauzalnosti. Grendžer [15] je 1969. godine razvio jednostavan test koji definiše Grendžerovu kauzalnost kao: promenljiva r_{1t} Grendžer-uzrokuje promenljivu r_{2t}, ako se vrednosti promenljive r_{2t} mogu predvideti, sa većom tačnošću, korišćenjem prethodnih vrednosti promenljive r_{1t}, nego ne korišćenjem te promenljive uopšte. Pri čemu vrednosti svih drugih promenljivih ostaju iste.

Testiranje Grendžerove kauzalnosti

Da bismo pokrenuli test Grendžerove kauzalnosti, u slučaju dve stacionarne promenljive r_{1t} i r_{2t}, treba da ocenimo koeficijente modela

$$r_{1t} = \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + e_{1t} \tag{2.27}$$
$$r_{2t} = \phi_{02} + \Phi_{21} r_{1,t-1} + \Phi_{22} r_{2,t-1} + e_{2t}. \tag{2.28}$$

pod pretpostavkom da su e_{1t} i e_{2t} nekorelisani, beli šumovi. U ovom modelu, možemo imati sledeće slučajeve[23]:

1. koeficijent uz prethodnu vrednost promenljive r_{2t} u jednačini (2.27) može biti statistički značajno različit od nule, dok koeficijent uz prethodnu vrednost promenljive r_{1t} u jednačini (2.28) nije statistički značajno različit od nule; u ovom slučaju imamo da promenljiva r_{2t} uzrokuje promenljivu r_{1t};
2. koeficijent uz prethodnu vrednost promenljive r_{1t} u jednačini (2.28) može biti statistički značajno različit od nule, dok koeficijent uz prethodnu vrednosti promenljive r_{2t} u jednačini (2.27) nije statistički značajno različit od nule; u ovom slučaju imamo da promenljiva r_{1t} uzrokuje promenljivu r_{2t};
3. i koeficijent uz prethodnu vrednost promenljive r_{2t} u jednačini (2.27) i koeficijent uz prethodnu vrednost promenljive r_{1t} u jednačini (2.28) su statistički značajno različiti od nule; u ovom slučaju imamo dvosmernu kauzalnu vezu;
4. ni koeficijent uz prethodnu vrednost promenljive r_{2t} u jednačini (2.27) ni koeficijent uz prethodnu vrednost promenljive r_{1t} u jednačini (2.28) nije statistički značajno različit od nule; u ovom slučaju imamo da su promenljive r_{1t} i r_{2t} nezavisne.

Analitički prikaz ove procedure je sledeći (prikazaćemo proceduru samo za jednačinu (2.27), jer se analogno izvodi i za jednačinu (2.28)):

1. ocenimo koeficijente u modelu

$$r_{1t} = \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \epsilon_{1t} \tag{2.29}$$

   i izračunamo restrikovanu sumu kvadrata reziduala, RSS_R, kao $RSS_R = \sum_{t=1}^{T} \hat{\epsilon}_{1t}^2$, gde je $\hat{\epsilon}_{1t} = r_{1t} - \hat{\phi}_{01} - \hat{\Phi}_{11} r_{1,t-1}$, a $\hat{\phi}_{01}$ i $\hat{\Phi}_{11}$ ocenjeni koeficijenti u jednačini (2.29);

[23]U svim slučajevima razmatramo zajednički, a ne individualni uticaj koeficijenata

2. ocenimo koeficijente u modelu

$$r_{1t} = \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + e_{1t} \tag{2.30}$$

i izračunamo nerestrikovanu sumu kvadrata reziduala, RSS_U, kao $RSS_U = \sum_{t=1}^{T} \hat{e}_{1t}^2$, gde je $\hat{e}_{1t} = r_{1t} - \hat{\phi}_{01} - \hat{\Phi}_{11} r_{1,t-1} \hat{\Phi}_{12} r_{2,t-1}$, a $\hat{\phi}_{01}$, $\hat{\Phi}_{11}$ i $\hat{\Phi}_{12}$ ocenjeni koeficijenti u jednačini (2.30);

3. postavimo nultu i alternativnu hipotezu kao

$$\begin{aligned} H_0 &: \Phi_{12} = 0 \quad (r_{2t} \text{ ne uzrokuje } r_{1t}) \\ H_1 &: \Phi_{12} \neq 0 \quad (r_{2t} \text{ uzrokuje } r_{1t}) \end{aligned}$$

4. izračunamo vrednost F statistike kao

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/m}{RSS_U/(T-k-1)},$$

koja prati Fišerovu $F_{m,T-k}$ raspodelu sa k stepeni slobode, a gde je m broj koeficijenata koji se uključuju u model (u našem slučaju bi bilo $m = 1$, jer smo uključili samo prethodnu vrednost serije r_{2t}), T veličina uzorka, a $k + 1$ ukupan broj koeficijenata u novom modelu (u našem slučaju bi bilo $k + 1 = 3$, zbog broja koeficijenata u jednačini (2.30));

5. ako je izračunata vrednost F statistike veća od kritične vrednosti, odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da r_{2t} uzrokuje r_{1t} (i obrnuto).

Ovde smo pokazali način testiranja Grendžerove kauzalnosti kada imamo $VAR(1)$ model. Za testiranje Grendžerove kauzalnosti na višim redovima VAR modela procedura je analogna. Treba samo voditi računa o broju koeficijenata u jednačini.

Bitno je napomenuti i da mnogi programi koriste vrednost χ^2 raspodele, jer važi jednakost $F_{m,T-k} = k\chi_k^2,$.

2.6.4 Koeficijent determinacije (R^2)

Da bismo znali koliko su podaci, koje određuje naš model, blizu stvarnim vrednostima potreban nam je koeficijent determinacije, odnosno R^2. On se određuje ponaosob za svaku jednačinu u modelu. Stvarna vrednost se od predviđene vrednosti (dobijene iz modela) razlikuje za vrednost reziduala, odnosno

$$r_t = \hat{r}_t + \hat{e}_t,$$

gde je r_t prava vrednost (ona koju smo izmerili), $\hat{r}_t$ je vrednost koju smo dobili pomoću modela, a $\hat{e}_t$ vrednost za koju se prava i predviđena vrednost razlikuju. Kada oduzmemo aritmetičku sredinu uzorka, $\bar{r}$, sa obe strane gornje jednakosti dobijamo

$$r_t - \bar{r} = \hat{r}_t - \bar{r} + \hat{e}_t.$$

Kako bismo dobili potpunu meru varijacije u svakom trenutku t i kako ne bismo imali problema sa negativnim vrednostima u sumi, uvodimo jednakost u sledećem obliku

$$\sum_{t=1}^{T} (r_t - \bar{r})^2 = \sum_{t=1}^{T} (\hat{r}_t - \bar{r})^2 + \sum_{t=1}^{T} \hat{e}_t^2, \tag{2.31}$$

gde se izraz levo od znaka jednakosti naziva ukupna varijacija ili totalna suma kvadrata (TSS), a izrazi desno od znaka jednakosti suma kvadrata greške regresije (ESS) i suma kvadrata reziduala (RSS). To dalje daje izraz $TSS = ESS + RSS$. Koeficijent determinacije, R^2, se dobija kao

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

i pokazuje u kojoj meri je totalna varijacija u uzorku objašnjiva modelom. Odnosno, u kojoj meri model objašnjava stvarno stanje. Vrednost koeficijenta determinacije se kreće između nule i jedinice, pa se vodimo time da što je koeficijent determinacije bliži jedinici, model je bolji.

Međutim, postoje neki problemi vezani za vrednosti R^2 i zaključke koji se na osnovu toga donose. Ukoliko je koeficijet determinacije veliki (veći od 0,9), možemo zaključiti da je model dobar, a zapravo imamo potpuno nepovezane promenljive. Ovo se dešava u slučajevima „lažne" regresije, koja se može javiti kada su promenljive, recimo, nestacionarne. Takođe, ukoliko je koeficijent determinacije suviše mali, to ne mora nužno da znači da je model loš. U tom slučaju, možda je problem odabrani period za koji je formiran model ili je uključeno premalo promenljivih.

Problem sa koeficijentom determinacije je taj što se on povećava sa dodavanjem novih varijabli u modelu. Ukoliko želimo da uključimo određene prethodne vrednosti promenljivih u model i da uporedimo stari model sa novim modelom, treba da koristimo prilagođeni koeficijent determinacije, koji se dobija kao

$$Adj.R^2 = 1 - \frac{RSS/(T-k-1)}{TSS/(T-1)},$$

gde je T veličina uzorka, a $k+1$ broj promenljivih u novom modelu. Za razliku od običnog koeficijenta determinacije, prilagođeni koeficijent deteminacije ne mora da bude veći od nule. Važi isto rezonovanje kao i za običan koeficijent determinacije - što je prilagođeni koeficijent veći, to je model bolji.

2.7 Kointegracija

Neke vremenske serije se slično ponašaju, u smislu da su skokovi jednih serija praćeni skokovima drugih ili njihovim padovima, te da je svaka velika promena jednih praćena promenama drugih. Jedan način da se ovo formalizuje je uvođenje pojma kointegracije, odnosno posmatranje stacionarne linearne kombinacije nestacionarnih vremenskih serija.

Postojanje kointegracije može biti od pomoći pri donošenju odluka o strategiji investiranja. Jačanje međuzavisnosti među tržištima stvara problem investitoru, koji pokušava da umanji sopstveni rizik. Kako bi redukovao rizik i povećao prinos, investitor investira u inostrana tržišta. Ova tehnika se naziva međunarodna diverzifikacija portfolija. Suština tehnike je da ukoliko dođe do gubitaka na jednom tržištu, investitor može da kompenzuje te gubitke dobicima na drugom (inostranom) tržištu. Ukoliko kointegracijska analiza pokaže da tržišta prate različite obrasce, investitori mogu da profitiraju od međunarodne diverzifikacije. Ukoliko uočimo kointegraciju na tržištima, ona će ukazivati da zajednički trend uslovljava tržišta da se kreću istovetno. Tada će bilo koje tržište biti predstavnik svih ostalih tržišta, koja prate njegov trend. Problem leži u tome da će dobiti od međunarodne diverzifikacije izostati ili će se umanjiti. Gubici na jednom tržištu znače gubitke na drugim tržištima, ako ta tržišta prate isti trend tokom vremena. Ako se cene dveju akcija kreću u zajedničkom trendu (kointegrisane su), to ne znači, nužno, da se one kreću u istom pravcu svaki dan. Ideja je u tome da se razlika u cenama „vraća" ka svojoj srednjoj vrednosti, na duži rok. Predstavimo to primerom sa dve akcije A i B, čije cene su dugoročno kointegrisane. Kada cena akcije A raste u odnosu na cenu akcije B, strategija koja se koristi je kratka prodaja akcije A i kupovina akcije B. Ovo je tipičan primer arbitražne zarade, zasnovan na kointegrisanim cenama akcija. Kada investitori krenu da iskorišćavaju ovu šansu za zaradu, to će spustiti cenu akcije A i vratiti odnos akcija u prvobitno stanje. Kada se razlika u cenama akcija vrati ka svojoj ekvilibrijumskoj vrednosti, ova strategija rezultiraće dobitkom. Svaki put kada se pojavi razlika u cenama, javlja se mogućnost za arbitražnu zaradu i investitori mogu da predvide kako će se cene kretati na dugi rok.

Uzimajući u obzir iznesene diskusije o arbitraži i strategijama investiranja, postojanje kointegracije među tržištima i akcijama može biti korisno za investitora zbog mogućnosti ostvarivanja arbitražne zarade. Sa druge strane, bez kointegracije među tržištima postoji mogućnost međunarodne diverzifikacije portfolija i mogućnost za zaštitu od rizika.

Rezultati testova kointegracije zavise od izbora tržišta, odabranog perioda za koji se posmatra uzorak, učestalosti podataka (dnevni, nedeljni, mesečni, kvartalni ili godišnji podaci) i odabira modela.

Definicija 2.16 *Neka je $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \ldots, r_{kt})'$ višedimenziona vremenska serija, čije su komponente vremenske serije koje poseduju d jediničnih korena. Ako postoji vektor $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, tako da je*

$$\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{r}_t = \beta_1 r_{1t} + \ldots + \beta_k r_{kt} \tag{2.32}$$

vremenska serija koja poseduje $d-b$ jediničnih korena, $d \geq b > 0$, za $\boldsymbol{r}_t$ kažemo da je kointegrisana vremenska serija reda (d, b) i tu klasu vremenskih serija označavamo sa $CI(d, b)$.

Ukoliko nije naznačeno drugačije, kointegrisanim nazivamo vremenske serije iz klase $CI(1, 1)$. Ukoliko je $\boldsymbol{r}_t$ k-dimenziona kointegrisana serija, može postojati n linearno nezavisnih vektora kointegracije, gde je $0 < n < k$.

Definicija 2.17 *Višedimenziona vremenska serija $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \ldots, r_{kt})'$ je kointegrisana ako postoji bar jedan vektor $\boldsymbol{\beta}_i$ različit od nula vektora, takav da je $\boldsymbol{\beta}_i'\boldsymbol{r}_t$ trend stacionarna vremenska serija. $\boldsymbol{\beta}_i$ se naziva vektorom kointegracije. Ako postoji n linearno nezavisnih vektora kointegracije $\boldsymbol{\beta}_i$, $i = 1, \ldots, n$, kažemo da je $\boldsymbol{r}_t$ kointegrisana vremenska serija ranga n, gde je $0 < n < k$. Matrica $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1, \ldots, \boldsymbol{\beta}_n)$ naziva se kointegracionom matricom.*

Koncept kointegracije je prvi uveo Grendžer, a zatim je taj koncept proširen u radovima [16, 17, 19].

2.8 Vektorski model korekcije ravnotežne greške ($VECM$)

Ova vrsta modela se koristi kada se utvrdi da postoji jedna ili više kointegracijskih veza vremenskih serija. Postojanje kointegracijskih jednačina daje nam mogućnost analize dugoročne ravnoteže serija, a za tu vrstu analize potrebno je upotpuniti VAR modele dugoročnim komponentama iliti ravnotežnim greškama (rezidualima kointegracijskih jednačina). Iz tog razloga je definisan opštiji oblik VAR modela, takozvani vektorski model korekcije ravnotežne greške - $VECM$.

Neka k-dimenziona vremenska serija $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, \ldots, r_{kt})$ prati $VAR(p)$ model

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Phi}_1 \boldsymbol{r}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_p \boldsymbol{r}_{t-p} + \boldsymbol{e}_t, \tag{2.33}$$

gde je $\boldsymbol{e}_t$ vektor nekorelisanih belih šumova. Vektorski model korekcije greške ($VECM$) za proces $VAR(p)$ serije $\boldsymbol{r}_t$ dat je sa

$$\Delta\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{r}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_1^*\Delta\boldsymbol{r}_{t-1} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_{p-1}^*\Delta\boldsymbol{r}_{t-p+1} + \boldsymbol{e}_t, \tag{2.34}$$

gde je $\boldsymbol{\Phi}_j^* = -\sum_{i=j+1}^{p} \boldsymbol{\Phi}_i$, $j = 1, \ldots, p-1$, a $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\Phi}_p + \boldsymbol{\Phi}_{p-1} + \ldots + \boldsymbol{\Phi}_1 - \boldsymbol{I} = -\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{1})$. Koeficijenti u matrici $\boldsymbol{\alpha}$ nazivaju se *koeficijentima prilagođavanja*, jer predstavljaju „reakciju" serije na odstupanje od ravnotežnog stanja, pri čemu je „dugoročno ravnotežno stanje" opisano sistemom jednačina $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{r}_{t-1}$.

Kako vektori $\Delta \boldsymbol{r}_{t-i}$, $i = 0, \ldots, p-1$ i vektor $\boldsymbol{e}_t$ sadrže stacionarne, $I(0)$, vremenske serije, da bi sistem dat jednačinom (2.34) bio dobro definisan, $\boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{r}_{t-1}$ mora biti stacionarna serija.

Član $\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{r}_{t-1}$ naziva se *član korekcije greške* i on igra ključnu ulogu u izučavanju kointegracije. U zavisnosti od ranga matrice $\boldsymbol{\Pi}$, imamo tri moguća slučaja na osnovu kojih odlučujemo o načinu formiranja vektorskih modela:

1. $rank(\boldsymbol{\Pi}) = 0$ implicira da je $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{0}$ i da serije u vektoru $\boldsymbol{r}_t$ nisu kointegrisane; u tom slučaju koristimo $VAR(p-1)$ model na diferenciranim serijama;

2. $rank(\boldsymbol{\Pi}) = k$ implicira da su svi karakteristični koreni matrice $\boldsymbol{\Phi}(1)$ različiti od nule i sve serije u vektoru $\boldsymbol{r}_t$ su stacionarne; u ovom slučaju nemamo problem sa formiranjem modela i tada koristimo $VAR(p)$ model na originalnim serijama, bez člana korekcije greške;

3. $0 < rank(\boldsymbol{\Pi}) = n < k$ implicira da se $\boldsymbol{\Pi}$ može zapisati kao $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$, gde su $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ matrice dimenzija $k \times n$ sa $rank(\boldsymbol{\alpha}) = rank(\boldsymbol{\beta}) = n$; u ovom slučaju postoji n linearnih kombinacija promenljivih iz vektora $\boldsymbol{r}_t$, takvih da su to stacionarne vremenske serije i koristi se $VECM$ model, kao u jednačini (2.34).

2.8.1 Johansenov test kointegracije

Johansen [17] je 1988. godine razvio metodologiju za testiranje vrednosti ranga matrice $\boldsymbol{\Pi}$ i ocenjivanje vrednosti u matricama $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$, kroz proceduru zvanu još i regresija redukovanog ranga. Sledi opis procedure testiranja Johansenove kointegracije.

Da bismo testirali postojanje kointegracijske veze, treba da znamo broj koraka koje uključujemo u model, kao i koji vid modela koristimo. Broj koraka određujemo preko AIC kriterijuma, a pri sprovođenje Johansenovog testa, taj broj koraka smanjimo za jedan, jer test sprovodimo na diferenciranim serijama (ovo zaključujemo znajući da su nam serije klase $I(1)$). Modeli koje možemo koristiti zavise od toga da li uključujemo odsečak (konstantu) i/ili trend u kointegracijsku jednačinu i/ili u VAR model. Na osnovu toga, modeli su:

1. Model 1 - nema odsečka ili trenda u kointegracijskoj jednačini (KJ) ili VAR modelu. U tom slučaju, nema determinističkih komponenti u podacima ili u KJ. Ovo se retko dešava u praksi.

2. Model 2 - odsečak (bez trenda) u KJ, ali nema ni konstante ni trenda u VAR modelu. Ovo je slučaj kada nemamo linearni trend u podacima, te diferencirane serije imaju očekivanje nula.

3. Model 3 - odsečak u KJ i VAR modelu, ali bez trenda u oba slučaja.

4. Model 4 - odsečak u KJ i VAR modelu, linearni trend u KJ, ali bez trenda u VAR modelu.

5. Model 5 - odsečak i kvadratni trend u KJ, a odsečak i linearni trend u VAR modelu. Ovaj model je teško interpretirati sa ekonomskog stanovišta, zbog činjenice da su promenljive na logaritamskom nivou. Kao i Model 1, ovaj model je retko primenjivan u praksi.

Problem se dalje svodi na to koji model odabrati. Zbog nepraktičnosti modela jedan i pet, biraćemo između modela dva, tri i četiri. U radu [17] se sugeriše koriščenje Pantula principa, koji se sastoji u ocenjivanju sva tri modela (dva, tri i četiri) i odabiru onog kod kojeg prvi put ne možemo da odbacimo nultu hipotezu da nema kointegracije. Ovaj princip ćemo detaljnije razmatrati u poglavlju vezanom za istraživanje.

Ostaje još da objasnimo test statistiku koja se koristi kao kriterijum u testiranju kointegracije. Kriterijum koji ćemo razmatrati naziva se *statistika traga*. Postoji i statistika maksimalnog karakterističnog korena, ali je mi nećemo koristiti. Statistika traga se bazira na izračunavanju traga matrice $\mathbf{\Pi}$. Nulta hipoteza je data sa: H_0 : ne postoji više od n kointegracijskih jednačina. Veza između traga matrice i karakterističnih korena je u tome što je trag matrice zapravo suma njenih karakterističnih korena. Kako mi radimo sa logaritmovanim vrednostima, a važi da je $\ln(1-x) \sim x$, tada se test statistika dobija kao

$$\lambda(n) = -T \sum_{i=n+1}^{k} \ln(1 - \hat{\lambda}_i),$$

gde je $\hat{\lambda}_i$ ocenjeni karakteristični koren matrice $\mathbf{\Pi}$. Vodimo računa i o tome da su karakteristični koreni poređani u opadajućem redosledu, odnosno $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \ldots > \hat{\lambda}_k$. Kritične vrednosti su određene u radu [20] i te vrednosti su ugrađene u programe, koji podržavaju ovu metodu testiranja kointegracije.

2.9 Funkcija impulsivnog odziva (IRF)

U opštem slučaju, Grendžerova kauzalnost ne može da nam ukaže na sve vidove uticaja između promenljivih u sistemu. U praksi je zanimljivo znati kakav odziv ima jedna promenljiva na šok iz druge promenljive u sistemu, pri čemu u sistemu imamo i vrednosti nekih drugih promenljivih, pored dve posmatrane. Odnosno, zanima nas impulsivni odziv između svake dve promenljive u višedimenzionalnom sistemu.

