



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU



Enika Juhas

NEKE PRIMENE AUTOREGRESIVNIH MODELA

-MASTER RAD-

Mentor
dr Nataša Krklec Jerinkić

Novi Sad, 2019

Sadržaj

Uvod	1
1 Osnovi pojmovi o kriptovalutama	3
1.1 Transakcije kriptovalutama - osnovni pojam <i>blockchain</i> tehnologije	4
1.1 Osnovne karakteristike nekoliko važnijih kriptovaluta	5
1.3 Trenutna situacija prihvatanja i popularnosti kriptovalute i faktori koje utiču na cenu ..	7
2 Osnovni pojmovi o obveznicama	8
2.1 Odnos cena i prinosa obveznice	9
2.2 Obveznice Sjedinjene Američke Države i faktori koji utiču na cenu	10
3 Teorijska pozadina metodologije istraživanja	11
3.1 Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće i stohastičke analize i definicija vremenske serije	11
3.2 Numeričke karakteristike vremenske serije	14
3.3 Komponente vremenske serije	15
3.4 Stacionarnost vremenske serije i beli šum	16
3.4.1 Testiranje stacionarnosti testiranjem postojanja jediničnog korena	17
3.5 Diferenciranje vremenske serije	18
3.6 Linearni modeli vremenskih serija	19
3.6.1 Vektorski autoregresivni model – VAR model	19
3.6.2 Određivanje reda VAR modela	20
3.6.3 Pojam kointegracije	20
3.6.4 Kointegracija i vektorski autoregresivni model sa korekcijom greške (VECM)	21
3.6.5 <i>Johansen</i> – ov test najvećeg karakterističnog korena	21
3.6.6 Grendžerova kauzalnost	22
3.6.7 <i>Breusch – Godfrey</i> test autokorelacije među rezidualima (BG test)	23
3.6.8 <i>White</i> – ov test heteroskedastičnosti	24
3.6.9 CUSUM test stabilnosti modela	25
3.6.10 Formiranje prediktivnih vrednosti pomoću VAR modela	26
3.7 Nelinearni modeli vremenskih serija	26
3.7.1 Neuronske mreže u analizi vremenske serije	26
3.7.2 Autoregresivni model neuronske mreže – NNAR model	28
3.7.3 Određivanje reda NNAR modela	29
3.7.4 Testiranje adekvatnosti NNAR modela	29

3.7.5	Formiranje prediktivnih vrednosti NNAR modelom	30
4	Istraživanje	31
4.1	Grafički prikaz i osnovne statističke osobine kriptovalute.....	32
4.2	Modeli za predikciju kriptovalute	37
4.3	Formiranje VAR modela za kriptovalute	39
4.3.1	Testiranje stacionarnosti podataka i korelaciona matrica	39
4.3.2	Određivanje reda VAR modela	40
4.3.3	<i>Johansen</i> – ov test kointegracije.....	40
4.3.4	Testiranje Grendžerove kauzalnosti.....	40
4.3.5	Ocenjeni VAR model.....	41
4.3.6	Provera adekvatnosti VAR modela	42
4.3.7	Osobine rezidula VAR modela.....	43
4.3.8	CUSUM test stabilnosti modela	43
4.4	Formiranje predikcije pomoću VAR modela za kriptovalute.....	44
4.5	Formiranje NNAR modela za kriptovalute.....	47
4.5.1	Testiranje adekvatnosti NNAR modela	48
4.5.2	Osobine reziduala NNAR modela	48
4.6	Formiranje predikcije pomoću NNAR modela za kriptovalute.....	49
4.7	Upoređivanja modela za kriptovalute.....	51
4.8	Grafički prikaz i osnovne statističke osobine prinosa obveznica	53
4.9	Formiranje VAR modela za prinose obveznice	57
4.9.1	Testiranje stacionarnosti podataka.....	57
4.9.2	Određivanje redaVAR modela	57
4.9.3	<i>Johansen</i> – ov test kointegracije.....	57
4.9.4	Testiranje Grendžerove kauzalnosti.....	57
4.9.5	Ocenjeni VAR model.....	58
4.9.6	Provera adekvatnosti VAR modela	60
4.9.7	Osobine reziduala VAR modela	60
4.9.8	CUSUM test stabilnosti modela	60
4.10	Formiranje predikcije pomoću VAR modela za prinose	61
4.11	Formiranje NNAR modela za prinose	64
4.11.1	Testiranje adekvatnosti NNAR modela	65
4.11.2	Osobine reziduala NNAR modela	65
4.12	Formiranje predikcije pomoću NNAR modela za prinose	66

4.13 Upoređivanje modela za prinose.....	68
Zaključak.....	70
Dodatak.....	72
Literatura.....	76

Popis grafika

Grafik 3.7.1.1: <i>Potpuno povezana četvoroslojna neuronska mreža</i>	27
Grafik 4.1.1: <i>Kretanje dnevne cene kriptovalute u dolarima</i>	33
Grafik 4.1.2: <i>Logaritamski prinosi cene kriptovalute</i>	35
Grafik 4.2.1: <i>Cene kriptovalute na logaritamskom nivou</i>	38
Grafik 4.3.8.1: <i>Grafička predstava CUSUM testa stabilnosti modela za kriptovalute</i>	44
Grafik 4.4.1: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena BTC</i>	45
Grafik 4.4.2: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena ETH</i>	45
Grafik 4.4.3: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena XRP</i>	46
Grafik 4.6.1: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena BTC</i>	49
Grafik 4.6.2: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena ETH</i>	50
Grafik 4.6.3: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena XRP</i>	50
Grafik 4.8.1: <i>Prinosi srednjoročnih kuponskih obveznica SAD</i>	53
Grafik 4.8.2: <i>Prinosi državnih obveznica na diferenciranom logaritamskom nivou</i>	55
Grafik 4.9.8.1: <i>Grafička predstava CUSUM testa stabilnosti modela za prinose</i>	61
Grafik 4.10.1: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti prinosa DG</i>	62
Grafik 4.10.2: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti prinosa PG</i>	62
Grafik 4.10.3: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti prinosa SG</i>	63
Grafik 4.12.1: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za DG</i>	66
Grafik 4.12.2: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za PG</i>	66
Grafik 4.12.3: <i>Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za SG</i>	67

Popis tabela

Tabela 4.1.1: <i>Deskriptivna statistika za logaritamske prinose kriptovalute</i>	36
Tabela 4.1.2: <i>Matrica koeficijenata korelacije za logaritamske prinose kriptovalute</i>	36
Tabela 4.3.1.1: <i>Rezultati DF testa na logaritamskom nivou cena kriptovalute</i>	39
Tabela 4.3.1.2: <i>Korelaciona matrica za logaritamske prinose DLBTC, DLETH i DLXRP</i>	40
Tabela 4.3.4.1: <i>Rezultati Grendžerove statistike za kriptovalute</i>	41
Tabela 4.3.5.1: <i>Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose BTC</i>	41
Tabela 4.3.5.2: <i>Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose ETH</i>	41
Tabela 4.3.5.3: <i>Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose XRP</i>	42
Tabela 4.3.7.1: <i>Deskriptivna statistika reziduala VAR modela za kriptovalute</i>	43
Tabela 4.4.1: <i>Greške predikcije VAR modela za kriptovalute</i>	46
Tabela 4.5.1: <i>Ocenjeni koeficijenti NNAR modela za logaritamske cene kriptovalute</i>	47
Tabela 4.5.1.1: <i>Ljung - Box - ova statistika reziduala NNAR modela za kriptovalute</i>	48
Tabela 4.5.2.1: <i>Deskriptivna statistika reziduala NNAR modela za kriptovalute</i>	48
Tabela 4.6.1: <i>Greške predikcije NNAR modela za kriptovalute</i>	51
Tabela 4.7.1: <i>Greške predikcije VAR i NNAR modela za kriptovalute</i>	52
Tabela 4.8.1: <i>Deskriptivna statistika za prinose na diferenciranom logaritamskom nivou</i>	56
Tabela 4.8.2: <i>Matrica koeficijenata korelacije za prinose</i>	56
Tabela 4.9.1: <i>Rezultati DF testa na logaritamskom nivou za prinose</i>	57
Tabela 4.9.4.1: <i>Rezultati Grendžerove statistike za prinose</i>	58
Tabela 4.9.5.1: <i>Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose DG</i>	58
Tabela 4.9.5.2: <i>Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose PG</i>	59
Tabela 4.9.5.3: <i>Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose SG</i>	59
Tabela 4.9.7.1: <i>Deskriptivna statistika za diferencirane logaritamske prinose</i>	60
Tabela 4.10.1: <i>Greške predikcije VAR modela za prinose</i>	63
Tabela 4.10.2: <i>Primer dinamičke predikcije za prinose</i>	64
Tabela 4.11.1: <i>Ocenjeni koeficijenti NNAR modela za prinose</i>	64
Tabela 4.11.1.1: <i>Ljung - Box - ova statistika reziduala NNAR modela za prinose</i>	65
Tabela 4.11.2.1: <i>Deskriptivna statistika reziduala NNAR modela za prinose</i>	65
Tabela 4.12.1: <i>Greške predikcije NNAR modela za prinose</i>	67
Tabela 4.12.2: <i>Primer dinamičke predikcije za prinose</i>	68
Tabela 4.13.1 : <i>Greške predikcije VAR i NNAR modela za prinose</i>	68

Uvod

U poslednjih nekoliko decenija postaju sve više popularni modeli vremenskih serija koji se koriste za predviđanje buduće vrednosti istih. Glavni cilj modeliranja je da se pažljivim prikupljanjem i rigoroznom analizom vrednosti posmatrane vremenske serije uspostavi adekvatan model koji opisuje njene inherentne strukture. Izgrađeni model se zatim koristi za generisanje buduće vrednosti serije. U opštem slučaju, ovi modeli se oslanjaju na prošle vrednosti posmatrane serije koje se koriste kao promenjive za opis njene sadašnje vrednosti. To se zove autoregresija. Predikcija vrednosti vremenskih serija zbog toga se može tumačiti kao način predviđanja budućnosti na osnovu razumevanja prošlosti. Modeli vremenskih serija imaju brojnu praktičnu primenu u raznim oblastima, kao što je: poslovanje, ekonomija, finansije, inženjerstvo, itd. Uspešnost predikcije zavisi od toga koliko se dobro može izgrađeni model opisati ponašanjem posmatrane serije.

U ovom radu bavićemo se analizom prediktivne performanse jednodimenzionalnih i višedimenzionalnih autoregresivnih modela primenjenih na finansijske vremenske serije. Iz grupe višedimenzionalnih modela smo izabrali vektorski autoregresivni model (VAR) koji ima daleko najširu primenu u analizi finansijske vremenske serije. On predstavlja jedan primer linearnog modela čija prednost je u tome što uzima u obzir međusobne zavisnosti serije koje su predmet analize. Među jednodimenzionalnim modelima smo izabrali nelinearni autoregresivni model neuronske mreže (NNAR), koja predstavlja jedan primer veštačke neuronske mreže. Oni su nedavno privukli veliku pažnju i postali popularni u predviđanju vremenske serije, pa predstavljaju relativno novu oblast modeliranja. Performansu izabranih modela ćemo testirati na dve različite finansijske vremenske serije, na kriptovalutama i na prinosima državnih obveznica Sjedinjenih Američkih Država (SAD). Ove serije imaju potpuno drugačije ponašanje, jer kriptovalute karakteristiše nestabilna cenovna promena, dok promena prinosa ovih državnih obveznica je relativno stabilna. Na kretanje vrednosti obe serije prvenstveno utiču investicione odluke i očekivanje.

U uvodnom delu ovog rada definišemo opšte pojmove o posmatranim instrumentima. Prvo ćemo se upoznati sa kriptovalutama i tehnologijom ulančanih blokova koja predstavlja osnovu njihovog funkcionisanja, zatim ćemo posmatrati neke njene primene. Takođe, definišemo osnovno kako možemo vršiti transfer novčićima¹. Posle toga ćemo navesti neke od trenutno najpoznatijih kriptovaluta da bismo videli u kojoj meri se oni razlikuju od tradicionalnih digitalnih valuta i međusobno. Kratko ćemo ući i u priču regulacije radi boljeg shvatanja njihove trenutne pozicije u svetu. Nakon toga, definišaćemo pojam državne obveznice. Posmatramo sva lica koja ih mogu emitovati, kao i zajedničke karakteristike koje ih određuju. Tumačićemo i odnos cena i prinosa. Zatim, upoznaćemo se sa vrstama obveznica trezora SAD. Posmatraćemo i bitnije faktore koje određuju kretanje vrednosti kriptovalute i prinose državne obveznice.

Prvi deo rada je posvećen definisanju metodologije istraživanja, gde ćemo detaljno definisati statističke metode istraživanja kao i modele koje ćemo koristiti za predikciju.

¹ Pod pojmom novčić podrazumevamo virtualni novčić

Posle sledi deo istraživanja, gde ćemo odvojeno analizirati istorijske podatke cena kriptovaluta, kojima se može svakodnevno trgovati na berzama, i prinose srednjoročne kuponske obveznice SAD. Ispitujemo statističke osobine posmatrane serije i njihove međusobne zavisnosti. Pomoću niza statističkih testova gradimo različite modele, formiramo predikcije i pokušavamo izabrati najbolje na osnovu greške prediktivnih vrednosti.

Svrha ovog rada je da otkrijemo u kojoj meri mogu biti korisni VAR i NNAR modeli u predviđanju vrednosti posmatranih vremenskih serija, kao i da, na osnovu dobijenih rezultata, izvedemo opšti zaključak o tome koje osobine trebaju da poseduju podaci da bi se dobile dobre predikcije autoregresivnim modelima.

Rezultati testova, grafici i modeli u radu su dobijeni korišćenjem računarskih softvera *R* i *Matlab*.

1 Osnovi pojmovi o kriptovalutama

Trgovina na internetu je počela da se oslanja gotovo isključivo na finansijske institucije koje su služile kao pouzdane treće strane za obradu elektronskog plaćanja. Ovaj sistem dovoljno dobro funkcioniše za većinu transakcija, ali i dalje pati od nekoliko slabosti modela zasnovanog na poverenju. Troškovi posredovanja povećavaju transakcione troškove, ograničavajući time transakcije u minimalnim iznosima. Ne postoji transakcija koja je potpuno irreverzibilna, stvarajući mogućnost prevare. Trgovci moraju biti oprezniji prema svojim klijentima tražeći više informacija od njih nego što im je potrebno kako bi izbegli prevare. I još jedna bitna slabost jeste vremenskog karaktera, upravo zbog posredovanja i opreznosti. Ono što je potrebno u elektronskom sistemu plaćanja, koji je zasnovan na kriptografskom dokazu, jeste dozvoljavanje transakcije direktno između dve strane bez trećeg pouzdanog posrednika. Osnovna motivacija pojavljivanja kriptovalute je korekcija gore navedenih slabosti elektronskih plaćanja. Ova vrsta elektronskog novca je *peer – to – peer* verzija² koja dozvoljava plaćanje direktno između dve strane bez prolaženja kroz finansijske institucije.

Da bismo prešli neke konfuzije oko kriptovaluta, moramo ih razdvojiti na dve komponente. S jedne strane imamo novčić, koji predstavlja vlasništvo nad digitalnim konceptom – kao virtualni novac. S druge strane imamo protokol, distribuirana mreža koja vodi evidenciju bilansa novčića. Obe se nazivaju kriptovaluta, odnosno digitalna valuta. Kriptovalute se mogu koristiti za plaćanje stvari elektronskim putem, ako su obe strane spremne da je prihvate. U ovom smislu ona je ista kao što su tradicionalne valute kojima se takođe trguje digitalno. Ipak, ona se razlikuje od klasične digitalne valute na nekoliko važnih načina, kao što su:

1. Decentralizacija

Najvažnija karakteristika kriptovaluta je da je decentralizovana. Nijedna institucija ne kontroliše mrežu kriptovalute. Kriptovalutama se rešava problem dvostruke potrošnje³ elektronskih valuta kroz genijalne kombinacije kriptografije i ekonomskih podsticaja. Kod klasične elektronske valute ovu funkciju ispunjavaju banke, što im daje kontrolu nad tradicionalnim sistemom, a kod kriptovalute, integritet transakcija održava distribuirana i otvorena mreža koja nije u ničijem vlasništvu.

2. Ograničena ponuda

Klasične valute imaju neograničenu ponudu – centralne banke mogu izdati koliko god žele i mogu manipulirati vrednost valute u odnosu na druge. Sa kriptovalutama, sa druge strane, ponuda je čvrsto kontrolisana pomoću osnovnog algoritma. Mali broj novih novčića izlazi svaki sat, čija se stopa postepeno smanjuje, dok se ne dostigne neka maksimalna količina. Recimo, kod Bitcoin – a, definisana maksimalna količina je 21 milion jedinica novčića [4].

² Odnos računarske mreže u kojima svaki računar može da deluje kao server za druge, omogućavaju zajednički pristup datotekama i periferijama bez potrebe za centralni server.

³ Ona se može lako kopirati i koristiti ponovo.

3. Pseudonimnost

Dok se pošiljaoci tradicionalnih valuta u elektronskom sistemu plaćanja obično identifikuju radi verifikacije i spečavanja pranja novca, korisnici kriptovalute su delom anonimni. Pošto ne postoji centralni „validator”, korisnici se ne moraju identifikovati kada šalju novčiće drugom korisniku. Kada se podnese zahtev za transakcijom, protokol proverava sve prethodne transakcije kako bi potvrdio da pošiljalac ima potreban broj novčića kao i ovlašćenje za slanje. Sistem ne mora znati njegov identitet. Transakcije se mogu pratiti na ovaj način, uz određeni napor. Anonimnost korisnika je delimična, jer postoje razvijeni metodi za identifikaciju korisnika koji su regulisani zakonom, ako se nameće potreba. Osim toga, većina razmena zahteva zakonom proveru identiteta korisnika pre nego što im se dozvoli kupovina ili prodaja kriptovalutama. Zbog navedenih razloga, većina kriptovaluta nije idealno sredstvo plaćanja za kriminalce, teroriste ili za pranje novca. Jedan primer izuzetak je Monero, gde korisnici ostaju potpuno anonimni.

4. Nepromenjenost

Transakcije nisu reverzibilne, za razliku od transakcije sa klasičnim elektronskim valutama, jer ne postoji centralni autoritet koja bi to izvršio. Ako je transakcija snimljena na mreži i ako je prošlo više od sat vremena, nemoguće je izvršiti modifikaciju. Istorija prethodnih transakcija je nepromenljiva i one su zauvek sačuvane u mreži ulančanih blokova.

1.1 Transakcije kriptovalutama - osnovni pojam *blockchain* tehnologije

Kao što već znamo, kriptovaute su decentralizovane. Svi korisnici odgovarajuće kriptovalute su povezani preko *peer – to – peer* mreže i svaki korisnik predstavlja jedan čvor te mreže. Pošto je *peer – to – peer* mreža takva, da svaki korisnik može biti direktno povezan samo sa nekoliko drugih korisnika, to znači da je sa svima ostalima povezan indirektno.

Da bi neka transakcija bila izvršena, mora se potvrditi informacija o tome da pošiljac poseduje odgovarajuću količinu novčića kao i da nema dvostruke potrošnje. Zato, svaka namera transakcije se mora objaviti na mreži odgovarajuće kriptovalute. Informacija o ovoj transakciji se automatski emituje svim korisnicima na mreži. Ovo znači da svaki korisnik ima uvid u transakcije.

Svaki korisnik kriptovalute ima privatni ključ, javni ključ i adresu virtualnog novčanika. Javni ključ se kreira iz privanog ključa na način da je nemoguće uraditi obrnut proces⁴. Zatim se od javnog ključa kreira adresa kriptovalute na koji se primaju novčići. Adresa vodi evidenciju o svim transakcijama i samim tim o ravnoteži. Javni ključ korisnika može videti svako na mreži. Svaka transakcija sadrži digitalni potpis⁵ korisnika koji ju je započeo. Digitalni potpis se generiše iz kombinacije transakcione poruke i privatnog ključa korisnika. Transakcija se validira na javnoj mreži koristeći javni ključ i digitalni potpis kao ulaz određene matematičke funkcije koja određuje da li je data kombinacija moguća ili ne [1]. Ako digitalni potpis odgovara javnom ključu, ostali čvorovi u mreži će potvrditi transakciju bez

⁴ Više detalja u [2]

⁵ Više detalja o generisanju kriptografskog digitalnog potpisa u [3]

informacije o privatnom ključu. Mreža potom potvrđuje da ranije nije potrošen novčić kroz istorije adresa pošiljaoca, koja se proverava pomoću javnog ključa. Kada se i ta informacija potvrdi, transakcija se uključuje u blok, koji se priključuje na prethodni blok - stoga imamo pojam *blockchain* – ulančani blokovi. Transakcije ne mogu biti poništene ili uskladištene, jer to bi značilo da sve naredne blokove treba ponovo uraditi.

1.1.1 Heš funkcija

Heš funkcija je jedna kompleksna matematička jednačina koja generiše nasumični niz karaktera sa fiksnom dužinom. Ova fiksna dužina može da varira u zavisnošću od heš funkcije koja je korišćena (npr. niz od 64 karaktera). Izlaz heš funkcije se zove heš. Niz koji generiše nije slučajan - svaki put kada postavimo isti skup podataka heš funkciji, dobićemo isti niz karaktera, ali ako se promeni recimo zarez, dobijamo potpuno drugačiji niz.

Ulančani blokovi će čuvati istoriju transakcija, gde svaki blok sadrži referencu ka prethodnom sve do prvog generisanog bloka. Za vezivanje blokova se koristi kriptografija, preciznije, heš funkcija. Pošto svaki blok sadrži i heš iz prethodnog bloka, ako bi mali deo prethodnog bloka bio izmenjen, heš tog bloka bi morao da se promeni i samim tim narušava se tačnost trenutnog bloka. Ako bi nešto želeli promeniti u prethodnom bloku morali bi promeniti nešto u trenutnom bloku i to je gotovo neizvodljivo zahvaljujući složenosti heš algoritma. Zbog ovoga su transakcije neizmenjive i rešiv je sistem dvostruke potrošnje.

1.1 Osnovne karakteristike nekoliko važnijih kriptovaluta

Da bismo stekli malo bolji uvid u to kako se pojedine kriptovalute se međusobno razlikuju, posmatrajmo sada neke od njih, koje su trenutno najpopularnije.

Bitcoin

Kao i prethodno već navedeno, Bitcoin se može razdvojiti na dve komponente. Jedan od komponenti je Bitcoin – novčić, deo koji predstavlja vlasništvo nad digitalnim konceptom, a druga je Bitcoin – protokol, distribuirana mreža koja vodi evidenciju bilansa novčića. Oba se nazivaju Bitcoin. Sistem omogućava plaćanje između dva korisnika bez prolaženje preko centralnog autoriteta, kao što su banke. Kreirani su u elektronskoj formi i nemoguće ih je štampati poput dolara ili evra – proizvode ih računari širom sveta rudarenjem, koristeći besplatan softver. Bitcoin je pravi primer onoga što danas nazivamo kriptovaluta, jedna rastuća klasa imovine koja deli karakteristike tradicionalne digitalne valute i čija se verifikacija zasniva na kriptografiji. Pseudonimni programer softvera Satoshi Nakamoto predložio je Bitcoin 2008. godine, kao elektronski sistem plaćanja koji je baziran na matematičkom dokazu. Ideja je bila da se proizvede sredstvo za razmenu nezavisno od bilo kojeg centralnog autoriteta i koje bi se moglo prenositi elektronski na siguran, verifikovan i neizmiriv način. Potom, od 2009.godine je kreirana mreža Bitcoin – a i započela je izdavanje novčića.

Litecoin

Početak izdavanja Litecoin – a je 2011. godina. On je, poput Bitcoina, kriptovaluta koja se generiše rudarstvom i glavna motivacija za njegov nastanak je bila da se poboljša tehnologija Bitcoin – a. On je jedan primer *altcoina*, koje predstavljaju napredne verzije osnovne tehnologije valute iz kojeg su kreirane. Ključna razlika između Litecoin – a i Bitcoin – a je u vremenu koje je potrebno za generisanje bloka, pa samim tim i u obimu transakcije koje mogu tretirati. Pored toga, postoji razlika i u heš algoritmu koje koriste.

Ethereum

Danas se naši lični podaci, loznike i finansijske informacije uglavnom čuvaju na računarima drugih ljudi – u oblacima i serverima u vlasništvu kompanije. Ovakva rešenja imaju niz pogodnosti, jer ove kompanije raspoređuju timove specijalista koji pomažu u čuvanju i zaštiti ovih podataka. Međutim, sa ovom pogodnošću postoji i ranjivost. Haker ili vlada može dobiti nepoželjan pristup vašim fajlovima bez vašeg znanja ili čak ukrasti i menjati informacije. Ethereum je jedna od tehnologija koja koristi tehnologiju ulančanih blokova kao bazu podataka da skladišti informacije. Njegova tehnologija omogućava skladištenje i izvršenje pametnih ugovora⁶, pa za ovu svhu se primenjuju najčešće. Ether je novčić koji je generisan kao nadogradnja sistema Ethereum – a i njegovo izdavanje je započelo 2015. godine.

Ethereum Classic

U maju 2016. godine fond rizičnog kapitala, baziran na pametnim ugovorima, pod nazivom *Decentralized Autonomous Organization* – DAO, koji je izgrađen na Ethereum platformi, podigao je Ether u vrednosti od 168 milion dolara sa namerom da investira u projekte koji koriste pametne ugovore. U istom mesecu je objavljen dokument sa detaljima o bezbednim ranjivostima DAO – a, koji bi omogućio krađu podložnih Ether – a. U junu, u vrednosti od 50 million dolara, ukraden je Ether sa računa DAO koristeći jedan od prethodno objavljenih ranjivosti. Hekerski napad se dogodio zbog ranjivosti DAO – a, a ne zbog bilo kakvih problema sa Ethereumom. Članovi DAO – a i Ethereum – a su došli do odluke da se uvede *hard fork*⁷ u Ethereum kodu. Koncept iza *hard fork* je bio da se izoluju i odvoje svi blokovi koji su sadržali hekerske transakcije s ciljem da ih spreče da preuzmu ukradeni Ether. Ethereum Classic je nastao kada su neki članovi zajednice Ethereum – a odbacili ideju uvođenja *hard fork* – a, poštujući princip da ulančane blokove ne mogu promeniti, i odlučili su da koriste staru verziju Ethereum – a.