Model $VAR(p)$ možemo zapisati kao linearnu funkciju prethodnih šokova

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{e}_t + \boldsymbol{\Psi}_1 \boldsymbol{e}_{t-1} + \boldsymbol{\Psi}_2 \boldsymbol{e}_{t-2} + \ldots, \tag{2.35}$$

gde je $\boldsymbol{\mu}$ definisano kao u (2.25), a koeficijenti matrica $\boldsymbol{\Psi}_i$ se dobijaju rešavanjem izraza

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \ldots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p)(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\Psi}_1 B + \boldsymbol{\Psi}_2 B^2 + \ldots) = \boldsymbol{I},$$

gde je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica. Ovo je predstavljanje vektora serija $\boldsymbol{r}_t$ preko takozvanih „pokretnih proseka" (engl. *moving average*) i pomoću takvog načina predstavljanja možemo, na neki način, meriti stabilnost serija. Koeficijenti matrice $\boldsymbol{\Psi}_i$ predstavljaju uticaj šokova iz vektora $\boldsymbol{e}_{t-i}$ na vrednosti u vektoru $\boldsymbol{r}_t$. Takođe, može se smatrati da su koeficijenti iz matrice $\boldsymbol{\Psi}_i$ uticaj šokova iz vektora $\boldsymbol{e}_t$ na vektor $\boldsymbol{r}_{t+i}$. Matrica $\boldsymbol{\Psi}_i$ se zato naziva i *funkcija impulsivnog odziva*.

Funkcija impulsivnog odziva (IRF) meri dinamiku marginalnog efekta svakog šoka na sve promenljive tokom vremena. Ukoliko pretpostavimo da imamo n promenljivih u sistemu, tada imamo i n strukturalnih šokova. Tada je funkcija impulsivnog odziva (IRF) matrica od nxn dinamičkih marginalnih efekata koje je izazvao šok promenljive na nju samu ili na drugu promenljivu.

Treba primetiti i to da ne postoji ograničenje koliko daleko u budućnost možemo ići kada su u pitanju odzivi impulsa. Ukoliko je VAR model stabilan, IRF treba da konvergira ka nuli što se više pomeramo od sadašnjeg trenutka. Nekonvergentan IRF i nestabilan VAR model su indikatori da su promenljive u modelu nestacionarne. IRF ćemo predstaviti tabelarno, te će svaka od n^2 vrednosti predstavljati uticaj šoka jedne promenljive na drugu (ili istu tu) promenljivu. Ukoliko odzivi impulsa veoma sporo teže ka nuli, tada šokovi teže ka čestim promenama svojih vrednosti i uticaja tokom vremena. Sa druge strane, kratak odgovor impulsa, odnosno brza konvergencija ka nuli je znak da šokovi imaju prolazan i neznačajan uticaj.

2.10 LM test autokorelacije među rezidualima

Breusch i Godfrey [21, 22] su 1978. godine osmislili LM test, koji se zasniva na principu Lagranžovih množitelja i testira postojanje autokorelacije višeg reda među rezidualima [23].

Posmatrajmo regresijsku jednačinu[24]

$$r_{1t} = \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + e_{1t}, \quad t = 1, 2, \ldots, T \tag{2.36}$$

i

$$e_{1t} = \sum_{s=1}^{h} \rho_s e_{1,t-s} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\epsilon^2). \tag{2.37}$$

Nulta hipoteza je $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_h = 0$, protiv alternativna $H_1 : \rho_r \neq 0$, za neko r. Odnosno, nulta hipoteza je pretpostavka da nema autokorelacije među rezidualima. Odsustvo autokorelacije među rezidualima nam daje mogućnost dobijanja nepristrasnih i efikasnih ocena metodom najmanjih kvadrata[25], dok nam prisustvo autokorelacije narušava efikasnost ocene i time utiče na odluke o statističkoj značajnosti koeficijenata.

Da bismo testirali hipotezu, prvo treba da ocenimo reziduale i dobijemo seriju $\{\hat{e}_{1t}\}$, a zatim da ocenimo model

$$\hat{e}_{1t} = \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + \sum_{s=1}^{h} \rho_s \hat{e}_{1,t-s} + \eta_t. \tag{2.38}$$

Pri testiranju hipoteze koristi se χ^2 test sa h stepeni slobode. Ukoliko je registrovana p vrednost veća od 0,05, prihvatamo nultu hipotezu i konstatujemo da za red h nema autokorelacije među rezidualima. Za red h se, obično, uzima vrednost kao i za red modela (u našem slučaju, h bi moglo da bude jednako jedinici).

2.11 *BP* test heteroskedastičnosti među rezidualima

Heteroskedastičnost predstavlja situaciju kada se varijanse slučajnih grešaka u modelu razlikuju u pojedinim opservacijama. Suprotan pojam je homoskedastičnost, odnosno situacija kada je varijansa slučajnih grešaka konstantna za sve opservacije. Ukoliko imamo homoskedastičnost u seriji rezuduala, imaćemo nepristrasne i efikasne ocene. Ukoliko je narušena pretpostavka o postojanju homoskedastičnosti, to za posledicu ima neadekvatne intervale poverenja, te možemo doći u situaciju da prihvatamo kao statistički značajne i parametre koji to zapravo nisu.

U radu sa Pagan-om, Breusch je razvio jedan od najkorišćenijih testova za ispitivanje heteroskedastičnosti među rezidualima [24]. Breusch-Pagan (BP) test se zasniva na regresiji koja se pokreće nad kvadratima reziduala i svim nezavisnim promenljivama u originalnoj jednačini.

Posmatrajmo ponovo jednačinu (2.36). Kada ocenimo koeficijente te jednačine i dobijemo predviđene vrednosti, tada dobijamo i seriju reziduala $\{\hat{e}_{1t}\}$. Tada se BP test bazira na ocenjivanju koeficijenata jednačine

$$\hat{e}_{1t} = \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + \eta_t. \tag{2.39}$$

Kada ocenimo koeficijente jednačine (2.39), odnosno dobijemo model, tada računamo vrednost χ^2 statistike sa dva stepena slobode, na sledeći način

$$\chi^2(2) = T R^2_{\hat{e}_{1t}},$$

gde je $R^2_{\hat{e}_{1t}}$ koeficijent determinacije za ocenjeni model dat jednačinom (2.39), a T broj merenja, odnosno veličina uzorka. Nulta hipoteza je data sa $H_0 : \phi_{01} = \Phi_{11} = \Phi_{12} = 0$, odnosno nulta hipoteza je da imamo homoskedastičnost u seriji reziduala. Ukoliko je registrovana p vrednost za test statistiku veća od 0,05, prihvatićemo nultu hipotezu.

[24] Analogno razmatranje vrši se za svaku jednačinu u modelu.

[25] Ocena je nepristrasna ako je očekivana vrednost ocene jednaka pravoj vrednosti. Ocena je najefikasnija ako je nepristrasna i ima najmanju disperziju među svim ostalim nepristrasnim ocenama istog parametra.

2.12 Robusne standardne greške

Posmatrajmo jednačinu (2.21) iz $VAR(1)$ modela na sledeći način

$$\begin{aligned} r_{11} &= \phi_{01} + e_{11} \\ r_{12} &= \phi_{01} + \Phi_{11} r_{11} + \Phi_{12} r_{21} + e_{12} \\ r_{13} &= \phi_{01} + \Phi_{11} r_{12} + \Phi_{12} r_{22} + e_{13} \\ &\vdots \\ r_{1T} &= \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,T-1} + \Phi_{12} r_{2,T-1} + e_{1T}. \end{aligned}$$

Neka je

$$\boldsymbol{r}_{1t} = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \\ \vdots \\ r_{1T} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & r_{11} & r_{21} \\ 1 & r_{12} & r_{22} \\ 1 & r_{13} & r_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & r_{1,T-1} & r_{2,T-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_{1,r_1} = \begin{bmatrix} \phi_{01} \\ \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{e}_{1t} = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ \vdots \\ e_{1T} \end{bmatrix}.$$

Zbog uticaja heteroskedastičnosti u modelu, ocene koeficijenata u modelu dobijene metodom najmanjih kvadrata nisu efikasne, tj. nemaju najmanju disperziju među svim ostalim nepristrasnim ocenama istog parametra. Ukoliko pretpostavimo da reziduali nisu serijski korelisani, ali da imamo heteroskedastičnost u modelu, ocenjena vrednost vektora $\boldsymbol{\phi}_{1,r_1}$ dobijena metodom najmanjih kvadrata je

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,r_1} = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{r}_{1t}).$$

Varijansa ocenjene vrednosti $\boldsymbol{\phi}_{1,r_1}$ se može predstaviti kao

$$D(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,r_1}) = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}, \tag{2.40}$$

gde je $\boldsymbol{\Sigma} = diag(\sigma^2_{e_{11}}, \ldots, \sigma^2_{e_{1T}})$, $\sigma^2_{e_{1i}} = D(e_{1i})$, $i = 1, 2, \ldots, T$.

Jedan od načina ocenjivanja standardnih grešaka pod uticajem heteroskedastičnosti osmislio je White [25] i u sledećem je obliku

$$D(\hat{\boldsymbol{\phi}}_{1,r_1})_W = (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})^{-1}, \tag{2.41}$$

gde je $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = diag(\hat{e}^2_{11}, \ldots, \hat{e}^2_{1T})$, a $\{\hat{e}^2_{11}, \ldots, \hat{e}^2_{1T}\}$ niz kvadrata reziduala.

Standardne greške dobijene na ovaj način nazivaju se još i robusne standardne greške.

2.13 Predikcije

Posmatrajmo model

$$r_{1t} = \phi_{01} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + e_{1t} \tag{2.42}$$

$$r_{2t} = \phi_{02} + \Phi_{21} r_{1,t-1} + \Phi_{22} r_{2,t-1} + e_{2t}. \tag{2.43}$$

Jednokoračna predikcija (odnosno predviđena vrednost za trenutak $t+1$), se određuje modelom

$$\begin{aligned} r_{1t}(1) &= E(r_{1,t+1}|\mathcal{F}_t) = E(\phi_{01} + \Phi_{11} r_{1t} + \Phi_{12} r_{2t} + e_{1,t+1}|\mathcal{F}_t) \\ r_{2t}(1) &= E(r_{2,t+1}|\mathcal{F}_t) = E(\phi_{02} + \Phi_{21} r_{1t} + \Phi_{22} r_{2t} + e_{2,t+1}|\mathcal{F}_t), \end{aligned}$$

gde je $\mathcal{F}_t$ poznata istorija do trenutka t. Znajući osobine uslovnog očekivanja i da je $E(e_{i,t+1}|\mathcal{F}_t) = E(e_{i,t+1}) = 0$, za $i = 1, 2$, dobijamo

$$\begin{aligned} \hat{r}_{1t}(1) &= \hat{\phi}_{01} + \hat{\Phi}_{11} r_{1t} + \hat{\Phi}_{12} r_{2t} \\ \hat{r}_{2t}(1) &= \hat{\phi}_{02} + \hat{\Phi}_{21} r_{1t} + \hat{\Phi}_{22} r_{2t}, \end{aligned}$$

gde su $\hat{\phi}_{0i}$ i $\hat{\Phi}_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ ocenjeni koeficijenti u modelu.

Dinamičko određivanje predikcija se zasniva na određivanju predikcija za periode nakon prvog perioda u uzorku, tako što se koriste prethodne predviđene vrednosti. Statičko previđanje se zasniva na određivanju predikcija za periode nakon prvog perioda u uzorku, tako što se koriste prethodne stvarne vrednosti.

U slučaju jednokoračnih predikcija, r_{1t} i r_{2t} su realizovane vrednosti, a statičke i dinamičke vrednosti predikcija se poklapaju.

Analogan postupak se sprovodi i za određivanje višekoračnih predviđenih vrednosti.

Predikcija koraka h dobijena dinamičkom metodom, određuje se modelom

$$\begin{aligned} \hat{r}_{1t,d}(h) &= \hat{\phi}_{01} + \hat{\Phi}_{11} \hat{r}_{1t}(h-1) + \hat{\Phi}_{12} \hat{r}_{2t}(h-1) \\ \hat{r}_{2t,d}(h) &= \hat{\phi}_{02} + \hat{\Phi}_{21} \hat{r}_{1t}(h-1) + \hat{\Phi}_{22} \hat{r}_{2t}(h-1). \end{aligned}$$

Predikcija koraka h dobijena statičkom metodom, određuje se modelom

$$\begin{aligned} \hat{r}_{1t,s}(h) &= \hat{\phi}_{01} + \hat{\Phi}_{11} r_{1,t+h-1} + \hat{\Phi}_{12} r_{2,t+h-1} \\ \hat{r}_{2t,s}(h) &= \hat{\phi}_{02} + \hat{\Phi}_{21} r_{1,t+h-1} + \hat{\Phi}_{22} r_{2,t+h-1}. \end{aligned}$$

Greške predviđanja se dobijaju kao razlika između stvarne i predviđene vrednosti i zavisiće od toga kojom metodom su dobijene predviđene vrednosti, odnosno

$$\hat{e}_{it,d}(h) = r_{i,t+h} - \hat{r}_{it,d}(h), \qquad \hat{e}_{it,s}(h) = r_{i,t+h} - \hat{r}_{it,s}(h), \qquad i = 1, 2 \quad h \in \mathbb{N}.$$

Statičko predviđanja ćemo koristiti uvek kada imamo poznate vrednosti za period za koji predviđamo. Dinamički metod ćemo koristiti da predviđamo vrednosti za period za koji su nam nepoznate vrednosti (recimo, za predviđanje vrednosti koje se mogu desiti krajem godine, a uzimajući u obzir da je tek prošla polovina tekuće godine).

U ovom delu smo izložili predviđanje za najprostiji model, tj. $VAR(1)$. No, obrazlaganje se analogno uopštava i na modele višeg reda.

2.13.1 Osobine grešaka predviđanja

Koliko je model dobar zavisi i od toga kakve su nam greške predviđanja. Generalno, model je bolji što su greške predviđanja bliže nuli. Međutim, mi ćemo prediktivnu moć modela ispitivati putem određenih uzoračkih vrednosti.

Neka je $\{\hat{e}_{1t}(1), \ldots, \hat{e}_{1t}(h)\}$ niz grešaka predviđanja dobijen za model (2.21).

Standardna devijacija grešaka predviđanja (RMSE) je kvadratni koren iz prosečne sume kvadrata odstupanja, tj.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{s=1}^{h} \hat{e}_{1t}^2(s)}.$$

Prosečna, apsolutna greška (MAE) predstavlja prosečnu sumu apsolutnih odstupanja, tj.

$$MAE = \frac{1}{h}\sum_{s=1}^{h} |\hat{e}_{1t}(s)|.$$

Prosečna, apsolutna, procentualna greška $(MAPE)$ predstavlja prosečno, apsolutno, procentualno odstupanje, tj.

$$MAPE = \frac{100}{h}\sum_{s=1}^{h} \frac{|\hat{e}_{1t}(s)|}{|r_{1,t+s}|}.$$

Za ovu vrednost ne postoji gornje ograničenje (odnosno može imati vrednosti veće od 1), a nama odgovara što manja vrednost.

Tejlov koeficijent nejednakosti (U) je dat sa

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{h}\sum_{s=1}^{h} \hat{e}_{1t}^2(s)}}{\sqrt{\frac{1}{h}\sum_{s=1}^{h} r_{1,t+s}^2} + \sqrt{\frac{1}{h}\sum_{s=1}^{h} \hat{r}_{1t}^2(s)}}.$$

Vrednost ovog koeficijenta je, uvek, između nule (model je dobar) i jedinice (model nije dobar). Ovaj koeficijent se može razložiti na tri vrednosti: meru pristrasnosti (BM), meru kovarijanse (CM) i meru disperzije (varijanse) (VM).

BM nam daje nagoveštaj o sistemskoj grešci (grešci koja dolazi iz modela). Kakva god da je U vrednost, bitno nam je da je BM vrednost blizu nule.

CM meri nesistemsku grešku (grešku koja se ne može kontrolisati). Ako je model dobar, ova vrednost treba da ima najveći udeo u koeficijentu U.

VM je pokazatelj u kojoj meri je varijansa u predikcijama „sposobna da oponaša" stvarnu varijansu. Ukoliko je ova vrednost velika, to nam ukazuje da postoje velike fluktuacije u stvarnim vrednostima, ali da prediktvne vrednosti ne dostižu te fluktuacije.

2.14 $CUSUM_t$ test stabilnosti modela

Stabilnost modela je svojstvo modela da samostalno održava ili uspostavlja ravnotežno stanje nakon prestanka delovanja uzroka koji je ravnotežu poremetio. Za naše model to znači da uticaji šokova moraju opadati tokom vremena, odnosno vrednosti grešaka predviđanja moraju oscilirati oko nule.

Kada ocenimo model, možemo da formiramo jednokoračne predikcije i njihove greške. Neka je $\hat{e}_{1t,s}(1)$ statička jednokoračna greška predviđanja, dobijena kao razlika stvarne vrednosti $r_{1,t+1}$ i naše uslovno predviđene vrednosti, odnosno $\hat{r}_{1t,s}(1)$. Ukoliko naš model dobro predviđa stvarne vrednosti, predikcije će biti nepristrasne, tako da će suma grešaka predviđanja biti blizu nule. Brown, Durbin and Evans [26] su 1975. godine izložili tezu o kumulativnoj sumi $(CUSUM)$ grešaka predviđanja i njenoj statističkoj značajnosti. Definisali su $CUSUM_t$ vrednost, kao

$$CUSUM_t = \sum_{i=k+1}^{t} \frac{\hat{e}_{1i,s}(1)}{\hat{\sigma}_e}, \quad t = k+1, \ldots, T, \tag{2.44}$$

gde je k trenutak kada prvi put napravimo vrednost predikcije i njene greške, T je veličina uzorka, a $\hat{\sigma}_e$ ocenjena standardna devijacija grešaka predviđanja. Kako je ovo kumulativna suma, treba iscrtati njene vrednosti u zavisnosti od trenutka t, da bismo uvideli šta se dešava sa rezidualima. Takođe, iscrtavaju se i granice značajnosti i to tako što se granica za nivo značajnosti od 5%, dobija kada se povežu tačke $(k, \pm - 0,948\sqrt{T-k})$ i $(T, \pm 3 \times 0,948\sqrt{T-k})$. Ukoliko se $CUSUM_t$ kreće izvan granica značajnosti, to nam sugeriše da je model nestabilan. Pri proveri stabilnosti koristićemo period za koji smo formirali model.

3 Istraživanje

U ovom poglavlju ćemo koristiti podatke sa određenih evropskih berzi i na njima ćemo vršiti ekonometrijsku analizu. Fokusiraćemo se na pet evropskih tržišta i to sledećih zemalja: Austrija, Francuska, Nemačka, Španija i Portugal. Koristićemo podatke na dnevnom nivou i ti podaci su preuzeti sa sajta Yahoo Finance[26]. Sve vrednosti su izražene u evrima. Vremenski period za koji ćemo sprovoditi istraživanje obuhvata razdoblje od 4. januara 2010. do 30. decembra 2015, s tim da ćemo taj period podeliti na dva potperioda i to na period od 4. januara 2010. do 30. decembra 2013. i na period od 2. januara 2014. do 30. decembra 2015. Razlog za ovakvu podelu je taj što ćemo prvi potperiod koristiti za pravljenje modela i predikcija, a drugi ćemo koristiti za ispitivanje rezultata predikcija. Ukupan broj podataka iznosi 1497 vrednosti za svako tržište, s tim što prvi potperiod ima 995 vrednosti, a drugi 502 vrednosti. Napomenimo i da je uzeto u obzir poklapanje radnih dana. Odnosno, za uzeti datum su sva tržišta imala radni dan. Podaci se odnose na vrednosti berzanskih indeksa i te vrednosti ne obuhvataju isplaćivanje dividendi.

Kako je kointegracija koncept koji se odnosi na ekvilibrijumske, iliti dugoročne veze, uzimanje većeg uzorka doprinosi kredibilnijim istraživačkim zaključcima. Uzimanjem dnevnih podataka bolje ćemo sagledati situacije na tržištu i prediktivne vrednosti. Ipak, većina stručnih radova koristi mesečne podatke iz razloga što se ti radovi baziraju samo na određivanju kointegracijske i kauzalne veze.

Uzimanjem podataka za period od početka 2010. do kraja 2015. godine, obezbedili smo najskorije vrednosti, ali i izbegli problem koje je izazvala Velika ekonomska kriza. No, naš glavni deo istraživanje baviće se navedenim periodom, ali ćemo se osvrnuti i na period od 2. januara 2004. do 30. decembra 2009. godine, kako bismo videli uticaj Velike ekonomske krize na međusobnu saradnju tržišta.

U ovom poglavlju ćemo ispitati statističke osobine odabranih indeksa i grafički prikazati logaritamske vrednosti i logaritamske prinose indeksa. Kako bismo mogli pristupiti formiranju modela, ispitaćemo stacionarnost serija. Zatim ćemo formirati VAR model na stacionarnim serijama, odrediti optimalan broj prethodnih vrednosti koje treba uključiti u model i testirati kointegraciju. Na ocenjenom VAR modelu ćemo, zatim, ispitati uzročno-posledične veze između promenljivih, kao i uticaje šokova u njima, kako bismo mogli da redukujemo model. Zatim ćemo ispitati stabilnost redukovanog modela i odrediti predikcije. Ispitivanje kredibilnosti statičkih predikcija na osnovnom nivou i analiza dešavanja na tržištima u periodu 2004 – 2009, dati su na kraju ovog poglavlja.