Ripple

Ripple je takođe tehnologija koja ima dvostruku ulogu, kao kriptovauta, i kao mreža digitalnih plaćanja za finansijske transakcije. Omišljen je 2012. godine namerom da se olakša

⁶Pametnan ugovor je ugovorna forma koja je uskladištena u ulančanim blokovima i izvršava se kada su ispunjeni određeni uslovi

⁷*Hard fork* je jedan od načina ažuriranja ulančanih blokova, sličan kao neka ažuriranja softvera. U suštini daje izbor vlasnicima da li želi ažurirati ili ne. Posle ažuriranja, vlasnici koji su ažurirali i oni koji nisu ne mogu biti više u interakciji.

transakcija između finansijskih korporacija, uglavnom banaka. Suština je da je Ripple ponudio finansijskim institucijama način da zaobiđu komplikovanu, skupu i sporu proceduru prekograničnog plaćanja. Njegove prednosti su brzina, sigurnost i niži troškovi transakcije. Ripple je u stanju da upravlja sa 1500 transakcija u sekundi, dok je recimo Bitcoin sposoban svega 3-6, a Ethereum 15 transakcija u sekundi. Na mrežu je potom kao nadogradnja došao novčić. Novčić Ripple – a je trenutno jedan od prvih pet vodećih kriptovaluta u terminima tržišne kapitalizacije. Ovaj novčić se ne može rudariti, kao Bitcoin, Ether ili Litecoin, već je svih 100 billiona jedinica novčića izdata u 2012. godini odjednom. Transakcije na Ripple mreži zasnivaju se na konsensus algoritmu⁸ koji služi za validaciju transakcije. Preporučeno je da se korisnici prilikom transafere oslanjaju na nekog od preporučenih učesnika mreže. Konsensus radi na poboljšanju integriteta sistema sprečavajući dvostruku potrošnju. Iako je istorija transakcija javno zabeležena i dostupna na ulančanim blokovima, podaci nisu povezani sa identitetom korisnika.

Ovde treba istaći da je vrednost u Ripple mreži i u njegovoj brzini, a ne u novčiću. Mrežu Ripple – a danas koristi više od 100 banaka, uključujući i *American Express*.

1.3 Trenutna situacija prihvatanja i popularnosti kriptovalute i faktori koje utiču na cenu

Nedavno su novčići kriptovalute preuzeli ulogu investicione imovine, jer su trgovci, institucionalni investitori, i male štediške vide potencijalnu dobit od povećanja cene. Kriptovaluta se može kupiti na berzama ili direktno od drugih ljudi putem tržišta. Plaćenje se može vršiti pomoću kreditnih ili debitnih kartica do žičanih transfera, ili čak i drugim kriptovalutama. Potrebno je samo da posedujemo virtualni novčanik za čuvanje valute.

Posle početnog zbivanja kod zainteresovanih trgovaca u prihvatanju kriptovalute u njihovim maloprodajama i internet prodavnicama, interes je u velikoj meri opao, jer su povećanje naknade za transakcije i nestabilne promene cene učinili njih manje privlačnim za razmenu. Razvijanje alternative plaćanja⁹ i sve veći nadzor i regulativa za sprečavanje pranja novca i ilegalnih transakcija ograničili su korišćenje kriptovalute. Međutim, plaćanje kriptovalutama i dalje je moguće u brojnim mestima, uključujući i fakultete koji dozvoljavaju plaćanje školarine u kriptovaluti, kao što je Fakultet Cumbria u Velikoj Britaniji.

Tržišna kapitalizacija na tržištima kriptovalute sve više je distribuirana putem kretanja cena i porasta broja novih novčića, regulatori širom sveta raspravljaju o nadzoru i korišćenju nove vrste digitalne valute. Ovo utiče na cenu svih kriptovaluta, a posebno na vrednost Bitcoin – a, s obzirom da ima preovladajuću poziciju na tržištu. Veoma mali broj zemalja je proglasio kriptovalute ilegalnim, kao što su recimo Kina ili Rusija, a neki drugi još uvek raspravljaju o tome koje korake treba preuzeti za regulaciju. Evropska centralna banka još uvek veruje da kriptovalute još nisu dovoljno zrele za regulaciju. Evropska Unija, kao i veći deo zemalja ne priznaje kriptovalutama status novca, odnosno finansijskog instrumenta.

⁸ Više detalja na <https://etherplan.com/ripple-consensus-whitepaper.pdf>

⁹Pod pojmom alternativnog plaćanja podrazumevamo sve vrste elektronskog plaćanja koje ne uključuju plaćanje kriptovalutama

U Srbiji takođe nisu regulisane transakcije, i kriptovalute se smatraju nefinansijskim imovinama, pa formalno, trgovina kao i ostvaren prihod imaju poreski tretman jednak poreskom tretmanu kupoprodaje druge nefinansijske imovine.

U slučaju kriptovalute, očekivanja investitora imaju najveći uticaj na kretanje njene vrednosti. Ova očekivanja determinišu faktori kao što su: kretanje cena u prethodnom periodu, aktivnost razvijачa valute, svrha tehnologije, likvidnost i dostupnost, brzina izvršenja transakcije, kao i ukupna tržišna kapitalizacija. Najveći uticaj na kretanje vrednosti ipak predstavlja popularnost odgovarajuće valute, koja prvenstveno proizilazi iz informacije u medijama i berzama na kojima se sa njima trguje. Ovi faktori nisu predvidljivi u velikoj meri, pa vrednost kriptovalute može da se menja u svakom trenutku u velikom rasponu. One predstavljaju jednu od najvolatilnijih finansijskih instrumenata u današnje vreme, koje su obogatile i osiromašile mnoge ljude.

2 Osnovni pojmovi o obveznicama

Najjednostavnije rečeno, obveznice predstavljaju dužničke hartije od vrednosti (HOV) kojom se izdavalac obavezuje da će donosiocu (investitor) na dan dospeća obveznice vratiti uloženi iznos sa dogovorenom kamatom. Kamata može biti fiksna ili varijabilna. Postoje tri glavne kategorije obveznice u zavisnosti od emitenta, to su: korporativne obveznice, obveznice organa uprave i državne obveznice. Korporativne obveznice izdaju kompanije s ciljem prikupljanja potrebnih novčanih sredstava za finansiranje projekata ili dugova. Obveznice organa uprave izdaju državni, regionalni i lokalni organi. Ovaj tip obveznica je obično izuzet od poreza kako bi bio što privlačniji investitorima. Državne obveznice izdaju državni organi, kao što je trezor Sjedinjene Američke Države (SAD). Oni su najsigurnije hartije od vrednosti, jer njihove isplate garantuje država. Kada kompanije, države ili drugi subjekti imaju potrebu da prikupe novac za finansiranje projekata, održavanja tekućih operacija ili refinansiranje postojećih dugova, oni mogu izdavati obveznice direktno investitorima. Zajmoprimac (izdavaoc) izdaje obveznicu na kojoj su obavezno obuhvaćeni uslovi zajma, visina kamate, kao i vreme kada pozajmljena sredstva moraju biti vraćena (datum dospeća). Za razliku od akcija, obveznice ne daju pravo na učestvovanje u vlasništvu preduzeće ili dobiti. Obveznice su jedna od tri klase hartije od vrednosti kojom se investitori susreću. Druge dve klase su gotovinski ekvivalenti i akcije. Obveznicama je moguće trgovati javno, na sekundarnom tržištu¹⁰, ili privatno, među dva investitora. Većina obveznica poseduje neke zajedničke elemente, kao što su:

- **Nominalna vrednost** – Nominalna vrednost je vrednost koju će zajmoprimac isplatiti na dan dospeća obveznice. To je i referentni iznos koji izdavaoc obveznice koristi za obračun kamate.

¹⁰Tržište na kome se obavlja svaka sledeća kupoprodaja (preprodaja) hartija od vrednosti. Investitori trguju između sebe, dok emitenti ne dobijaju nikakva novčana sredstva. Sekundarno tržište može biti u formi organizovane berze ili vanberzanskog tržišta (OTC - over the counter market).

- **Kuponska stopa** – Kupon je deo povratka koji donosioci obveznice zarađuju zbog pozajmljivanja novčanih sredstava. Kamatna stopa koja određuje visinu isplate na osnovu nominalne vrednosti se zove kuponska stopa i izražena je u procentima.
- **Datum kupona** – Datum kada će izdavaoc obveznice isplatiti kamatu. Plaćanje se može vršiti u bilo kom intervalu, ali standardna je polugodišnja isplata.
- **Datum dospeća** – Datum kada će oveznica dospeti i izdavaoc isplatiti nominalnu vrednost donosiocu.
- **Emisiona cena** – Emisiona cena predstavlja početnu cenu obveznice, odnosno ona je cena po kojoj se obveznica izdaje. Tek emitovane HOV se prodaju na primarnom (emisijском) tržištu.
- **Tekuća cena** – Ona je cena obveznice po kojoj se može prodati na sekundarnom tržištu i menja se u svakom trenutku u zavisnosti od više faktora, kao što su: kreditni rejting izdavaoca, dužina vremena do isteka roka obveznice i stopa kupona u poređenju sa prevladajućim tržišnim kamatnim stopama¹¹ u posmatranom okruženju.

2.1 Odnos cena i prinosa obveznice

Dve karakteristike obveznice – kreditni rejting i vreme dospeća – su glavne determinante njene kuponske stope. Ako izdavaoc ima loš kreditni rejting, rizik neizvršenja obveznica je veći. Za ovakve obveznice se plaćaju veće kamate. Obveznice koje imaju veoma dug rok dospeća takođe obično plaćaju višu kamatu, jer je donosioc obveznice više izložen riziku od kamatnih stopa i inflacije. Najkvalitetnije obveznice u smislu kreditnog rejtinga se zovu investiciona ocena i uključuju obveznice koje izdaju razvijene države, kao što je SAD, vrlo stabilne kompanije kao i drugi stabilni organi. Obveznice koje se ne smatraju investicionom ocenom, zovu se obveznice visokog prinosa ili „junk” [16]. Ove obveznice imaju veći rizik od neizvršavanja obaveze, pa investitori zahtevaju veću kuponsku stopu za kompenzaciju rizika. Budući da će obveznice sa fiksnom kuponskom stopom isplatiti isti procenat nominalne vrednosti tokom vremena, tržišna cena obveznice će se promeniti, jer kupon postaje manje ili više atraktivan u odnosu na prevladajuće tržišne kamatne stope. Recimo, ako kamatne stope počinju da opadaju, tada se ekvivalentne obveznice mogu emitovati sa nižom kuponskom stopom, što povlači da originalna obveznica postaje vrednija. Investitori koji žele višu kuponsku stopu će morati da plate dodatni novčani iznos – premiju prvobitnom donosiocu za prodaju. Visina iznosa premije se određuje tako da stare i nove ekvivalentne obveznice donose isti prihod. S druge strane, ako kamatna stopa raste, rasće i stopa kupona ekvivalentne obveznice. Ovo povlači da obveznica sa nižom kuponskom stopom neće biti atraktivna i njoj će se prodajna cena smanjiti na diskontovanu nominalnu vrednost prema novoj kuponskoj stopi. Drugim rečima, tržište obveznice ima tendenciju da se kreće obratno kamatnim stopama. Vrednost obveznice ili portfolija obveznica će da raste ili opada u zavisnosti od promene kamatne stope.

¹¹ Ovde podrazumevamo vrste kamatnih stopa koje se odnose na kredite i depozite

2.2 Obveznice Sjedinjene Američke Države i faktori koji utiču na cenu

Dugovi SAD – a često se finansiraju izdavanjem obveznica. Za izdavanje je zaduženo odeljene za trezor, koje odgovara Ministarstvu finansije u drugim državama. Postoji četiri vrste tržišnih hartija od vrednosti koje izdaje trezor: trezorski zapisi (*T – bills*), srednjoročne kuponske obveznice (*T – notes*), dugoročne kuponske obveznice (*T – bonds*) i trezorski HOV zaštićene od inflacije (*TIPS*). Postoji i nekoliko vrsta netržišnih HOV trezora, uključujući serije državne i lokalne samouprave, serije vladinih dugovnih računa izdatih od strane poverilačkih fondova, kojima upravlja vlada, i štedne obveznice. Sve tržišne HOV koje izdaje trezor su vrlo likvidne i redovno se njima trguje na sekundarnom tržištu. Netržišne HOV se izdaju za preplatnike i ne mogu se prodati na tržištu. Posmatrajmo sada karakteristike tržišnog HOV trezora:

Trezorski zapisi: Oni su obično izdati sa rokom dospeća od četiri, trinaest, dvadeset šest i petdeset dve nedelje. Što je duži rok dospeća, veći je prinos investitora. Trezorski zapisi ne plaćaju kupon, nego se prodaju po diskontovanoj nominalnoj vrednosti na nedeljno održanim aukcijama. Posle aukcije, njima se može trgovati na sekundarnom tržištu. Banke, finansijske institucije i naročito primarni dileri¹² su najveći kupci trezorskih zapisa.

Srednjoročnekuponske obveznice trezora: One su obično izdate sa rokom dospeća od jedne, dve, tri, pet, sedam i deset godina i isplaćuju kupon svakih šest meseci. Njihova početna kupovna cena se determiniše na aukcijama. Godišnja stopa kupona na nominalnu vrednost je približno 3% i varira u zavisnosti od ročnosti obveznica. Među njima, obveznice sa rokom dospeća od deset godina su najprodavniji instrumenti na tržištu obveznica SAD. Banke i tržište trezora koriste njihovu tržišnu vrednost kao referentnu meru za izračunavanje hipotekarnih stopa.

Dugoročne kuponske obveznice trezora: Oni imaju najduži rok dospeća, od dvadeset do trideset godina, i isplaćuju kupon svakih šest meseci, kao i srednjoročne obveznice. Među njima, najčešće su izdate obvezice sa rokom dospeća od trideset godina. Kao i srednjoročne kuponske obveznice, dugoročne kuponske obveznice isplaćuju fiksni iznos kupona, pa njihov prinos do dospeća određuje cenu po kojoj se mogu kupiti na aukcijama. Ako im je prinos dospeća veći nego tržišne kamatne stope, cena obveznice je manja nego nominalna vrednost, i obratno. Ako je prinos dospeća jednak sa kamatnom stopom, cena i nominalna vrednost se poklapaju.

Trezorske HOV zaštićene od inflacije: One su obveznice koje su indeksirane stopom inflacije s ciljem zaštite investitora od negativnih efekata inflacije. Ove vrste obveznica su smatrane kao investicije veoma niskog rizika. Njihova nominalna vrednost raste sa inflacijom koja je merena indeksom potrošačkih cena (CPI), dok stopa kamate koje donosi ostaje nepromenjena. Oni isplaćuju kupon takođe svakih šest meseci. *TIPS* su izdati sa rokom

¹² Primarni dileri su finansijske institucije koje je ministarstvo nadležno za poslove finansija izabralo da obavljaju određene aktivnosti na tržištu državnih hartija od vrednosti, kao i da unapređuju primarno i sekundarno tržište i čije je učešće na tržištu državnih hartija od vrednosti, kao i druge aktivnosti kojima se unapređuje upravljanje javnim dugom i razvoj tržišta državnih hartija od vrednosti.

dospeća pet, deset ili trideset godina i obično imaju nižu kuponsku stopu od ostalih instrumenata trezora.

Kretanje cene državne obveznice, pa samim tim i prinosa, prvenstveno određuju očekivanje o stopi inflacije (jer ona utiče na promene tržišne kamatne stope), koja je u strogoj korelaciji sa planiranom fiskalnom politikom zemlje izdavaoca, očekivanom cenom sirove nafte, očekivanom spoljno – trgovinskom odnosu ekonomski važnijih zemalja i odgovarajuće države, itd. Ako investitori očekuju porast stope inflacije, oni će prodati svoje HOV, pa to utiče na pad vrednosti i porast stope prinosa, i obratno. Pošto je porast stope inflacije u ekonomski razvijenim zemljama relativno stabilan i predvidljiv, stopa prinosa državne obveznice je takođe stabilana i predvidljiva. Ovo čini državne obveznice SAD privlačnim kao investicija. Stopa federalnih fondova¹³ je jedna referentna kamatna stopa koja ima značajan uticaj na kretanje cena obveznice. Ako Federalne Reserve (FED) podižu opseg ove stope, smanjiće se cena svih tržišnih obveznica, i obratno. Pošto ovi instrumenti sa fiksnim prihodom poseduju različite osetljivosti na promene kamatnih stopa, što je u direktnoj vezi sa njihovom ročnošću, pad ili rast cena je različit po instrumentima.

3 Teorijska pozadina metodologije istraživanja

Pri formiranju modela treba voditi računa o tome da on bude adekvatan za opisivanje odgovarajuće vremenske serije, pa se definiše niz statističkih testova i metoda za izgranju optimalnog modela. Osnov ovih statističkih testova i metoda predstavlja teorija verovatnoće, statistika i stohastička analiza. U narednom delu ovog rada ćemo definisati važne pojmove iz ove oblasti, koji su neophodni za razumevanje dalje analize.

3.1 Osnovni pojmovi iz teorije verovatnoće i stohastičke analize i definicija vremenske serije

Aksioma 3.1.1 (Aksioma σ – polja): Podskup \mathcal{F} partitivnog skupa $\mathcal{P}(\Omega)$ je σ – algebra nad Ω ako važe uslovi:

- i) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- ii) ako $A \in \mathcal{F}$, onda i $\bar{A} \in \mathcal{F}$, gde je \bar{A} komplement skupa A
- iii) ako niz $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$, onda i $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

gde Ω predstavlja skup svih mogućih ishoda nekog eksperimenta.

Definicija 3.1.1 Borelova σ – algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je σ – algebra koja se formira pomoću poluzatvorenih intervala na skupu realnih brojeva \mathbb{R} . Definiciju se može proširiti i na n – dimenzionalni skup realnih brojeva \mathbb{R}^n .

¹³ Ona predstavlja kamatnu stopu prema kojoj depozitne institucije (banke i kreditne zajednice) pozajmljuju novčanu rezervu drugim depozitnim institucijama preko noći. Visinu ove stope određuje Odbor Federalnih rezervi u zavisnosti od očekivane stope inflacije i fiskalne politike vlade.

Definicija 3.1.2 Slučajna promenljiva X je apsolutno neprekidna ako postoji nenegativna integrabilna funkcija $\varphi_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$, takva da

$$P(X \in S) = \int_S \varphi_X(x), \text{ za } S \in \mathcal{B},$$

gde je \mathcal{B} Borelova σ -algebra.

Specijalno, za $S = [-\infty, x)$ sledi da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt, \text{ za svako } x \in \mathbb{R},$$

što odgovara funkciji raspodele apsolutno neprekidne slučajne promenljive.

Definicija 3.1.3 Očekivanje ili srednja vrednost apsolutno neprekidne slučajne promenljive X se definiše kao

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi_X dx$$

i ono postoji ako integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi_X dx < \infty$ apsolutno konvergira.

Definicija 3.1.4 Momenat reda k , $k \in \mathbb{N}$, apsolutno neprekidne slučajne promenljive X je

$$E(X^k) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi_X dx$$

i ona postoji ako integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x^k| \varphi_X dx < \infty$ apsolutno konvergira.

Definicija 3.1.5 Centralni momenat reda k , $k \in \mathbb{N}$, apsolutno neprekidne slučajne promenljive X je

$$E\left((X - E(X))^k\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^k \varphi_X dx$$

gde μ_X predstavlja očekivanje slučajne promenljive X . Ona postoji ako dat integral postoji.

Definicija 3.1.6 Centralni momenat reda 2 apsolutno neprekidne slučajne promenljive X se zove disperzija ili varijansa slučajne promenljive X , i ona se označava sa $D(X)$.

Definicija 3.1.7 Standardna devijacija (volatilnost) apsolutno neprekidne slučajne promenljive X se definiše kao

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Dakle, ona je brojna karakteristika koja predstavlja meru odstupanja od srednje vrednosti.

Definicija 3.1.8 Kovarijansa između slučajne promenljive X i Y se definiše kao:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Definicija 3.1.9 Preslikavanje $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, jeste n – dimenzionalna slučajna promenljiva na prostoru verovatnoća (Ω, \mathcal{F}, P) , ako za svako $\mathcal{S} \in \mathcal{B}^n$ važi

$$\{\omega | \mathbf{X}(\omega) \in \mathcal{S}\} = \{\mathbf{X} \in \mathcal{S}\} = \mathbf{X}^{-1}(\mathcal{S}) \in \mathcal{F}.$$

Napomenimo da u slučaju da je $\mathbf{X}^{-1}(\mathcal{S}) \in \mathcal{F}$ kaže se i da je \mathbf{X} \mathcal{F} – merljivo.

Definicija 3.1.10 Uslovno očekivanje $E(X|Y)$ proizvoljne slučajne promenljive X i Y je proizvoljna $\mathcal{F}(Y)$ – merljiva slučajna promenljiva, takva da za sve $A \in \mathcal{F}(Y)$ zadovoljava jednakost

$$\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP$$

Primetimo da nisu važne vrednosti slučajne promenljive Y , već σ – algebra koju ona generiše. Ovo nas motiviše da uvodimo sledeću definiciju:

Definicija 3.1.11 Uslovno očekivanje n – dimenzionalne slučajne promenljive $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, definisane na prostoru verovatnoća (Ω, \mathcal{F}, P) , je $E(\mathbf{X}|\nu)$, gde je $\nu \subseteq \mathcal{F}$ σ – algebra, je proizvoljna ν – merljiva slučajna promenljiva takva da

$$\int_A \mathbf{X} dP = \int_A E(\mathbf{X}|\nu) dP, \quad A \in \nu$$

Tumačenje ove jednačine je, da naša najbolja procena za \mathbf{X} , na osnovu informacija koje su nam na raspolaganju iz algebre σ , konzistentne barem što se tiče integracije.

Važe sledeće osobine:

- 1) $E(\mathbf{X}|\nu) = \mathbf{X}$ skoro svuda, ako je \mathbf{X} ν – merljivo
- 2) $E(a\mathbf{X} + b\mathbf{Y}|\nu) = aE(\mathbf{X}|\nu) + bE(\mathbf{Y}|\nu)$ skoro svuda, za proizvoljne konstante a i b
- 3) $E(\mathbf{X}\mathbf{Y}|\nu) = \mathbf{X}E(\mathbf{Y}|\nu)$ skoro svuda, ako je $\mathbf{X}\mathbf{Y}$ integrabilna, a \mathbf{X} ν – merljivo
- 4) $E(\mathbf{X}|\nu) = E(\mathbf{X})$ skoro svuda, ako \mathbf{X} ne zavisi od ν

Definicija 3.1.12 Stohastički proces $\{X(t, \omega), t \in T, \omega \in \Omega\} = \{X_t, t \in T\}$ je niz (familija) slučajnih promenljivih, pri čemu su sve slučajne promenljive definisane na istom prostoru verovatnoća.

Skup T je parametarski skup, a u našem slučaju će biti uvek vremenski interval. Parametarski skup T može primiti bilo koje vrednosti proširenog skupa realnih brojeva, odnosno vrednosti iz $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, može biti otvoren ili zatvoren ili čak poluotvoren. Za svako fiksirano $t \in T$ dobijamo jednu slučajnu promenljivu, a za fiksirano $\omega \in \Omega$ dobijamo funkciju od vremena koja se zove još i trajektorija.

Definicija 3.1.13 *Vremenska serija je kolekcija slučajnih promenljivih posmatrana tokom nekog vremenskog intervala T . Ekvivalentno je da kažemo da je ona stohastički proces.*

3.2 Numeričke karakteristike vremenske serije

Neka sada posmatramo uzorak dužine T , $\{x_1, \dots, x_T\}$ koji predstavlja jednu realizaciju vremenske serije.

Definicija 3.2.1 *Očekivana vrednost uzorka je*

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T x_t$$

i ona je dobar pokazatelj centralne tendencije kod simetričnih raspodela.

Definicija 3.2.2 *Uzoračka varijansa je*

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_X)^2$$

Definicija 3.2.3 *Standardna devijacija uzorka je*

$$\hat{\sigma}_X = \sqrt{\hat{\sigma}_X^2}$$

Definicija 3.2.4 *Uzorački koeficijent korelacije između serije x_t i y_t , $t=1, \dots, T$ je*

$$\hat{\rho}_{XY} = \frac{\sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_X)(y_t - \hat{\mu}_Y)}{\sqrt{\sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_X)^2 \sum_{t=1}^T (y_t - \hat{\mu}_Y)^2}},$$

i ona je mera linearne zavisnosti dve serije.

Koeficijent korelacije meri linearnu zavisnost između vremenske serije, pri čemu ne pokazuje smer zavisnosti. Primer: vremenske serije X i Y su nekorelisane ako je $\hat{\rho}_{XY} = 0$, pozitivno korelisane ako je $\hat{\rho}_{XY} > 0$ i negativno korelisane ako je $\hat{\rho}_{XY} < 0$. Ako je $\hat{\rho}_{XY} = 1$ ili $\hat{\rho}_{XY} = -1$, tada su serije X i Y potpuno korelisane i mogu se zapisati kao linearna jednačina, tj. u obliku $Y = aX + b$, gde su $a, b \in \mathbb{R}$. i $a \neq 0$.

Definicija 3.2.5 *Uzorački koeficijent asimetrije (skewness) je*

$$\hat{S}(X) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_X^3} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_X)^3$$

i ona je mera simetričnosti raspodele.

Ako je raspodela uzorka simetrična, tada je $\hat{S}(X) = 0$, ako je $\hat{S}(X) > 0$, raspodela je asimetrična na desno, a za $\hat{S}(X) < 0$, raspodela je asimetrična na levo.

Definicija 3.2.6 *Uzorački koeficijent ekscesa (kurtosis) je*

$$\hat{K}(X) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_X^4} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{\mu}_X)^4.$$

i on meri spljoštenost raspodele.

Ovaj koeficijent nam pokazuje u kojoj meri je neka raspodela spljoštena u odnosu na normalnu. Ako je $\hat{K}(X) = 3$, tada kažemo da raspodela podataka ima normalnu spljoštenost. Ako je $\hat{K}(X) < 3$, raspodela podataka je više spljoštena, a ako je $\hat{K}(X) > 3$, raspodela je više izdužena u odnosu na normalnu raspodelu.

Ako važi normalna raspodela podataka iz uzorka, koeficijent asimetrije i ekscesa imaju asimptotsku normalnu raspodelu sa datim parametrima:

$$\hat{S}(X) : \mathcal{N}\left(0, \frac{6}{T}\right)$$

$$\hat{K}(X) - 3 : \mathcal{N}\left(0, \frac{24}{T}\right)$$

Za testiranje normalnosti serije podataka koristimo *Jarque - Berra* test (JB – test). Test statistika je

$$t = \frac{\hat{S}(X)^2}{6/T} + \frac{(\hat{K}(X) - 3)^2}{24/T}$$

koja ima asimptotsku χ^2 raspodelu sa dva stepena slobode. Postupak odbacivanja je na nivou značajnosti α , tj. odbacujemo hipotezu o normalnosti ako je $|t| > Z_{\alpha/2}$, gde je $Z_{\alpha/2}$ kvantil reda standardizovane normalne raspodele.

3.3 Komponente vremenske serije

Po tradiciji, razlikuju se četiri glavne komponente, koje opisuju ponašanje vremenske serije i koje se mogu odvojiti od posmatranih podataka. Ove komponente su sledeće: trend, ciklične, sezonalne i neregularne komponente.

- **Trend:** Vremenska serija poseduje trend komponent ako je njena opšta tendencija da povećava, smanjuje ili stagnira u dužem vremenskom periodu.
- **Sezonalnost:** Sezonske varijacije u vremenskoj seriji prepoznaju se po promenama fluktuacije u toku jedne godine, tokom određene sezone. Važni faktori koji uzrokuju sezonske varijacije su: klimatski i vremenski uslovi, običaji, tradicionalne navike, itd. Stoga, sezonska varijacija je bitan faktor pri donošenju investicione odluke.

- **Cikličnost:** Ciklične varijacije u vremenskoj seriji opisuju srednjoročne promene u seriji i izazvane su okolnostima koje se ponavljaju u ciklusima. Trajanje ciklusa je duži vremenski period, obično dve ili tri godine. Većina ekonomskih i finansijskih vremenskih serija pokazuje neku vrstu ciklične varijacije.
- **Neregularnost:** Neregularne ili slučajne varijacije u vremenskoj seriji uzrokovane su nepredvidljivim uticajima koji su neredovni i ne ponavljaju se u određenom obliku. Nepredvidljivi uticaji mogu biti: prirodna katastrofa, rat, tehnološka inovacija, itd. Nema definisana statistička tehnika za merenje slučajnih fluktuacija u vremenskoj seriji.

Napomenimo da može da se desi da se zbog nekog spoljnog uticaja poremeti jednokratno ili trajno struktura serije. Takav primer može biti povećanje prodaje neke firme zbog ulaganja u reklamu.

3.4 Stacionarnost vremenske serije i beli šum

Statistička svojstva da očekivana vrednost i varijansa ne zavise od vremena, predstavlja osnovnu pretpostavku jednog stacionarnog procesa. To je neophodan uslov za izgradnju najvećeg broja modela vremenske serije koja se koristi za predikciju buduće vrednosti. Postoje dva tipa stacionarnog procesa:

Definicija 3.4.1 *Kažemo da je neka vremenska serija $\{r_t\}, t = 1, \dots, T$, striktno stacionarna ako $(r_{t_1}, \dots, r_{t_k})$ i $(r_{t_1+t}, \dots, r_{t_k+t})$ imaju istu raspodelu za svako t , gde $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{N}$.*

Na osnovu ove definicije sledi da je funkcija raspodele striktno stacionarnog procesa invarijantna u odnosu na translaciju vremena. Pošto je ovaj uslov dosta jak i teško se proverava, u praksi se često pretpostavlja slaba stacionarnost.

Definicija 3.4.2 *Vremenska serija $\{r_t\}, t = 1, \dots, T$, je slabo stacionarna ako $E(r_t)$ i $cov(r_t, r_{t-l})$ nezavisne od t za $\forall l \in \mathbb{Z}$.*

Na osnovu toga zaključujemo da očekivanje slabo stacionarne vremenske serije je konstanta za svaki t , a kovarijansa zavisi samo od l . Bitno je da napomenimo da ukoliko vremenska serija $\{r_t\}, t = 1, \dots, T$, ima normalnu raspodelu, tada se slaba i striktna stacionarnost poklapaju.

U daljem tekstu, ukoliko nije naglašeno drugačije, pod pojmom stacionarnosti podrazumevamo slabu stacionarnost.

Definicija 3.4.3 *Autokorelacija kašnjenja l vremenske serije $\{r_t\}, t = 1, \dots, T$, se definiše kao*

$$\rho_l = \frac{cov(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{D(r_t)D(r_{t-l})}} = \frac{cov(r_t, r_{t-l})}{D(r_t)}$$

gde je r_t stacionarna vremenska serija.

Definicija 3.4.4 Uzoračka autokorelacija kašnjenja je

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^T (r_t - \mu)(r_{t-l} - \mu)}{\sum_{t=1}^T (r_t - \mu)^2}, \quad 0 \leq l \leq T - 1.$$

gde μ predstavlja očekivanje stacionarne vremenske serije r_t .

Definicija 3.4.5 Vremenska serija $\{r_t\}$, $t=1, \dots, T$, se zove proces belog šuma ukoliko se ona sastoji iz niza međusobno nezavisnih, jednako raspoređenih slučajnih promenljivih koje imaju konačnu očekivanu i varijansu.

Definicija 3.4.6 Ako $r_t : N(0, \sigma^2)$ za $t=1, \dots, T$, tada kažemo da je $\{r_t\}$ Gausov beli šum.

Napomenimo da za beli šum važi da su $\rho_l = 0$ za $\forall l > 0$.

3.4.1 Testiranje stacionarnosti testiranjem postojanja jediničnog korena

Kao što je u prethodnom delu objašnjeno, za dizajniranje većine modela koji su adekvatni za predviđanje buduće vrednosti, očekuje se da posmatrane vremenske serije budu stacionarne. Nažalost, to nije uvek slučaj. Genralno, što je veći vremenski period na kom posmatramo istorijske podatke, veća je i šansa da oni budu nestacionarni. Najpre ćemo dati definiciju linearne vremenske serije, jer ćemo stacionarnost ispitati pri izgradnji linearnih modela.

Definicija 3.4.1.1 Vremenska serija $\{r_t\}$, $t=1, \dots, T$, je linearna ako se može prikazati u obliku

$$r_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i a_{t-i},$$

gde je μ aritmetička sredina niza $\{r_t\}$, $\psi_0 = 1$, a $\{a_t\}$, $t=1, \dots, T$, je proces belog šuma sa očekivanjem nula.

Za ispitivanje stacionarnosti linearne vremenske serije koriste se razni testovi jediničnog korena. Mi smo izabrali *Dicky – Fuller* test (DF test) jediničnog korena. Prvi model koji razmatramo je autoregresivni model prvog reda – AR(1) model, koja ima sledeći oblik:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t,$$

gde ϕ_0 i ϕ_1 predstavljaju konstante, a $\{a_t\}$, $t=1, \dots, T$, je proces belog šuma sa očekivanjem nula.

Pod pretpostavkom da važi stacionarnost vremenske serije, dobijamo da

$$E(r_t) = \mu = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1} \quad \text{i} \quad D(r_t) = \sigma^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2},$$

takođe, iz stacionarnosti sledi da $|\phi_1| < 1$.

Definicija 3.4.1.2 Niz $\{p_t\}$ se zove slučajan hod ako važi da $p_t = p_{t-1} + a_t$, gde je $p_0 \in \mathbb{R}$, $\{a_t\}$, $t=1, \dots, T$, je beli šum sa očekivanjem nula.

Posmatranjem slučajanog hoda kao AR(1) model, dobijamo da $\phi_1 = 1$, a znamo da nam onda propada uslov slabe stacionarnosti. Ovo je osnovna motivacija testova jediničnih korena.

Da bi testirali da li neka linearna vremenska serija prati slučajan hod, posmatrajmo sledeće modele

$$p_t = \phi_1 p_{t-1} + a_t \quad (3.4.1.1)$$

$$p_t = p_0 + \phi_1 p_{t-1} + a_t \quad (3.4.1.2)$$

$$p_t = p_0 + \delta t + \phi_1 p_{t-1} + a_t \quad (3.4.1.3)$$

gde su a_t predstavljaju greške modela, $p_0, \delta \in \mathbb{R}$ konstante, a t je vremenska komponenta¹⁴.

Prvo se ocenjuje koeficijent $\hat{\phi}_1$ za svaku od posmatranih jednačina, a zatim se testira hipoteza $H_0 : \hat{\phi}_1 = 1$ protiv $H_1 : \hat{\phi}_1 < 1$ DF testom jediničnog korena, koja ima sledeći oblik testa statistike

$$DF = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{SE(\hat{\phi}_1)}$$

gde je $SE(\hat{\phi}_1)$ predstavlja standardno odstupanje ocenjenog parametara $\hat{\phi}_1$. Ako je apsolutna vrednost DF testa statistike veća od zadate kritične vrednosti, odbacujemo nultu hipotezu.

3.5 Diferenciranje vremenske serije

Već u prethodnom delu smo spominjali da što je duži vremenski period posmatranja neke vremenske serije, veća je i verovatnoća da ona bude nestacionarna. Takođe, u opštem slučaju vremenske serije koji pokazuju trend nisu stacionarne po prirodi. Pa pošto je ovaj komponent karakterističan za finansijske vremenske serije koje ćemo posmatrati, na njih se ne mogu primeniti klasični linearni modeli, jer u tom slučaju daju lažnu predikciju. Jedan od načina da uklonimo nestacionarnost vremenskih serija je diferenciranje koje je definisano kao:

Definicija 3.5.1 Neka je data nestacionarna vremenska serija $\{r_t\}$, $t=1, \dots, T$. Definišimo prvi diferencijal serije na sledeći način¹⁵:

$$\Delta r_t = r_t - r_{t-1}. \quad (3.5.1)$$

Ako je posmatrana vremenska serija posedovala jedinični koren i nakon difrenciranja Δr_t se ponaša kao beli šum, uklonili smo nestacionarnost nakon jednog diferenciranja. Generalno,

¹⁴ Napomenimo da jednačina (3.4.1.3) poseduje linearni trend.

¹⁵ Napomenimo da u slučaju logaritmovane vremenske serije, razlika, koja je definisana jednačinom (3.5.1), zove se logaritamski prinos.

može da se desi da vremenske serije ne postaju stacionarne nakon jednog diferenciranja. U tom slučaju nameće se potreba da ih dodatno diferenciramo do ostvarenja stacionarnosti.

Definicija 3.5.2 *Neke je data nestacionarna vremenska serija $\{r_t\}$, $t=1, \dots, T$. Označimo sa $I(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, prostor vremenskih serija koji postaju stacionarne nakon n diferenciranja.*

3.6 Linearni modeli vremenskih serija

U ovom delu rada ćemo se baviti linearnim modelima vremenske serije, koje se baziraju na neku linearnu kombinaciju prošlih vrednosti da bi objasnili ponašanje sadašnje vrednosti date serije. Kao najprostiji predstavnik ovih modela, prvo se uvodi autoregresivni model reda p .

Autoregresivni model reda p – AR(p) model matematički se može prikazati na sledeći način:

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_p r_{t-p} + a_t,$$

gde je ϕ_0 konstanta, ϕ_1, \dots, ϕ_p koeficijenti koji određuju uticaj prethodnih vrednosti, a a_t beli šum sa očekivanjem nula.

Dakle, AR(p) model pretpostavlja da je buduća vrednost neke promenljive vremenske serije linearna kombinacija vrednosti prethodnih p promenljive te serije i slučajne greške zajedno sa konstantom. Svi ostali linearni modeli vremenske serije predstavlja neku vrstu modifikacije ili proširenja ovog modela. Ovaj model, dakle, predstavlja osnovu ostalih linearnih modela.

3.6.1 Vektorski autoregresivni model – VAR model

Vektorski autoregresivni model nije ništa drugo nego uopštenje jednodimenzionalnog AR modela na više dimenzija. VAR modelima se objašnjava ponašanje više od jedne zavisne promenljive, ona omogućava uključivanje u jednačini jedne promenljive i više drugih promenljivih. Detaljnije, imamo po jednu jednačinu za svaku posmatranu promenljivu i sadašnje vrednosti formiramo tako što u svakoj jednačini uključimo sve te promenljive do odgovarajućeg reda prethodne vrednosti. Drugim rečima, sve posmatrane promenljive tretiramo endogenim. Uključivanje prethodne vrednosti drugih promenljivih obično se bolje aproksimira ponašanje posmatranih fenomena. Izbor promenljive u modelu nije određen i predstavlja posebno pitanje istraživača. Po pravilu se teži što manjem redu kao i izboru vremenskih serija kako bi se eliminisao potencijani problem autokorelacije među rezidualima i odsustvo normalne raspodele.

VAR(p) model u matricnoj notaciji možemo definisati na sledeći način

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

gde je ϕ_0 vektor konstante dimenzije $n \times 1$, ϕ_i matrica konstante dimenzije $n \times n$, $i=1, \dots, n$, $Y_t = (r_{1t}, \dots, r_{nt})'$ je n -dimenzionalna vremenska serija, a $\varepsilon_t = (a_{1t}, \dots, a_{nt})'$ je vektor

međusobno nekorelisanih grešaka, takođe dimenzije $n \times 1$. Kao i kod AR modela, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ predstavlja beli šum sa $E(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$ i matricom kovarijanse $\boldsymbol{\Sigma}$ koja je pozitivno definitna¹⁶.

3.6.2 Određivanje reda VAR modela

Za određivanje reda modela korišćemo *Aikake information criterion* – AIC kriterijum, koji je baziran na funkciji maksimalne verodostojnosti¹⁷.

Pod pretpostavkom uslovne normalne raspodele¹⁸ serije \mathbf{Y}_t , AIC(i) za VAR(i) se definiše kao

$$AIC(i) = \ln(|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i|) + \frac{2n^2i}{T}, i \geq 0,$$

gde je $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=i+1}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)} (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)})'$ matrica uzoračke kovarijansi reziduala $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(i)} = \mathbf{Y}_t - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_0^{(i)} - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_1^{(i)} \mathbf{Y}_{t-1} - \dots - \hat{\boldsymbol{\Phi}}_i^{(i)} \mathbf{Y}_{t-i}$ VAR(i) modela, T je veličina uzorka, a n je broj koeficijenata u jednačini. U slučaju da je $i = 0$, $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t^{(0)} = \mathbf{Y}_t - \bar{\mathbf{Y}}$, gde je $\bar{\mathbf{Y}}$ aritmetička sredina od \mathbf{Y}_t .

Odgovrajući red modela biće onaj i za koji je vrednost AIC kriterijuma minimalna.

3.6.3 Pojam kointegracije

Kointegracija je fenomen koji se prirodno javlja u ekonomiji i finansijama. U ekonomiji, kointegracija je najčešće povezana sa teorijama koje ukazuju na ravnotežne veze između promenljive. Kointegracija u finansijama je motivisana sa arbitražnim argumentom. Zakon jedne cene podrazumeva da se identična sredstva moraju prodati po istoj ceni kako bi izbegli mogućnost arbitraže. Ovo podrazumeva kointegraciju između cene istih finansijskih instrumenata na različitim tržištama, odnosno postojanje dugoročne ravnotežne veze. Kointegracija između više finansijskih instrumenata podrazumeva da se oni ponašaju slično u smislu skokova i padova. Postojanje kointegracije pokazuje da je velika promena u vrednostima jednog finansijskog instrumenta sigurno ispraćena promenama u vrednostima i drugih finansijskih instrumenata sa kojima je u kointegracijskoj vezi. Kointegracija se ukazuje na dugorčnu ravnostezu i to ne mora značiti da se cene svakodnevno kreću ka istom pravcu, pa zato, postojanje kointegracije je bitno pri donošenju investicionih odluka. Ako postoji kointegracijska veza između finansijskih instrumenata, diversifikacijom portfolija, gubitak na jednom finansijskom instrumentu možemo nadoknaditi dobitkom na drugom finansijskom instrumentu.

Definicija 3.6.3.1 *Nestacionarne vremenske serije $\mathbf{Y}_t = (r_{1t}, \dots, r_{nt})' \in I(1)$ su kointegrirane, ako postoji takva linearna kombinacija među njima koja je stacionarna, tj. postoji vektor $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)'$ tako da*

$$\boldsymbol{\beta}' \mathbf{Y}_t = \beta_1 r_{1t} + \dots + \beta_n r_{nt}$$

¹⁶ Pošto po pretpostavci elementi $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ međusobno nekorelisani, dobija se da matrica $\boldsymbol{\Sigma}$ je simetrična. Za simetričnu matricu kaže se da je pozitivno definitna ako za svaki vektor odgovarajuće dimenzije $h \neq 0$ broj $h' \boldsymbol{\Sigma} h$ je veći od nule.

¹⁷ Više detalja o njoj se može naći u [22] i [25].

¹⁸ Pretpostavlja se da je raspodela $\mathbf{Y}_t | \mathbf{Y}_{t-1}, \dots, \mathbf{Y}_1$ normalna. Više detalja o uslovnoj raspodeli može naći u [22].

stacionarna.

Definicija se može proširiti i na nestacionarne vremenske serija višeg reda, koje prilikom formiranja linearne kombinacije gube jedan ili više reda nestacionarnosti.

3.6.4 Kointegracija i vektorski autoregresivni model sa korekcijom greške (VECM)

Da bismo bolje razumeli kointegracijski odnos između vremenskih serija, razmotrimo VAR(p) model za neki vektor vremenskih serija Y_t , dimenzije $n \times 1$.

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t,$$

Ukoliko je Y_t kointegrirana, tada VAR model nije najpogodnija prezentacija analiziranih vremenskih serija, jer kointegracijske veze nisu uočljive. Da bi ove veze mogli uočavati, transformišemo VAR model u VECM model na sledeći način:

$$\Delta Y_t = \phi_0 + \phi Y_{t-1} + \Gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

gde je $\phi = \phi_1 + \dots + \phi_p - I$ i $\Gamma_k = -\sum_{j=k+1}^p \phi_j$, $k = 1, \dots, p-1$.

Ako su serije iz $I(1)$, onda u VECM model sve uključene promenljive koje su diferencirane iz $I(0)$ i jedino član ϕY_{t-1} sadrže potencijalne $I(1)$ promenljive. Da bi ΔY_t bio $I(0)$ vektor, mora da je i ϕY_{t-1} bude $I(0)$ vektor. Ovo znači da kointegracijske veze, ukoliko postoje, su sadržane u članu ϕY_{t-1} . Ako VAR(p) model poseduje jedinični koren, tada $\det(\phi) = \det(\phi_1 + \dots + \phi_p - I) = 0$, odnosno ϕ je singularna matrica. Ako je neka matrica singularna, ona je redukovano rang, tj. ako je ϕ singularna, tada $\text{rank}(\phi) = r < n$.

3.6.5 Johansen – ov test najvećeg karakterističnog korena

U analizi vremenskih serija veoma bitnu ulogu igra ispitivanje kointegracije. Soren Johansen [31] je sastavio test koji nam omogućava proveravanje kointegracije i uspostavljanje modela sa korekcijom greške u VAR modelu. Postoje dve statistike Johansen – ovog testa za proveravanje kointegracije, test traga i test najvećeg karakterističnog korena, a mi ćemo se osloniti na test najvećeg karakterističnog korena, jer i Johansen trvdi da je on možda tačniji [29].

Neka je rang matrice ϕ $r < n$. Johansen pretpostavlja nultu hipotezu $H_0: r = r_0$ protiv $H_1: r = r_0 + 1$, gde je r_0 pretpostavljeni broj kointegracijskih vektora. Statistika maksimalnog karakterističnog korena izgleda:

$$LR_{max}(r_0) = -T \ln(1 - \hat{\lambda}_{r_0+1}),$$

gde su $\hat{\lambda}_k$, $k = 1, \dots, n$ karakteristični koreni matrice ϕ , određeni po opadajućem redosledu, a T je veličina uzorka.

Koraci za utvrđivanje broja kointegracijskih vektora su:

1. Prvo testiramo hipotezu $H_0: r = 0$ protiv $H_1: r = 1$. Ako ne odbacujemo nultu hipotezu, onda zaključujemo da nemamo kointegracijski vektor među n promenljivih vektora Y_t . Nultu hipotezu odbacujemo u slučaju da je registrovana vrednost test statistike veća od kritične vrednosti¹⁹.
2. Ako odbacujemo $H_0: r = 0$, onda pretpostavimo da imamo najmanje jedan kointegracijski vektor i testiramo hipoteze $H_0: r = 1$ protiv $H_1: r = 2$. Ukoliko ne odbacujemo nultu hipotezu, onda zaključujemo da imamo jedan kointegracijski vektor.
3. Ako smo odbacili hipotezu $H_0: r = 1$, onda pretpostavljamo da imamo najmanje dva kointegracijska vektora.
4. Ovo nastavljamo dok prvi put ne prihvatamo nultu hipotezu.

Napomenimo da postoji pet vrsta modela kojise mogu testirati, a mi ćemo testirati model koji sadrži samo konstantu u kointegracijskoj jednačini (bez trenda) i VAR model bez konstante i trenda, u skladu sa dobijenim rezultatima²⁰.

3.6.6 Grendžerova kauzalnost

Koncept Grendžerove kauzalnosti proizilazi iz pretpostavke da samo one promenljive gde postoji kauzalna veza između promenljivih treba uključiti u VAR model. Kažemo da promenljiva X_t Grendžer uzrokuje promenljivu Y_t , ako vrednosti iz prošlosti promenljive X_t pomognu u objašnjavanju promenljive Y_t . Naravno, ako je i zadovoljena Grendžerova kauzalnost, to ne garantuje da X_t uzrokuje Y_t , zbog tog razloga koristimo izraz „Grendžer uzrokuje”, umesto da koristimo samo izraz uzrokuje. Ako vrednosti iz prošlosti promenljive X_t imaju objašnjavajuću moć nad promenljivom Y_t , onda se pretpostavlja da X_t možda uzrokuje Y_t .

Da bi ilustrovali osnovne koncepte Gredžerove kauzalnosti, razmotrićemo dve promenljive, X_t i Y_t . Neka su one stacionarne vremenske serije i posmatrajmo jednačinu:

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_q Y_{t-q} + \varepsilon_t.$$

gde je ϕ_0 konstanta, ϕ_i, β_j , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, koeficijenti koje određuju uticaj prethodnih vrednosti, a ε_t beli šum sa očekivanjem nula.

Ovaj model pretpostavlja da vrednosti promenljive X_t iz prethodnih perioda imaju objašnjavajuću moć na sadašnju vrednost promenljive Y_t . Koeficijenti ϕ_i mere uticaj promenljive X_{t-i} na promenljivu Y_t . U slučaju da su $\phi_i = 0$, zaključujemo da vrednosti promenljive X_{t-i} nemaju uticaja na promenljivu Y_t , odnosno X_t Grendžer neuzrokuje Y_t .

¹⁹ Kritične vrednosti test statistike su nestandardne i moraju se proceniti pomoću simulacije [26]

²⁰ Više detalja o obliku ovih modela može naći u [25]

Da bi testirali Grendžerovu kauzalnost, koristimo hipotezu $H_0 : \phi_1 = \dots = \phi_p = 0$ i testiramo da li je ocenjeni koeficijent $\hat{\phi}_i$ statistički značajno različit od nule. Ukoliko je dobijena p -vrednost manja od zadate kritične vrednosti, odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da X_t Grendžer uzrokuje Y_t , odnosno treba ga uključiti u jednačinu.

Da bi dobili F- statistiku za testiranje Grendžerove kauzalnosti, posmatrajmo restriktivni i nerestriktivni model:

$$Y_t = \phi_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_q Y_{t-q} + \varepsilon_{1t}$$

$$Y_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_q Y_{t-q} + \varepsilon_{2t}.$$

Prvo se izračunavaju sume kvadrata reziduala $SSR_R = \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{1t}^2$ i $SSR_{UR} = \sum_{t=1}^T \hat{\varepsilon}_{2t}^2$, gde su

$$\hat{\varepsilon}_{1t} = Y_t - \hat{\phi}_0 - \hat{\beta}_1 Y_{t-1} - \dots - \hat{\beta}_q Y_{t-q} \text{ i}$$

$$\hat{\varepsilon}_{2t} = Y_t - \hat{\phi}_0 - \hat{\beta}_1 Y_{t-1} - \dots - \hat{\beta}_q Y_{t-q} - \hat{\phi}_1 X_{t-1} - \dots - \hat{\phi}_p X_{t-p},$$

ocenjene greške restriktivnog i nerestriktivnog modela, respektivno.

Zatim, računa se vrednost F – statistike pomoću formule:

$$F = \frac{(SSR_R - SSR_{UR})/k}{SSR_{UR}/(T - (H + 1))}$$

Test statistika prati Fišerovu raspodelu $F_{k, T-H}$ sa H stepeni slobode, gde je H broj uključenih koeficijenata u modelu koje određuju uticaj prethodnih vrednosti (u našem primeru je p+q), k je broj serija koje se dodatno uključuju u model (u našem primeru je 1, serija X_t), a T je veličina uzorka. Ako je vrednost F statistike veća od zadate kritične vrednosti, odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da X_t Grendžer uzrokuje promenljivu Y_t . Analogno se testira da Y_t Grendžer uzrokuje promenljivu X_t .

Prethodni primer je bio ilustracija testiranja Grendžerove kauzalnosti u VAR modelu koja uključuje dve promenljive. Ovaj test se može izvršiti i u VAR modelima koje uključuju više promenljivih..

3.6.7 Breusch – Godfrey test autokorelacije među rezidualima (BG test)

BG test autokorelacije među rezidualima zasniva se na ideji Lagranžovih množenja i pogodan je za testiranje postojanja autokorelacije višeg reda među rezidualima. Ovaj model opisuje rezidualne VAR modela pomoću AR modela, tj. vrednosti iz prethodnih perioda posmatranog reziduala su nezavisne promenljive koje objašnjavaju sadašnju vrednost reziduala koja jeste zavisna promenljiva.