Koristićemo sledeće berzanske indekse, kao odgovarajuće predstavnike izabranih tržišta:

1. indeks bečke berze (ATX) je „benchmark” indeks i reflektuje ponašanje 20 najlikvidnijih akcija na austrijskom tržištu; bazni datum mu je 2. januar 1991;

2. indeks pariske berze ($CAC40$) je „benchmark” indeks i kao takav je indikator dešavanja na francuskom tržištu; on reflektuje performanse 40 najvećih kompanija u Francuskoj; bazni datum mu je 31. decembar 1987;

[26] *www.finance.yahoo.com*

3. indeks frankfurtske berze (DAX) je „blue chip" indeks i reflektuje kretanja 30 najozbiljnijih nemačkih kompanija; bazni datum mu je 31. decembar 1987;

4. indeks madridske berze ($IBEX35$) je „benchmark" indeks i reflektuje kretanja 35 najlikvidnijih akcija na španskom tržištu; bazni datum mu je 29. decembar 1989;

5. indeks lisabonske berze ($PSI20$) je „benchmark" indeks i reflektuje kretanja 20 najlikvidnijih akcija na portugalskom tržištu; bezni datum mu je 31. decembar 1992.

Svi indeksi su ponderisani tržišnom kapitalizacijom akcija (engl. *cap-weighted index*), koje se nalaze u slobodnom prometu (engl. *free float*) na tržištu.

Pošto ćemo koristiti logaritamske vrednosti i logaritamske prinose izabranih indeksa, uvešćemo oznake kao $LZ(t) = \ln(Z_t)$, $DLZ(t) = \ln(Z_t) - \ln(Z_{t-1})$, gde je Z iz skupa oznaka uvedenih kao početna slova odgovarajućih indeksa, odnosno $Z \in \{A, C, D, I, P\}$[27], Z_t vrednost odgovarajućeg indeksa u trenutku t, a $t = 1, 2, \ldots, T$.

3.1 Statističke osobine berzanskih indeksa i grafički prikaz

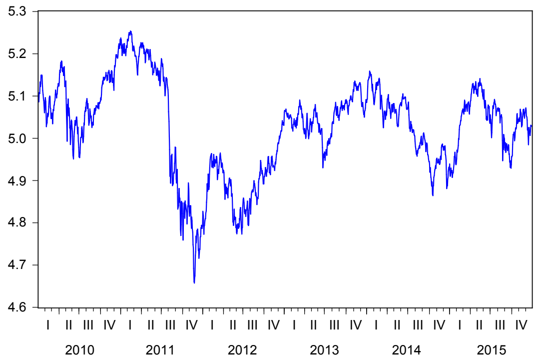
Indeksi berzanskih tržišta su dobri predstavnici vremenskih serija koje su klase $I(1)$. No, iako samo statistički testovi mogu dati dokaz o postajanju izvesnih osobina vremenskih serija, grafici mogu biti dobar pokazatelj na mogućnost postojanja istih. Na Grafiku 3.1 imamo grafički prikaz svih odabranih cenovnih indeksa, odnosno njihovih vrednosti na logaritamskom nivou.

Grafik 3.1 nam daje vizualnu predstavu o nestacionarnosti vremenskih serija na logaritamskom nivou, kao i tendenciju serija da rastu i padaju tokom vremena. Najveći pad uviđa se u trećem, odnosno četvrtom kvartalu 2011. godine, kod predstavnika austrijskog, nemačkog i francuskog tržišta tj. u drugom, odnosno trećem kvartalu 2012. godine, kod predstavnika španskog i portugalskog tržišta. Ovo je najveći pad koji se dogodio nakon Velike ekonomske krize. Za Španiju i Portugal je bio gori i od onog koji se desio početkom 2009. godine. Treći kvartal 2011. godine je bio najgori kvartal i na globalnom nivou. Vodeći indeksi na berzama širom sveta zabeležili su pad, što se smatra i reakcijom na slabe izglede koje je Američka centralna banka (Fed) predvidela za SAD. Naime, Međunarodna agencija za kreditne rejtinge je snizila vrhunski kreditni rejting SAD-a i time poslala „globalni signal" da se smanjuje pouzdanost najveće svetske privrede da otplati svoje dugove. Pored razočaravajuće statistike iz SAD-a, tržište akcija uzdrmalo je i finansijsko stanje u nekim članicama Evropske unije (kao što su Španija i Portugal). Azijske berze su zabeležile oštar pad, a velike evropske berze, među kojima su madridska i pariska berza, izgubile su preko 5% vrednosti. Zbog straha da će potražnja biti manja, usled pada globalne ekonomije, cena sirove nafte je u ovom periodu pala za skoro 5%.

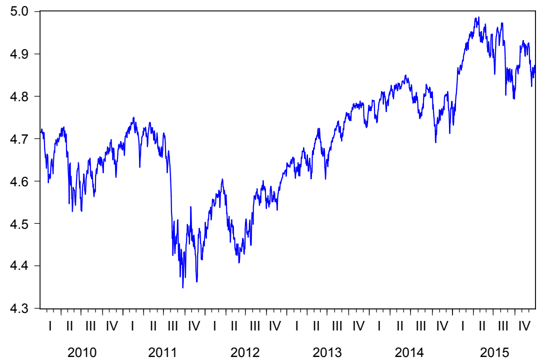
[27] $A = ATX$, $C = CAC40$, $D = DAX$, $I = IBEX35$, $P = PSI20$.

Grafik 3.1: Vrednosti berzanskih indeksa na logaritamskom nivou

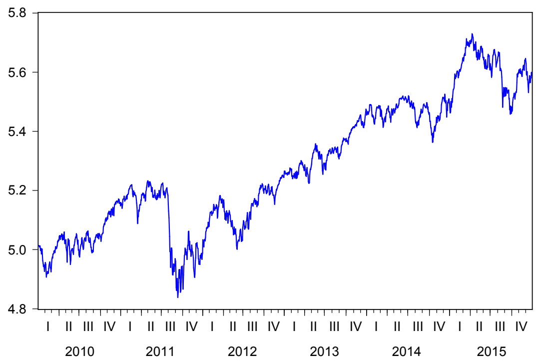
(a) $LA(t)$



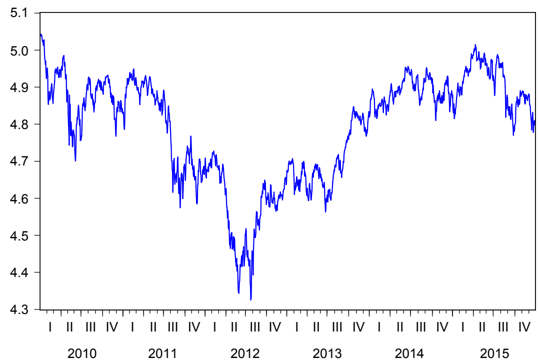
(b) $LC(t)$



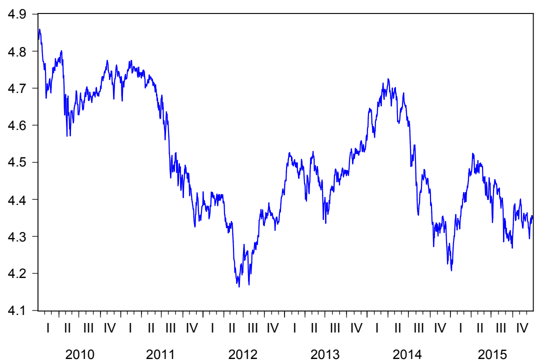
(c) $LD(t)$



(d) $LI(t)$



(e) $LP(t)$

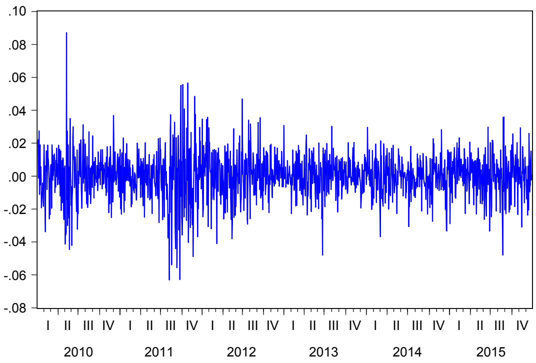


Izvor: Sopstveno istraživanje

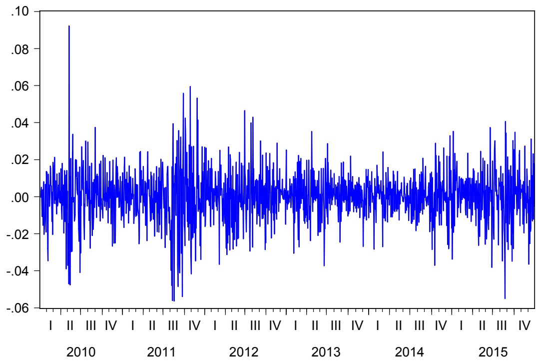
Na Grafiku 3.2 imamo diferencirane logaritamske vrednosti, odnosno grafički prikaz prinosa na logaritamskom nivou. Grafik 3.2 nam daje prikaz stacionarnih serija. Primetimo da na ovom prikazu serije logaritamskih prinosa osciliraju oko nule i da nema rastućih i opadajućih trendova. Imamo vizualni indikator stacionarne serije. Vraćanje ka sredini (nuli u ovom slučaju) je zajedničko za sve serije logaritmovanih prinosa.

Grafik 3.2: Vrednosti prinosa berzanskih indeksa na logaritamskom nivou

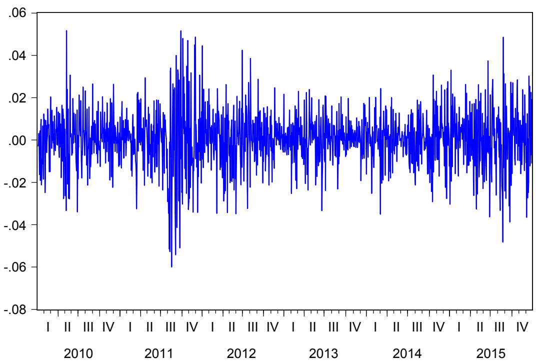
(a) $DLA(t)$



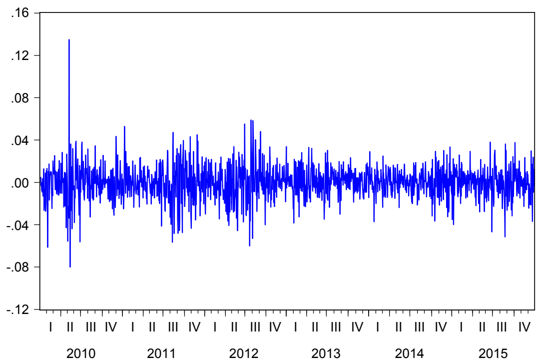
(b) $DLC(t)$



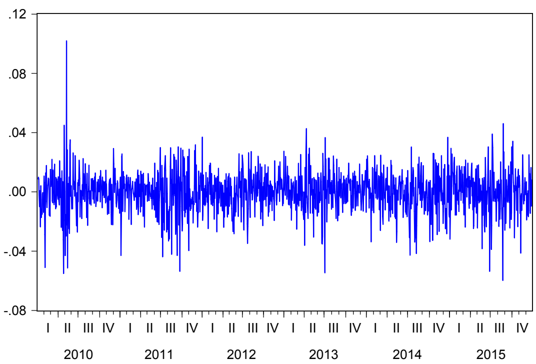
(c) $DLD(t)$



(d) $DLI(t)$



(e) $DLP(t)$



Izvor: Sopstveno istraživanje

Sve gore izneseno implicira da su logaritamske vrednosti serija verovatno $I(1)$ procesi. Ovu tvrdnju ćemo ispitati testovima u narednom poglavlju.

U Tabeli 3.1 date su nam vrednosti deksriptivnih statistika za naših pet indeksa, na diferenciranom logaritamskom nivou.

Tabela 3.1: Deskriptivna statistika za logaritamske prinose

	$DLA(t)$	$DLC(t)$	$DLD(t)$	$DLI(t)$	$DLP(t)$
Očekivanje	0,0000	0,0001	0,0004	-0,0002	-0,0003
Medijana	0,0003	0,0005	0,0009	0,0005	0,0001
Max	0,0003	0,0005	0,0009	0,0005	0,0001
Min	0,0871	0,0922	0,0516	0,1348	0,1019
Standardna devijacija	0,0137	0,0137	0,0130	0,0157	0,0138
Koeficijent asimetrije	-0,1240	-0,0106	-0,1643	0,1801	-0,1280
Koeficijent ekscesa	5,6776	5,9126	4,9447	7,9564	6,0080
JB test	450,7453	528,8526	242,4712	1539,393	568,1037
p vrednost	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Izvor: Sopstveno istraživanje

Najveća očekivana vrednost prinosa registrovana je na nemačkom tržištu, dok je najmanja očekivana vrednost registrovana na portugalskom tržištu. Ovakva pozicija nemačkog tržišta nije začuđujuća, jer smo već objasnili snagu nemačke ekonomije. Nasuprot snazi Nemačke je slabost Portugala.

Što se tiče standardne devijacije, najmanja registrovana vrednost se uočava kod nemačkog tržišta, dok se najveća vrednost uočava kod španskog tržišta.

Koeficijent asimetrije nam ukazuje na to da li je većina vrednosti u uzorku manja od očekivane vrednosti (negativan predznak) ili veća od nje (pozitivan predznak). U zavisnosti od veličine koeficijenta, određuje se i jačina asimetrije. Gradacija je sledeća (za neku seriju $x = \{x_1, \ldots, x_T\}$):

1. $|\hat{s}_x| \leq 0,25$ - mala asimetrija,
2. $|\hat{s}_x| \leq 0,50$ - srednja asimetrija,
3. $|\hat{s}_x| > 0,50$ - jaka asimetrija.

Zaključujemo da za svaki naš uzorak važi da mu je asimetrija mala. Uočimo da je za svako odabrano tržište, sem za tržište Španije, uzoračka vrednost koeficijenta asimetrije negativna. Dalje, to znači da je raspodela ovih prinosa asimetrična na levo i da je većina podataka iz uzorka manja od očekivane vrednosti. Što se tiče tržišta Španije, raspodela prinosa je asimetrična na desno i većina podataka iz uzorka je veća od očekivane vrednosti. Druga zanimljiva stvar, kod uzoračkog koeficijenta asimetrije, je ta što mu je vrednost najbliža nuli za prinose sa francuskog tržita. No, JB test je ipak pokazao kako nemamo normalnu raspodelu ni za jednu seriju prinosa.

Koeficijent ekscesa (spljoštenosti) je numerički pokazatelji, koji izražava u kojoj meri je neka raspodela spoljoštena u odnosu na normalnu raspodelu. Ovaj koeficijent nam pruža sledeću informaciju (za neku seriju $x = \{x_1, \ldots, x_T\}$):

1. $\hat{k}_x = 3$, raspodela je normalno spljoštena (zaobljena),
2. $\hat{k}_x > 3$, raspodela je više izdužena u odnosu na normalnu raspodelu („repovi” su deblji)
3. $\hat{k}_x < 3$, raspodela je više spljoštena, u odnosu na normalnu raspodelu („repovi” su tanji).

U našem slučaju, koeficijent spoljoštenosti svih pet prinosa je iznad tri, što nam govori da su raspodele izdužene u odnosu na normalnu raspodelu. To nam govori i da imamo više autlajera[28] i

[28] Autlajeri su vrednosti u uzorku koji su udaljeni od ostalih vrednosti.

deblje „repove” raspodela. Često se dešava da su na ocenjivanje parametara u modelu uticale neke ekstremne vrednosti ili autlajeri. Ovaj problem se uočava posmatranjem reziduala, te možemo zaključiti da postoji heteroskedastičnost ili autokorelacija. U našem modelu uočićemo postojanje heteroskedastičnosti, no to ćemo razmatrati kasnije. Najmanja vrednost koeficijenta ekscesa zabeležena je u slučaju Nemačke, dok najveća vrednost karakteriše Španiju. Koeficijent ekscesa za prinose na austrijskom tržištu je odmah posle nemačkog (gledajući od najmanjeg ka najvećem).

Na kraju, JB test je pokazao da nemamo standardnu normalnu raspodelu, ni za jednu od ovih serija. Očekivanja su približno nula, ali su disperzije daleko od jedinice. Sem toga, koeficijenti asimetrije nisu bliski nuli, a koeficijenti ekscesa su daleko veći od tri. Sve to ukazuje na mogućnost da nemamo $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, što smo i pokazali JB testom, odnosno dobili smo da su verovatnoće da serije imaju $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu manje od 0,05, te odbacujemo hipotezu o postajanju normalnosti.

U Tabeli 3.2 imamo vrednosti uzoračkih koeficijenata korelacije.

Tabela 3.2: Matrica koeficijenata korelacije

	$DLA(t)$	$DLC(t)$	$DLD(t)$	$DLI(t)$	$DLP(t)$
$DLA(t)$	1,0000				
$DLC(t)$	0,8289	1,0000			
$DLD(t)$	0,8051	0,9316	1,0000		
$DLI(t)$	0,7794	0,8649	0,7877	1,0000	
$DLP(t)$	0,6996	0,7408	0,6916	0,7608	1,0000

Izvor: Sopstveno istraživanje

Koeficijent korelacije meri jačinu povezanosti između varijabli. Možemo imati sledeće jačine veza u zavisnosti od vrednosti koeficijenta (za neke serije $x = (x_1, \dots, x_T)$ i $y = (y_1, \dots, y_T)$):

1. $|\rho_{x,y}| = 1$ - potpuna korelacija,
2. $0,8 \leq |\rho_{x,y}| < 1$ - jaka korelacija,
3. $0,5 \leq |\rho_{x,y}| < 0,8$ - srednje jaka korelacija,
4. $0,2 \leq |\rho_{x,y}| < 0,5$ - relativno slaba korelacija,
5. $0 \leq |\rho_{x,y}| < 0,2$ - neznatna korelacija,
6. $\rho_{x,y} = 0$ - potpuna odsutnost korelacije.

No, bitnu ulogu igra i statistička značajnost dobijenih koeficijenata. Kako su svi koeficijenti statistički značajni[29], te vrednosti nismo unosili, nego samo napominjemo. Dalje, jaka korelacija se javila između sledećih zemalja[30]:

1. Francuska i Nemačka,
2. Francuska i Španija,
3. Austrija i Francuska,
4. Austrija i Nemačka.

[29]Sve dobijene p vrednosti su nula, što je manje od 0,05, pa su svi koeficijenti statistički značajni.

[30]Parovi su poređani od onih koji imaju najviši uzorački koeficijent linearne korelacije, do onih koji imaju najniži koeficijent, u slučaju jake korelacije.

Srednje jaku korelaciju imamo u svim ostalim slučajevima, odnosno između sledećih parova[31]:

1. Nemačka i Španija,
2. Austrija i Španija,
3. Španija i Portugal,
4. Francuska i Portugal,
5. Austrija i Portugal,
6. Nemačka i Portugal.

Najveći uzorački koeficijent linearne korelacije smo dobili između Francuske i Nemačke (što ne čudi, budući da smo već objasnili jačinu njihove saradnje), a najniži između Nemačke i Portugala. Međutim, iako je vredost uzoračkog koeficijenta linearne korelacije između Nemačke i Portugala najniži u datoj tabeli za dati uzorak, povezanost Nemačke i Portugala nije zanemarljiva.

3.2 Testiranje stacionarnosti

Do sada smo analizirali odnose tržišta tako što smo uzimali vrednosti iz cele populacije, odnosno petogodišnjeg perioda. Od sada ćemo koristiti vrednosti iz prvog potperioda (4. januar 2010 – 30. decembar 2013) i na njemu ćemo sprovoditi testove koji su nam neophodni za formiranje modela. U ovom poglavlju ćemo testirati vrednosti serija na postojanje jediničnog korena. Koristićemo već spomenuti PP test. Osnovna hipoteza, koja se testira, je H_0 : serija ima jedinični koren, protiv alternativne H_1 : serija nema jedinični koren. Ukoliko su registrovane p vrednosti iznad 0,05, prihvatićemo nultu hipotezu. U suprotnom je odbacujemo. Takođe, registrovane p vrednosti će zavisiti od toga da li u model uključujemo konstantu, linearni trend ili ništa od toga (kao u jednačinama (2.17), (2.18) i (2.19)).

U Tabeli 3.3 imamo rezultate PP testa. Sve registrovane p vrednosti su veće 0,05, što znači da na logaritamskom nivou ne možemo odbaciti nultu hipotezu po svim kriterijumima. Dalje, to znači da su naše izabrane serije nestacionarne.

Tabela 3.3: Rezultati PP testa za serije na logaritamskom nivou

Serija	p vrednost		
	Konstanta	Konstanta i trend	Ni konstanta ni trend
$LA(t)$	0,3987	0,7576	0,6708
$LC(t)$	0,3300	0,6098	0,7200
$LD(t)$	0,8398	0,5380	0,9316
$LI(t)$	0,1781	0,6864	0,5104
$LP(t)$	0,3319	0,8954	0,3957

Izvor: Sopstveno istraživanje

Kada diferenciramo naše nestacionarne vremenske serije (dobijamo logaritamske prinose), dobijamo nulu za sve registrovane p vrednosti, što je prikazano u Tabeli 3.4. To znači da posle

[31]Parovi su poređani od onih koji imaju najviši uzorački koeficijent linearne korelacije, do onih koji imaju najniži koeficijent, u slučaju srednje jake korelacije.

diferenciranje sve naše serije postaju stacionarne, odnosno odbacujemo nultu hipotezu da postoji jedinični koren.