Posmatrajmo prve jednačine VAR(1) modela sa dve promenljive²¹

²¹ Test se analogno izvodi i za VAR modele više promenljive i reda.

$$r_{1t} = \phi_{01} + \phi_{11}r_{1,t-1} + \phi_{12}r_{2,t-1} + a_{1t}, \quad t = 1, \dots, T \quad (3.6.7.1)$$

gde je

$$a_{1t} = \rho_1 a_{1,t-1} + \dots + \rho_q a_{1,t-q} + u_t, \quad u_t: \mathcal{N}(0, \sigma_u^2).$$

BG – test se zasniva na kombinaciji ove dve jednačine, tj.

$$r_{1t} = \phi_{01} + \phi_{11}r_{1,t-1} + \phi_{12}r_{2,t-1} + \rho_1 a_{1,t-1} + \dots + \rho_q a_{1,t-q} + u_t,$$

pa nulta i alternativna hipoteza su

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_q = 0$$

$$H_1: \rho_i \neq 0 \text{ za bar jedno } i = 1, \dots, q.$$

Koraci izvođenja testa su sledeći:

1. Ocenimo koeficijente jednačine (3.6.7.1) da bi dobili \hat{a}_{1t}
2. Ocenimo model za \hat{a}_{1t} na sledeći način

$$\hat{a}_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 r_{1,t-1} + \alpha_2 r_{2,t-1} + \rho_1 \hat{a}_{1,t-1} + \dots + \rho_q \hat{a}_{1,t-q} + \epsilon_t,$$

gde je q željeni red autokorecije koji testiramo, a ϵ_t Gausov beli šum.

3. Izračunamo koeficijent determinacije $R_{\hat{a}_t}^2$ za \hat{a}_t

Pod pretpostavkom da važi nulta hipoteza, zadovoljena je asimptotska jednakost

$$(T - q)R_{\hat{a}_t}^2 \sim \chi_q^2,$$

gde je T veličina uzorka.

Ideja BG testa je, da u slučaju odsustva autokorelacije, $R_{\hat{a}_t}^2$ treba da bude mala. Analogno se izvodi test i za drugu jednačinu VAR(1) modela.

3.6.8 White – ov test heteroskedastičnosti

Pojam homoskedastičnosti podrazumeva da greške ocenjenog modela imaju konstantnu varijansu. Ukoliko to nije zadovoljeno, kažemo da su greške heteroskedastične. U analizi vremenske serije često se dešava da su greške heteroskedastične i to može biti znak neadekvatnosti ocenjenog modela, a može samo ukazati na to da model sadrži nedovoljno promenljivih za objašnjavanje. *White* – ov test heteroskedastičnosti je opšti test, jer se ne zasniva na pretpostavci da su reziduali modela normalno raspodeljeni [26].

Posmatrajmo prve jednačine VAR(1) modela sa dve promenljive²²

$$r_{1t} = \phi_{01} + \phi_{11}r_{1,t-1} + \phi_{12}r_{2,t-1} + a_{1t}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (3.6.8.1)$$

Označimo sa \hat{a}_{1t} ocenji rezidual modela (3.6.8.1) i formirajmo pomoćnu regresiju

$$\hat{a}_{1t}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{1,t-1} + \alpha_2 r_{2,t-1} + \alpha_3 r_{1,t-1} r_{2,t-1} + \alpha_4 r_{1,t-1}^2 + \alpha_5 r_{2,t-1}^2 + e, \quad (3.6.8.2)$$

gde je e greška pomoćne regresije.

Testiramo hipotezu $H_0: \alpha_i = 0$, za $i=0, \dots, m$, i ako važi nulta hipoteza, tada je

$$TR_{POM}^2 \sim \chi_m^2,$$

gde je R_{POM}^2 koeficijent determinacije pomoćne regresije za \hat{a}_{1t}^2 , T je veličina uzorka, a m je broj promenljivih u jednačini (3.6.8.2) (u našem slučaju $m=5$).

Ako je registrovana vrednost test statistike TR_{POM}^2 veća od kritične vrednosti, odbacujemo nultu hipotezu.

3.6.9 CUSUM test stabilnosti modela

Stabilno ravnotežno stanje podrazumeva da se model samostalno održava ili, nakon prestanka delovanja sile koji je poremetio ravnotežu, model teži ka ravnotežnom stanju. Kada je ravnoteža stabilna, bilo koja inicijalna fluktuacija će opasti tokom vremena. Ovo znači da male fluktuacije neće uspeti ostvariti da model beži daleko od ravnotežnog stanja. U našem slučaju sile koje imaju uticaj na model jesu greške predviđanja. Ako je model stabilan, uticaj šokova će opasti tokom vremena.

Za ispitivanje stabilnosti modela koristićemo CUSUM test, koji je baziran na kumulativnu sumu standarizovanih rekurzivnih reziduala. Ako kumulativna suma rekurzivnih reziduala osciluje oko nule, tada naš model dobro opisuje buduće vrednosti. Da bi utvrdili stabilnost posmatranog modela, prvo treba da formiramo jednokoračne predikcije pomoću ocenjenog modela date vremenske serije r_t , $t = 1, \dots, T$, a zatim izračunati grešku te predikcije. Test statistika za ispitivanje stabilnosti modela je data sa

$$CUSUM_t = \sum_{j=p+1}^t \frac{\hat{e}_j(1)}{\hat{\sigma}_{je}}, \quad t = 1, \dots, T$$

gde je T veličina uzorka, $p+1$ je trenutak kada prvi put pravimo predikciju, $\hat{e}_j(1)$ je rezidual između stvarne vrednosti vremenske serije i njene predikcije, a $\hat{\sigma}_{je}$ je standardna devijacija od $\hat{e}_j(1)$.

Pod pretpostavkom da je model stabilan, 95% intervala poverenja su dati između dve linije, koje dobijamo povezivanjem tačke od $(p+1, \pm 0.948\sqrt{T-p-1})$ do

²² Test se analogno izvodi i za VAR modele više promenljive i reda.

$(T, \pm 0.948 \cdot 3\sqrt{T-p-1})$. Ukoliko vrednosti $CUSUM_t$ testa izađu van te granice, odbacujemo hipotezu o stabilnosti modela.

3.6.10 Formiranje prediktivnih vrednosti pomoću VAR modela

Neka je dat vektor vremenskih serija Y_t , dimenzije n , u trenutku t . Za VAR(p) model predikcije za h koraka unapred definišemo kao:

$$\hat{Y}_t(h) = E(Y_{t+h} | \mathcal{F}_t) = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i \hat{Y}_t(h-i),$$

gde je

$$\hat{Y}_t(h-i) = E(Y_{t+h-i} | \mathcal{F}_t) = \begin{cases} Y_{t+h-i} & \text{za } h-i \leq 0 \\ \hat{Y}_{t+h-i} & \text{za } h-i > 0 \end{cases}$$

a \mathcal{F}_t je σ – algebra koja sadrži informacije do trenutka t .

Greške predikcije se definišu kao razlika između stvarnih i prediktivnih vrednosti na sledeći način

$$\varepsilon_t(i) = Y_{t+i} - \hat{Y}_{t+i}, \quad i=1, \dots, h.$$

Ovde se podrazumeva da su prediktivne vrednosti formirane na pojedinačnim serijama r_{1t}, \dots, r_{nt} koji su elementi VAR(p) modela.

3.7 Nelinearni modeli vremenskih serija

Drugi model koji ćemo koristiti je jedan model veštačke neuronske mreže, tačnije, autoregresivni model neuronske mreže. Uopšteno govoreći, veštačke neuronske mreže su računarski sistemi koji su inspirisani biološkim neuronskim mrežama. Takvi sistemi uče, koristeći neki algoritam učenja, razmatrajući primere. Modeli veštačke neuronske mreže su nedavno počeli da privlače sve veću pažnju i primenjuju ih u brojnim i raznim oblastima, kao što su: u obradi slika, u prepoznavanju lica i objekata neke slike, u predikcijama neke vremenske serije, u prepoznavanju bolesti, u generisanju softvera neke igre, itd.

3.7.1 Neuronske mreže u analizi vremenske serije

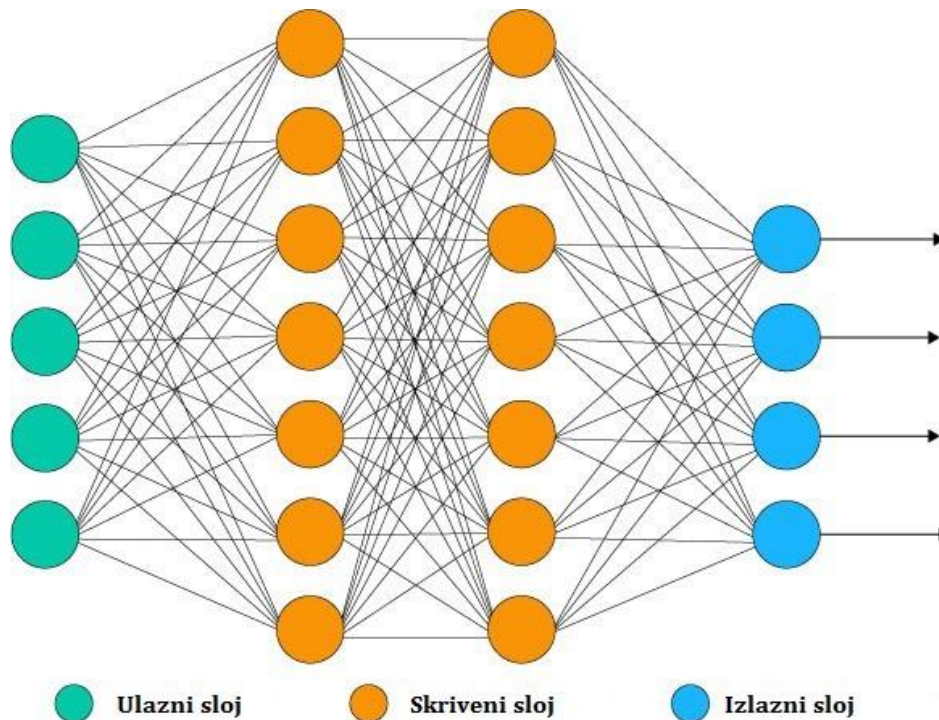
U analizi vremenske serije, veštačke neuronske mreže generišu modele za predviđanje koji su zasnovani na jednostavnim matematičkim modelima. Ovi modeli dozvoljavaju kompleksne nelinearne veze između promenljive koje se koriste za predviđanje i promenljive koja se predviđa. Prediktori (ulazi) formiraju donji sloj, a predikcije (izlazi) formiraju gornji sloj neuronske mreže. Neuronske mreže mogu imati i srednji sloj koji sadrži skrivene čvorove ili neurone. Najjednostavnija neuronska mreža ne sadrži skrivene slojeve i ekvivalentna je linearnoj regresiji²³, gde su ulazni parametri prediktori. Koeficijenti, vezani za ove prediktore, nazivaju se težine. Svakom čvoru se dodeljuje težina i konstanta u zavisnosti od algoritma

²³ Oblik njene jednačine može se naći u [25].

učenja. Na početku im se dodeljuje slučajna vrednost, pa zatim se ažuriraju pomoću algoritma učenja tako da daju najbolje rezultate. Kada se odrede vrednosti konstanti i težina, predviđanja se dobija ponderisanom linearnom kombinacijom ulaza i ocenjenih težinskih koeficijenata. Ako se doda srednji sloj sa skrivenim čvorovima, u zavisnosti od karakteristike ovih čvorova, neuronska mreža može postati nelinearna.

Ilustrujemo primer potpuno povezane četvoroslojne neuronske mreže sa dva skrivena sloja i četiri izlaza:

Grafik 3.7.1.1: *Potpuno povezana četvoroslojna neuronska mreža*



Izvor: Machine learning fundamentals: Neural networks

Na slici je prikazan primer višeslojne neuronske mreže prenosa sa više izlaza, gde svaki sloj čvorova dobija ulaze iz čvorova prethodnih slojeva. Izlazi čvorova u jednom sloju su ulazi u sledeći sloj. Ulazi u svaki čvor se određuju kao ponderisana linearna kombinacija čvorova čije težine su „naučene” iz podataka. Određena linearna kombinacija koja je prethodno generisana je modifikovana obično nekom nelinearnom funkcijom u skrivenom čvoru, što ima za cilj smanjenje efekta ekstremnih ulaznih vrednosti, čineći time sistem robustnim za autlajere²⁴. Posle transformacije svakom čvoru se dodeljuju konstante i težine pre nego što izlazi tog čvora dođu do ulaza čvorova u sledećem sloju. Pošto su konstante i težine slučajne vrednosti na početku, i ažurirani su koristeći uzorak, postoji element slučajnosti u predikcijama modela neuronske mreže. Primenujući isti model neuronske mreže na istim podacima više puta, dobijamo različite rezultate sa malim odstupanjima. Iz tog razloga, za konačan rezultat uzima se prosečna vrednost pojedinačnih rezultata. Broj skrivenih slojeva i čvorova u svakom skrivenom sloju mora biti unapred definisan.

²⁴ Autlajer je opservacija koja je udaljena od ostalih opservacija. Ova opservacija je prouzrokovana nekim neobičnim faktorima.

3.7.2 Autoregresivni model neuronske mreže – NNAR model

Za testiranje „moći” modela neuronske mreže u predviđanju vrednosti prinosa obveznice i kriptovalute izabrali smo autoregresivni model neuronske mreže zbog svoje jednostavnosti u odnosu na ostale modele. Velika prednost ovog modela je u tome što ne zahteva nikakvu statističku pretpostavku ili transformaciju ulaznih podataka do ostvarenja stacionarnosti. Željeni model se formira na osnovu karakteristike predstavljenih podataka.

Prethodne vrednosti promenjive vremenske serije mogu se koristiti kao ulazi u neuronsku mrežu. Model koji se dobija naziva se autoregresivni model neuronske mreže ili NNAR model. Koristićemo notaciju $NNAR(p, q)$ modela neuronske mreže koja koristi p prethodnih vrednosti promenljivih vremenske serije kao ulaz i poseduje q čvorova u jednom skrivenom sloju.

U ovom kontekstu, opservacije $(r_{t-1}, \dots, r_{t-p})$ zajedno sa q čvorova u skrivenom sloju su korišćeni za predviđanje izlaza r_t .

Jednačina izlaza NNAR modela sa jednim skrivenim slojem glasi

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^q \omega_j g(\omega_{0j} + \sum_{i=1}^p \omega_{ij} r_{t-i}) + a_t, \quad (3.7.2.1)$$

gde je a_t proces belog šuma, ω_0 , ω_{0j} su konstante, ω_j i ω_{ij} , $i = 1, \dots, p$, $j = 1, \dots, q$, su ocenjeni težinski koeficijenti, p je broj ulaznih parametara, q je broj skrivenih čvorova u posmatranom skrivenom sloju, a g se zove funkcija aktivacije i ona je obično neka nelinearna funkcija koja vrši modifikciju modela unutar skrivenog čvora.

U opštem slučaju, za nelinearnu funkciju aktivacije se uzima logistička funkcija

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

ali mogu se koristiti i mnoge druge funkcije. Shodno tome, skriveni neuron j vrši sledeću transformaciju:

$$g(\omega_{0j} + \sum_{i=1}^p \omega_{ij} r_{t-i}).$$

Ako imamo više od jednog skrivenog sloja, onda se vrši dalja transformacija podataka u skrivenim neuronima nekom od izabranih (obično) nelinearnih funkcija koja se može razlikovati od prethodne.

$NNAR(p, 0)$ se definiše

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t,$$

odnosno, ona je ekvivalentna $AR(p)$ modelu ali bez diferenciranja za osiguravanje stacionarnosti podataka. Ovde ne postoji skriveni čvor, pa imamo samo ulazne i izlazne vrednosti.

Kao što smo već napomenuli, konstante i težine neuronske mreže u jednačini (3.7.2.1) su određene algoritmom učenja. Na početku im se dodeljuje slučajna vrednost, a zatim se ažuriraju da bi se minimizirala kvadratna odstupanja između ocenjene vrednosti dobijene modelom, i stvarne vrednosti koju želimo oceniti. Zapravo se koristi numerički postupak približavanja rešenja po unapred definisanoj granici apsolutnog odstupanja i kada se dobije rešenje u željenom rasponu, algoritam učenja se prekida. Najpoznatiji algoritmi učenja su

Backpropagation i *Generalized Delta Rule*²⁵ [27]. Zbog dodele slučajne vrednosti na početku, koeficijenti nisu jedinstveni.

Jednačina (3.7.2.1) je jedan primer potpuno povezane neuronske mreže koja ne dozvoljava konekciju između ulaznih i izlaznih čvorova i gde ne postoji funkcija aktivacije na izlazu čvoru (ona samo formira ponderisanu linearnu kombinaciju inputa). Takav primer neuronske mreže u engleskoj literaturi se zove *feedforward neural network* [27].

3.7.3 Određivanje reda NNAR modela

Da bi odredili red NNAR modela treba da definišemo broj ulaza, koja odgovara redu AR modela na nestacionarnim serijama. Za određivanje reda AR modela korišćemo AIC kriterijum - *Aikake information criterion*, koji je zasnovan na funkciji maksimalne verodostojnosti. Formula AIC kriterijuma glasi

$$AIC(k) = \ln(\hat{\sigma}_k^2) + \frac{2k}{T},$$

gde je $\hat{\sigma}_k^2$ najveća ocena varijanse belog šuma σ_a^2 i ocenjen je metodom maksimalne verodostojnosti, k je broj parametara koji se ocenjuje, a T je veličina uzorka.

Postupak optimalnog izbora sastoji se od izračunavanja vrednosti za $AIC(k)$, za $k = 0, \dots, P$, gde je P neki pozitivan prirodan broj. Za red modela biramo onaj k , za koji $AIC(k)$ ima minimalnu vrednost.

3.7.4 Testiranje adekvatnosti NNAR modela

Neka je dat NNAR(p,q) model na sledeći način

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^q \omega_j g(\omega_{0j} + \sum_{i=1}^p \omega_{ij} r_{t-i}) + a_t, \quad t = 1, \dots, T$$

Ocenjeni model definišemo kao uslovno očekivanje

$$E(r_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \hat{r}_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^q \omega_j g\left(\omega_{0j} + \sum_{i=1}^p \omega_{ij} r_{t-i}\right),$$

gde je \mathcal{F}_{t-1} σ - algebra, koja označava istoriju vremenske serije r_t do trenutka $t - 1$.

Odnosno, koristimo pretpostvaku da je $E(a_t | \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ da bi ocenili vrednosti vremenske serije r_t unutar uzorka. Na osnovu toga možemo izračunati vrednosti ocenjenih reziduala modela prema sledećoj formuli:

$$\hat{a}_t = r_t - \hat{r}_t.$$

Ukoliko se ovaj niz ponaša kao beli šum, kažemo da je naš model adekvatan. Znamo da je osobina belog šuma $\rho_l = 0$, za $\forall l > 0$, pa zato, za proveravanje adekvatnosti koristimo

²⁵ Više detalja o njima se može naći u [27, 34, 35, 36].

Ljung – Box – ovu statistiku, kojom se proverava postojanje autokorelacije među ocenjenim rezidualima modela.

Ljung – Box – ova statistika se definiše kao

$$Q(m) = T(T + 2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{T - l}$$

gde je T veličina uzorka, a m predstavlja broj koraka unazad za koji proveravamo postojanje autokorelacije. U praksi se obično uzima da je $m = \ln(T)$.

Ova statistika ima χ_α^2 raspodelu sa m stepeni slobode, gde je α zadati nivo značajnosti. Nulta hipoteza je da su sve autokorelacije kašnjenja do reda m jednaka nuli i ako važi da je $Q(m) > \chi_\alpha^2$, odbacujemo nultu hipotezu na nivou poverenja $1 - \alpha$.

3.7.5 Formiranje prediktivnih vrednosti NNAR modelom

Da bismo ilustrovali korake za formiranje predikcije za vremensku seriju r_t , model neuronske mreže možemo implicitno zapisati u sledećem obliku:

$$r_t = f(\mathbf{y}_{t-1}) + a_t,$$

gde je $\mathbf{y}_{t-1} = (r_{t-1}, \dots, r_{t-p})'$ vektor koji sadrži prethodne vrednosti vremenske serije r_t , f je autoregresivni model neuronske mreže sa q skrivenih čvorova u jednom skrivenom sloju, a greška a_t , $t = 1, \dots, T$, je proces belog šuma sa očekivanjem nula.

Predikcije za h koraka rekurzivno se definišu na sledeći način

$$\hat{r}_{t+1} = \hat{r}_t(1) = E(r_{t+1} | \mathcal{F}_t) = f(\mathbf{y}_t)$$

$$\hat{r}_{t+2} = \hat{r}_t(2) = E(r_{t+2} | \mathcal{F}_t) = f(\hat{\mathbf{y}}_{t+1})$$

....

$$\hat{r}_{t+h} = \hat{r}_t(h) = E(r_{t+h} | \mathcal{F}_t) = f(\hat{\mathbf{y}}_{t+h-1}),$$

gde je

$$\hat{\mathbf{y}}_{t-1+k} = E(\mathbf{y}_{t-1+k} | \mathcal{F}_t) = (\hat{r}_{t-1+k}, \dots, \hat{r}_{t-p+k}),$$

$$\hat{r}_{t+k-i} = E(r_{t+k-i} | \mathcal{F}_t) = \begin{cases} r_{t+k-i} & \text{za } k \leq i \\ \hat{r}_{t+k-i} & \text{za } k > i \end{cases} \quad \text{za } k = 2, \dots, h \text{ i } i = 1, \dots, p,$$

a \mathcal{F}_t σ – algebra koja označava istoriju do trenutka t .

Greške prediktivnih vrednosti se analogno dobijaju kao razlika između stvarne i prediktine vrednosti, kao i kod linearnih modela, odnosno $\hat{a}_t(i) = \hat{a}_{t+i} = r_{t+i} - \hat{r}_{t+i}$, $i=1, \dots, h$.

4 Istraživanje

U ovom delu rada ćemo odvojeno primeniti statističke analize, uspostaviti definisane autoregresivne modele, formirati i vršiti evaluaciju predikcije na prinosima državnih obveznica SAD i cenama kriptovaluta. Prvo ćemo izvršiti analizu na kriptovalutama, a zatim na prinosima. Među prinosima državnih obveznica bavićemo se analizom srednjoročne kuponske obveznice, tačnije, analizom dnevnih podataka prinosa do dospeća²⁶ dvo –, peto – i sedmogodišnje obveznice. Među kriptovalutama, fokusiraćemo se na najpoznatije, ujedno i najduže vreme postojećih novčića. To će nam činiti Bitcoin, Litecoin, Ethereum, Ethereum Classic i Ripple. Za analizu ćemo koristiti i dnevne i jednočasne podatke, jer nemamo na raspolaganju podatke koji se odnose na svaki čas od početka pojave ovih finansijskih instrumenata.

Podaci na dnevnoj frekvenciji, kod oba instrumenta, su korišćeni za opisivanje fundamentalnih statističkih osobina, kako što je raspodela podataka ili korelacija, jer želimo ispitati njihove dugoročne osobine i međuzavisnosti. Njihovim grafičkim prikazom imaćemo uvidu ponašanju posmatrane vremenske serije u dugom vremenskom periodu. Kod kriptovaluta, statističke osobine ispitujemo na podacima nakon njihove pojedinačne pojave na berzama do dana 10.07.2018, dok kod prinosa, koristimo podatke koji se odnose na period 20.10.2013 – 10.07.2018. Svi podaci na dnevnom nivou su preuzeti sa sajta *Investing.com* zaključno sa datumom 10.07.2018.

Za izgradnju različitih modela i formiranje predikcije kriptovaluta oslanjamo se na podatke koji se odnose na svaki čas cene novčića Bitcoin – a, Ethereum – a i Ripple – a. Podaci sa takvom frekvencijom su preuzeti sa sajta *cryptodatadownload.com* i odnose se na cene na berzi Kraken. Prvi podaci na satnom nivou mogu se naći od 01.07.2017.

Pre početka analize ćemo izvršiti logaritamsku transformaciju, koja podrazumeva primenu prirodnog logaritma na vrednostima podataka. Ova tehnika se skoro uvek primenjuje, jer čini podatke pogodnijim za analizu i može da im popravlja statističke osobine. Prilikom formiranja modela koristićemo metod *in sample - out of sample*, odnosno podelimo podatke tako što deo njih koristimo za ocenu koeficijenata pojedinačnih modela, a zatim pomoću ovih koeficijenata formiramo predikcije i vršimo evaluaciju dobijenih rezultata preostalim delom podataka.

Pre početka analize podataka, uvodimo sledeće oznake:

1. Sa BTC, LTC, ETH, ETC i XRP ćemo označiti cenu izraženu u dolarima novčića Bitcoin – a, Litecoin – a, Ethereum – a, Ethereum Classic – a i Ripple – a, respektivno.
2. Sa LBTC, LLTC, LETH, LETC, LXRP ćemo označiti logaritamsku cenu izraženu u dolarima novčića Bitcoin – a, Litecoin – a, Ethereum – a, Ethereum Classic – a i Ripple – a, respektivno, koje dobijamo primenjujući prirodni logaritam na osnovnim cenama.

²⁶ Više detalje o izračunavanju prinosa do dospeća mogu se naći u delu rada Dodatak.

3. Sa DLBTC, DLLTC, DLETH, DLETC i DLXRP ćemo označiti prvi diferencijal logaritamske cene izražene u dolarima novčića Bitcoin – a, Litecoin – a, Ethereum – a, Ethereum Classic – a i Ripple – a, respektivno, primenjujući postupak diferenciranja definisanih u prethodnom poglavlju ovog rada.
4. Sa DG, PG i SG ćemo označiti prosečne prinose do dospeća svih postojećih dvo –, peto – i sedmogodišnjih kuponskih obveznica SAD, respektivno.
5. Sa LDG, LPG i LSG ćemo označiti logaritmovane prinose dvo –, peto – i sedmogodišnje kuponske obveznice SAD, koje dobijamo primenjujući prirodan logaritam na osnovnim podacima.
6. Sa DLDG, DLPG i DLSG ćemo označiti prvi diferencijal od LDG, LPG i LSG, respektivno.

4.1 Grafički prikaz i osnovne statističke osobine kriptovalute

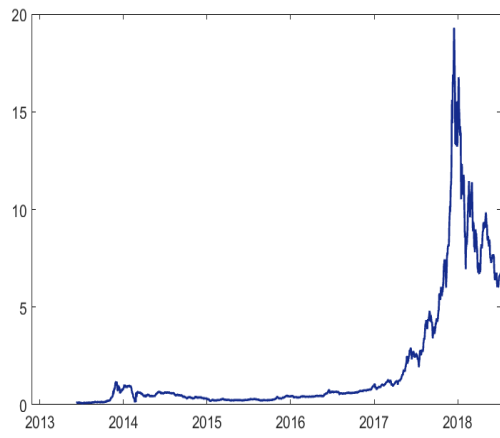
Pošto su kriptovalute nedavno preuzele ulogu investicione imovine, a nisu kontrolisane od strane nijedne finansijske institucije, imaju veoma zanimljivo ponašanje u odnosu na druge finansijske imovine, pa da bi ih mogli bolje uporediti međusobno, izabrali smo više njih za osnovnu analizu.

Prvo ćemo grafički predstaviti dnevne cene BTC, LTC, ETH, ETC i XRP, jer ponekad na samom grafiku možemo uočiti neka pravila i osobine, kao što je stacionarnost, normalna raspodela ili tip posmatrane vremenske serije.

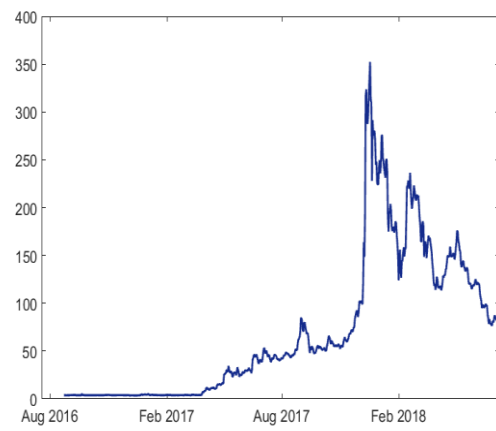
Grafička predstavadnevne cene navedene kriptovaluteje od početka njihove prve evidencije na stranici *Investing.com* do dana 10.07.2018 sledeća:

Grafik 4.1.1: Kretanje dnevne cene kriptovalute u dolarima

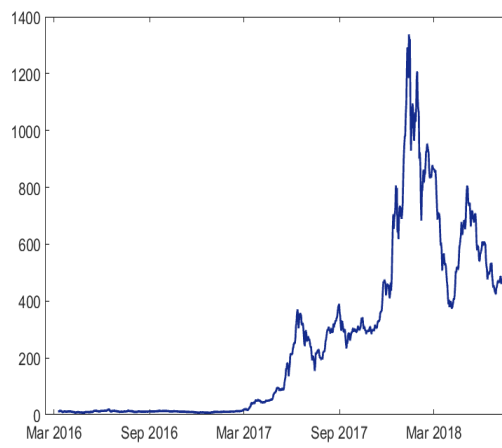
BTC



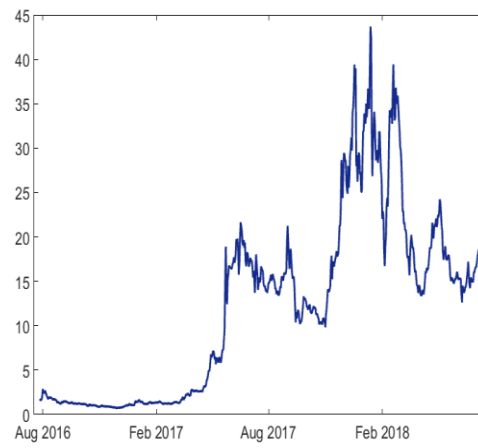
LTC



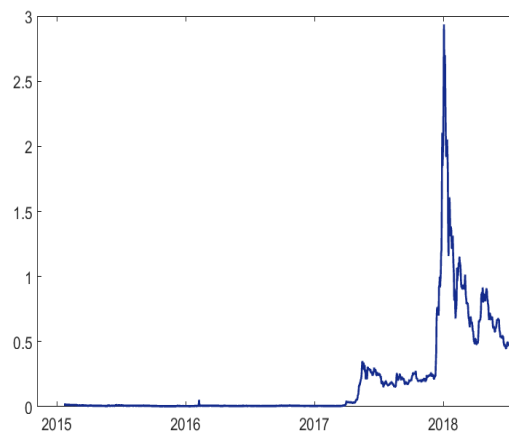
ETH



ETC



XRP



Na graficima se mogu uočiti da sve prikazane kriptovalute imaju slična ponašanja u smislu skokova i padova, iako su bili osnovani u različitim vremenskim trenucima. Na primer, između datuma pojave BTC – a i LTC – a ima približno tri godine. Na kraju 2017. i početka 2018. godine sve valute su ostvarile svoju dosadašnju maksimalnu vrednost, a u odnosu na ovaj period, pred proleće 2017. godine vrednost im je bila gotovo konstantna. Izuzetno veliki rast u cenama je uočljiv kod svakog novčića. Na primer, BTC u martu 2017. godine koštao je oko hiljadu dolara, a u decembru iste godine, njegova vrednost je porasla na skoro dvadeset hiljada dolara. Spomenuti period zaslužuje posebnu pažnju, jer retko se susrećemo sa takvom dinamikom rasta vrednosti kod ostalih finansijskih instrumenata.

Nagli rast je prvo primećen u ceni BTC – a i ETH – a, koji su već počeli intenzivno da rastu od početka marta 2017. godine. Dana 01.03.2017 ETH je koštao 17.43 dolara, dok je krajem meseca ostvario vrednost 49.72 dolara. Njegova cena je nastavila intenzivni rast do sredine januara 2018. godine, kada je ostvario maksimalnu vrednost od 1380 dolara. Njega prati porast cena LTC – a, gde je cena dana 29.03.2017 bila 4.3 dolara, a sledeći dan je porasla na 7.89 dolara. Nakon toga i LTC je nastavio rast u toku narednih meseci. ETC je sledeća u nizu na koju utiče šok od kraja aprila 2017. godine. XRP je jedino malo drugačiji od posmatranih kriptovaluta. Njegova vrednost je porasla krajem maja 2017. godine, pa je održala svoju vrednost sa „blagim” fluktuacijama do sredine decembra iste godine, i tek onda ispratila ostale valute.

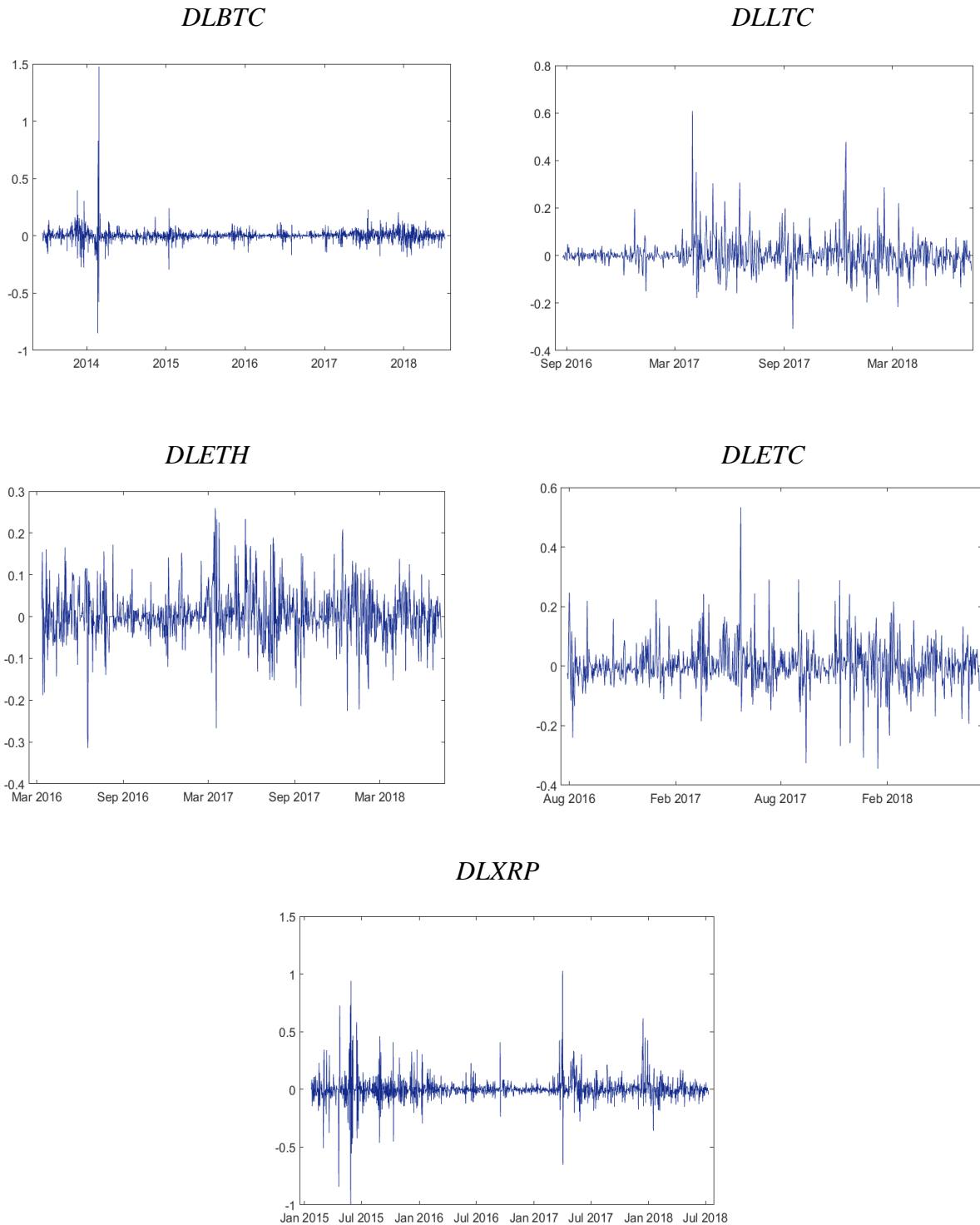
U ovom periodu izuzetno se povećalo interesovanje za kriptovalute kao investicione alternative, a takođe, i potražnja rudarskih alata. Interesantno je napomenuti da cena akcija AMD i NVDA beležili sličan rast u ovom periodu. Oni predstavljaju akcije kompanije AMD i NVIDIA koje proizvode najpopularnije grafičke kartice koje se koriste u rudarenju kriptovaluta. Porast interesovanja za kriptovalute uticao je na porast njihove cene, što je izazvalo lanac reakcija za dalji porast cena. Zahvaljujući današnjim medijima, informacija se veoma brzo širi, pa pošto kriptovalutama možemo lako trgovati na internetu, u bilo kom trenutku i bilo kom mestu, ako posedujemo računar. Sve je to veoma brzo izazvalo „astronomičan” porast cena. Ovaj rast je uplašio razne finansijske institucije, takođe i državne organe. Sredinom januara 2018. godine je započela globalna negativna kampanja protiv kriptovaluta. Njihova vrednost je nakon toga počela postepeno da opada. Za ovaj period, koji karakteristišu cenovni šokovi, najviše su zaslužni mediji i „hajp”.

Što se tiče ponašanja, možemo tvrditi da postoji trend u posmatranim serijama, jer posle porasta vrednosti, obično se rast nastavlja za određeni period, nakon čega se primećuje preokret, i obrnuto. Postojanje trenda ukazuje na nestacionarnost podataka. Takođe, seriju karakteristiše i neregularna komponenta, jer poseduje slučajne fluktuacije koje se ne ponavljaju. To se može primetiti počevši od prvog prikazanog trenutka do kraja posmatranog perioda. Strukturni lom u ponašanju posmatrane serije se može primetiti u pethodno objašnjenom periodu, tj. od početka proleća 2017. godine.

Pošto sve prikazane kriptovalute imaju vrlo slično ponašanje, pretpostavlja se da su one međusobno strogo korelisane, takođe, može se pretpostaviti da postoji neka kointegracijska veza među njima, barem što se tiče perioda naglog rasta vrednosti. Zbog izuzetno velike fluktuacije u vrednostima, zaključuje se, da su sve posmatrane valute jako volatilne.

Podaci ukazuju na nestacionarnost i na logaritamski nivo, što ćemo dokazati u narednom delu ovog rada. Prikazaćemo sada diferencirane logaritamske cene. Na osnovu DF testa utvrđeno je da one jesu stacionarne vremenske serije.

Grafik 4.1.2: *Logaritamski prinosi cene kriptovalute*



Deskriptivnu statistiku date vremenske serije ćemo izvršiti na diferenciranom logaritamskom nivou cena, tj. na logaritamskim prinosisima vremenske serije.

U Tabeli 4.1.1 su nam date vrednosti deskriptivnih statistika logaritmskih prinosa posmatrane vremenske serije.

Tabela 4.1.1: Deskriptivna statistika za logaritamske prinose kriptovalute

	DLBTC	DLLTC	DLETH	DLETC	DLXRP
Očekivana vrednost	0.002213	0.004349	0.004273	0.003227	0.002637
Standardna devijacija	0.065521	0.071587	0.064016	0.075755	0.116541
Koeficijent asimetrije	5.572291	1.980787	0.006288	0.587346	0.769978
Koeficijent ekscesa	172.8932	16.15572	5.860145	9.016094	23.51378
JB test	2241732.000	5387.725	290.411	1114.674	22305.460
p - vrednost	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

Sve očekivne vrednosti logaritmskih prinosa su bliske nuli, pri čemu najveće očekivane vrednost imaju DLETH i DLLTC.

Standardna devijacija je najveća kod DLXRP i najmanja kod DLETH, odnosno oni redom najviše i najmanje odstupaju od očekivane vrednosti.

Koeficijent asimetrije je pozitivan za sve posmatrane valute, što pokazuje da je većina vrednosti uzorka veća od očekivane vrednosti, pri čemu DLBTC i DLLTC su najviše asimetrični.

Koeficijent ekscesa je mnogo veći od tri kod svih posmatranih serija, odnosno, raspodela logaritmskih prinosa je izdužena u odnosu na normalnu, pri čemu izuzetno veliki koeficijent ekscesa ima DLBTC. Ovo nam ukazuje na postojanje autlajera, odnosno na vrednosti koje su udaljene od ostalih. Na grafku 4.1.1 se takođe može uočiti da je BTC ostvario najveći porast u cenama.

Kod svake valute smo morali odbaciti pretpostavku o normalnosti raspodela logaritmskih prinosa na osnovu p - vrednosti JB testa, što je i logična posledica velike vrednosti koeficijenata ekscesa.

Sada ćemo ispitati međuzavisnost logaritmskih prinosa pomoću koeficijenata korelacije, čije vrednosti su date u Tabeli 4.1.2.

Tabela 4.1.2: Matrica koeficijenata korelacije za logaritamske prinose kriptovalute

	DLBTC	DLLTC	DLETH	DLETC	DLXRP
DLBTC	1				
DLLTC	0.50577	1			
DLETH	0.44451	0.46482	1		
DLETC	0.45505	0.50729	0.59204	1	
DLXRP	0.12926	0.32690	0.26487	0.26635	1

Uzoračke koeficijente korelacije date u Tabeli 4.1.2 smo izračunali tako što smo uporedili vrednosti novčića „mlađeg” sa „starijim” od datuma pojave „mlađeg” novčića do kraja posmatranog perioda.

Iz Tabele 4.1.2 se uočava da najveća korelacija postoji između DLETH i DLETC, a zatim između DLLTC i DLETC, a najmanja između DLBTC i DLXRP. Logaritamske promene vrednosti XRP su najmanje zavisne od ostalih novčića, što se na Grafiku 4.1.1 i 4.1.2 isto može uočiti.

Može se tvrditi da najjače povezanosti u logaritamskim promenama vrednosti postoje između parova novčića gde je jedan od njih pravljen uvođenjem *fork* – a u ulančanim blokovima druge. Oni su ETH i ETC, BTC i LTC. Postojanje pozitivne korelacije govori o tome, da je porast vrednosti jedne valute ispraćena porastom vrednosti druge valute. Koeficijenti korelacije ukazuju na srednju povezanost, jer su im vrednosti blizu 0.5, osim u slučaju DLXRP, pa je njena promena najmanje ispraćena.

Dobili smo da su svi koeficijenti korelacije statistički značajni, jer je p – vrednost za svaki od ovih parova manja od 5%.

4.2 Modeli za predikciju kriptovalute

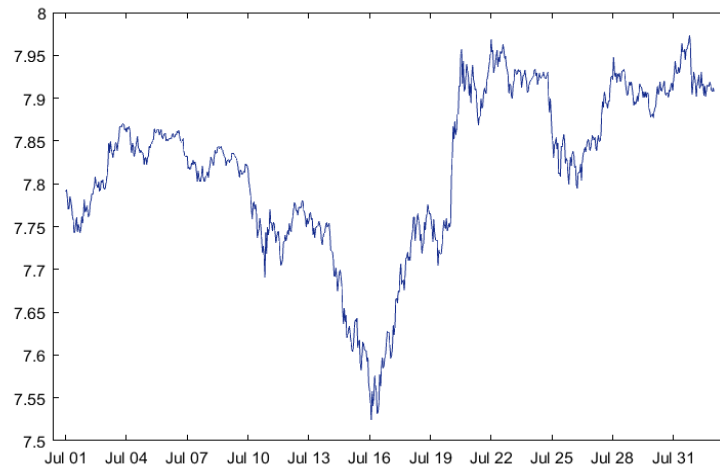
Sada ćemo formirati linearne i nelinearne autoregresivne modele za predikciju, koristeći podatke na jednočasnoj frekvenciji, s ciljem ispitivanja njihove performanse u predviđavanju cena kriptovaluta. Iskustvo tokom istaživanja je pokazalo da na podacima na dnevnoj frekvenciji nijedan model ne postaje adekvatan za predikciju, čak iako su bili izbegavani periodi sa najvećim šokovima, međutim, koristeći mali uzorak na jednočasnoj frekvenciji, dobijaju se adekvatni modeli. Iz linearnih modela smo izabrali VAR model, jer želimo uzimati u obzir i međusobne veze valute, pa i ispitati postojanje kointegracijske veze. Među nelinearnim modelima koristićemo NNAR model, jer modeli neuronske mreže su jako popularni u predikcijama cena kriptovalute i obično daju najbolje predikcije.

Za formiranje modela koristićemo logaritmovane cene BTC, ETH i XRP. Modele ćemo formirati na podacima koji se odnose na period 01.07.2017 – 31.07.2017, jer nemamo na raspolaganju podatke sa ovom frekvencijom od ranijih perioda. Predikcije ćemo formirati samo za jedan dan unapred, za dan 01.08.2017., za svaki čas.

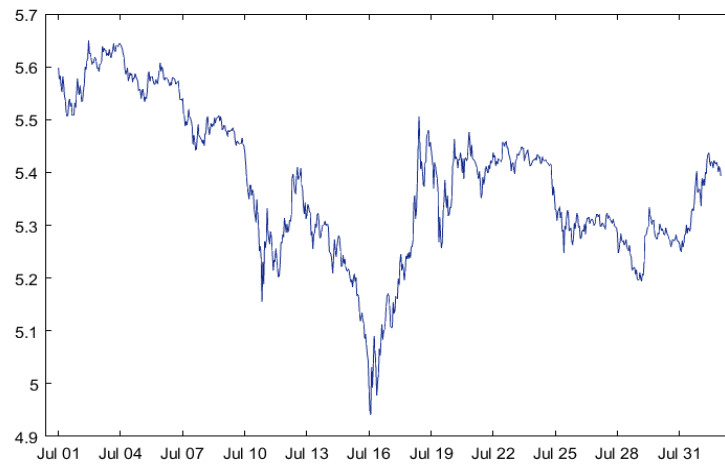
U izabranom periodu se već može primetiti strukturni lom u ponašanju serije, ali fluktuacije u cenama su još relativno stabilne. Prikazaćemo sada logaritamske cene za ovaj period izabrane valute.

Grafik 4.2.1: Cene kryptovalute na logaritamskom nivou

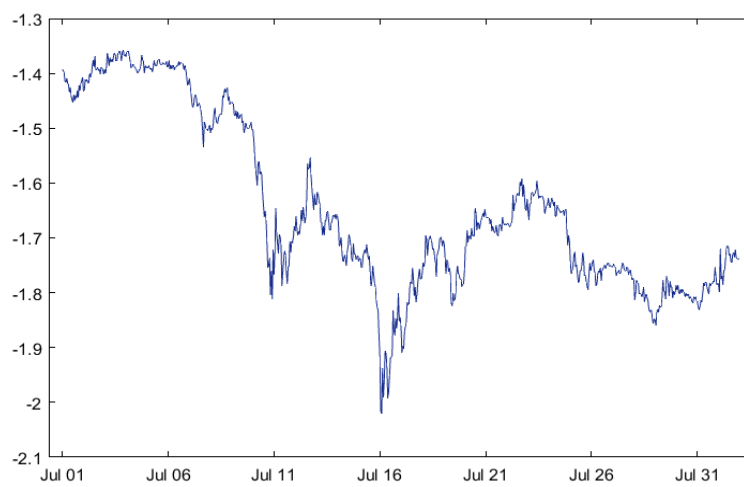
LBTC



LETH



LXRP



Kao što se vidi na Grafiku 4.2.1, sve posmatrane logaritamske cene imaju slična ponašanja i ukazuju na nestacionarnost, jer je veoma primetljiv trend komponent.

4.3 Formiranje VAR modela za kriptovalute

U ovom delu rada formiraćemo linearne modele za predviđanje vrednosti kriptovalute. Kao što smo već spomenuli, za ocenjivanje koeficijenta modela koristićemo uzorak od 01.07.2017 do 31.07.2017 i predikcije ćemo formirati za dan 01.08.2017. Predikcije odredimo statičkom metodom, odnosno, pomoću ocenjenih koeficijenata, koristeći jednokoračne predikcije koje se odnose za jedan čas, formiramo predikciju za dvadeset četiri sata.

4.3.1 Testiranje stacionarnosti podataka i korelaciona matrica

Pre početka formiranja modela, ispitujemo stacionarnost podataka, jer je to krucijalan korak pri formiranju linearnih modela, a zatim prikazujemo korelacionu matricu stacionare vremenske serije radi pregleda njihove zavisnosti u ovom vremenskom intervalu.

Da bi ispitali stacionarnost logaritamskih cena, ispitujemo postojanje jediničnog korena DF testom. Pri ispitivanju posmatramo tri slučaja, prvo, pretpostavimo da vremenska serija ne poseduje ni konstantu ni trend, zatim, pretpostavimo da vremenska serija poseduje samo konstantu, i konačno, pretpostavimo da vremenska serija poseduje i konstantu i linearni trend. Nulta hipoteza je, da vremenska serija ima jedinični koren, i ako su sve dobijene p – vrednosti manje od 0.05, odbacujemo nultu hipotezu i zaključimo da je vremenska serija stacionarna. Rezultati DF testa su dati u Tabeli 4.3.1.1.

Tabela 4.3.1.1: Rezultati DF testa na logaritamskom nivou cena kriptovalute

	Ni konstanta ni trend	Konstanta	Konstanta i trend
LBTC	0.7920	0.6617	0.8085
LETH	0.4690	0.2076	0.4985
LXRP	0.8708	0.4466	0.3641

U Tabeli 4.3.1.1 su sve registrovane p – vrednosti veće od 0.05, tj. u svim slučajevima treba da prihvatamo hipotezu o nestacionarnosti logaritamskih cena.

Kada izvršimo testiranje na nivou prvog diferencijala logaritamskih cena, dobijamo da su sve p – vrednosti manje od 0.01, što znači da posle jednog diferenciranja, serije postaju stacionarne.

Dokazali smo da su logaritamski prinosi posmatrane vremenske serije stacionarni, pa pošto pri izgradnji linearnih modela osnovna pretpostavka je stacionarnost podataka i pošto sada posmatramo manji uzorak, zanima nas kakva je linearna zavisnost u kratkom roku logaritamskih prinosa. Tablica korelacije za celi posmatrani period je:

Tabela 4.3.1.2: Korelaciona matrica za logaritamske prinose DLBTC, DLETH i DLXRP

	DLBTC	DLETH	DLXRP
DLBTC	1		
DLETH	0.694265	1	
DLXRP	0.582365	0.653251	1

Kao što se vidi u Tabeli 4.3.1.2, u ovom periodu sve serije su jače korelisane nego u dugom vremenskom periodu. Zanimljivo je, da DLXRP u dugom vremenskom period ima mali koeficijent korelacije sa posmatranim serijama, dok je u ovom kratkom periodu mnogo osetljiviji na logaritamske promene druge dve serije.

4.3.2 Određivanje reda VAR modela

Pre nego što formiramo VAR model, treba da odredimo optimalan red modela. Za određivanje reda modela koristimo AIC kriterijum koji primenjujemo na logaritamskim cenama. Na osnovu AIC kriterijuma dobili smo da je optimalan red VAR modela na logaritamskom nivou cena tri, jer je za nju vrednost AIC kriterijuma minimalna.

4.3.3 Johansen – ov test kointegracije

U slučaju analize višedimenzionalnih vremenskih serija, uslov stacionarnosti na nivou prvog diferencijala nije dovoljan da formiramo model na tom nivou, jer može da se desi da treba uključiti kointegracijsku jednačinu u modelu. Kointegracijske jednačine (KJ) formirane na nestacionarnim serijama jesu stacionarne. Postojanje kointegracijske veze u VAR modelu proverićemo pomoću *Johansen* – ovog testa maksimalnog karakterističnog korena. U našem slučaju možemo imati maksimalno dve kointegracijske jednačine.

Postupak utvrđivanja broja kointegracijske jednačine je detaljno objašnjen u teorijskom delu ovog rada. U ovom modelu nemamo kointegracijsku jednačinu jer smo odmah na početku prihvatili nultu hipotezu o nepostojanju KJ. Razlog prihvatanja je, da je vrednost test statistike (15.77) manja od kritične vrednosti (22.00), koja je definisana na nivou značajnosti 0.05. Dakle, nismo potvrdili pretpostavku o kointegraciji, iako je delovao logično.

Na osnovu rezultata AIC kriterijuma i *Johansen* – ovog testa zaključujemo da treba da formiramo VAR(2) model na diferenciranim serijama logaritamskih cena.