Tabela 3.4: Rezultati PP testa za logaritamske prinose

Serija	p vrednost		
	Konstanta	Konstanta i trend	Ni konstanta ni trend
$DLA(t)$	0,0000	0,0000	0,0000
$DLC(t)$	0,0000	0,0000	0,0000
$DLD(t)$	0,0000	0,0000	0,0000
$DLI(t)$	0,0000	0,0000	0,0000
$DLP(t)$	0,0000	0,0000	0,0000

Izvor: Sopstveno istraživanje

Zaključak je da su sve naše serije reda integracije jedan, odnosno one su $I(1)$. Podsetimo se da je nestacionarna vremenska serija reda integracije jedan, ako postaje stacionarna vremenska serija nakon prvog diferenciranja.

3.3 Formiranje VAR modela na osnovnom nivou i određivanje optimalnog koraka

Na osnovu prethodnog izlaganja jasno nam je da ćemo model praviti pomoću diferenciranih serija. Međutim, u ovom poglavlju ćemo se osvrnuti i na rezultate koje bismo dobili da nekim slučajem nismo proverili stacionarnost serija. Takođe, kako bismo dobili optimalan broj prethodnih koraka koje treba uvrstiti u model, pokrenućemo AIC kriterijum na vrednostima na logaritamskom nivou. Napomenimo, optimalan broj koraka, i, koji ćemo koristiti u modelu na diferenciranom nivou je za jedan manji od broja koraka koji ćemo dobiti za model na logaritamskom nivou. U Tabeli 3.5 su nam date vrednosti AIC kriterijuma.

Tabela 3.5: Rezultati AIC kriterijuma

i	$AIC(i)$
0	-13,8407
1	-33,8910
2	-33,9306
3	-33,9323*
4	-33,9128
5	-33,8893

Izvor: Sopstveno istraživanje

Na osnovu dobijenih vrednosti, AIC kriterijum ima najmanju vrednost za korak tri, te je na osnovu ovog kriterijuma optimalno koristiti vrednosti za prethodna tri dana za svaku seriju na logaritamskom nivou.

Znajući koliko koraka treba uključiti u model, formiraćemo VAR model na logaritamskom nivou. Ocenjeni i statistički značajni koeficijenti modela, kao i vrednosti R^2, $Adj.R^2$ i RSS za svaku jednačinu, predstavljeni su u sledećem sistemu.

$$\begin{aligned}
LA(t) = {}& \underset{(0{,}0097)}{0,9778}LA(t-1) - \underset{(0{,}1116)}{0,2211}LC(t-1) + \underset{(0{,}1112)}{0,2517}LC(t-2) + \underset{(0{,}0996)}{0,2485}LD(t-1) - \\
& - \underset{(0{,}1109)}{0,3329}LD(t-2) + \underset{(0{,}0359)}{0,0784}LD(t-3) + \underset{(0{,}0536)}{0,1333}LI(t-1) - \underset{(0{,}0535)}{0,1329}LI(t-2) \qquad (3.1)\\
& R^2 = 98,72\%, \quad Adj.R^2 = 98,71\%, \quad RSS = 0,2088\\
LC(t) = {}& \underset{(0{,}1086)}{0,6341}LC(t-1) + \underset{(0{,}1400)}{0,5871}LC(t-2) - \underset{(0{,}0873)}{0,2289}LC(t-3) + \underset{(0{,}0974)}{0,2620}LD(t-1) - \\
& - \underset{(0{,}1442)}{0,5624}LD(t-2) + \underset{(0{,}0959)}{0,3059}LD(t-3) + \underset{(0{,}0523)}{0,1503}LI(t-1) - \underset{(0{,}0523)}{0,1489}LI(t-2) \qquad (3.2)\\
& R^2 = 97,93\%, \quad Adj.R^2 = 97,92\%, \quad RSS = 0,1992\\
LD(t) = {}& -\underset{(0{,}0798)}{0,1839}LC(t-1) + \underset{(0{,}0797)}{0,1823}LC(t-2) + \underset{(0{,}0873)}{1,2687}LD(t-1) - \underset{(0{,}0872)}{0,2672}LD(t-2) \qquad (3.3)\\
& R^2 = 99,08\%, \quad Adj.R^2 = 99,08\%, \quad RSS = 0,1686\\
LI(t) = {}& -\underset{(0{,}0729)}{0,1751}LC(t-1) + \underset{(0{,}0742)}{0,1891}LC(t-2) - \underset{(0{,}0423)}{0,1183}LD(t-2) + \\
& + \underset{(0{,}0409)}{0,1151}LD(t-3) + \underset{(0{,}0615)}{1,1931}LI(t-1) - \underset{(0{,}0615)}{0,2032}LI(t-2) \qquad (3.4)\\
& R^2 = 98,68\%, \quad Adj.R^2 = 98,67\%, \quad RSS = 0,2810\\
LP(t) = {}& -\underset{(0{,}0577)}{0,1396}LC(t-1) + \underset{(0{,}0576)}{0,1422}LC(t-2) + \underset{(0{,}0490)}{0,2014}LI(t-1) - \underset{(0{,}0487)}{0,1886}LI(t-2) + \\
& + \underset{(0{,}0082)}{0,9839}LP(t-1) \qquad (3.5)\\
& R^2 = 99,36\%, \quad Adj.R^2 = 99,36\%, \quad RSS = 0,1765
\end{aligned}$$

U ovom sistemu smo predstavili redukovani VAR model. To znači da smo iz prvobitno dobijenog modela (koji u sebi sadrži prethodne tri vrednosti svake promenljive u svakoj jednačini) izbacili sve koeficijente čija je t vrednost manja od 1,96[32], gde se t vrednost dobija kao količnik vrednosti koeficijenta i njegove standardne greške (vrednosti u oblim zagradama). Ocenjeni koeficijenti se mogu posmatrati kao koeficijenti elastičnosti, ali izračunati na način prikazan u poglavlju 2.3.2.

Posmatrajmo šta se dešava u jednačini (3.3). U trenutku t, na logaritmovanu vrednost indeksa nemačkog tržišta, $LD(t)$, značajan uticaj ima logaritmovana vrednost indeksa francuskog tržišta iz trenutka $t-1$ i $t-2$, odnosno $LC(t-1)$ i $LC(t-2)$ i logaritmovana vrednost samog nemačkog tržišta iz trenutka $t-1$ i $t-2$. Drugim rečima, rast od 1% u promenljivoj $LC(t-1)$ izaziva pad današnje vrednosti promenljive $LD(t)$ za $100 \times (1 - 1,01^{-0,1839}) = 0,18\%$, pri čemu pretpostavljamo da su vrednosti ostalih promenljivih ostale nepromenjene. Tako, recimo, rast od 1% u promenljivoj $LD(t-1)$ izaziva rast vrednosti promenljive $LD(t)$ za $100 \times (1,01^{1,2687} - 1) = 1,27\%$, pri čemu se pretpostavlja da se vrednosti ostalih promenljivih nisu menjale.

Generalno, interpretacija koeficijenata u autoregresivnim modelima (pogotovo vektorskim) je prilično teška, pogotovo kada imamo veliku vrednost prethodnih koraka koje treba uključiti u model. Deluje nelogično pratiti promene koje su se desile juče (ili pre tri dana), da bismo pod određenim pretpostavkama mogli govoriti o današnjim promenama. Zato se u ovim modelima koeficijenti, uglavnom, ne interpretiraju kao koeficijenti elastičnosti, već se samo razmatra kauzalnost i kointegracija, kao vid međusobnog uticaja promenljivih. Ipak, mi ćemo i u modelu napravljenom na osnovu stacionarnih serija razmatrati koeficijente kao procentualne promene, da bismo ih uporedili sa koeficijentima dobijenim na osnovnom nivou.

Pogledajmo sada vrednosti koeficijenta determinacije i primetimo da svi koeficijenti determinacije imaju veoma visoke vrednosti. Kao što smo objasnili u poglavlju 2.6.4, veoma visok nivo

[32]Vrednost od 1,96 odgovara kritičnoj vrednosti normalne raspodele, na nivou poverenja od 95%.

koeficijenta determinacije ne mora nužno da znači da je model dobar. U našem slučaju model nije dobar, jer smo koristili nestacionarne vremenske serije, tj. javila nam se „lažna” regresija.

Uzećemo za primer nemačko tržište i upoređivati pokazatelje osobina grešaka predviđanja. Ukoliko bismo na ovom nivou formirali statičke predikcije, pokazatelji osobina grešaka predviđanja imali bi vrednosti koje bi nam, teorijski, odgovarale ($RMSE = 0,0131$, $MAE = 0,0098$, $MAPE = 0,1768$, $U = 0,0012$, $BM = 0,0007$, $CM = 0,9992$, $VM = 0,0001$). Prema datim pokazateljima, statičke predikcije dobijene pomoću modela na osnovnom nivou dobro opisuju stvarno stanje. Razlog za ovakvo ponašanje prediktivnih vrednosti je taj što se vrednosti predviđaju na osnovu stvarnih vrednosti. Velika razlika bi se uočila, ako bismo koristili dinamički način predviđanja. Naime, svi pokazatelji osobina grešaka predviđanja dobijeni za prediktivne vrednosti određene pomoću modela na osnovnom nivou imali bi nešto veće vrednosti ($RMSE = 0,1930$, $MAE = 0,1541$, $MAPE = 2,7856$, $U = 0,0172$, $BM = 0,6355$, $CM = 0,2822$, $VM = 0,0823$). Od svih pokazatelja, najkritičnija je vrednost BM-a, koja nam govori o meri sistemske greške - 63,55% grešaka dolazi iz modela i to je veće od 28,22%, što je broj grešaka koje ne možemo kontrolisati. Vrednost VM-a nam ukazuje na to da prediktivne vrednosti modela ne mogu dostići fluktuacije stvarnih vrednosti u 8,23% slučajeva. Međutim, ukoliko bismo iscrtali dinamički predviđene i stvarne vrednosti dobili bismo da prediktivne vrednosti imaju uzlazni trend i da precenjuju stvarno stanje. Osim toga, javila bi nam se i autokorelacija u seriji reziduala. Zaključak je da, koliko god pojedini pokazatelji ukazivali na to da je model dobar, nije preporučljivo formirati model i prediktivne vrednosti pomoću nestacionarnih serija.

3.4 Testiranje kointegracije Johansenovim testom

Pošto nam je jasno da ćemo formirati model pomoću logaritamskih prinosa datih serija, potrebno je još da odlučimo da li je u model neophodno uključiti kointegracijsku jednačinu ili ne. Da bismo doneli odluku, neophodno je testirati serije na postojanje kointegracije. Jasno nam je i da možemo imati najviše četiri kointegracijske jednačine u modelu. Ispitaćemo postojanje kointegracije kao što je objašnjeno u poglavlju 2.8.1, putem Pantula principa. U narednoj tabeli su date uzoračke vrednosti statistike traga, kao i registrovane p vrednosti za svaku statistiku. Napominjemo da ako je registrovana p vrednost manja od 0,05 to znači da odbacujemo nultu hipotezu. Podsetimo se da je nulta hipoteza data kao H_0 : ne postoji više od n kointegracijskih jednačina (KJ), pri čemu n, u našem slučaju, ide od nula do četiri.

Tabela 3.6: Rezultati Johansenovog testa kointegracije

Nulta hipoteza o broju KJ	Model 2		Model 3		Model 4	
	Test traga	p vrednost	Test traga	p vrednost	Test traga	p vrednost
Nema KJ	72,1034	0,1108	65,5451	0,1045	80,8519	0,1633
Najviše jedna	36,5691	0,6459	30,0135	0,7183	45,1183	0,6416
Najviše dve	16,6394	0,9007	11,7243	0,9410	22,1697	0,9068
Najviše tri	8,5181	0,7802	4,9559	0,8135	10,7409	0,8895
Najviše četiri	3,8700	0,4318	0,5422	0,4615	4,1921	0,7142

Izvor: Sopstveno istraživanje

U Tabeli 3.6 se nalaze rezultati statistike traga, kao i registrovane p vrednosti za svaku statistiku. Kako bismo odlučili da li imamo kointegracijske jednačine ili ne, koristićemo Pantula princip. Pantula princip se sastoji u tome da krenemo od najrestriktivnijeg modela (to je model dva) i da posmatramo rezultate testa kada je nulta hipoteza ta da nema kointegracijskih jednačina. Ukoliko ne možemo da odbacimo nultu hipotezu, prelazimo na model tri, a ako ni tu ne možemo da odbacimo nultu hipotezu, prelazimo na model četiri. Ukoliko ni u jednom slučaju ne odbacimo nultu hipotezu, prelazimo na sledeći vid nulte hipoteze (da postoji najviše jedna kointegracijska jednačina) i sprovodimo identično razmatranje kao u prvom slučaju. Staćemo onda kada prvi put odbacimo nultu hipotezu, putem objašnjenih razmatranja. Međutim, u našem slučaju nijednom nismo odbacili nultu hipotezu, te je zaključak da ne postoje kointegracijske jednačine, odnosno ne treba ih uključivati u model. Kao što je izneseno u poglavlju 2.7, nepostojanje kointegracijske veze implicira da investitor koji poseduje akcije kompanija sa različitih tržišta može dobro da diverzifikuje svoj portfolio i tako se zaštiti od rizika, jer se pad na jednom tržištu neće odraziti na pad na drugom tržištu. Takođe, investitor neće moći da ostvari ni arbitražnu zaradu, jer razlika u ceni dve akcije nema ekvilibrijumsku vrednost. Na kraju, naš model će sadržati samo prethodne vrednosti određenih logaritamskih prinosa i neće imati ni konstantu, ni trend.

3.5 Ocenjeni VAR model

Konačno dolazimo do ocenjivanja željenog modela. Model se sastoji od sistema sa pet jednačina i svaka od tih jednačina sadrži neke od prethodnih vrednosti logaritamskih prinosa. Napomenimo da VAR model sve promenljive posmatra kao endogene. Ocenjeni model je predstavljen u Tabeli 3.7.

Tabela 3.7: Ocenjeni VAR model za logaritamske prinose

	$DLA(t)$	$DLC(t)$	$DLD(t)$	$DLI(t)$	$DLP(t)$
$DLA(t-1)$	$0,0241$	$-0,0004$	$-0,0326$	$0,0078$	$-0,0078$
	$(0,0637)$	$(0,0622)$	$(0,0570)$	$(0,0737)$	$(0,0586)$
$DLA(t-2)$	$0,0708$	$0,1347$	$0,0861$	$0,1609$	$0,0958$
	$(0,0627)$	$(0,0612)$	$(0,0561)$	$(0,0725)$	$(0,0576)$
$DLC(t-1)$	$-0,2393$	$-0,3624$	$-0,2781$	$-0,3804$	$-0,2677$
	$(0,1142)$	$(0,1114)$	$(0,1021)$	$(0,1321)$	$(0,1049)$
$DLC(t-2)$	$0,2249$	$0,1813$	$0,1667$	$0,0597$	$0,0734$
	$(0,1130)$	$(0,1102)$	$(0,1010)$	$(0,1306)$	$(0,1038)$
$DLD(t-1)$	$0,2578$	$0,2714$	$0,3381$	$0,2163$	$0,1538$
	$(0,1022)$	$(0,0996)$	$(0,0913)$	$(0,1181)$	$(0,0939)$
$DLD(t-2)$	$-0,2840$	$-0,3504$	$-0,2455$	$-0,2699$	$-0,1737$
	$(0,1014)$	$(0,0988)$	$(0,0906)$	$(0,1172)$	$(0,0931)$
$DLI(t-1)$	$0,1479$	$0,1703$	$0,0982$	$0,2219$	$0,2121$
	$(0,0584)$	$(0,0569)$	$(0,0522)$	$(0,0675)$	$(0,0536)$
$DLI(t-2)$	$-0,0501$	$0,0071$	$-0,0075$	$0,0088$	$0,0332$
	$(0,0590)$	$(0,0575)$	$(0,0527)$	$(0,0682)$	$(0,0542)$
$DLP(t-1)$	$-0,0537$	$-0,0452$	$-0,0458$	$-0,0192$	$-0,0224$
	$(0,0559)$	$(0,0545)$	$(0,0500)$	$(0,0646)$	$(0,0513)$
$DLP(t-2)$	$-0,0469$	$-0,0545$	$-0,0523$	$-0,1089$	$-0,0648$
	$(0,0557)$	$(0,0543)$	$(0,0498)$	$(0,0644)$	$(0,0511)$
R^2	$3,21\%$	$2,87\%$	$2,40\%$	$2,89\%$	$2,75\%$
Adj, R^2	$2,32\%$	$1,98\%$	$1,50\%$	$2,00\%$	$1,86\%$
RSS	$0,2084$	$0,1981$	$0,1665$	$0,2786$	$0,1759$

Izvor: Sopstveno istraživanje

Primetimo kako su nam se i koeficijenti i njihove standardne greške bitno promenili u odnosu na one iz sistema na strani 40, a kako su se koeficijenti determinacije značajno smanjili. Statistička značajnost koeficijenata, odnosno vrednosti t test statistike, menjaju se u zavisnosti od toga koje promenljive uključujemo u model. No, za sad nećemo redukovati model, odnosno izbacivati statističke neznačajne koeficijente.

Što se tiče male vrednosti koeficijenta determinacije, R^2, spomenuli smo da to nije validna indicija da je model loš ili neadekvatan. Ukoliko je vrednost koeficijenta determinacije niska, a imamo statistički značajne koeficijente u modelu (u svakoj od naših jednačina imamo bar dva statistički značajna koeficijenta) i dalje možemo iznositi zaključke o uticaju promene jedne promenljive na promenu u drugoj promenljivoj, odnosno i dalje možemo analizirati međusobne uticaje promenljivih. Zaključci koje donesemo na ovaj način mogu biti posebno korisni. No, niska vrednost koeficijenta determinacije može biti problem, ako želimo vrlo precizne predikcije. Ipak, pošto radimo sa podacima sa berzi, ne možemo očekivati precizne predikcije. Dešavanja na berzama su nepredvidiva, koliko god izabrane berze bile „jake".

U ovom modelu nećemo razmatrati uticaje promenljivih preko koeficijenata elastičnosti, jer nismo redukovali model i dobili samo statistički značajne koeficijente. Prvo nam je potrebno da vidimo da li ima smisla razmatrati, recimo, uticaj austrijske berze na špansku, iako je obrnut slučaj trenutno opravdan. U opštem slučaju, statistički značajni koeficijenti ne moraju nužno da ukazuju na to da je promenljiva uz koju stoje zaista značajna za predviđanje vrednosti druge promenljive. Da bismo odlučili o tome koje promenljive zaista treba uključiti u koju jednačinu, sprovešćemo test Grendžerove kauzalnosti.

3.5.1 Testiranje Grendžerove kauzalnosti

Koeficijent korelacije jeste dobar inicijalni pokazatelj uzajamne zavisnosti promenljivih. Međutim, za formiranje adekvatnog prediktivnog modela mnogo su nam značajnije informacije o smeru uticaja. Da bismo to ispitali, koristićemo test Grendžerove kauzalnosti. Nulta hipoteza za testiranje je H_0 : promenljivu treba isključiti iz modela. Nulta hipoteza se prihvata ako je registrovana p vrednost veća od 0,05. Registrovana p vrednost zavisi od vrednosti χ^2 statistike. Vrednost df predstavlja broj stepeni slobode, pa pošto koristimo prethodne dve vrednosti svake promenljive, broj stepeni slobode je uvek dva. Napomenimo i da oznaka t u zagradi iza oznake nezavisne (isključene) promenljive ne predstavlja trenutni uticaj te promenljive na zavisnu promenljivu, već samo oznaku za promenljivu i uticaj njenih prethodnih dveju vrednosti na zavisnu promenljivu. Rezultati Grendžerovog testa dati su u Tabeli 3.8.

Tabela 3.8: Rezultati Grendžerovog testa kauzalnosti

Zavisna promenljiva: $DLA(t)$			
Isključena promenljiva	χ^2	df	p vrednost
$DLC(t)$	$8,7545$	2	$0,0126$
$DLD(t)$	$12,7628$	2	$0,0017$
$DLI(t)$	$7,1136$	2	$0,0285$
$DLP(t)$	$1,6451$	2	$0,4393$
Sve	$20,5314$	8	$0,0085$
Zavisna promenljiva: $DLC(t)$			
Isključena promenljiva	χ^2	df	p vrednost
$DLA(t)$	$4,8472$	2	$0,0886$
$DLD(t)$	$18,0095$	2	$0,0001$
$DLI(t)$	$8,9560$	2	$0,0114$
$DLP(t)$	$1,7099$	2	$0,4253$
Sve	$28,6495$	8	$0,0004$
Zavisna promenljiva: $DLD(t)$			
Isključena promenljiva	χ^2	df	p vrednost
$DLA(t)$	$2,6307$	2	$0,2684$
$DLC(t)$	$10,5788$	2	$0,0050$
$DLI(t)$	$3,5537$	2	$0,1692$
$DLP(t)$	$1,9625$	2	$0,3748$
Sve	$17,5818$	8	$0,0246$
Zavisna promenljiva: $DLI(t)$			
Isključena promenljiva	χ^2	df	p vrednost
$DLA(t)$	$4,9454$	2	$0,0844$
$DLC(t)$	$8,6378$	2	$0,0133$
$DLD(t)$	$7,7881$	2	$0,0204$
$DLP(t)$	$2,9547$	2	$0,2282$
Sve	$20,8948$	8	$0,0074$
Zavisna promenljiva: $DLP(t)$			
Isključena promenljiva	χ^2	df	p vrednost
$DLA(t)$	$2,7719$	2	$0,2501$
$DLC(t)$	$7,1856$	2	$0,0275$
$DLD(t)$	$5,5354$	2	$0,0628$
$DLI(t)$	$16,0199$	2	$0,0003$
Sve	$23,1846$	8	$0,0031$

Izvor: Sopstveno istraživanje

Prema rezultatima Grendžerovog testa, prilikom pravljenja modela za predviđanje vrednosti na bečkoj berzi treba izbaciti vrednosti sa lisabonske berze. Što se tiče predviđanja za parisku berzu, treba izbaciti promenljive koje predstavljaju bečku i lisabonsku berzu. No, u Tabeli 3.7 smo videli da je vrednost koeficijenta elastičnosti koji stoji uz vrednost indeksa bečke berze u trenutku $t-2$ statistički značajna. Međutim, Grendžerov test je pokazao da se izbacivanjem promenljive $DLA(t)$

iz jednačine gde je zavisna promenljiva $DLC(t)$ dobijaju bolje predikcije. Što se tiče frankfurtske berze, situacija je prilično jasna - na nju utiču samo dešavanja sa pariske berze. Na Španiju vrše uticaj Nemačka i Francuska, dok na Portugal uticaj imaju Španija i Francuska. Obratimo pažnju na činjenicu da ne znamo šta će se desiti sa uticajem prethodnih vrednosti berzanskih indeksa na same sebe. Taj uticaj ćemo videti kada redukujemo model i izbacimo promenljive koje nam je Grendžerov test odredio. Pre nego što pređemo na redukciju modela, treba da pogledamo šta se dešava sa funkcijom impulsivnog odziva.

3.6 Testiranje uticaja šokova na promenljive

Bitan deo statističke analize međusobnog uticaja evropskih tržišta čini analiza šokova na njima. Kao što smo rekli u poglavlju 2.9, funkcija impulsivnog odziva (IRF) nam pomaže u analizi uticaja jednog tržišta na drugo. Vrednosti funkcije impulsivnog odziva dati su u Tabeli 3.9. Ono što je bitno primetiti jeste da se, u većini slučajeva, vrednosti kreću ka nuli kako se broj perioda povećava. Zatim, period t označava sadašnji trenutak, te je odgovor promenljive u trenutku t na njen šum u istom tom trenutku uvek jednak jedan, odnosno - promena šuma $u_{r_{1t}}$ za jednu jedinicu menja promenljivu r_{1t} za jednu jedinicu. Period $t-1$ se odnosi na uticaje šumova iz prethodnog dana na vrednosti promenljive danas (npr. uticaj šuma iz $DLC(t-1)$ na $DLA(t)$), a period $t-2$ na uticaje šumova prinosa koji su se desili prekjuče. Nama su najbitniji periodi $t-1$ i $t-2$, jer naš model uključuje samo vrednosti iz prethodna dva trenutka. Pošto nam je Grendžerov test ukazao na to koje promenljive treba izbaciti iz kog modela u odnosu na to koliko su te promenljive značajne za naše predikcije, tako će nam i vrednosti funkcije IRF dati indicije o bitnim uticajima pojedinih promenljivih. Sve vrednosti u Tabeli 3.9 koje su iznad vrednosti od 0,1 smatraju se bitnim u smislu uticaja na prediktivne vrednosti.

Što se tiče, recimo, promenljive $DLA(t)$, vrednosti koje su iznad 0,1 uočavaju se kod promenljivih koje predstavljaju prinose francuske, nemačke i španske berze i to kao: $DLC(t-1)$, $DLC(t-2)$, $DLD(t-1)$, $DLD(t-2)$ i $DLI(t-1)$. Zapazimo da su sve ostale vrednosti veoma blizu nule.

Snaga frankfurtske berze i saradnja Francuske i Nemačke, ogleda se i u gornjoj tabeli. Vrednosti, odnosno promene koje su se u prethodna dva dana desile na frankfurtskoj i pariskoj berzi imaju prediktivan uticaj na promene koje će se desiti danas na obe berze. Na madridsku berzu, u trenutku t, vrše uticaj šokovi koji se dese na bečkoj berzi u trenutku $t-2$, pariskoj berzi u trenutku $t-1$, frankfurtskoj berzi u trenucima $t-1$ i $t-2$, kao i samoj madridskoj berzi prethodnog dana. Primetan je i uticaj šoka sa lisabonske, ali je i zanemarljiv. Ukoliko se podsetimo rezultata Grendžerovog testa u Tabeli 3.8, videćemo da lisabonska berza nema prediktivan uticaj na madridsku. Na lisabonskoj berzi se oseti uticaj šokova koji dolaze iz Francuske i Španije i to iz prethodnog dana. Rezultati u Tabeli 3.9 su pokazali da su značajni i šokovi sa frankfurtske berze, međutim Grendžer je odbacio uticaj Nemačke u Portugalu. No, taj uticaj će se ipak javiti, jer će se njegovim izbacivanjem, u redukovanom modelu, smanjiti vrednost prilagođenog koeficijenta determinacije.

Tabela 3.9: Vrednosti funkcije impulsivnog odziva

$DLA(t)$ Period	$DLA(t)$	$DLC(t)$	$DLD(t)$	$DLI(t)$	$DLP(t)$
t	$1,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$
$t-1$	$0,0241$	$-0,2393$	$0,2578$	$0,1479$	$-0,0537$
$t-2$	$0,0646$	$0,1922$	$-0,2318$	$-0,0405$	$-0,0508$
$t-3$	$0,0194$	$0,0182$	$-0,0430$	$-0,0055$	$-0,0138$
$t-4$	$0,0010$	$0,0111$	$-0,0169$	$-0,0045$	$0,0068$
$DLC(t)$ Period	$DLA(t)$	$DLC(t)$	$DLD(t)$	$DLI(t)$	$DLP(t)$
t	$0,0000$	$1,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$
$t-1$	$-0,0004$	$-0,3624$	$0,2714$	$0,1703$	$-0,0452$
$t-2$	$0,1277$	$0,1846$	$-0,3272$	$0,0001$	$-0,0528$
$t-3$	$0,0116$	$-0,0060$	$-0,0133$	$0,0024$	$-0,0090$
$t-4$	$0,0015$	$0,0083$	$-0,0155$	$-0,0063$	$0,0048$
$DLD(t)$ Period	$DLA(t)$	$DLC(t)$	$DLD(t)$	$DLI(t)$	$DLP(t)$
t	$0,0000$	$0,0000$	$1,0000$	$0,0000$	$0,0000$
$t-1$	$-0,0325$	$-0,2781$	$0,3381$	$0,0982$	$-0,0458$
$t-2$	$0,0755$	$0,1562$	$-0,2008$	$-0,0144$	$-0,0544$
$t-3$	$0,0093$	$0,0023$	$-0,0123$	$-0,0002$	$-0,0091$
$t-4$	$0,0022$	$0,0098$	$-0,0161$	$-0,0045$	$0,0037$
$DLI(t)$ Period	$DLA(t)$	$DLC(t)$	$DLD(t)$	$DLI(t)$	$DLP(t)$
t	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$1,0000$	$0,0000$
$t-1$	$0,0078$	$-0,3804$	$0,2163$	$0,2219$	$-0,0192$
$t-2$	$0,1561$	$0,0563$	$-0,2529$	$0,0115$	$-0,1059$
$t-3$	$0,0146$	$0,0171$	$-0,0223$	$-0,0154$	$-0,0110$
$t-4$	$-0,0103$	$0,0013$	$0,0091$	$-0,0118$	$0,0084$
$DLP(t)$ Period	$DLA(t)$	$DLC(t)$	$DLD(t)$	$DLI(t)$	$DLP(t)$
t	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$1,0000$
$t-1$	$-0,0077$	$-0,2677$	$0,1538$	$0,2121$	$-0,0224$
$t-2$	$0,0926$	$0,0549$	$-0,1539$	$0,0439$	$-0,0629$
$t-3$	$0,0166$	$-0,0127$	$-0,0085$	$0,0027$	$-0,0145$
$t-4$	$0,0025$	$0,0089$	$-0,0123$	$-0,0078$	$0,0003$

Izvor: Sopstveno istraživanje

Test Grendžerove kauzalnosti i IRF su nas naveli na to koje promenljive, u kom periodu treba staviti u model, da bismo dobili statistički značajne koeficijente, stabilan model i dobre predikcije. Sada nam ostaje da redukujemo model, vidimo šta se dešava sa rezidualima, ispitamo njegovu stabilnost i odredimo predikcije.

3.7 Redukcija modela

Kada smo testirali Grendžerovu kauzalnost i ispitali vrednosti IRF-a, prelazimo na redukciju koeficijenata u modelu. Grendžerov test je pokazao koje promenljive treba isključiti (u potpunosti, sa svim njihovim koracima) u kojoj jednačini, a IRF je pokazao i koje korake treba isključiti iz koje jednačine. Sumiranjem oba testa i ocenjivanjem koeficijenta metodom najmanjih kvadrata, dobijamo sistem jednačina dat na ovoj strani. Podsećamo da je količnik ocenjene vrednosti koeficijenta i njegove standardne greške zapravo registrovana t vrednost. Ako je registrovana t vrednost po apsolutnoj vrednosti veća od 1,96, tada je koeficijent statistički značajan na nivou poverenja od 95%. Vrednost koeficijenta determinacije u svim modelima je prilično mala, no, već smo rekli kako to ne mora da bude indicija da je model loš. Male vrednosti koeficijenata determinacije pripisujemo linearnosti modela i teškoj predvidljivosti promena koje se dešavaju evropskim indeksima. Kao što smo već i pomenuli, vrednosti koeficijenata uz odgovarajuće promenljive se tretiraju kao koeficijenti elastičnosti i predstavljaju promenu koja se desi na zavisnoj promenljivoj, ako se odgovarajući regresor poveća za jedan procenat, dok su ostale promenljive konstantne.

$$\begin{aligned} DLA(t) = & -\underset{(0{,}1107)}{0,2477}DLC(t-1) + \underset{(0{,}0890)}{0,1703}DLC(t-2) + \underset{(0{,}0992)}{0,2700}DLD(t-1) - \\ & -\underset{(0{,}0978)}{0,2463}DLD(t-2) + \underset{(0{,}0533)}{0,127387}DLI(t-1) \\ & R^2 = 2,82\%, \quad Adj.R^2 = 2,43\%, \quad RSS = 0,2092 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} DLC(t) = & \underset{(0{,}0588)}{0,1202}DLA(t-2) - \underset{(0{,}1081)}{0,3752}DLC(t-1) + \underset{(0{,}0933)}{0,1562}DLC(t-2) + \\ & +\underset{(0{,}0969)}{0,2726}DLD(t-1) - \underset{(0{,}0974)}{0,3447}DLD(t-2) + \underset{(0{,}0520)}{0,1508}DLI(t-1) \\ & R^2 = 2,69\%, \quad Adj.R^2 = 2,20\%, \quad RSS = 0,1985 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} DLD(t) = & -\underset{(0{,}0801)}{0,2107}DLC(t-1) + \underset{(0{,}0796)}{0,1696}DLC(t-2) + \underset{(0{,}0880)}{0,3055}DLD(t-1) - \\ & -\underset{(0{,}0875)}{0,2161}DLD(t-2) \\ & R^2 = 1,74\%, \quad Adj.R^2 = 1,44\%, \quad RSS = 0,1676 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} DLI(t) = & \underset{(0{,}0649)}{0,1347}DLA(t-2) - \underset{(0{,}1282)}{0,3857}DLC(t-1) + \underset{(0{,}1148)}{0,2253}DLD(t-1) - \\ & -\underset{(0{,}0737)}{0,2528}DLD(t-2) + \underset{(0{,}0616)}{0,2129}DLI(t-1) \\ & R^2 = 2,57\%, \quad Adj.R^2 = 2,18\%, \quad RSS = 0,2796 \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} DLP(t) = & -\underset{(0{,}1008)}{0,2532}DLC(t-1) + \underset{(0{,}0897)}{0,1202}DLD(t-1) + \underset{(0{,}0489)}{0,2033}DLI(t-1) \\ & R^2 = 2,08\%, \quad Adj.R^2 = 1,88\%, \quad RSS = 0,1772 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Jednačina (3.6) predstavlja model za predviđanje dešavanja na austrijskom tržištu. Grendžerov test je predvideo da treba uključiti promenljive sa francuskog, nemačkog i španskog tržišta, a IRF nam je dao moguće periode koje treba uključiti. U slučaju austrijskog tržišta, svi koeficijenti su statistički značajni, na nivou poverenja od 95%, sem koeficijenta koji stoji uz drugi period promenljive $DLC(t)$. Njegova t vrednost iznosi 1,91, što je manje od 1,96, no, ukoliko bismo izbacili promenljivu $DLC(t-2)$ iz naše jednačine, vrednost prilagođenog koeficijenta determinacije ($Adj.R^2$) bi se smanjila. Podsetimo se i da nam prilagođena vrednost koeficijenta determinacije daje mogućnost poređenja dva modela sa različitim uključenim promenljivama. Zaključak je da, iako je koeficijent uz promenljivu $DLC(t-2)$ na granici statističke značajnosti, ne treba isključivati promenljivu $DLC(t-2)$ u jednačini koja predstavlja austrijsko tržište.

Što se tiče francuskog tržišta, Grendžer nam je rekao da su nam za predviđanja bitna dešavanja na nemačkom i španskom tržištu, međutim IRF je pokazao da je bitna varijacija sa austrijskog tržišta, i to iz perioda $t-2$. Najveću vrednost prilagođenog koeficijenta determinacije smo dobili kada smo uključili vrednosti iz perioda $t-2$, koje su se desile na austrijskom tržištu, zatim vrednosti iz perioda $t-1$, koje su se desile na španskom tržištu, kao i vrednosti iz oba perioda ($t-1$ i $t-2$), koje su se realizovale na francuskom i nemačkom tržištu. Najveći uticaj ima pariska berza na samu sebe (ukoliko smo juče imali pozitivan rast indeksa za 1%, danas očekujemo pad od približno 0,37%, ukoliko su sve ostale promene fiksne) i to je ujedno i najveći uticaj nekog tržišta u ovoj jednačini. No, veliki je uticaj i nemačkog tržišta. Rast od 1% u vrednosti $DLD(t-1)$ izaziva rast promenljive $DLC(t)$ za 0,27%, ukoliko su sve ostale promene fiksne. Ovim modelom je objašnjeno 2,69% varijacije koja se desila na francuskom tržištu.

Situacija na nemačkom tržištu je prilično jasna - na nemačko tržište može da utiče Francuska i sama Nemačka. I u jednačini (3.8) se javljaju negativni koeficijenti i to uz promenu vrednosti na francuskom tržištu u trenutku $t-1$ i promenu vrednosti na nemačkom tržištu u trenutku $t-2$. I u ovom modelu se javlja negativan uticaj određenih prethodnih promena. Najveći uticaj na današnju promenu vrednosti indeksa nemačkog tržišta ima promena koja se desi prethodnog dana na istom tom tržištu. Ovaj model ima najmanju vrednost koeficijenta determinacije od svih pet modela. Samo 1,74% varijacije koja se dogodi na nemačkom tržištu, može se objasniti varijacijama koje su se desile na nemačkom i francuskom tržištu u periodu od 2010. do 2013. godine. Razmotrimo koeficijente u jednačini (3.8). Rast od 1% u promenljivoj $DLC(t-1)$ izaziva pad današnje vrednosti promenljive $DLD(t)$ za 0,21%, što je malo veći pad od onog koji smo dobili preko jednačine (3.3). Dalje, rast od 1% u promenljivoj $DLD(t-1)$ izaziva rast vrednosti promenljive $DLD(t)$ za približno 0,31%, što je manji rast od onog koji smo dobili na osnovnom nivou.

Španija je zemlja na koju po modelu iz jednačine (3.9) uticaj imaju tri države - Austrija, Nemačka i Francuska. Negde nas ne začuđuje uticaj susedne Francuske i velike Nemačke, ali je zanimljiv uticaj daleke Austrije. Takođe, u modelu nemamo uticaj susednog Portugala. Po modelu, na današnje promene koje se dese na španskom tržištu, uticale su promene od pre dva dana koje su se desile na austrijskom tržištu. To je, pretpostavimo, uticaj daljine. Promene iz prethodnog dana koje se dese u samoj Španiji, Francuskoj i Nemačkoj, takođe imaju bitan uticaj na trenutne promene na madridskoj berzi. Ali, tu je i uticaj promene koja se desila pre dva dana na frankfurtskoj berzi. No, najveći uticaj ipak ima susedna, jaka Francuska. Ukoliko je prethodnog dana vrednost indeksa $CAC40$ porasla za 1% u odnosu na vrednost od pre dva dana, tada očekujemo da će trenutna vrednost indeksa $IBEX35$ pasti za približno 0,39% u odnosu na jučerašnju vrednost tog indeksa. To očekujemo po modelu. Ovaj model objašnjava 2,57% varijacije koja se desi na madridskoj berzi.

Zemlja koja, po našim modelima, nije imala uticaj ni na jednu drugu zemlju je Portugal. Međutim, na nju utiču Francuska, Nemačka i Španija. Iako je Grendžerov test predložio izbacivanje uticaja Nemačke, IRF je nagovestio da se varijacije u Nemačkoj odražavaju na varijacije u Portugalu. Mi smo ocenili jednačinu (3.10) tako što smo koristili prethodne promene koje su se desile u Nemačkoj. Negativan, ali najveći uticaj u ovom modelu ima Francuska. Međutim, nama je bitan i pozitivan uticaj Španije, iz čijih pozitivnih promena očekujemo pozitivne promene i na lisabonskoj berzi. Koeficijent determinacije ni ovde nije veliki, te iznosi 2,08%.

Ono što je, po nama, važnije od analize koeficijenata jeste stabilnost modela i dobre osobine reziduala.

3.8 Osobine reziduala

Pod dobrim osobinama reziduala smatra se odsustvo autokorelacije i heteroskedastičnosti među njima. Takođe, često se testira i mogućnost da su reziduali normalno raspodeljeni. U ovom poglavlju, testiraćemo sve tri pretpostavke. Napominjemo da je, često, dovoljno da imamo odsustvo ili autokorelacije ili heteroskedastičnosti. U praksi, ukoliko je bar jedan uslov zadovoljen, model je prihvatljiv.

Testiraćemo mogućnost postajanja serijske korelacije reda dva, testom Lagranžovih množitelja (LM test). Rezultati LM testa, za svaku od jednačina, su dati u Tabeli 3.10.

Tabela 3.10: Rezultati LM testa

Zavisna promenljiva	Broj perioda	p vrednost
$DLA(t)$	2	0,6205
$DLC(t)$	2	0,5444
$DLD(t)$	2	0,7481
$DLI(t)$	2	0,8794
$DLP(t)$	1	1,0000

Izvor: Sopstveno istraživanje

Kao što vidimo u gornjoj tabeli, sve registrovane p vrednosti su veće od 0,05, te na nivou poverenja od 95% odbacujemo nultu hipotezu da postoji autokorelacija među rezidualima. Kako smo ispunili uslov da nema autokorelacije među rezidualima, može se smatrati da je naš model prihvatljiv. Ipak, treba proveriti i hipotezu o homoskedastičnosti reziduala.

Postojanje heteroskedastičnosti se ispituje BP testom, kao što smo objasnili u poglavlju 2.11. Rezultati BP testa su dati u Tabeli 3.11. Izraz df predstavlja broj stepeni slobode (odnosno broj koeficijenata u modelu).

Tabela 3.11: Rezultati BP testa

Zavisna promenljiva	df	p vrednost
$DLA(t)$	5	0,0000
$DLC(t)$	6	0,0000
$DLD(t)$	4	0,0000
$DLI(t)$	5	0,0000
$DLP(t)$	3	0,0027

Izvor: Sopstveno istraživanje

Sve p vrednosti u gornjoj tabeli su manje od 0,05. To znači da u svakoj jednačini odbacujemo nultu hipotezu o postojanju homoskedastičnosti i prihvatamo alternativnu hipotezu, a to je da imamo heteroskedastičnost među rezidualima. Prisustvo heteroskedastičnosti ne dovodi do toga da su ocene dobijene metodom najmanjih kvadrata pristrasne, ali uzrokuje da ocene nemaju minimalnu varijansu, tj. nisu efikasne. Zato, ako je prisutna heteroskedastičnost, ni predviđanja na osnovu ocena originalnog modela neće biti efikasna. No, postoje mnoge metode kojima se može rešiti heteroskedastičnost u modelu. Najzastupljenija od njih je $ARCH$ metoda i njene modifikacije[33]. Primena metoda koji rešavaju problem heteroskedastičnosti može biti jedan od mogućih pravaca za dalje istraživanje.

Ostaje nam još da sagledamo osobine reziduala i vrednosti JB testa normalnosti. Osobine reziduala su date u Tabeli 3.12. Oznaka R ispred odgovarajuće oznake serije predstavlja oznaku za rezidual.

[33]Za više informacija pogladati [27].