4.3.4 Testiranje Grendžerove kauzalnosti

Sledeći korak je ispitivanje Grendžerove kauzalnosti. Grendžerovim testom kauzalnosti tvrdimo da u VAR model treba uključiti samo one promenljive, koje pomažu u objašnjavanju sadašnje vrednosti promenljive, a sve ostale promenljive treba isključiti iz modela. Nulta hipoteza je, da promenljivu treba isključiti iz modela, odnosno da ona nije korisna za formiranje predikcije. Rezultati Grendžerove statistike su dati u Tabeli 4.3.4.1.

Tabela 4.3.4.1: Rezultati Grendžerove statistike za kriptovalute

H_0	F - test	p - vrednost
DLBTC ne Grendžer urokuje DLETH	0.57596	0.5624
DLBTC ne Grendžer uzrokuje DLXRP	6.62419	0.0014
DLETH ne Grendžer urokuje DLBTC	0.10771	0.8979
DLETH ne Grendžer urokuje DLXRP	16.0860	0.0000
DLXRP ne Grendžer uzrokuje DLBTC	0.62907	0.5334
DLXRP ne Grendžer uzrokuje DLETH	0.93826	0.3918
DLETH i DLXRP ne Grendžer uzrokuje DLBTC	1.78467	0.7753
DLBTC i DLXRP ne Grendžer uzrokuje DLETH	3.32762	0.5127
DLBTC i DLETH ne Grendžer uzrokuje DLXRP	35.48633	0.0000

Posmatranjem dobijene p – vrednosti, zaključujemo da DLBTC i DLETH uzrokuje DLXRP, pa njih treba uključiti u jednačini DLXRP. U svim ostalim slučajevima moramo prihvatiti nultu hipotezu, tj.nijedna dodatna promenljiva nije korisna za formiranje predikcije DLBTC i DLETH.

4.3.5 Ocenjeni VAR model

Na osnovu prethodna dva testa smo utvrdili da nemamo kointegracijsku jednačinu u VAR modelu i jedino u jednačini DLXRP treba da se uključi DLBTC i DLETH. Ostala dva modela stoga možemo tumačiti kao jednodimenzionalni AR(2) model. Ocenjeni koeficijenti redukovano VAR modela su dati u Tabelama 4.3.5.1 – 4.3.5.3.

Tabela 4.3.5.1: Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose BTC

	Koeficijenti za DLBTC(t)
DLBTC(-1)	-0.0670052
DLBTC(-2)	0.0383758
Konstanta	0.0002034
R^2	0.006629
\bar{R}^2	0.002596

Tabela 4.3.5.2: Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose ETH

	Koeficijenti za DLETH(t)
DLETH(-1)	-0.0549053
DLETH(-2)	0.0104887
Konstanta	-0.0003155
R^2	0.003436
\bar{R}^2	0.001624

Tabela 4.3.5.3: Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose XRP

	Koeficijenti za DLXRP(t)
DLBTC(-1)	0.0950368
DLETH(-1)	0.2582480
DLXRP(-1)	-0.3490736
DLBTC(-2)	0.1227284
DLETH(-2)	0.1053378
DLXRP(-2)	-0.1864407
Konstanta	-0.0007295
R^2	0.07560
\bar{R}^2	0.06679

Jednačina VAR(2) modela pomoću ocenjenih koeficijenata se formira prema formuli: $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$, koja se tumači na isti način kao i definicija u teorijskom delu ovog rada za $n = 3$, pri čemu su u matricama ϕ_i , $i = 1, 2$, vrednosti koeficijenata koje ne treba uključiti u modelima jednaki nuli.

Koeficijent determinacije R^2 nam objašnjava koliko je procenat varijacije u uzorku objašnjen modelom. Vidimo, da smo kod svakog modela dobili niske vrednosti, međutim to ne mora da znači da je model loš, može samo ukazati na to da model ne sadrži dovoljno promenljivih za objašnjavanje zavisne promenljive ili da linearni model nije dovoljno dobar za opis fluktuacije vrednosti. Prilikom uključivanja nove promenljive u model, vrednost koeficijenta determinacije se povećava, pa to nije dobar pokazatelj za upoređivanje modela koje sadrže različiti broj promenljivih, zato se definiše korigovani koeficijent determinacije \bar{R}^2 . Na osnovu vrednosti \bar{R}^2 zaključujemo da smo najbolji model dobili za DLXRP.

Što se tiče tumačenja ocenjenih koeficijenata dobijenih modela, posmatrajući DLXRP, najveći pozitivan uticaj na njihovu sadašnju vrednost ima vrednost DLETH od prethodnog sata, odnosno, porast vrednosti DLETH(t - 1) za jednu jedinicu izaziva porast vrednosti DXRP(t) za 0.258248 jedinica, pod pretpostavkom da ostale vrednosti ostaju nepromenjene. Na nju sve promenljive utiču pozitivno, osim svoje sopstvene prethodne vrednosti. Kod modela za DLBTC(t) i DLETH(t) dobili smo veoma niske koeficijente uz promenljive iz prethodnih perioda i koeficijent determinacije isto je veoma nizak, te ne možemo očekivati precizne predikcije ovih modela.

4.3.6 Provera adekvatnosti VAR modela

Adekvatnost modela proveravamo testiranjem postojanja autokorelacije na serijama reziduala, koristeći BG test. Nulta hipoteza je da nema autokorelacija među rezidualima. Prilikom izvođenja testa, treba da se definiše red autokorelacije, za koji se obično uzima najbliži ceo broj od $\ln(T)$, gde je T veličina uzorka. U našem slučaju taj broj iznosi sedam. Na osnovu BG testa, prihvatamo hipotezu o nepostojanju autokorelacije među rezidualima, jer je p – vrednost, koja iznosi 0.5002, veća od 0.05, pa uslov adekvatnosti modela je ispunjen.

4.3.7 Osobine rezidula VAR modela

Jedna od važnih osobina rezidula modela je homoskedastičnost. Prisustvo heteroskedastičnosti u rezidualima može biti znak neadekvatnosti modela, a može samo ukazati na to da ocenjeni koeficijenti dobijenog modela su generalno manji nego što je potrebno, pa predviđene vrednosti će imati veliko odstupanje od stvarne vrednosti. Za proveravanje prisustva heteroskedastičnosti u rezidualima dobijenog modela koristimo *White* – ov test. Testira se nulta hipoteza, koja kaže da su reziduali homoskedastični, protiv alternativne, koja pretpostavlja da su reziduali heteroskedastični. Pošto je dobijeni p – vrednost imanje od 0.01, odbacuje se hipoteza o homoskedastičnosti reziduala.

Sada ćemo izvršiti i deskriptivnu statistiku reziduala dobijenog modela, čiji rezultai su u Tabeli 4.3.7.1.

Tabela 4.3.7.1: Deskriptivna statistika reziduala VAR modela za kriptovalute

	Reziduali od DLBTC(t)	Reziduali od DLETH(t)	Reziduali od DLXRP(t)
Očekivana vrednost	-6.943113e-19	1.463892e-18	-1.846338e-19
Standardna devijacija	0.011196	0.019226	0.017285
Koeficijent asimetrije	0.109356	0.3934832	0.1010669
Koeficijent ekscesa	6.161437	10.647477	9.151269
JB test	163.5621	523.9805	419.9211
p - vrednost	0.0000	0.0000	0.0000

Očekivana vrednost i standardna devijacija reziduala su bliski nuli i to su poželjne osobine reziduala modela za dobijanje dobre predikcije.

Koeficijenti asimetrije su pozivni, što znači da većina vrednosti reziduala je veća od očekivane vrednosti.

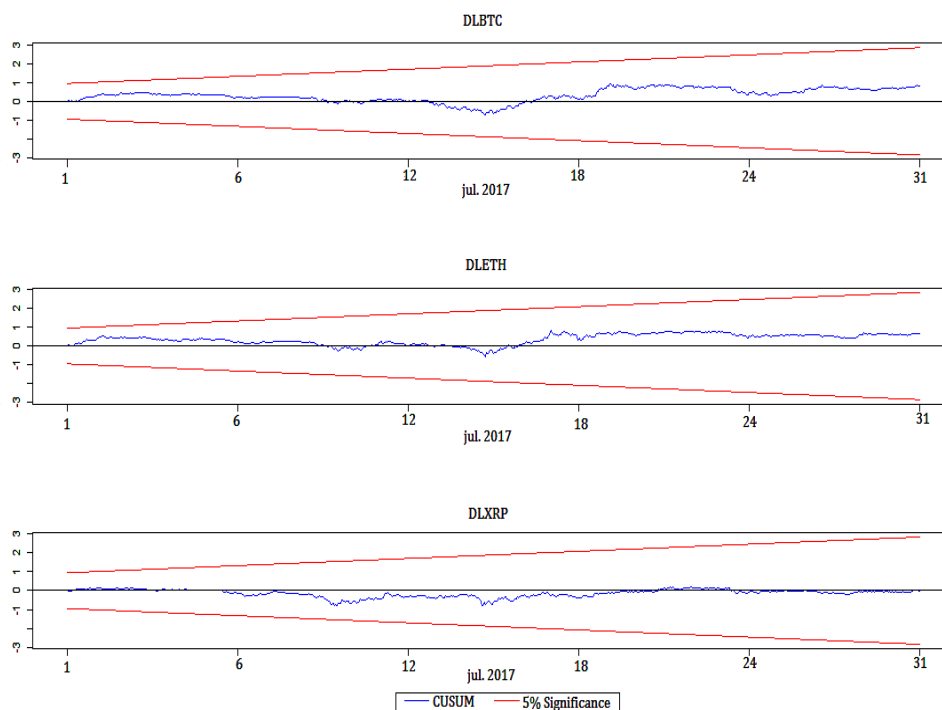
Koeficijenti ekscesa su veći od tri, pa raspodele reziduala imaju deblje repove u odnosu na normalnu. Velike vrednosti koeficijenta ekscesa ukazuju na postojanje ekstremnih vrednosti u rezidualima, što je naročito primetljivo kod reziduala modela za DLETH(t).

Na osnovu p – vrednosti JB testa, odbacuje se hipoteza o normalnosti reziduala.

4.3.8 CUSUM test stabilnosti modela

Stabilnost modela podrazumeva da uticaj šokova, koji predstavljaju reziduali modela, opadaju tokom vremena. Ova osobina modela je bitna za dobijanje dobre prediktivne vrednosti. Za ispitivanje stabilnosti modela koristimo CUSUM test koji posmatra kumulativnu sumu standardizovanih rekurzivnih reziduala tokom vremena. Ako suma standardizovanih reziduala, koja se akumulira tokom vremena, osciluje oko nule i ako vrednosti ne izlaze van granice koja je specifično određena pomoću CUSUM testa, smatramo da je naš model stabilan.

Grafik 4.3.8.1: *Grafička predstava CUSUM testa stabilnosti modela za kriptovalute*

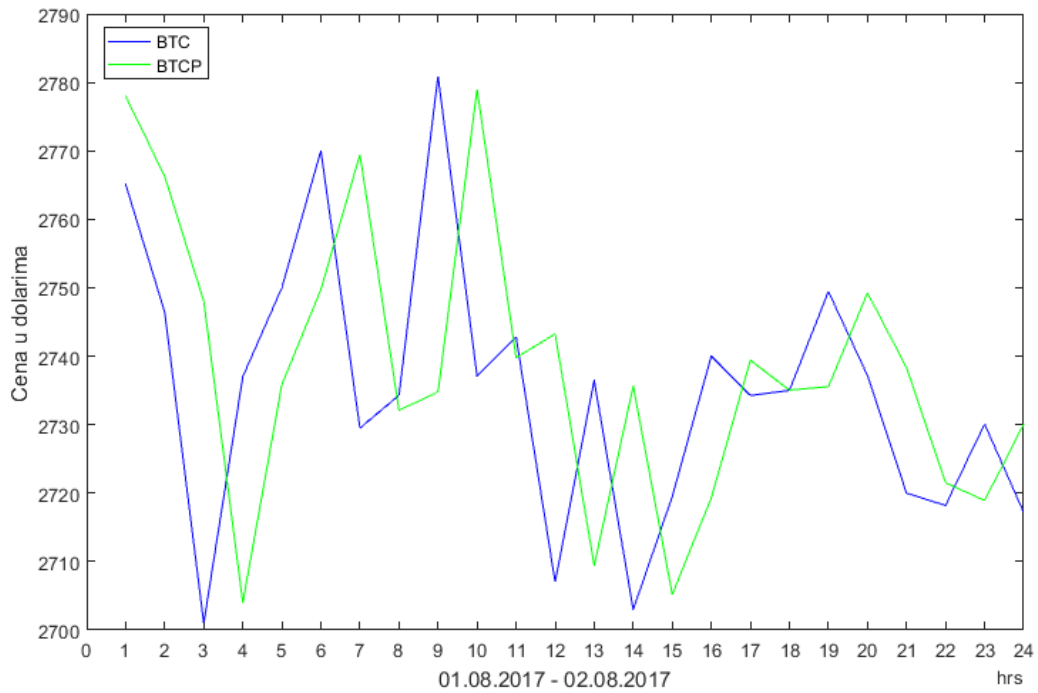


Na Grafiku 4.3.8.1 su predstavljene vrednosti CUSUM testa plavom linijom. Vidimo da vrednosti osciluju oko nule do prve polovine perioda na kom je model formiran, a posle toga postaju pozitivne kod DLBTC(t) i DLETH(t). Pošto vrednosti ne izlaze van granice značajnosti, na nivou 5%, koja je predstavljena crvenom linijom, smatrano da su dobijeni modeli stabilni.

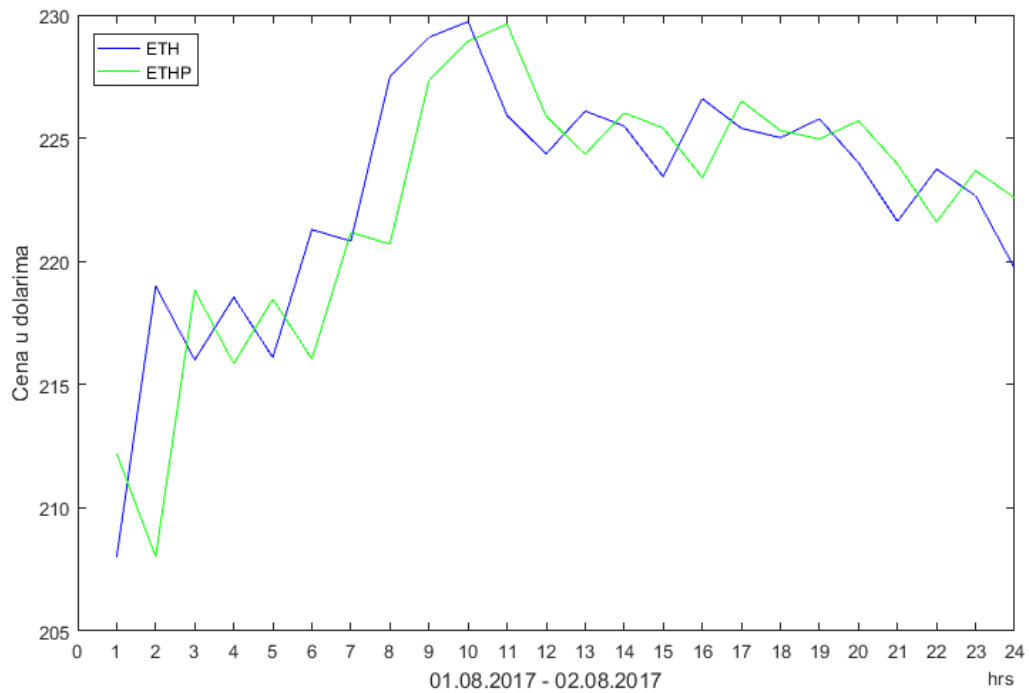
4.4 Formiranje predikcije pomoću VAR modela za kriptovalute

U prethodnom delu smo ispitali sve potrebne statističke osobine koje trebaju za formiranje adekvatnog modela za predikciju. VAR model smo formirali na osnovu podataka koji se odnose na period 01.07.2017 – 31.07.2017, a sada ćemo prikazati grafički statičke prediktivne vrednosti za dan 01.08.2017. Rezultati su sledeći:

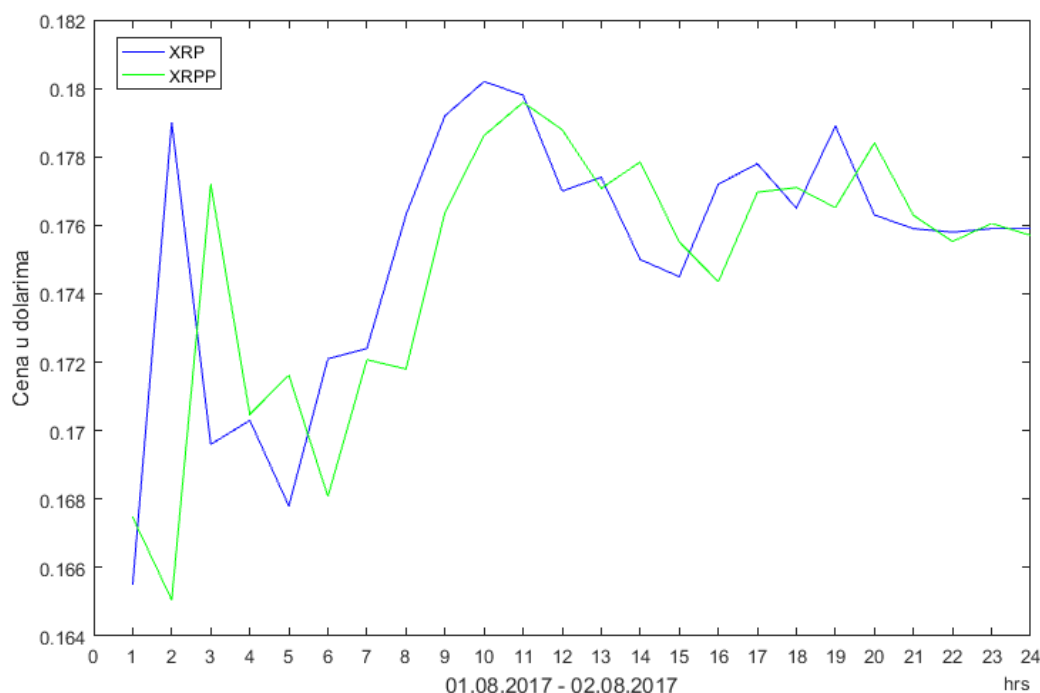
Grafik 4.4.1: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena BTC*



Grafik 4.4.2: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena ETH*



Grafik 4.4.3: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena XRP*



Na Graficima 4.4.1 – 4.4.3 zelena linija predstavlja statičke prediktivne vrednosti na osnovnom nivou, dok plava linija predstavlja stvarne vrednosti. Modeli su dobro ispratili fluktuacije stvarne vrednosti, međutim očigledno postoje neka kašnjenja u predikcijama. Možemo reći da najbolje prediktivne vrednosti za jedan čas unapred su vrednosti iz prethodnog časa. Ova izjava se potvrđuje kada se predstavi grafik prediktivnih vrednosti korigovan za jedan čas unazad sa stvarnim vrednostima. Tada se dobijaju gotovo identične vrednosti sa blagim odstupanjima, pri tome, najveće odstupanje beleži XRP. Primenujući dinamički način predviđanja, dobijaju se vrednosti koje su jako blizu poslednje vrednosti uzorka, na kom je model formiran. Ovo ponovo potvrđuje naše izjave. Sve to nam govori da predikcije nisu dobre.

Da bismo mogli bolje tumačiti dobijene prediktivne vrednosti, analizirajmo sada greške predikcije, čiji rezultati su u Tabeli 4.4.1.

Tabela 4.4.1: *Greške predikcije VAR modela za kriptovalute*

	BTC	ETH	XRP
RMSE	24.757412	3.505089	0.003743
BP	0.016528	0.012317	0.016518
CP	0.982688	0.973935	0.983266
VP	0.000784	0.013748	0.000216
MAE	20.338622	2.627263	0.002362
MAPE	0.741943	1.200078	1.373800
U	0.004523	0.007873	0.010907

Standardna devijacija greške predviđanja (RMSE) i prosečna suma apsolutne greške (MAE) trebaju da budu blisko nuli, što je jedino kod XRP ispunjeno. Na osnovu VP vrednosti

zaključujemo da modeli dobro opisuju fluktuacije stvarnih vrednosti. Ona je najveća za prediktivne vrednosti ETH i fluktuacije predikcije odstupaju svega 1.3748% od stvarnih vrednosti. BP je mera koja pokazuje koliki udeo grešakaje došao iz modela i njene niske vrednosti ukazuju na to da najveći udeo grešaka nije posledica primena modela. MAPE vrednost pokazuje prosečno relativno odstupanje predikcije od stvarnih vrednosti i izraženo je u procentima. Može se tvrditi da je ona dovoljno mala za sve posmatrane predikcije, jer najveća odstupanja beleži XPR, koje je svega 1.3738%. Tejlav koeficijent je mera koja je pogodna za upoređivanje predikcije različitih modela i ako je njegova vrednost nula, imamo savršenu predikciju. Ona je dovoljno blizu nuli kod svih posmatranih predikcija. Sumirajući rezultat svih pokazatelja, u ovom slučaju najbolje predikcije smo dobili za XRP.

4.5 Formiranje NNAR modela za kriptovalute

Funkcija *nnetar()* u R programskom jeziku fitira $NNAR(p, q)$ model sa jednim skrivenim slojem, koristeći AIC kriterijum za određivanje reda $AR(p)$ modela na nestacionarnim serijama. Ukoliko broj čvorova u skrivenom sloju q nije specificiran, uzima se da je $q = \frac{p+1}{2}$ (zaokruženo na najbliži ceo broj). Za funkciju aktivacije koja se koristi za transformaciju podataka u skrivenim čvorovima smo izabrali logističku funkciju $g = \frac{1}{1+e^{-x}}$, pri čemu nismo definisali funkciju aktivacije na izlaznom čvoru.

U R, *nnetar()* funkcija ocenjuje koeficijente koristeći *Backpropagation* algoritam učenja i pušta podatke dvadeset puta preko neuronske mreže. Mi ćemo koristiti automatske definisane vrednosti *nnetar()* funkcije sa logističkom funkcijom aktivacije.

Za izvođenje analize korišćićemo nestacionarne logaritamske cene LBTC, LETH i LXP za period od 01.07.2017 – 31.07.2017 i formiraćemo statičke predikcije za svaki čas dana 01.08.2017, kao i u prethodnom delu ovog rada.

Posle primene prethodno specificirane *nnetar()* funkcije, dobili smo da je red AR modela dva na nestacionarnim podacima, odnosno, imamo po dva inputa u modelima neuronske mreže kod svake posmatrane serije. Broj neurona ili čvorova u skrivenom sloju je $q = \text{round}\left(\frac{2+1}{2}\right) = 2$. Shodno tome, broj koeficijenata koji se ocenjuju unutar mreže je devet. Prikazujemo sada ocenjene koeficijente u Tabeli 4.5.1.

Tabela 4.5.1: Ocenjeni koeficijenti NNAR modela za logaritamske cene kriptovalute

	LBTC	LETH	LXP
ω_0	0.435451	5.019279	3.7676241
ω_1	-3.673459	-1.641955	-0.3617962
ω_2	2.010656	-6.918363	-8.0386359
ω_{01}	0.5928120	-2.360352	3.5500223
ω_{02}	3.127734	0.875965	-0.2937730
ω_{11}	-1.026988	-0.911985	-2.0627128
ω_{12}	-0.036799	-0.364568	-0.6913306
ω_{21}	1.394539	-0.581605	-0.4419710
ω_{22}	0.168661	0.015280	-0.0410474

Jednačine NNAR modela možemo prikazati formulom

$$r_t = \omega_0 + \sum_{j=1}^2 \omega_j g(\omega_{0j} + \sum_{i=1}^2 \omega_{ij} r_{t-i}) + a_t,$$

gde r_t označava logaritamske cene LBTC, LETH i LXRP u trenutku t , respektivno, a_t je beli šum, a $g = \frac{1}{1+e^{-x}}$ je logistička funkcija aktivacije u skrivenim čvorovima.

Ocenjenim koeficijentima, datim u Tabeli 4.5.1, se na početku dodeljuje slučajna vrednost, a zatim se koriguju. Stoga, oni nisu jedinstveno određeni, te ih ne možemo tumačiti na isti način kao kod linearnih modela.

4.5.1 Testiranje adekvatnosti NNAR modela

Kao i u prethodnom delu ovog rada, sledeći korak je testiranje adekvatnosti dobijenih modela. Za testiranje adekvatnosti korišćemo *Ljung – Box* – ovu statistiku i proveravamo postojanje autokorelacije među rezidualima modela. Red do koje ćemo proveriti postojanje autokorelacije je sedam, koji je najbliži ceo broj logaritmovane veličine uzorka. Rezultati statistike su dati u Tabeli 4.5.1.1:

Tabela 4.5.1.1: *Ljung - Box - ova statistika reziduala NNAR modela za kriptovalute*

Broj koraka unazad	LBTC		LETH		LXRP	
	Q statistika	p vrednost	Q statistika	p vrednost	Q statistika	p vrednost
1	0.0017	0.9670	0.0060	0.9755	0.0035	0.9526
2	1.7226	0.4226	0.0496	0.9755	0.8127	0.6661
3	1.9617	0.5804	0.6076	0.8947	0.8662	0.8336
4	2.7911	0.5934	0.6699	0.9550	0.9228	0.9213
5	2.8145	0.7286	2.5138	0.7744	1.3372	0.9311
6	2.8267	0.8303	3.3552	0.7631	2.2766	0.8926
7	3.8434	0.7976	4.4248	0.7298	2.3654	0.9369

Iz Tabele 4.5.1.1 uočava se da sve p – vrednosti *Ljung – Box* - ove statistike su veće od 0.05, odnosno, prihvata se hipoteza o nepostojanju autokorelacije među rezidualima modela, pa sve dobijene NNAR modele proglašavamo adekvatnim.

4.5.2 Osobine reziduala NNAR modela

Ispitaćemo sada i važnije osobine reziduala dobijenih modela primenjujući deskriptivnu statistiku, čiji rezultati su u Tabeli 4.5.2.1.