Tabela 3.12: Deskriptivna statistika reziduala modela

	$RDLA(t)$	$RDLC(t)$	$RDLD(t)$	$RDLI(t)$	$RDLP(t)$
Očekivanje	$2,75E-06$	$0,0001$	$0,0004$	$-0,0001$	$-0,0002$
Medijana	$9,52E-05$	$0,0003$	$0,0008$	$-6,32E-05$	$4,87E-07$
Max	$0,0903$	$0,0934$	$0,0538$	$0,1339$	$0,1008$
Min	$-0,0600$	$-0,0532$	$-0,0570$	$-0,0800$	$-0,0546$
Standardna devijacija	$0,0145$	$0,0141$	$0,0129$	$0,0167$	$0,0133$
Koeficijent asimetrije	$0,0616$	$0,1350$	$-0,1171$	$0,3160$	$0,0956$
Koeficijent ekscesa	$5,7730$	$6,1573$	$5,2138$	$8,1264$	$7,3190$
JB test	$318,4769$	$415,0715$	$204,8579$	$1102,7670$	$773,3288$
p vrednost	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$	$0,0000$
Veličina uzorka	992	992	992	992	993

Izvor: Sopstveno istraživanje

Kod svih serija reziduala očekivanje je vrlo blisko nuli i sve serije su stacionarne. Koeficijenti asimetrije su, uglavnom, pozitivni. Jedini negativni koeficijent asimetrije je u koloni koja predstavlja osobine reziduala jednačine, koja odgovara frankfurtskoj berzi. Podsećamo da pozitivna/negativna vrednost koeficijenta asimetrije znači da je većina podataka veća/manja od očekivane vrednosti. Svi koeficijenti ekscesa su veći od tri, te imamo „deblje" raspodele reziduala i više autlajera.

Zaključak je i da nemamo normalnu raspodelu među rezidualima. Raspodela reziduala odstupa od normalne u situaciji kada u jednačini postoji strukturni lom, što se manifestuje u pojavi ekstremnih vrednosti reziduala.

Većina istraživača zagovara teoriju da je neki ekonometrijski model dobar, ukoliko važe sledeća tri uslova:

1. koeficijenti u modelu su statistički značajni i imaju odgovarajući predznak;
2. model ima veliku vrednost koeficijenta determinacije;
3. nema autokorelacije ili heteroskedastičnosti u rezidualima.

Naši modeli imaju statistički značajne koeficijente, iako su predznaci, nekih od njih, začuđujući. Ti koeficijenti se nazivaju i koeficijenti elastičnosti, i mi smo ih, donekle, objasnili. Što se tiče niske vrednosti koeficijenta determinacije, opravdaćemo je linearnošću modela. Možda bi se, kad model ne bi bio linearan, dobile veće vrednosti koeficijenata determinacije, pa bi model bio bolji. Takođe, uticaj na koeficijent determinacije ima i vremenski period za koji posmatramo promenljive. Ipak, male vrednosti koeficijenta determinacije ne moraju, nužno, da ukazuju da je model loš. Zatim, u modelu nemamo autokorelacije, ali imamo heteroskedastičnost. No, nećemo eliminisati heteroskedastičnost. Pokušaj eliminacije bi doveo do koeficijenata koji nisu statistički značajni, (prilagođeni) koeficijent determinacije bi opao, a prediktivne vrednosti bi bile vrlo slične ovima koje ćemo dobiti u „heteroskedastičnom" modelu. Umesto toga, odredićemo robusne standardne greške. Redukovani model, sa robusnim standardnim greškama je dat na narednoj strani i to je naš konačan model.

U novom modelu su nam neki koeficijenti postali statistički neznačajni na nivou poverenja od 95%, međutim većina njih ostaje statistički značajna na nivou poverenja od 90%. Koeficijent je statistički značajan na nivou poverenja od 90% ako mu je registrovana t vrednost, po apsolutnoj vrednosti, veća od 1,65. Kako ne bismo izgubili veći broj promenljivih u novom modelu, koristićemo nivo poverenja od 90%. Koeficijente koji ne ostanu značajni ni na nivou poverenja od 90%, izbacićemo iz modela.

$$\begin{aligned}
DLA(t) = & -\underset{(0,1485)}{0,2477}DLC(t-1) + \underset{(0,1176)}{0,1703}DLC(t-2) + \underset{(0,1366)}{0,2700}DLD(t-1)- \\
& \underset{(0,1261)}{0,2463}DLD(t-2) + \underset{(0,0604)}{0,127387}DLI(t-1) \qquad (3.11) \\
& R^2 = 2,82\%, \quad Adj.R^2 = 2,43\%, \quad RSS = 0,2092 \\
DLC(t) = & \underset{(0,0757)}{0,1566}DLA(t-2) - \underset{(0,1534)}{0,3764}DLC(t-1) + \underset{(0,1368)}{0,2668}DLD(t-1)- \\
& -\underset{(0,0808)}{0,2192}DLD(t-2) + \underset{(0,0608)}{0,1541}DLI(t-1) \qquad (3.12) \\
& R^2 = 2,42\%, \quad Adj.R^2 = 2,02\%, \quad RSS = 0,1991 \\
DLD(t) = & -\underset{(0,1069)}{0,2107}DLC(t-1) + \underset{(0,1013)}{0,1696}DLC(t-2) + \underset{(0,1226)}{0,3055}DLD(t-1)- \\
& -\underset{(0,1125)}{0,2161}DLD(t-2) \qquad (3.13) \\
& R^2 = 1,74\%, \quad Adj.R^2 = 1,44\%, \quad RSS = 0,1676 \\
DLI(t) = & -\underset{(0,1815)}{0,0984}DLC(t-1) - \underset{(0,0506)}{0,1141}DLD(t-2) + \underset{(0,0778)}{0,2002}DLI(t-1) \\
& R^2 = 1,82\%, \quad Adj.R^2 = 1,64\%, \quad RSS = 0,2817 \qquad (3.14) \\
DLP(t) = & -\underset{(0,0722)}{0,1423}DLC(t-1) + \underset{(0,0565)}{0,1950}DLI(t-1) \\
& R^2 = 1,90\%, \quad Adj.R^2 = 1,81\%, \quad RSS = 0,1775 \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Pošto smo odredili model, prelazimo na određivanje prediktivnih vrednosti i ispitivanje stabilnosti samog modela i predikcija.

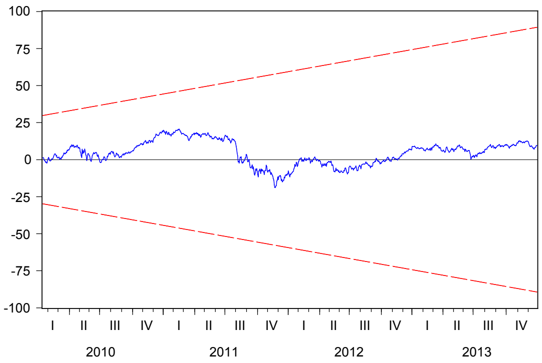
3.9 Određivanje prediktivnih vrednosti i ispitivanje stabilnosti modela

Za period od 2. januara 2014. do 30. decembra 2015, predikcije određujemo statičkom metodom, pomoću modela datog na ovoj strani. Bitno je napomenuti i da predviđamo vrednosti za promenljive na logaritamskom nivou, a ne za logaritamske prinose. Razlog za određivanje predikcija na logaritamskom nivou je taj što je grafički prikaz ovakvih serija lakše uporediv sa stvarnim vrednostima serija na logaritamskom nivou.

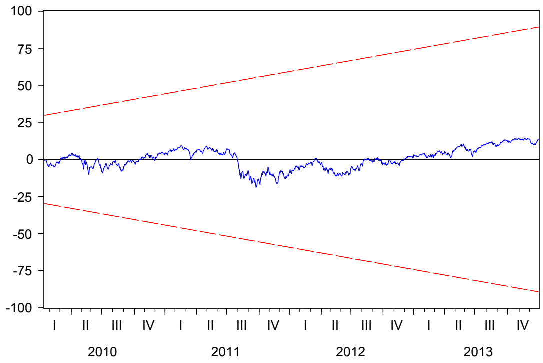
Pošto imamo model, možemo formirati predviđene vrednosti i za period od 4. januara 2010. do 30. decembra 2013. Međutim, te prediktivne vrednosti nećemo prikazivati. Nas zanimaju greške predviđanja koje ćemo dobiti za taj period, kako bismo odredili vrednosti $CUSUM_t$ testa. Grafički prikaz dobijenih rezultata dat je na Grafiku 3.3. $CUSUM_t$ test kaže da je model stabilan, ako grafički prikaz vrednosti tog testa ne izlazi izvan granica specijalno određenih za taj test. Oznaka C ispred odgovarajuće oznake serije je oznaka za $CUSUM_t$ test. Plava linija na našim graficima predstavlja vrednosti $CUSUM_t$ testa, dok crvena isprekidana linija predstavlja granicu značajnosti, na nivou od 5%. Na Graficima 3.3a i 3.3b, koji se odnose na rezultate testa za austrijsko i francusko tržište, plava linija oscilira oko nule. Ovo je dobar znak i modeli koji predstavljaju spomenuta tržišta su najstabilniji od svih pet modela. Na Grafiku 3.3c imamo veće odstupanje, koje se javilo za predviđanja u drugom kvartalu 2012. godine i koje traje sve do kraja odabranog perioda. Najmanje stabilni modeli su oni koji predstavljaju španski i portugalsko tržište. Naime, od početka, kumulativna suma grešaka predviđanja pada ispod nule i ostaje takva sve do kraja odabranog perioda. No, vrednosti $CUSUM_t$ testa svih pet modela ostaju u granicama značajnosti, te su nam svi modeli stabilni. Ovaj zaključak je bitan kako bismo mogli da formiramo prediktivne vrednosti.

Grafik 3.3: Grafički prikaz rezultata stabilnosti modela dobijenih $CUSUM_t$ testom

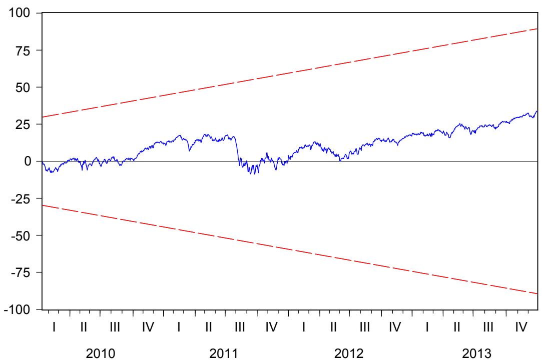
(a) $CLA(t)$



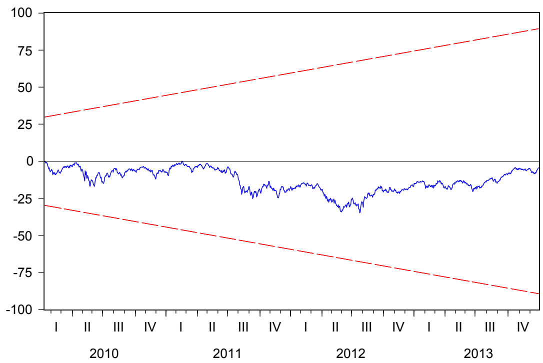
(b) $CLC(t)$



(c) $CLD(t)$



(d) $CLI(t)$



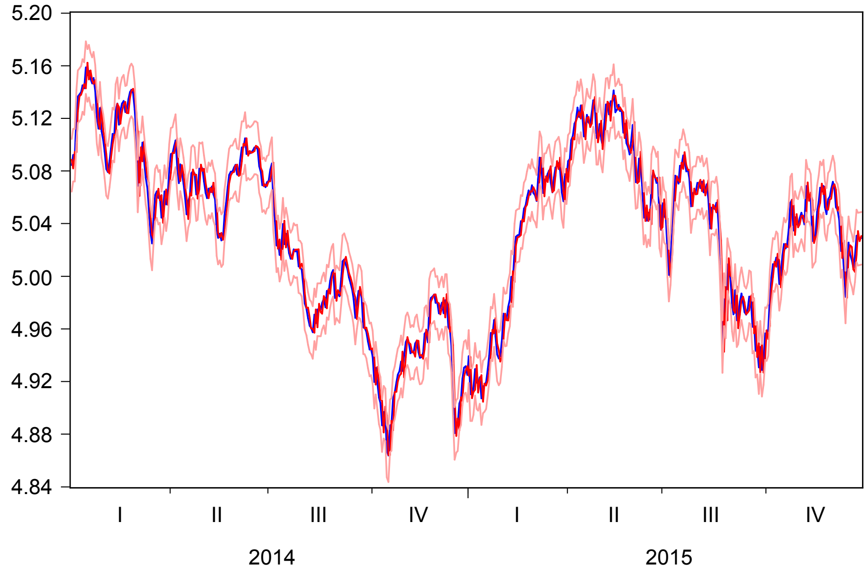
(e) $CLP(t)$

Izvor: Sopstveno istraživanje

Grafički prikaz stvarnih i prediktivnih vrednosti za 2014. i 2015. godinu dat je na Grafiku 3.4. Oznaka f iza odgovarajuće oznake serije predstavlja oznaku za predviđenu vrednost. Plava linija predstavlja stvarne, a crvena prediktivne vrednosti, dok svetlocrvene linije predstavljaju odstupanje stvarnih vrednosti za $\pm\ln(2)\%$. Sem grafičkog prikaza, odredili smo i vrednosti statistika (vrednosti pored svakog grafika) pomoću kojih možemo da analiziramo koliko su nam validne predviđene vrednosti. Podsećamo da se vrednost $MAPE$-a izražava u procentima. Pošto smo analizirali jednačinu koja predstavlja dešavanja na nemačkom tržištu, posmatraćemo i šta se dešava na Grafiku 3.4c. Za sve vrednosti statistika, sem za meru kovarijanse (CM), nam odgovara da su što bliže nuli. Standardna devijacija grešaka predviđanja ($RMSE$) je blizu nule, te su kvadratna odstupanja predviđenih od stvarnih vrednosti vrlo mala. Isto važi i za vrednosti apsolutnih odstupanja (MAE). Vrednost $MAPE$ nam kaže da relativno odstupamo od stvarnih vrednosti, za prosečno 0,1784%. Tejlov koeficijent U je vrlo blizu nule, te je i po tom kriterijumu model dobro odredio predikcije. Mera sistemske greške (BM) daje nagoveštaj da je 0,02% grešaka došlo iz modela, dok mera nesistemske greške (CM) kaže da 99,97% grešaka dolazi od uticaja sredina, tj. od uticaja izvan modela. Na kraju, 0,01% fluktuacija u stvarnim vrednostima nisu dostižne preko fluktuacija u predviđenim vrednostima, što smo zaključili na osnovu mere varijanse (VM). Kao što vidimo, sve vrednosti i jesu onakve kao što nam je potrebno, te možemo zaključiti da su nam prediktivne vrednosti dobro određene. Uviđamo i da naše prediktivne vrednosti „kasne" za stvarnim vrednostima. Međutima, ta njihova razlika nije značajno velika. Nakon iznesenih komentara i na osnovu grafičkih prikaza, zaključujemo da su naš model i statički način predviđanja vrednosti dali dobre rezultate.

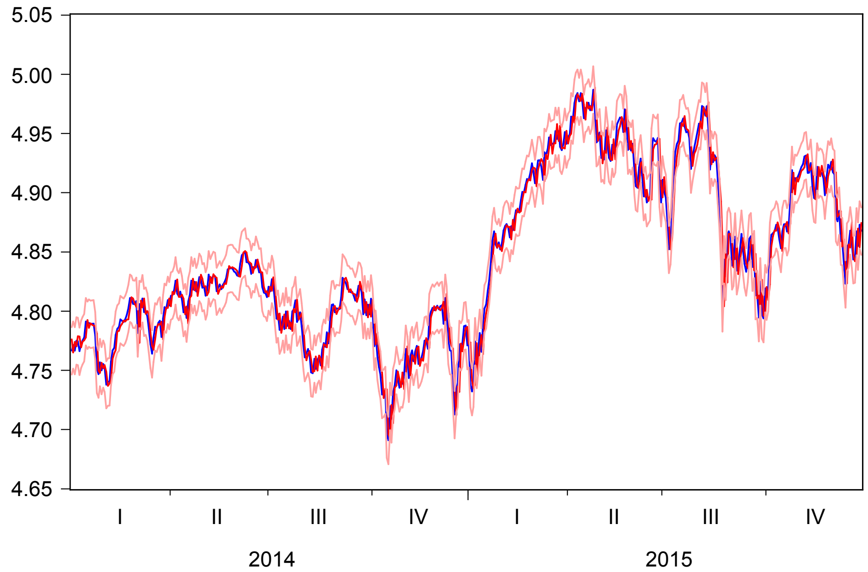
Grafik 3.4: Statičke predikcije i stvarne vrednosti za promenljive na logaritamskom nivou

(a) $LA(t)$ i $LAf(t)$



$RMSE$	=	0,0118
MAE	=	0,0090
$MAPE$	=	0,1800
U	=	0,0012
BM	=	0,0001
CM	=	0,9996
VM	=	0,0003

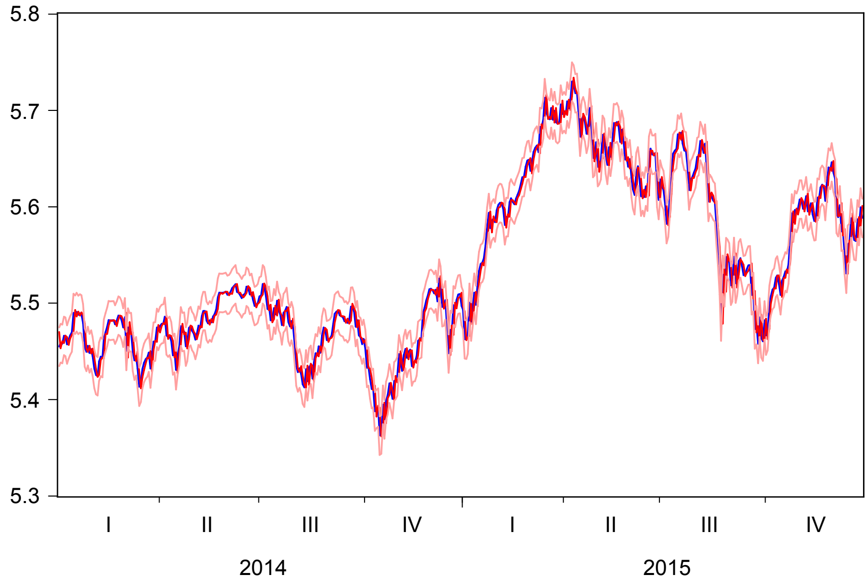
(b) $LC(t)$ i $LCf(t)$



$RMSE$	=	0,0128
MAE	=	0,0095
$MAPE$	=	0,1957
U	=	0,0013
BM	=	0,0004
CM	=	0,9995
VM	=	0,0001

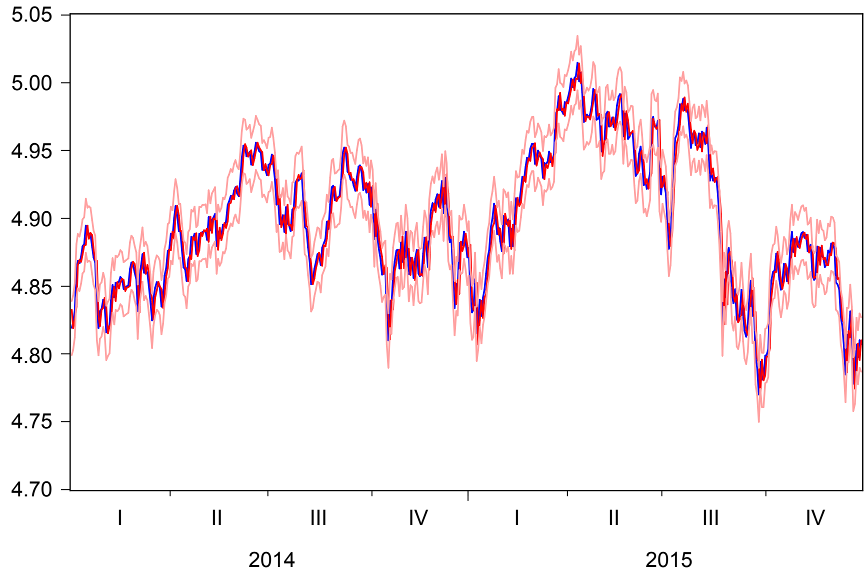
Grafik 3.4: Statičke predikcije i stvarne vrednosti za promenljive na logaritamskom nivou

(c) $LD(t)$ i $LDf(t)$



$$
\begin{aligned}
RMSE &= 0,0132\\
MAE &= 0,0099\\
MAPE &= 0,1784\\
U &= 0,0012\\
BM &= 0,0002\\
CM &= 0,9997\\
VM &= 0,0001
\end{aligned}
$$

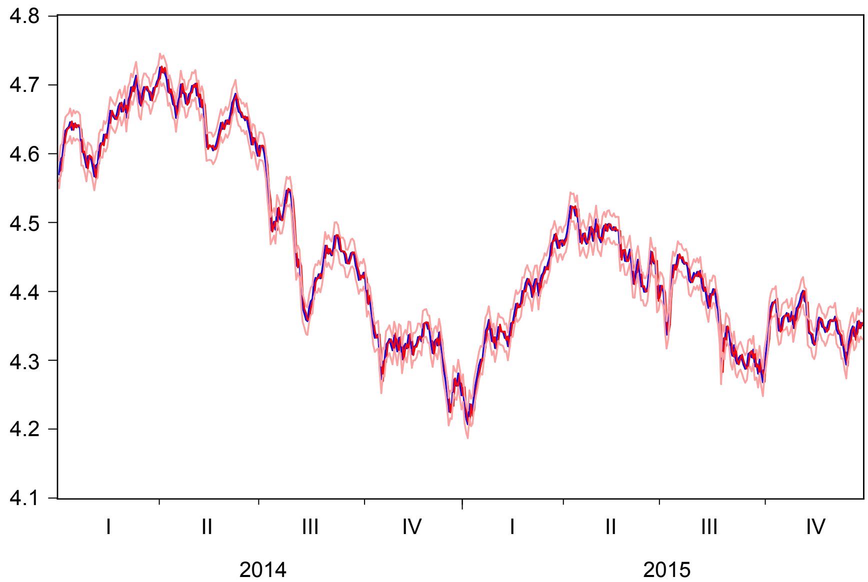
(d) $LI(t)$ i $LIf(t)$



$$
\begin{aligned}
RMSE &= 0,0130\\
MAE &= 0,0098\\
MAPE &= 0,1996\\
U &= 0,0013\\
BM &= 0,0001\\
CM &= 0,9999\\
VM &= 0,0000
\end{aligned}
$$

Grafik 3.4: Statičke predikcije i stvarne vrednosti za promenljive na logaritamskom nivou

(e) $LP(t)$ i $LPf(t)$



$$
\begin{aligned}
RMSE &= 0,0144\\
MAE &= 0,0112\\
MAPE &= 0,2517\\
U &= 0,0016\\
BM &= 0,0007\\
CM &= 0,9992\\
VM &= 0,0001
\end{aligned}
$$

Izvor: Sopstveno istraživanje

Što se tiče rezultata dinamičkog načina predviđanja, daćemo tabelarni prikaz dobijenih rezultata za period od 6. januara 2014. do 10. januara 2014. U Tabeli 3.13 imamo prikaz dobijenih vrednosti. Na osnovu rezultata dobijenih za frankfurtsku berzu, najveće odstupanje smo dobili za 8. januar i tad je naša predviđena vrednost bila manja od stvarne za 0,0059 jedinica. Dinamički predviđene vrednosti se ne razlikuju u velikoj meri od stvarnih vrednosti, za izabrani period, a pored toga, predviđene vrednosti su uspele da „isprate” rast i pad koji se dešava u stvarnim vrednostima. Na primer, stvarna i predviđena vrednost za 7. januar su veće od odgovarajućih vrednosti za 6. januar, što ukazuje na rast vrednosti indeksa u tom periodu. No, iako su dinamički dobijene predviđene vrednosti dobro ispratile stvarne vrednosti (ili bar njihov rast i pad) na kratak rok, nije realno očekivati da bi model uspeo da isprati kretanja na duži rok.

Tabela 3.13: Upoređivanje stvarnih i dinamički predviđenih vrednosti

t	$LA(t)$	$LAdf(t)$
6. januar 2014.	5,0922	5,0946
7. januar 2014.	5,1218	5,0966
8. januar 2014.	5,1366	5,0998
9. januar 2014.	5,1381	5,1000
10. januar 2014.	5,1399	5,0998
t	$LC(t)$	$LCdf(t)$
6. januar 2014.	4,7667	4,7740
7. januar 2014.	4,7750	4,7747
8. januar 2014.	4,7746	4,7812
9. januar 2014.	4,7662	4,7825
10. januar 2014.	4,7722	4,7821
t	$LD(t)$	$LDdf(t)$
6. januar 2014.	5,4579	5,4604
7. januar 2014.	5,4662	5,4619
8. januar 2014.	5,4653	5,4594
9. januar 2014.	5,4573	5,4599
10. januar 2014.	5,4627	5,4622
t	$LI(t)$	$LIdf(t)$
6. januar 2014.	4,8323	4,8249
7. januar 2014.	4,8612	4,8256
8. januar 2014.	4,8686	4,8244
9. januar 2014.	4,8667	4,8233
10. januar 2014.	4,8722	4,8247
t	$LP(t)$	$LPdf(t)$
6. januar 2014.	4,5952	4,5921
7. januar 2014.	4,6195	4,5945
8. januar 2014.	4,6334	4,5990
9. januar 2014.	4,6365	4,6005
10. januar 2014.	4,6388	4,6013

Izvor: Sopstveno istraživanje

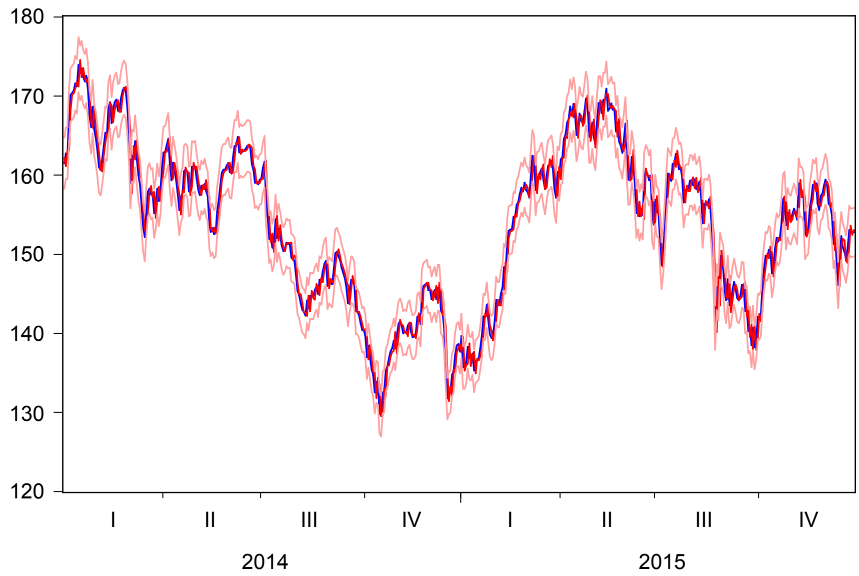
Statička predviđanja su izuzetno „zahvalna” za predviđanje vrednosti „od danas do sutra”, dok za periode od nekoliko narednih dana možemo koristiti i dinamički način predviđanja. Kako radimo sa berzanskim indeksima, velika je verovatnoća da ni sa boljim modelima ne bismo mogli da ispratimo slučajnosti koje se dešavaju na berzama, te smo iz tog razloga zadovoljni dobijenim rezultatima.

3.10 Ispitivanje kredibilnosti statičkih predikcija na osnovnom nivou

Logaritmovanjem vrednosti na osnovnom nivou dobijali smo vrednosti koje smo kasnije koristili za ispitivanje statističkih osobina podataka i formiranje modela. Logaritamska transformacija podataka ima svojih prednosti, koje smo već razjasnili. No, za potencijalnog investitora bitnije su stvarne i prediktivne vrednosti na osnovnom nivou. Investitor se koristi vrednostima koje se kotiraju na berzi i mi ćemo zbog toga predstaviti dobijene podatke na osnovnom nivou, zajedno sa osobinama grešaka predviđanja. Na Grafiku 3.5 date su stvarne i statički predviđene vrednosti na osnovnom nivou. Plava, odnosno crvena linija predstavlja stvarne, odnosno prediktivne vrednosti, dok svetlocrvene linije predstavljaju odstupanja stvarnih vrednosti za ±2%.

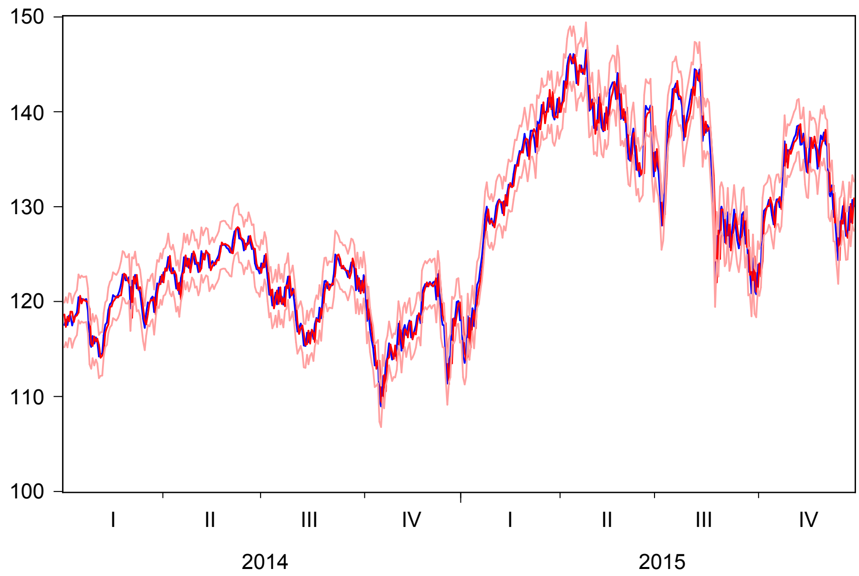
Grafik 3.5: Statičke predikcije i stvarne vrednosti za promenljive na osnovnom nivou

(a) $A(t)$ i $Af(t)$



$$
\begin{aligned}
RMSE &= 1,8068 \\
MAE &= 1,3824 \\
MAPE &= 0,9050 \\
U &= 0,0059 \\
BM &= 0,0001 \\
CM &= 0,9996 \\
VM &= 0,0003
\end{aligned}
$$

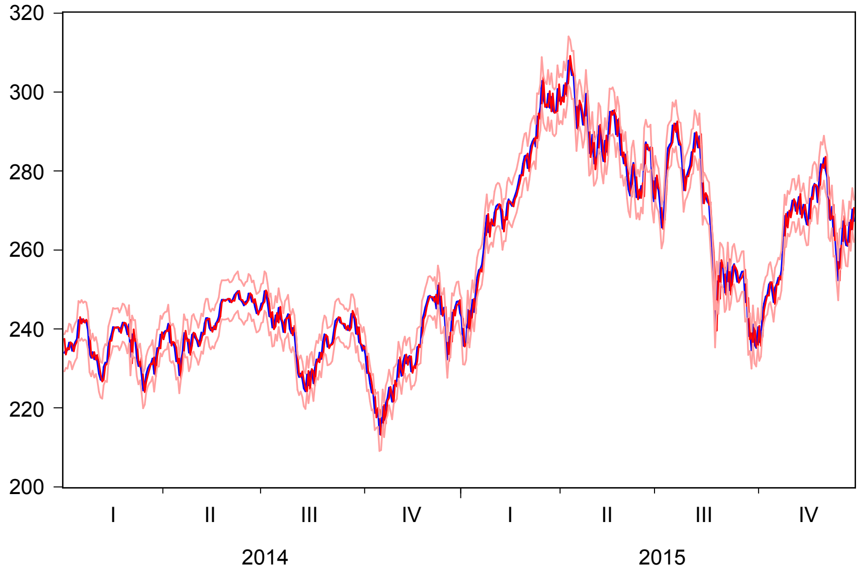
(b) $C(t)$ i $Cf(t)$



$$
\begin{aligned}
RMSE &= 1,6217 \\
MAE &= 1,2050 \\
MAPE &= 0,9479 \\
U &= 0,0064 \\
BM &= 0,0004 \\
CM &= 0,9995 \\
VM &= 0,0001
\end{aligned}
$$

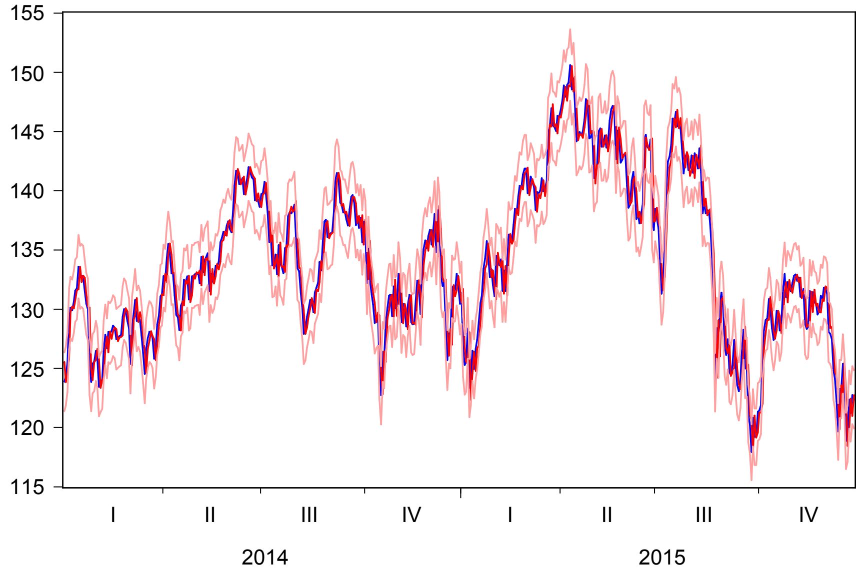
Grafik 3.5: Statičke predikcije i stvarne vrednosti za promenljive na osnovnom nivou

(c) $D(t)$ i $Df(t)$



$$\begin{aligned} RMSE &= 3,3842 \\ MAE &= 2,5279 \\ MAPE &= 0,9882 \\ U &= 0,0066 \\ BM &= 0,0002 \\ CM &= 0,9997 \\ VM &= 0,0001 \end{aligned}$$

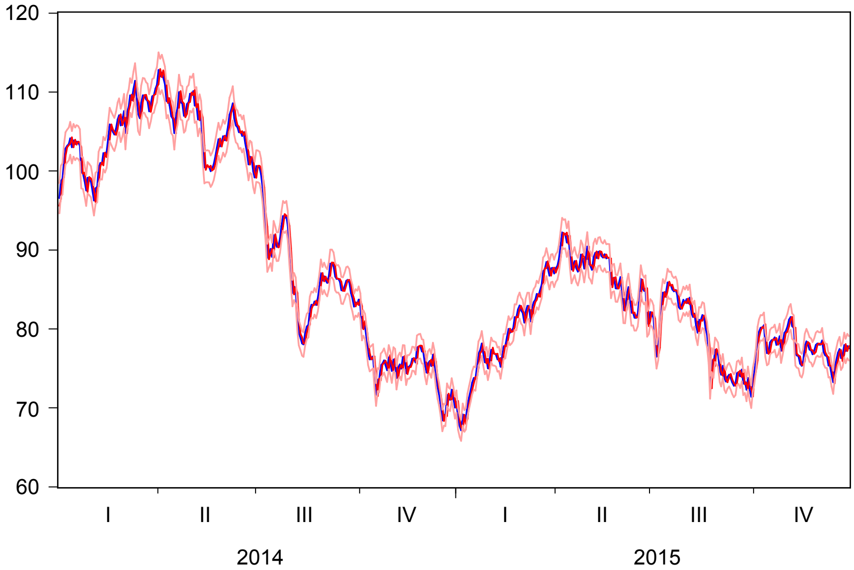
(d) $I(t)$ i $If(t)$



$$\begin{aligned} RMSE &= 1,7167 \\ MAE &= 1,2958 \\ MAPE &= 0,9761 \\ U &= 0,0064 \\ BM &= 0,0001 \\ CM &= 0,9999 \\ VM &= 0,0000 \end{aligned}$$

Grafik 3.5: Statičke predikcije i stvarne vrednosti za promenljive na osnovnom nivou

(e) $P(t)$ i $Pf(t)$



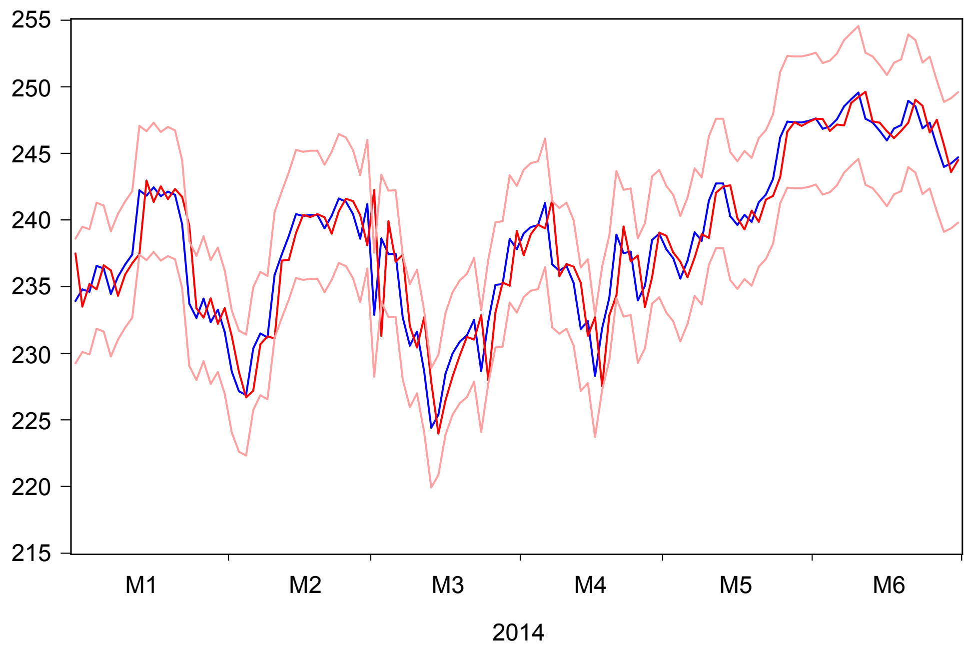
$$
\begin{aligned}
RMSE &= 1,2218\\
MAE &= 0,9528\\
MAPE &= 1,1172\\
U &= 0,0070\\
BM &= 0,0008\\
CM &= 0,9991\\
VM &= 0,0001
\end{aligned}
$$

Izvor: Sopstveno istraživanje

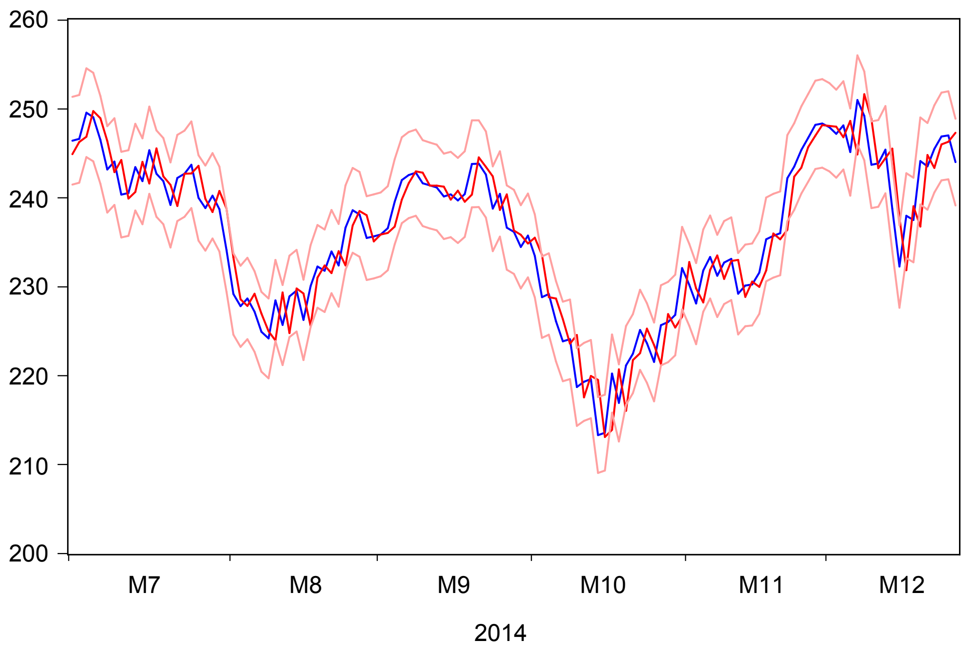
Kako bismo bolje uočili razlike između stvarnih i predviđenih vrednosti, kao i odstupanja veća od ±2%, predstavićemo po segmentima situaciju na nemačkom tržištu. Na Grafiku 3.6 dato je segmentno predstavljanje. Jedan segment, odnosno grafik predstavlja dešavanja u šestomesečnom periodu, sa datim odstupanjem kao gornjom i donjom granicom. Po našim proračunima, u 13,75% slučajeva predviđene vrednosti prelaze granice odstupanja od ±2%. Što će reći da u većini slučajeva, prediktivne vrednosti ostaju u zadatim granicama, te nema zabrinjavajućih odstupanja.