Tabela 4.5.2.1: *Deskriptivna statistika reziduala NNAR modela za kriptovalute*

	Reziduali od LBTC(t)	Reziduali od LETH(t)	Reziduali odXRP(t)
Očekivanje	2.33243e-06	1.057845e-05	4.78957e-07
Standardna devijacija	0.01101827	0.01889026	0.01749235
Koeficijent asimetrije	0.1689254	0.2242	0.03089177
Koeficijent ekscesa	4.939613	5.915533	8.069997
JB test	123.88	278.08	821.61
p - vrednost	0.0000	0.0000	0.0000

Očekivane vrednosti reziduala su bliske nuli, odnosno, u proseku nemamo veliko odstupanje između ocenjenih vrednosti modela i stvarnih vrednosti.

Standardna devijacije, tj. odstupanje od očekivane vrednosti su takođe male.

Niske vrednosti koeficijenta asimetrije ukazuju namalju asimetriju i pošto su sve vrednosti pozitivne, većine vrednosti reziduala su veće od očekivane vrednosti.

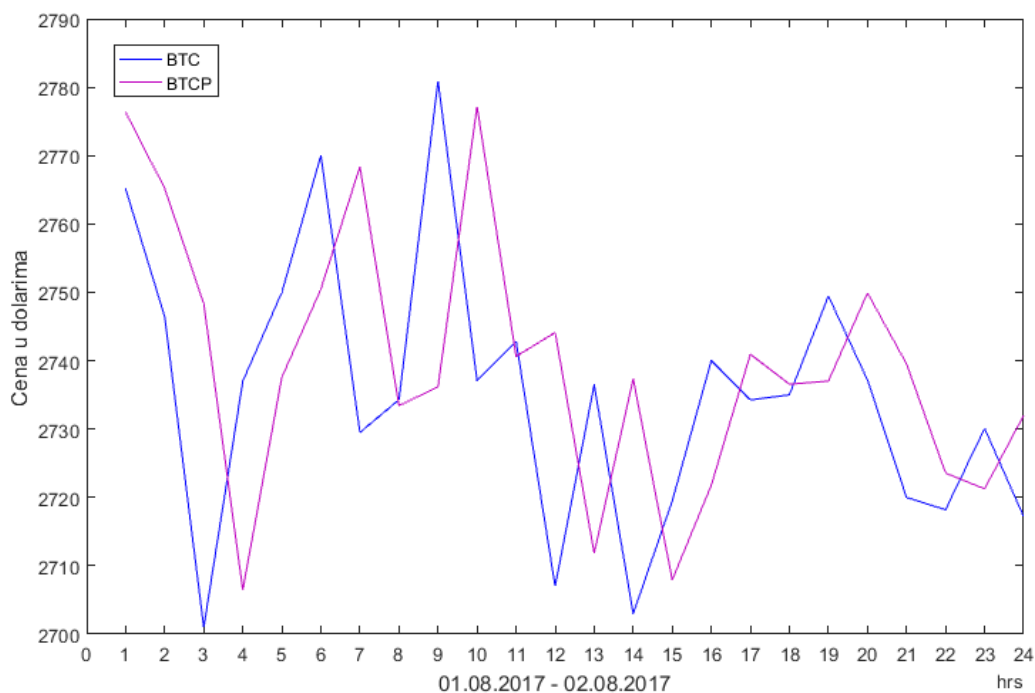
Koeficijenti ekscesa su veći od tri, pa raspodele reziduala imaju debele repove, što ukazuje na odsustvo normalne raspodele.

Na osnovu p – vrednosti JB testa zaključujemo da reziduali nemaju normalnu raspodelu.

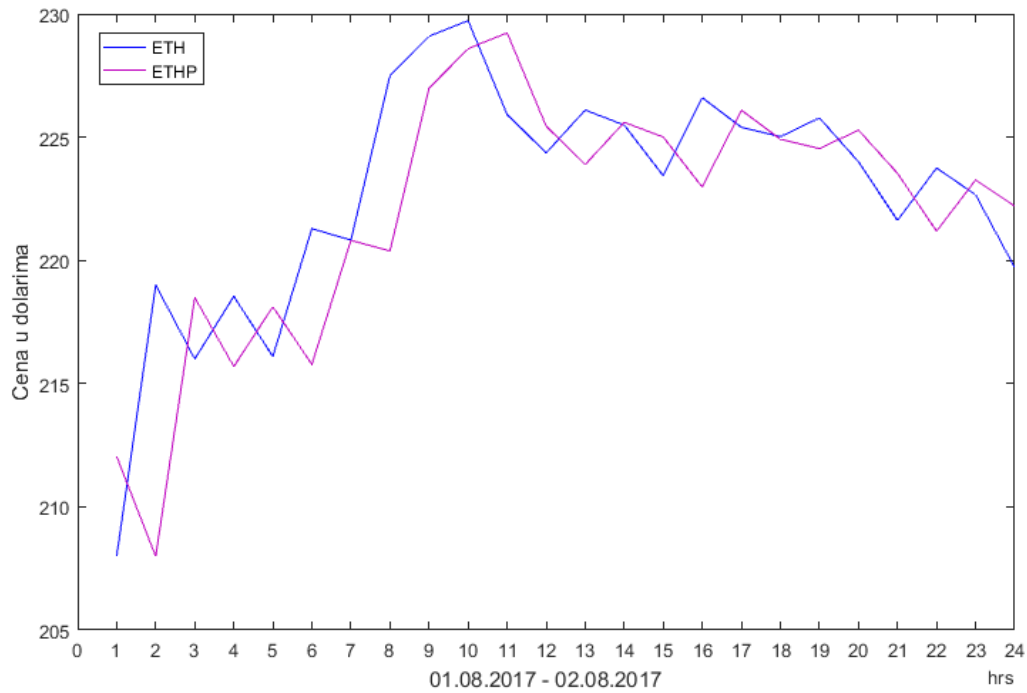
4.6 Formiranje predikcije pomoću NNAR modela za kriptovalute

Grafički prikaz dobijene statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena na osnovnom nivou za dan 01.08.2017 je sledeći:

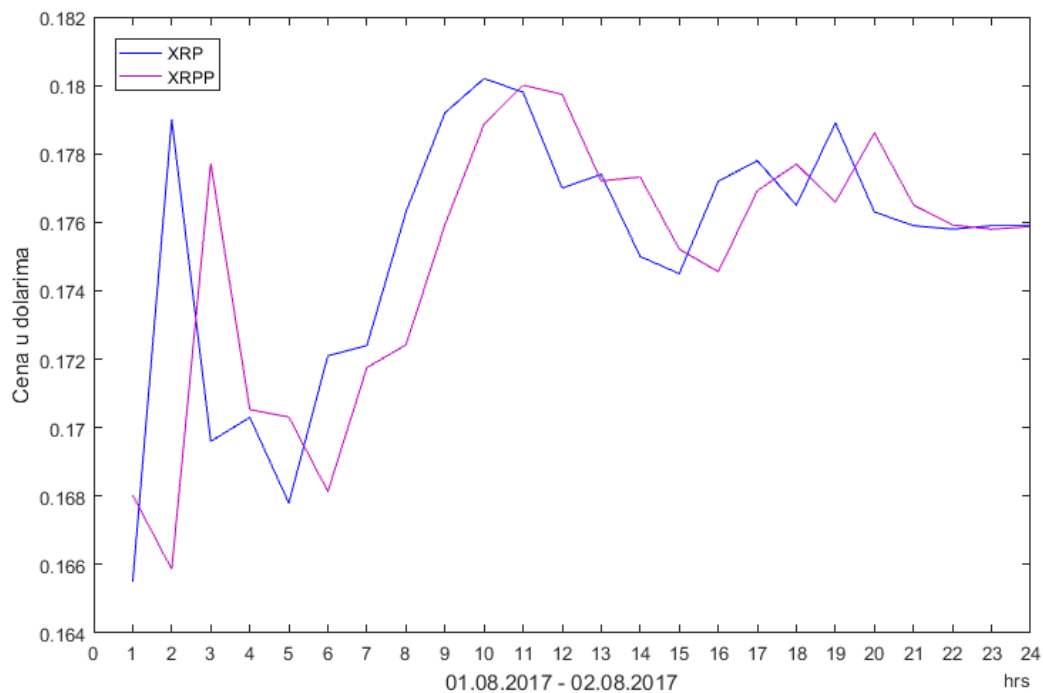
Grafik 4.6.1: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena BTC*



Grafik 4.6.2: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena ETH*



Grafik 4.6.3: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti cena XRP*



Na Graficima 4.6.1 – 4.6.3 ljubičastom linijom su predstavljene jednokoračne statičke predikcije NNAR modela, a plavom stvarne vrednosti. Predikcije su dobro ispratile fluktuacije stvarnih vrednosti, međutim, i kod ovog modela se može primetiti kašnjenje u predikcijama i vrednosti su jako blizu prethodnog časa. Ovo nam daje intuiciju da su najbolje predikcije trenutne vrednosti. Greške predikcije su sledeće:

Tabela 4.6.1: Greške predikcije NNAR modela za kriptovalute

	BTC	ETH	XRP
RMSE	24.155145	3.511899	0.003702
BP	0.031248	0.045102	0.009729
CP	0.968195	0.946520	0.989862
VP	0.000557	0.008378	0.000409
MAE	19.760636	2.546996	0.002333
MAPE	0.723046	1.149225	1.330710
U	0.000024	0.000261	0.000240

Standardno odstupanje između stvarne i prediktivne vrednosti (RMSE) je najveće kod BTC i najmanje kod XRP. Apsolutno odstupanje (MAE) pokazuje istu situaciju. Proporcija pristrasnosti (BP) nam kazuje koliki je udeo grešaka koji dolazi iz modela i njene vrednosti su sasvim zadovoljavajuće. Proporcija varijanse (VP) pokazuje koliko uspešno su predikcije ispratile fluktuacije stvarnih vrednosti. Njene vrednosti su niske, što znači da modeli dobro opisuju te fluktuacije. Prosečno relativno odstupanje od stvarnih vrednosti (MAPE), koja je iskazana u procentima, je najmanje kod BTC, a najveće XRP. Prediktivne vrednosti XRP u proseku relativno odstupaju 1.33071% od stvarne vrednosti. Tejlvi koeficijenti (U) su bliski nuli i najmanji su za BTC. Dakle, sumirajući rezultate, zaključujemo da najbolje predikcije smo dobili za cenu XRP.

4.7 Upoređivanja modela za kriptovalute

U prethodnim delovima ovog rada smo formirali predikcije cena kriptovalute pomoću linearnog VAR i nelinearnog NNAR modela. U oba slučaja smo dobili veoma slične predikcije, pri tome se ne može tvrditi da su dobijene predikcije dobre. Da bismo mogli malo bolje pregledati performanse korišćenih modela u predikcijama, prikazujemo tabelarno uporedu greške predikcije po pojedinačnim valutama.

Tabela 4.7.1: Greške predikcije VAR i NNAR modela za kriptovalute

BTC		
	VAR model	NNAR model
RMSE	24.757412	24.155145
BP	0.016528	0.031248
CP	0.982688	0.968195
VP	0.000784	0.000557
MAE	20.338622	19.760636
MAPE	0.741943	0.723046
U	0.004523	0.000024

ETH		
	VAR model	NNAR model
RMSE	3.505089	3.511899
BP	0.012317	0.045102
CP	0.973935	0.946520
VP	0.013748	0.008378
MAE	2.627263	2.546996
MAPE	1.200078	1.149225
U	0.007873	0.000261

XRP		
	VAR model	NNAR model
RMSE	0.003743	0.003702
BP	0.016518	0.009729
CP	0.983266	0.989862
VP	0.000216	0.000409
MAE	0.002362	0.002333
MAPE	1.373800	1.330710
U	0.010907	0.000240

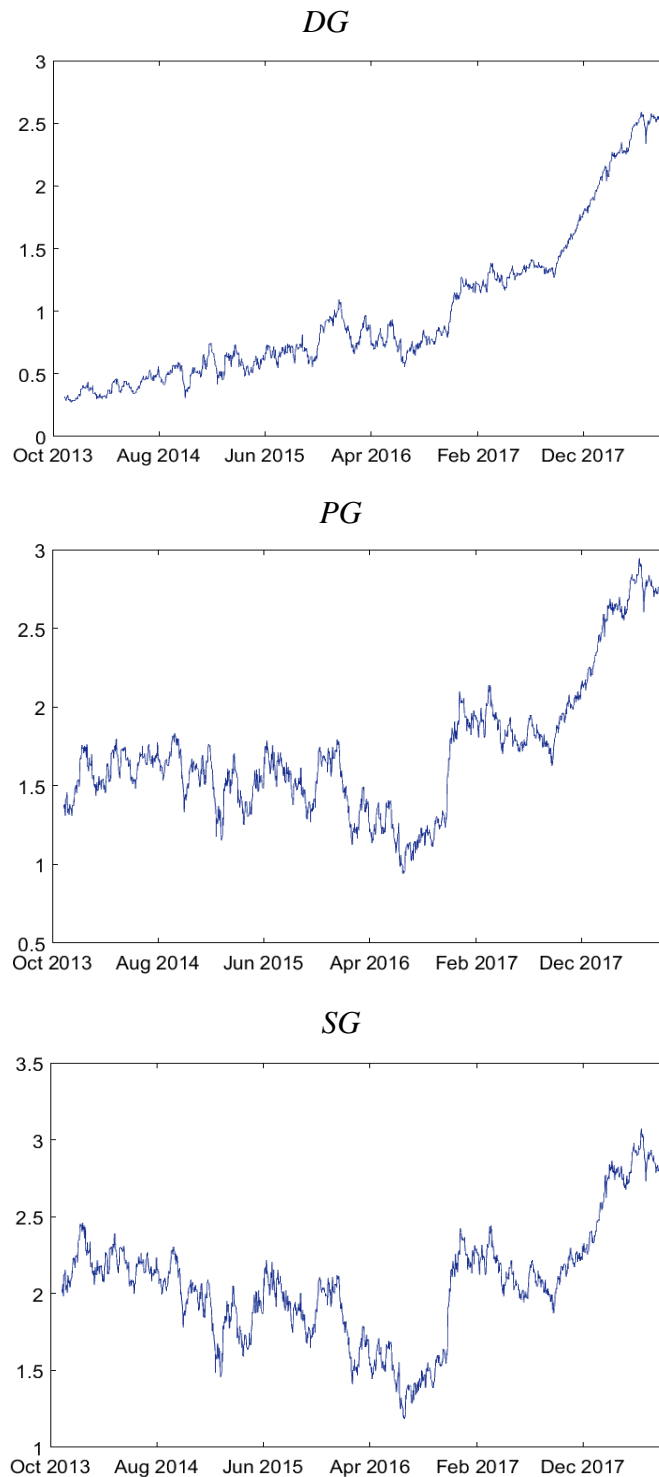
RMSE, MAE, MAPE i U vrednosti su za nijansu manji pri korišćenju NNAR modela u predikcijama BTC i XRP, dok kod ETH jedino je RMSE manji kod VAR modela. Proporcija pristrasnosti (BP) koja meri udeo grešaka koje dolaze iz modela je neznatno veća kod NNAR modela za BTC i ETH. Proporcija varijanse (VP), koja meri koliko dobro predikcije modela isprate fluktuacije stvarnih vredosti, je takođe malo niža kod NNAR modela za iste valute, odnosno, ovaj broj nam kaže da su predikcije dobro ispratile te fluktuacije. Ovo zaista jeste slučaj, međutim, vrednosti predikcija za jedan čas su izuzetno bliske vrednostima prethodnog časa. Zbog ove činjenice, i zbog slične vrednosti grešaka korišćenih modela, može se zaključiti da posmatrane valute se ne mogu predviđati pomoću korišćenih modela.

Napomenimo da je prilikom istraživanja bio korišćen i ARIMA model, koji daje takođe slične rezultate, pa nepredvidljivost najverovatnije možemo pripisivati tome da autoregresija nije dobar pokazatelj kretanja budućih vrednosti u slučaju kriptovaluta.

4.8 Grafički prikaz i osnovne statističke osobine prinosa obveznica

U ovom delu rada ćemo ispitati performanse VAR i NNAR modela u previđanju prinosa srednjoročnih kuponskih obveznica SAD. Za ovu svrhu smo izabrali prinose dvo – , peto – i sedmogodišnje kuponske obveznice. Prinosi predstavljaju prosečne prinose do dospeća svih navedenih obveznica u opticaju na berzi NYSE. Grafička predstava prinosa, iskazanim u procentima, od 20.10.2013 do 10.07.2018 je sledeća:

Grafik 4.8.1: Prinosi srednjoročnih kuponskih obveznica SAD



Poznato je da, što duži je rok do dospeća neke obveznice, veći je rizik od promena kamatnih stopa i inflacije, pa investitori zahtevaju veći prinos za kompenzaciju rizika. Ovo pravilo može se uočavati na graficima, jer prinos do dospeća dvogodišnje obveznice je najmanji, a prinos sedmogodišnje je najveći.

Od novembra 2016. godine, a zatim od septembra 2017. godine, uočljiv je značajan porast prinosa koji je najviše izrazit kod peto – i sedmogodišnje obveznice. Postoje dva ključna događajana domaćem nivou u SAD, koji su doprineli brzom porastu prinosa u 2016. godini. Jedan od njih je rezultat izbora novog predsednika, *Donald Trump* – a, a drugi je sporazum zemalja koje su glavni proizvođači naftnih derivata (OPEC) o smanjenju obima proizvodnje, kako bi smanjivanjem ponude podigli tržišnu cenu [38]. Izborni rezultati početkom novembra su uticali na promenu prinosa predviđanjem promene u fiskalnoj politici, uključujući veću potrošnju na infrastrukturu, finansijsku deregulaciju²⁷ i značajan reform poreske politike. Promena navedenih stvari u fiskalnoj politici izazivaju veću stopu privrednog rasta, ali i obim državnih dugova, i to zajedno sa sporazumom o povećanju cene sirovne nafte su uticali na očekivanu stopu inflacije. Strahovi investitora rezultovali su prodajom ogromne količine državne obeznice, što je dovelo do porasta prinosa. Nekoliko razloga porasta prinosa od septembra 2017. godine su: porast državnih dugova, poreski plan o snižavanju stope poreza preduzeća sa 35% na 21% od 2018. godine, fiskalna potrošnja koja uključuje infrastrukturu i vojsku [39].

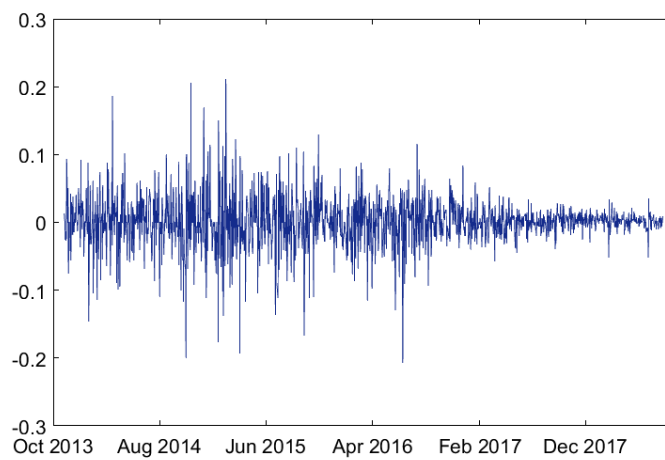
Što se tiče ponašanja posmatrane vremesne serije, i u ovom slučaju može se tvrditi da ih karakteriše trend i neregularna komponenta, dok ciklični ili sezonalni komponent nije uočljiv.

Pošto podaci ukazuju na nestacionarnost i na logaritamskom nivou, što ćemo i dokazati kasnije, prikazujemo sada prvi diferencijal logaritmovanih prinosa, koji jesu stacionarne vremenske serije, jer im sve vrednosti osciluju oko nule i ne poseduju značajan opadajući ili rastući trend.

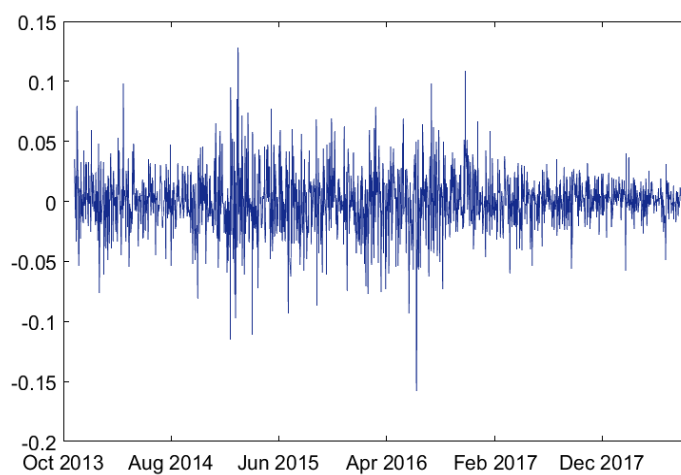
²⁷Deregulacija na finansijskim tržištima usmerena je na ublažavanje uticaja države i jačanje konkurentske borbe između raznih oblika finansijskih institucija povezanih delovanjem tržišta kapitala.

Grafik 4.8.2: Prinosi državnih obveznica na diferenciranom logaritamskom nivou

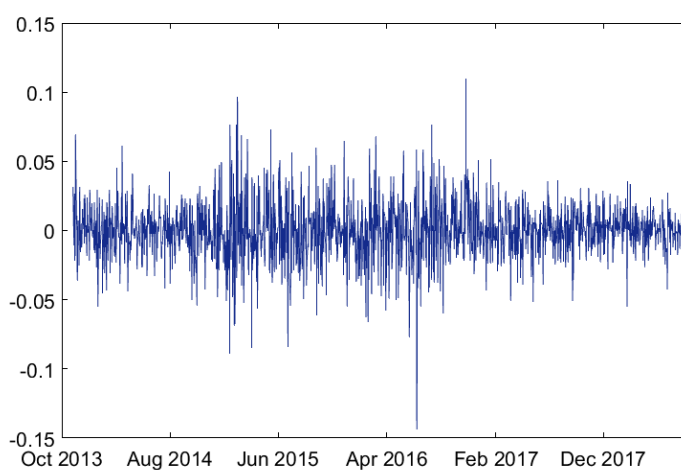
DG



PG



SG



Sledeći korak je ispitivanje osnovne statističke osobine posmatranih podataka. Deskriptivnu statistiku ćemo izvesti na stacionarnim vremenskim serijama, čije rezultate možemo videti u Tabeli 4.8.1.

Tabela 4.8.1: Deskriptivna statistika za prinose na diferenciranom logaritamskom nivou

	DLDG	DLPG	DLSG
Očekivana vrednost	0.00001435	0.00000497	0.00000250
Standardna devijacija	0.00037006	0.00025403	0.00021615
Koeficijent asimetrije	-0.227939	-0.218601	-0.116357
Koeficijent ekscesa	8.395784	6.085826	5.988601
JB test	1781.329	590.0930	545.8931
p - vrednost	0.0000	0.0000	0.0000

Očekivane vrednosti i standardne devijacije su jako bliske nuli. Sve vrednosti su jako slične, pri čemu najveću očekivanju imamo za DLDG, pa i odstupanje od očekivanja je najveće.

Koeficijenti asimetrije su manji od jedan i negativni. Negativan predznak kaže da većina vrednosti uzorka je manja od očekivane vrednosti.

Koeficijeni ekscesa su pozitivni i znatno veći od tri, što znači da raspodela podataka je spljoštenija u odnosu na normalnu. Ovo ukazuje na to da imamo više autlajera u uzorku, odnosno na vrednosti koje su dosta udaljene od ostalih vrednosti u uzorku.

Na osnovu vrednosti koeficijenata asimetrije i ekscesa možemo zaključiti da posmatrani podaci nemaju normalnu raspodelu, koju potvrđuje p – vrednost JB testa na nivou poverenja od 95%.

Sada ćemo posmatrati i međusobne zavisnosti prinosa izračunavanjem koeficijenata korelacije, čije vrednosti su date u Tabeli 4.8.2

Tabela 4.8.2: Matrica koeficijenata korelacije za prinose

	DLDG	DLPG	DLSG
DLDG	1		
DLPG	0.510684	1	
DLSG	0.463704	0.979000	1

Uočava se da je DLDG najslabije povezana sa ostalim serijama, pri čemu možemo tvrditi da imamo srednju povezanost, jer su vrednosti blizu 0.5. DLPG i DLSG imaju jaku povezanost, jer im je koeficijent korelacije jako blizu jedinici, što znači da im vrednosti možemo zapisati u formi linearne jednačine, oblika $Y = aX + b$.

Svi koeficijenti korelacije su pozitivni, što znači da ako vrednost jedne serije raste, rašće i vrednost druge. Testiranjem statističke značajnosti posmatranih koeficijenata, dobijamo da su sve p – vrednosti manje od 5%, odnosno, linearna povezanost je statistički značajna na nivou poverenja 95%.

4.9 Formiranje VAR modela za prinose obveznice

U ovom delu rada ćemo formirati predikcije posmatranih serija pomoću VAR modela. Koristićemo pristup *in sample - out of sample*, odnosno jedan deo podataka ćemo koristiti za ocenu koeficijenata, a drugi deo za formiranje statičke predikcije ocenjenim koeficijentima i evaluacije dobijene predikcije. Podaci koje koristimo za ocenu koeficijenata se odnose na dnevne podatke svakog radnog dana berze NYSE i predstavljaju prosečne prinose svih dvo – , peto – i sedmogodišnje obveznice u SAD perioda 20.10.2013 – 29.12.2017, zaključno sa poslednjim radnim danom u 2017. godini. Predikcije ćemo formirati za period 01.01.2018 – 10.07.2018, odnosno, koristićemo mnogo veći uzorak nego u slučaju kriptovalute, jer fluktuacija vrednosti je daleko slabija.

4.9.1 Testiranje stacionarnosti podataka

Testiranjem stacionarnosti logaritmovanih prinosa, dolazimo do zaključka da sve izabrane vremenske serije su nestacionarne, jer su p – vrednosti DF testa date u Tabeli 4.9.1 veće od 0.05. Kada se testira prvi diferencijal logaritmovanih prinosa, dobijamo da su sve vremenske serije stacionarne, jer su p – vrednosti manje od 0.05.