Grafik 3.6: Statičke predikcije i stvarne vrednosti na osnovnom nivou za nemačko tržište

(a)

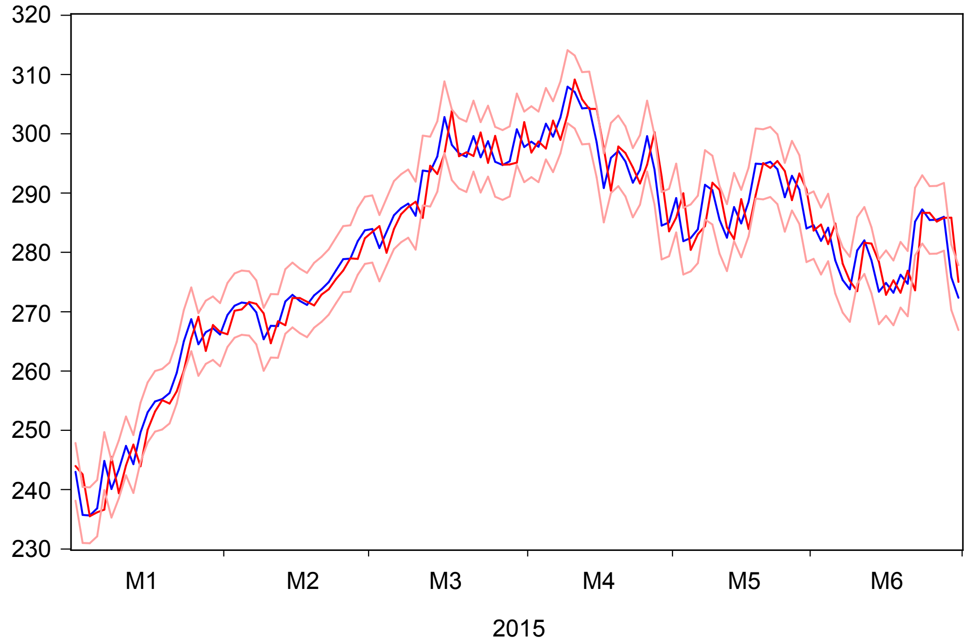


(b)

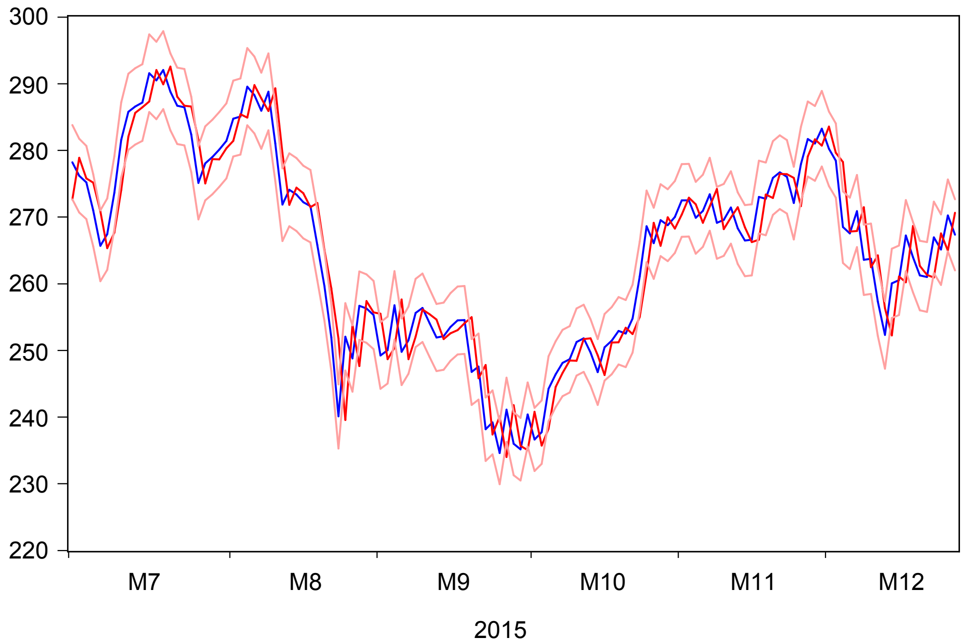


Grafik 3.6: Statičke predikcije i stvarne vrednosti na osnovnom nivou za nemačko tršte

(c)



(d)



Izvor: Sopstveno istraživanje

Ukoliko ne uzmemo u obzir numeričke pokazatelje, grafici 3.4 i 3.5 izgledaju slično. Međutim, njihove numeričke vrednosti se znatno razlikuju. Tako se, recimo, vrednost austrijskog indeksa za odabrani period kreće do najviše 180 indeksnih poena, dok je za nemački indeks ta vrednost oko 320 indeksnih poena. Te razlike jesu jedan od razloga korišćenja logaritamskih transformacija. No, razlika se javlja i u pokazateljima osobina grešaka predviđanja. Naime, sve standardne devijacije grešaka predviđanja su iznad jedan (kod nemačkog tržišta su čak i iznad tri). Ukoliko posmatramo frankfurtsku berzu, imamo da je prosečno kvadratno odstupanje predviđenih od stvarnih vrednosti oko 3,3842 indeksna poena, prosečno apsolutno odstupanje je nešto manje, tj. 2,5279 indeksna poena, a $MAPE$ pokazatelj nam ukazuje da relativno odstupamo od stvarnih vrednosti za oko 0,9882%. Primetimo i da $MAPE$ vrednost ostaje ispod 1% u skoro svim slučajevima (izuzetak je vrednost kod portugalskog tržišta). Procentualne, relativne greške ćemo dodatno razmotriti u ovom poglavlju. Na kraju, Tejlov koeficijent i njegove proporcije su ostali na prihvatljivim nivoima, kao i kod logaritamskih podataka.

Kako bismo bolje sagledali procentualna odstupanja, u narednoj tabeli ćemo razmotriti procenat slučajeva u kojima procentualne, relativne greške (APE) ostaju u zadatim granicama.

Tabela 3.14: Vrednosti APE pokazatelja na osnovnom nivou

Serija	APE vrednost				
	$\leq 1\%$	$\leq 2\%$	$\leq 3\%$	$> 3\%$	max
$Af(t)$	63,7450	91,4340	98,0080	1,9920	4,7446
$Cf(t)$	64,9400	88,0480	96,2150	3,7849	5,8159
$Df(t)$	62,5500	86,2550	97,4100	2,5896	4,9426
$If(t)$	61,9520	88,2470	96,6140	3,3865	5,5467
$Pf(t)$	54,7810	84,6610	95,6180	4,3825	6,0240

Napomena: Sve vrednosti su date u procentima

Izvor: Sopstveno istraživanje

Naime, Tabela 3.14 nam daje procenat slučajeva za koje je vrednost procentualne, relativne greške predviđanja veća, manja ili jednaka od određene vrednosti. Takođe, u datoj tabeli se nalazi i maksimalno, procentualno, relativno odstupanje (po apsolutnoj vrednosti), za svaku seriju podataka. Za frakfurtsku berzu smo dobili da je u 62,55% slučajeva apsolutna vrednost relativne, procentualne greške ispod 1%, u 86,255% slučajeva je ta greška ispod 2%, u 97,41% slučajeva je APE vrednost ispod 3%, dok je iznad 3% u 2,5896% slučajeva. Naše predviđene vrednosti greše za maksimalno 4,9426% (po apsolutnoj vrednosti) i ta apsolutna maksimalna odstupanja su data u poslednjoj koloni tabele. Prema datim vrednostima, grešimo za manje od 3% u preko 95% slučajeva, što se čini kao dobar rezultat. Model je dao najbolje rezultate za austrijsku berzu, a najlošije za portugalsku.

3.11 Analiza dešavanja na tržištima u periodu 2004 – 2009.

Analizom dešavanja na tržištima u periodu od početka 2004. do kraja 2009. godine, dolazimo do sličnih zaključaka kao i za period od 2010. do 2015. Broj merenja u ovom periodu je 1505.

Imamo nestacionarne vremenske serije, koje nakon prvog diferenciranja postaju stacionarne. Serije karakteriše postojanje autlajera (zbog visokog koeficijenta ekscesa) i „nenormalnost" raspodele.

Koeficijenti korelacije su i dalje visoki, odnosno imamo srednje jaku korelaciju u svim slučajevima, sem između Nemačke i Francuske, Nemačke i Španije i Francuske i Španije, gde imamo jaku korelaciju. Kao što vidimo, odnosi Nemačke i Francuske, kao i Francuske i Španije, su i ovom slučaju ostali na istoj snazi.

AIC kriterijum bi nam ukazao da je optimalan broj koraka, koje treba uključiti u model, 20 (na osnovnom nivou), što je mnogo veći broj koraka od ranije dobijenog.

Grendžerova kauzalnost je pokazala da se sve promenljive međusobno Grendžer uzrokuju, sem promenljive $DLA(t)$, koja nema uticaj na promenljivu $DLI(t)$.

Još jedna bitna razlika je ta što bismo testiranjem kointegracije za ovaj period dobili da imamo jednu kointegracijsku jednačinu u modelu. Oblik te jednačine dat je po Modelu 2. Uzećemo za primer jednačinu koja predstavlja stanje na bečkoj berzi. Zbog velikog broja koeficijenata (96), deo jednačine koji se tretira isto kao u VAR analizi, obeležićemo sa c_t. Koeficijenti u tom izrazu nam, trenutno, nisu bitni. Jednačina je data u obliku

$$\begin{aligned} DLA(t) = c_t + \underset{(0{,}0045)}{0,0135}\Big(& LA(t-1) + \underset{(0{,}3217)}{3,6594} - \underset{(0{,}1912)}{2,1504}LC(t-1) - \underset{(0{,}3099)}{1,5782}LD(t-1) + \\ & + \underset{(0{,}3670)}{0,5189}LI(t-1) + \underset{(0{,}2362)}{1,3499}LP(t-1)\Big) \\ & R^2 = 18,68\%, \quad Adj.R^2 = 13,11\%, \quad RSS = 0,3971 \end{aligned} \tag{3.16}$$

U zavisnosti od vrednosti izraza u kointegracijskoj jednačini (k_t), imamo tri slučaja:

1. ukoliko je $k_t = 0$, tada je $E(DLA(t+1)|\mathcal{F}_t) = E(c_{t+1}|\mathcal{F}_t)$, pa vrednost $\hat{c}_{t+1} = E(c_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ predstavlja očekivanu stopu rasta vrednosti indeksa bečke berze u stanju ravnoteže;

2. ukoliko je $k_t > 0$ i $\hat{k}_{t+1} = E(k_{t+1}|\mathcal{F}_t)$, tada je $E(DLA(t+1)|\mathcal{F}_t) = \hat{c}_{t+1} + 0,0135\hat{k}_{t+1} > \hat{c}_{t+1}$, pa ukoliko kombinacija vrednosti indeksa sa pariske, frankfurtske, madridske i lisabonske berze dostigne vrednost manju od ravnotežne (što je vrednost indeksa bečke berze), onda će stopa rasta indeksa sa bečke berze biti veća od ravnotežne stope rasta;

3. ukoliko je $k_t < 0$, tada je $E(DLA(t+1)|\mathcal{F}_t) = \hat{c}_{t+1} + 0,0135\hat{k}_{t+1} < \hat{c}_{t+1}$, pa ukoliko kombinacija vrednosti indeksa sa pariske, frankfurtske, madridske i lisabonske berze dostigne vrednost veću od ravnotežne, onda će stopa rasta indeksa bečke berze biti manja od ravnotežne stope rasta.

U ovom modelu se javlja problem sa koeficijentom prilagođavanja. Naime, nama odgovara kada su koeficijenti brzina prilagođavanja negativni, kako bismo održavali ravnotežu. Ako, recimo, indeksi dostignu vrednost veću od ravnotežne, nama odgovara da njihova stopa rasta bude manja od ravnotežne stope, a to bi se postiglo negativnim koeficijentom prilagođavanja. Međutim, naš koeficijent prilagođavanja za datu jednačinu je pozitivan i to nije dobar znak. Pozitivna vrednost koeficijenta prilagođavanja implicira da naš proces nije dugoročno konvergentan, odnosno ili postoje problemi u specifikaciji modela ili u samim podacima. Naš problem je zapravo u pojavi strukturnog loma. Naime, ispitivali smo kointegraciju na uzorku za period koji obuhvata Veliku ekonomsku krizu i to nam je prouzrokovalo problem.

Vrednosti (prilagođenih) koeficijenata determinacija su znatno više, nego u VAR modelu dobijenom u glavnom istraživanju. U novom modelu, oni dostižu vrednosti i do 22%.

Što se tiče reziduala, nemamo autokorelaciju, homoskedastičnost i normalnost. Međutim, modeli dobijeni za ovaj periodu nisu najbolji primer stabilnih modela. Naime, prema $CUSUM_t$ testu, kod svih modela se javljaju veće oscilacije, koje ostaju u granicama značajnosti, ali značajno odstupaju od nule. Ova pojava je najjače izražena u periodu od početka 2006. do kraja 2008. godine. Ali ovo nas ne začuđuje, jer nestabilnost modela proizilazi iz velikih oscilacija u podacima u datom periodu.

Posledica strukturnog loma u vidu Velike ekonomske krize i uključivanja podataka koji manifestuju to stanje jesu i loše prediktivne vrednosti. Statički dobijene prediktivne vrednosti za period 2010 – 2015. imaju visoke vrednosti sistemskih grešaka, što ukazuje da model nije dobar. U praksi se ovaj problem rešava uvođenjem „lažnih varijabli”, koje su neka vrsta indikatora modelu da sa podacima u periodu na koji ukazuju, postoji problem.

Zaključak

Svrha ovog istraživanja jeste utvrditi moguću zavisnost među odabranim serijama berzanskih indeksa i formirati model i predikcije. Koristili smo se podacima sa pet relevantnih evropskih tržišta, tako što je kretanje na tržištu predstavljeno kretanjem odgovarajućeg berzanskog indeksa na logaritamskom nivou. Svih pet serija berzanskih indeksa su tipični predstavnici serija reda integracije jedan, te smo dobijali stacionarne serije nakon prvog diferenciranja. Prvi potperiod (2010 – 2013) korišćen je za formiranje modela, dok je drugi potperiod (2014 – 2015) korišćen za kontrolu prediktivnih vrednosti. Formirali smo $VAR(2)$ model nad stacionarnim serijama i utvrdili kauzalne veze. Dešavanja na tržištima Nemačke i Francuske imala su veoma bitan uticaj na dešavanja na ostalim tržištima. Ovaj snažan uticaj evropskih sila bio je i očekivan. Glavni problem, koji se javio u istraživanju, jeste prisustvo heteroskedastičnosti u rezidualima. Taj problem nismo otklonili, ali smo ga „zaobišli" određivanje robusnih standardnih grešaka. Na kraju smo dobili stabilne modele, pomoću kojih smo dobili prediktivne vrednosti koje dobro opisuju stvarno stanje.

Analizom međusobnog uticaja izabranih tržišta u periodu od početka 2004. do kraja 2009. godine, dobili smo nešto složeniji model, u kojem sudeluje kointegracijska jednačina. U ovom periodu smo imali i veće koeficijente determinacije, nego u periodu 2010 – 2015. Prediktivne vrednosti su bile malo manje od stvarnih, ali nismo dobili zadovoljavajuće vrednosti sistemskih grešaka.

Odabrana tržišta Evrope, u svim posmatranim periodima, nisu nezavisna. Jedan od razloga ekonomske zavisnosti jeste taj što su sva izabrana tržišta deo Evropske unije, ali su i geografski povezana. Da smo, nekim slučajem, isključili nemačko i francusko tržište iz istraživanje, dobili bismo postojanje jedne kointegracijske jednačine u period 2010 – 2013. Razlog za taj što Nemačka i Francuska beleže uzlazni trend u ovom periodu, dok se indeksi ostalih triju zemalja beleže neki vid oscilacija oko srednje vrednosti. Zbog sličnosti u kretanju indeksa Austrije, Španije i Portugala test traga bi ukazao na postojanje jedne kointegracijske jednačine.

Buduća istraživanja mogu uključiti neke nelinearne matematičke modele ili koristiti panel podatke[34]. Takođe, mogu se uvesti $ARCH$ model i njegove modifikacije, kako bi se rešio problem heteroskedastičnosti, te bi se na taj način ispratilo kretanje volatilnosti tokom vremena.

[34] Panel podaci su podaci koji imaju i prostornu i vremensku dimenziju

Literatura

[1] Taleb NN. The Black Swan: The impact of the Highly Improbable. New York: Random House; 2007.

[2] Comincioli B. The Stock Market as a Leading Indicator: An Application of Granger Causality. The Park Place Econ [Internet]. 1996; 4(1): 31-40. Dostupno na: http://digitalcommons.iwu.edu/parkplace/vol4/iss1/13

[3] Kasa K. Common stochastic trends in international stock markets. J Monetary Econ. 1992; 29(1): 95-124.

[4] Pearce DK. Stock Prices and the Economy. Econ Rev. Novembar 1983; 68(9) : 7-22.

[5] Peek J, Rosengren ES. The stock market and economic activity. N Engl Econ Rev. Maj 1988; 39-50.

[6] Corhay A, Tourani AR, Urbain JP. Common stochastic trends in European stock markets. Econ Lett. 1993; 42(4): 385-390.

[7] Milla J, Erdinc H. Analysis of Cointegration in Capital Markets of France, Germany and United Kingdom. Econ & Bus J. Oktobar 2009; 2(1): 109-123.

[8] Phengpis C, Apilado VP. Economic interdependence and common stochastic trends: A comparative analysis between EMU and non-EMU stock markets. IRFA. 2004; 13(3): 245-263.

[9] Benoit K. Political Science Home Page [Internet]. London: London School of Economics; 17. mart 2011. [citirano 25. jun 2016.]. Dostupno na: http://www.kenbenoit.net/courses/ME104/logmodels2.pdf

[10] Tsay RS. Analysis of Financial Time Series. 2^{th}ed. New Jersey: A John Wiley & Sons; 2005.

[11] Phillips PCB, Perron P. Testing for a unit root in time series regression. Biometrika. 1988; 75(2): 335–346.

[12] MacKinnon JG, White H. Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties. J Econometrics. 1985; 29(3): 305-325.

[13] Dickey DA, Fuller WA. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. J Am Stat Assoc. Jun 1979; 74(366): 427-431.

[14] Sims CA. Macroeconomics and reality. Econometrica. Januar 1980; 48(1): 1-48.

[15] Granger CW. Some recent development in a concept of causality. J Econometrics. 1988; 39(1): 199-211.

[16] Engle RF, Granger CW. Cointegration and error correction: Representation, estimation, and testing. Econometrica. Mart 1987; 55(2): 251-276.

[17] Johansen S. Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. Econometrica. Novembar 1991; 59(6): 1551-1580.

[18] McNees SK. Forecasting accuracy of alternative techniques: A comparison of US macroeconomic forecasts. J Bus Econ Stat. 1986; 2(4), 497-498.

[19] Phillips PCB, Ouliaris S. Asymptotic Properties of Residual Based Tests for Cointegration. Econometrica. 1990; 58(1): 165–193.

[20] Johansen S, Juselius K. Maximum likelihood estimation and inference on cointegration - with applications to the demand for money. Oxford B Econ Stat. 1990; 52(2): 169-210.

[21] Breusch TS. Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models. Aust Econ Pap. Decembar 1978; 17(31): 334-355.

[22] Godfrey LG. Testing for Higher Order Serial Correlation in Regression Equations When the Regressors Include Lagged Dependent Variables. Econometrica. Novembar 1978; 46(6): 1303-1310.

[23] Maddala GS. Introduction to Econometrics. 2^{th}ed. New York: Macmillan Publishing Company; 1992.

[24] Breusch TS, Pagan AR. A Simple Test for Heteroskedasticity and Random Coefficient Variation. Econometrica. 1979; 47(5): 1287–1294.

[25] White H. A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity. Econometrica. 1980; 48(4): 817-838.

[26] Brown RL, Durbin J, Evans JM. (1975) Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time. J Roy Soc B Met. 1975; 37(2): 149-192.

[27] Engle RF. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. Econometrica. 1982; 50(4): 987–1007.

Kratka biografija

Dragana Vasiljević je rođena 1. marta 1992. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Veljko Vlahović" završila je u Novom Sadu 2007. godine i nosilac je „Vukove diplome". Tehničku školu „Mileva Marić-Ajnštajn", smer arhitektonski tehničar - ogled, završila je u Novom Sadu, 2011. godine. Sve četiri godine je bila odličan učenik. Nakon toga je upisala Prirodno-matematički fakultet, smer primenjena matematika, modul matematika finansija, gde je 2014. godine završila osnovne studije. Iste godine upisuje i master studije na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija, zaključno sa aprilskim rokom 2016. godine i ostvarila prosek 8,87.

Dobitnica je prve nagrade na takmičenju „Korak u novi vek '10" i državne stipendije za 2010/2011. godinu. Predsednica je nevladinog udruženja sa kojim ima nekoliko realizovanih projekata iz oblasti kulture, na nivou grada Novog Sada.

Novi Sad, septembar 2016. Dragana Vasiljević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD

Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ

Vrsta rada: *master rad*
VR

Autor: *Dragana Vasiljević*
AU

Mentor: *docent dr Nataša Krklec Jerinkić*
MN

Naslov rada: *Kretanje relevantnih evropskih tržišnih indeksa*
NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP

Jezik izvoda: *s/e*
JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP

Godina: *2016.*
GO

Izdavač: *autorski reprint*
IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA

Fizički opis rada: *5 poglavlja, 78 strana, 27 lit. citata, 15 tabela, 6 grafika*
FO

Naučna oblast: *matematika*
NO

Naučna disciplina: *primenjena matematika*
ND

Ključne reči: *indeksi, berza, tržište, Evropa, kauzalnost, kointegracija, nezavisnost, ekonomski odnosi, VAR, VECM*
PO
UDK

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: *Cilj rada je da istraži u kojoj meri (relevantna) razvijena tržišta Evrope utiču jedna na druge. Za predstavnike tržišta uzeti su odgovarajući tržišni indeksi. Koristeći se podacima sa izabranih berzi, formiraće se matematički modeli i predikcije. U radu se koriste VAR i $VECM$ modeli, kao i razni statistički testovi.*
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *13. april 2016.*
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Nataša Krejić, redovni profesor*
Član: *dr Nataša Kraklec Jerinkić, docent*
Član: *dr Dora Seleši, vanredni profesor*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: *monograph type*
DT
Type of record: *printed text*
TR
Contents code: *master thesis*
CC
Author: *Dragana Vasiljević*
AU
Mentor: *docent dr Nataša Krklec Jerinkić*
MN
Title: *The movement of the relevant European stock markets indices*
XI
Language of text: *serbian (latin)*
LT
Language of abstract: *s/e*
LA
Country of publication: *Republic of Serbia*
CP
Locality of publication: *Vojvodina*
LP
Publication year: *2016.*
PY
Publisher: *author's reprint*
PU
Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP
Physical description: *5 sections, 78 pages, 27 references, 15 tables, 6 graphs*
PD
Scientific field: *mathematics*
SF
Scientific discipline: *applied mathematics*
SD
Key words: *indices, stock market, market, Europe, causality, cointegration, independence, economic relations, VAR, VECM*
UC
Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Science, Novi Sad*

HD

Note:
N

Abstract: *The purpose of the paper is to investigate how much (relevant) developed European stock markets influence each other. For market representatives were taken corresponding market indices. Using data from selected stock markets will be set up mathematical models and predictions. The paper uses VAR and $VECM$ models and various statistical tests.*
AB

Accepted by the Scientific Board on: *13 April 2016*
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB
President: *dr Nataša Krejić, full professor*
Member: *dr Nataša Krklec Jerinkić, docent*
Member: *dr Dora Seleši, associate professor*