Tabela 4.9.1: Rezultati DF testa na logaritamskom nivou za prinose

	Ni konstanta ni trend	Konstanta	Konstanta i trend
LDG	0.08974	0.7230	0.0771
LPG	0.3449	0.4977	0.5157
LSG	0.4458	0.4062	0.5798

4.9.2 Određivanje reda VAR modela

Prilikom formiranja VAR modela prvi korak je određivanje reda autoregresije. Koristeći AIC kriterijum na logaritmovanim prinosima državnih obveznica, zaključujemo da optimalan red autoregresije je pet, jer je za to vrednost AIC kriterijuma minimalna.

4.9.3 Johansen – ov test kointegracije

Pošto može da se desi, da postoji linearna kombinacija posmatranih nestacionarnih podataka koja jeste stacionarna, da bi formirali najoptimalniji model za predikciju, moramo proveriti postojanje kointegracije. Za tu svrhu koristićemo *Johansen – ov test kointegracije* maksimalnog karakterističnog korena, koji nam kaže da logaritmovane serije nisu kointegrirane na nivou poverenja 95%, jer je vrednost test statistike (12.14) manja od kritične vrednosti (22.00), tj. odmah na početku moramo prihvatiti nultu hipotezu o nepostojanju kointegracijskog vektora.

4.9.4 Testiranje Grendžerove kauzalnosti

Na osnovu rezultata prethodne analize, zaključujemo da najoptimalniji model za predikciju možemo formirati na diferenciranim serijama logaritamskih prinosa, pa se red modela smanji za jedan. Sledeći korak je ispitivanje Grendžerove kauzalnosti da bi utvrdili koje serije pomažu u predviđanju druge u VAR modelu.

Tabela 4.9.4.1: Rezultati Grendžerove statistike za prinose

H_0	F - test	p - vrednost
DLDG ne Grendžer urokuje DLPG	0.53169	0.7125
DLDG ne Grendžer uzrokuje DLSG	0.60707	0.6576
DLPG ne Grendžer urokuje DLDG	83.526	0.0000
DLPG ne Grendžer urokuje DLSG	6.7683	0.0339
DLSG ne Grendžer uzrokuje DLDG	64.905	0.0000
DLSG ne Grendžer uzrokuje DLPG	1.2287	0.2965
DLPG i DLSG ne Grendžer uzrokuje DLDG	341.2671	0.0000
DLDG i DLSG ne Grendžer uzrokuje DLPG	3.9979	0.4063
DLDG i DLPG ne Grendžer uzrokuje DLSG	7.5169	0.1110

Dakle, formiranjem VAR modela odgovarajućeg reda, posmatrajući uticaj promenjive pojedinačno i ukupno, dolazimo do zaključka da prethodne vrednosti DLPG i DLSG pomažu u objašnjavanju sadašnje vrednosti DLDG, takođe, uključivanjem samo vrednosti DLSG u DLPG dobijamo najbolje predikcije. Jedino iz jednačine DLSG treba isključiti vrednosti obe promenljive.

4.9.5 Ocenjeni VAR model

Tabelarni prikaz ocenjenih koeficijenata redukovanog VAR modela je sledeći:

Tabela 4.9.5.1: Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose DG

	Koeficijenti za DLDG(t)
DLDG(-1)	-0.536040
DLPG(-1)	1.747383
DLSG(-1)	-1.057610
DLDG(-2)	-0.307027
DLPG(-2)	1.204551
DLSG(-2)	-0.873973
DLDG(-3)	-0.158285
DLPG(-3)	0.448324
DLSG(-3)	-0.193608
DLDG(-4)	-0.034347
DLPG(-4)	0.220305
DLSG(-4)	-0.082912
Konstanta	0.001715
R^2	0.2350
\bar{R}^2	0.2282

Tabela 4.9.5.2: Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose PG

	Koeficijenti za DLPG(t)
DLPG(-1)	-0.097489
DLSG(-1)	0.054757
DLPG(-2)	-0.022091
DLSG(-2)	-0.068850
DLPG(-3)	-0.038917
DLSG(-3)	0.075738
DLPG(-4)	-0.032285
DLSG(-4)	0.076254
Konstanta	0.000425
R^2	0.009002
\bar{R}^2	0.002056

Tabela 4.9.5.3: Ocenjeni koeficijenti VAR modela za logaritamske prinose SG

	Koeficijenti za DLSG(t)
DLSG(-1)	-0.044432
DLSG(-2)	-0.043727
DLSG(-3)	0.028594
DLSG(-4)	0.014129
Konstanta	0.000163
R^2	0.004985
\bar{R}^2	0.001122

Jednačina VAR(4) modela pomoću ocenjenih koeficijenata se formira prema formuli: $Y_t = \phi_0 + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \phi_3 Y_{t-3} + \phi_4 Y_{t-4} + \varepsilon_t$, koja se tumači na isti način kao i definicija u teorijskom delu ovog rada za $n = 3$, pri čemu u matricama ϕ_i , $i = 1, 2, 3, 4$, vrednosti konstante koje ne treba uključiti u modelima su nule.

Koeficijenti determinacije su veoma niski. Najveći je za jednačinu DLDG(t), gde je 23.5% varijacije u uzorku objašnjeno modelom, a najmanja je za DLSG(t), gde je vrednost samo 0.4985%. Prilagođeni koeficijent determinacije, koja je pogodna za upoređivanje modela koji sadrže različiti broj promenljivih, pokazuje istu stvar, odnosno, zaključimo da je model koji najbolje objašnjava varijacije uzorka dobijen za DLDG(t), a model koji najslabije objašnjava varijacije je dobijen za DLSG(t). Niske vrednosti ovih koeficijenata ne moraju značiti da su modeli loši, nego mogu samo ukazati na to da linearni modeli nisu najbolji izbori za opis ponašanje posmatrane vremenske serije.

Što se tiče tumčenja ocenjenih koeficijenata, posmatrajmo jednačinu za DLPG(t). Pod pretpostavkom da ostale vrednosti ostaju nepromenjene, ako se vrednost DLPG(t - 1) povećava za jednu jedinicu, DLPG(t) će se smanjiti 0.097489 jedinice, a ako se DLSG(t - 1) smanjuje je za jednu jedinicu, DLPG(t - 1) će se smanjiti za 0.054757 jedinice, i obratno.

Naravno, u praksi nepromenjenost ostalih vrednosti retko se dešava, pa vrednosti za DLPG(t) dobijamo kao posledica promena svih ostalih vrednosti u njenoj jednačini. Analogno se tumači i koeficijenti preostale dve jednačine.

4.9.6 Provera adekvatnosti VAR modela

Adekvatnost dobijenog VAR modela ispitujemo BG testom auokorelacije među rezidualima, pri čemu red autokorelacije koji testiramo u ovom slučaju iznosi sedam, jer je to najbliži ceo broj logaritmovane veličine uzorka. Na osnovu p – vrednosti BG testa, koja iznosi 0.6586, zaključujemo da je dobijeni VAR model adekvatan.

4.9.7 Osobine reziduala VAR modela

Proveru homoskedastičnosti reziduala ispitujemo pomoću *White* testa, čija p – vrednost, je manja od 0.01, govori da su reziduali dobijenog modela heteroskedastični.

Deskriptivna statistika reziduala dobijenig modela je sledeća:

Tabela 4.9.7.1: Deskriptivna statistika za diferencirane logaritamske prinose

	Reziduali od DLDG(t)	Reziduali od DLPG(t)	Reziduali od DLSG(t)
Očekivana vrednost	2.01e-18	2.81e-18	2.39e-18
Standardna devijacija	3.414008e-4	2.6524e-4	2.2438e-4
Koeficijent asimetrije	0.03418	-0.20542	-0.092458
Koeficijent ekscesa	10.14089	5.637304	5.611919
JB test	2747.209	383.8143	369.3841
p - vrednost	0.0000	0.0000	0.0000

Očekivane vrednosti reziduala su veoma bliske nuli, što je jedan od poželjnih uslova, jer po pretpostavci, očekivana vrednost reziduala idealnog modela je nula. Standardne devijacije su takođe bliske nuli što znači da nema velikih odstupanja od očekivane vrednosti.

Koeficijenti asimetrije imaju niske vrednosti. Pozitivan predznak ovog koeficijenta imamo za rezidule modela DLDG(t), dok u slučaju DLPG(t) i DLSG(t) oni su negativni. Negativan predznak znači da većina reziduala ovih modela je manja od očekivane vrednosti, dok pozitivan predznak ukazuje na suprotnu situaciju.

Koeficijenti ekscesa su znatno iznad tri, pri čemu je ona najveća za rezidule od DLDG(t). Ovo znači da je raspodela reziduala spljoštena u odnosu na normalnu. Velike vrednosti ovog koeficijenta ukazuju na to da raspodele imaju debele repove i postoji više autlajera u uzorku.

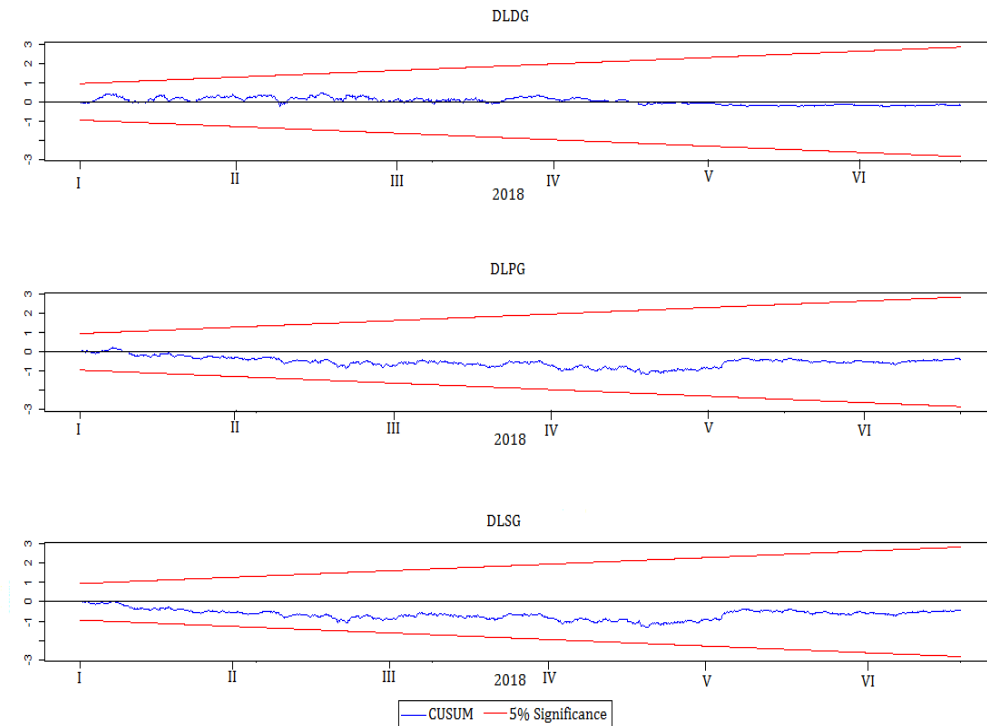
Na osnovu p – vrednosti JB testa zaključujemo da reziduali nemaju normalnu raspodelu.

4.9.8 CUSUM test stabilnosti modela

I ovde ćemo ispitati stabilnost dobijenih modela pomoću CUSUM testa kumulativne sume standardizovanih rekurzivnih reziduala. Ako suma standardizovanih reziduala, koja se

akumulira tokom vremena, osciluje oko nule i ako vrednosti ne izlaze van granice koja je specifično odeređena pomoću CUSUM testa, smatramo da je naš model stabilan.

Grafik 4.9.8.1: *Grafička predstava CUSUM testa stabilnosti modela za prinose*

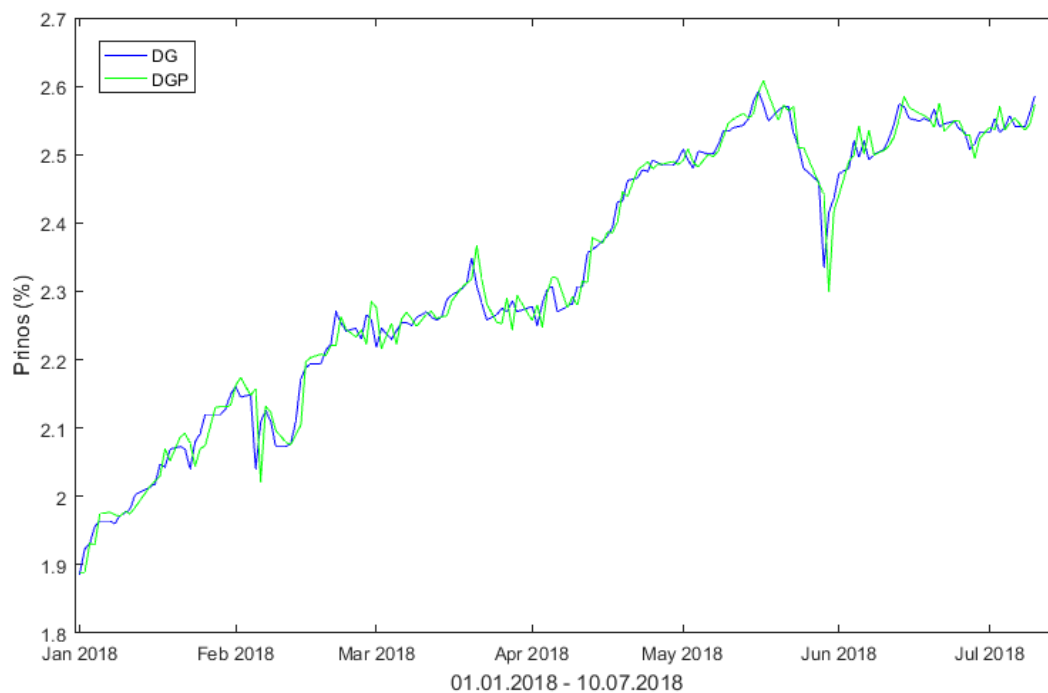


Na Grafiku 4.9.8.1 su plavom linijom predstavljeni kumulativne sume reziduala, dok crvenom linijom granica značajnosti CUSUM testa na nivou 5%. Pošto vrednosti testa osciluju oko nule za celi period na kom je model formiran i ne izlaze van granice značajnosti, smatrano da je dobijeni VAR model stabilan.

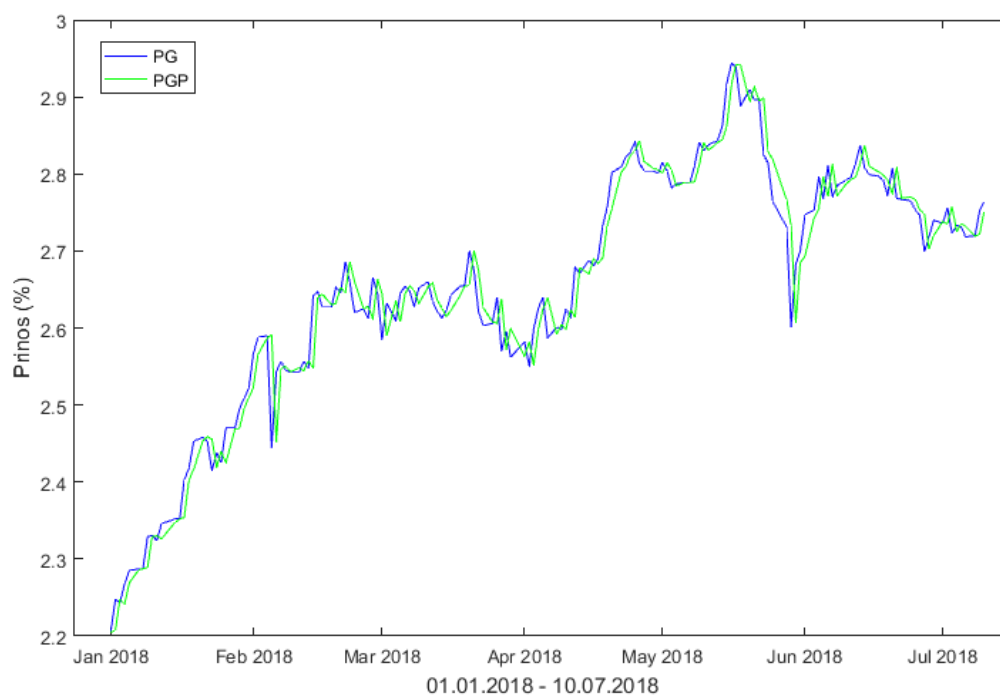
4.10 Formiranje predikcije pomoću VAR modela za prinose

Nakon uspostavljanja adekvatnog modela, sledeći korak je formiranje predikcije. Grafički prikaz jednokoračnih predikcija na osnovnom nivou prinosa za period 01.01.2018 – 10.07.2018 je sledeći:

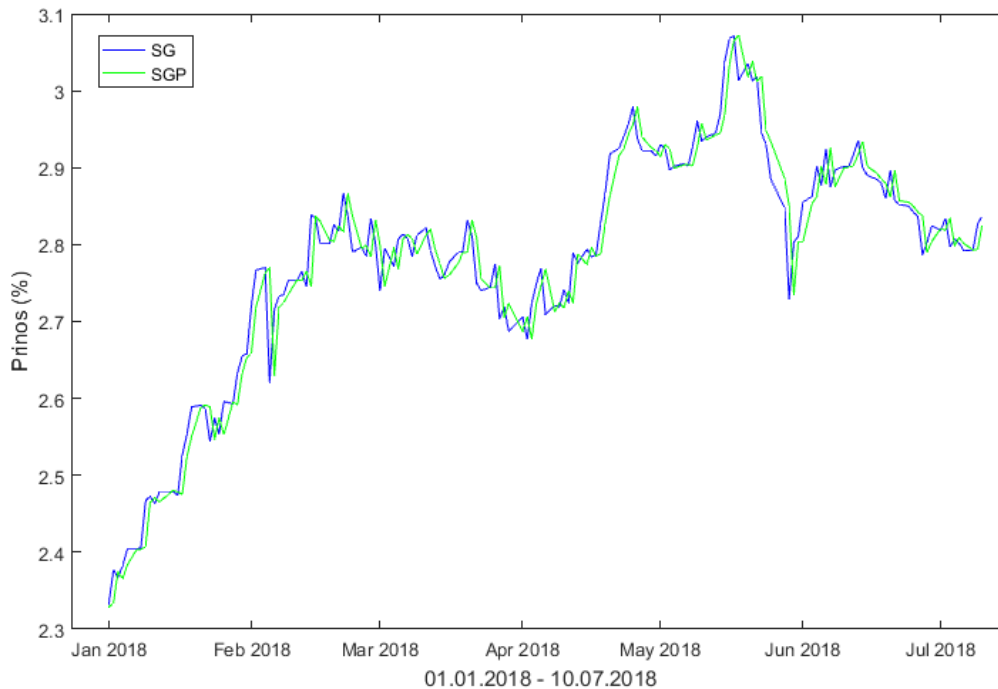
Grafik 4.10.1: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti prinosa DG*



Grafik 4.10.2: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti prinosa PG*



Grafik 4.10.3: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti prinosa SG*



Jednokoračne predikcije VAR modela su sasvim dobro ispratili fluktuacije vrednosti prinosa svake posmatrane obveznice. Može se primetiti kašnjenje u predikcijama i u ovom slučaju, ali rezultati su daleko bolji nego kod predviđanja cena kriptovalute, što je posledica toga da vrednosti prinosa fluktuiraju u mnogo manjoj meri. Kod ovakvih serija možemo koristiti ocenjene koeficijente za statička predviđanja čak i za period koji je duži od pola godina, dok kod kriptovalute nismo bili u mogućnosti da to učinimo ni za jedan dan. Da bi mogli bolje oceniti dobijene predikcije, posmatrajmo relevantne greške prediktivnih vrednosti:

Tabela 4.10.1: *Greške predikcije VAR modela za prinose*

	DG	PG	SG
RMSE	0.026630	0.032222	0.034041
BP	0.000179	0.005733	0.006941
CP	0.995924	0.980677	0.977988
VP	0.003896	0.013590	0.015070
MAE	0.018326	0.022944	0.024871
MAPE	0.799200	0.868085	0.896039
U	0.005696	0.006060	0.006111

RMSE su bliski nuli, što znači da kvadratna odstupnja predviđenih od stvarnih vrednosti je mala. MAE vrednosti, koje mere apsolutno odstupnje, su takođe male. Ista je situacija i kod Tejlovog koeficijenta (U). MAPE nam pokazuje prosečno apsolutno relativno odstupanje stvarnih od prediktivnih vrednosti i izraženo je u procentima. Ona iznosi redom samo 0.7992%, 0.868085% i 0.896039% za predikcije posmatranih serija. Proporcija pristrasnosti (BP), koja meri udeo grešaka koji dolazi iz modela je takođe jako mala. Svega 0.0179%/0.5733%/0.6941% procenat greške došao je iz modela u predikcijama prinosa dvo – , peto – i sedmogodišnje obveznice. Proporcija varijanse (VP), koja nam govori koliko dobro

su predikcije ispratile fluktuacije stvarnih vrednosti, je ponovo jako mala, odnosno naše predikcije su jako lepo ispratile te fluktuacije. Sumirajući dobijene rezultate, možemo tvrditi da smo dobili dobre predikcije sa svakim modelom, pri čemu najbolje predikcije smo dobili modelom za DLDG(t), što je i bilo intuitivna pretpostavka na osnovu vrednosti koeficijenata determinacije.

Kod ove vremenske serije smo mogli sasvim lepo pogoditi kretanje vrednosti za sledeći dan i može se uočiti da su predikcije mnogo bliže stvarnim vrednostima ukoliko nema velikih promena istih. Dinamičkom predikcijom možemo pogoditi vrednosti samo za nekoliko dana, jer korišćenjem prethodne vrednosti predikcije se akumuliraju greške predviđanja, pa što duži je period koji posmatramo, veće je i odstupanje od stvarnih vrednosti. Primer dinamičke predikcije za period od 05.01.2018 do 10.01.2018 je sledeći:

Tabela 4.10.2: *Primer dinamičke predikcije za prinose*

	DG(%)	DGP(%)	PG (%)	PGP (%)	SG (%)	SGP (%)
05.01.2018	1.964	1.973539	2.285	2.269669	2.404	2.383490
07.01.2018	1.964	1.978511	2.287	2.271572	2.404	2.383510
08.01.2018	1.960	1.980188	2.287	2.271889	2,406	2.384121
09.01.2018	1.972	1.983627	2.239	2.273278	2.467	2.384737
10.01.2018	1.976	1.985696	2.331	2.274147	2.473	2.385094

4.11 Formiranje NNAR modela za prinose

Da bi proverili performanse autoregresivog modela neuronske mreže u predviđanju kretanja prinosa državnih obveznica, korišćićemo automatske definisane vrednosti *nnetar()* funkcije sa logističkom funkcijom aktivacije.

Za izvođenje analize korišćićemo nestacionarne logaritamske prinose LDG, LPG i LSG za period od 20.10.2013 – 31.12.2017 i formiraćemo statičke predikcije za svaki dan perioda od 01.01.2018 do 10.07.2018, kao i u prethodnom delu ovog rada. Posle primene *nnetar()* funkcije dobili smo da broj ulaznih parametara u neuronsku mrežu kod svake serije iznosi jedan na osnovu AIC kriterijuma, što povlači da broj čvorova u skrivenom sloju je $q = \text{round}\left(\frac{p+1}{2}\right) = \text{round}\left(\frac{1+1}{2}\right) = 1$. Shodno tome, broj koeficijenata koji se ocenjuje unutar mreže je četiri. Prikazujemo sada prosek dobijenih koeficijenata, koje koristimo za predikciju:

Tabela 4.11.1: *Ocenjeni koeficijenti NNAR modela za prinose*

	LDG	LPG	LSG
ω_0	7.457135	-8.781044	0.026938
ω_1	-14.48509	18.7975	-1.026878
ω_{01}	0.05905962	-0.1322612	-1.818304
ω_{11}	-0.2792776	0.2145024	0.5136531

Jednačine NNAR modela možemo prikazati formulom

$$r_t = \omega_0 + \omega_1 g(\omega_{01} + \omega_{11} r_{t-1}) + a_t,$$

gde r_t označava logaritamske prinose LDG, LPG i LSG u trenutku t , respektivno, a_t je beli šum, a $g = \frac{1}{1+e^{-x}}$ je logistička funkcija aktivacije u skrivenom čvoru.

4.11.1 Testiranje adekvatnosti NNAR modela

Da bi testirali adekvatnost dobijenih modela, proverićemo postojanje autokorelacije među rezidualima modela pomoću *Ljung – Box* – ove statistike, čiji rezultati su sledeći:

Tabela 4.11.1.1: *Ljung - Box - ova statistika reziduala NNAR modela za prinose*

Broj koraka unazad	LDG		LPG		LSG	
	Q statistika	p vrednost	Q statistika	p vrednost	Q statistika	p vrednost
1	0.4113	0.5213	0.0971	0.7554	0.0641	0.8002
2	0.6777	0.7126	0.1491	0.9282	0.1479	0.9287
3	0.8830	0.8295	0.7617	0.8586	1.3221	0.7239
4	3.5484	0.4706	2.2867	0.6832	1.9664	0.7419
5	4.7260	0.4502	2.4549	0.7833	2.1598	0.8266
6	8.0853	0.3219	5.0825	0.5333	4.2877	0.6378
7	8.0941	0.3244	5.1019	0.6475	4.3979	0.7330

Pošto su sve p – vrednosti veće od 5% do sedam koraka unazad, zaključujemo da su dobijeni modeli adekvatni.

4.11.2 Osobine reziduala NNAR modela

Deskriptivna statistika reziduala dobijenih modela je sledeća:

Tabela 4.11.2.1: *Deskriptivna statistika reziduala NNAR modela za prinose*

	Reziduali od LDG(t)	Reziduali od LPG(t)	Reziduali od LSG(t)
Očekivanje	-3.824571e-06	8.202792e-06	1.512401e-05
Standardna devijacija	0.03910431	0.0265069	0.02240544
Koeficijent asimetrije	-0.1981939	-0.2683794	-0.1702564
Koeficijent ekscesa	7.524843	5.674575	5.67782
JB test	1115	402.15	393.78
p - vrednost	0.0000	0.0000	0.0000

Očekivana vrednost i standardna devijacija rezidula su bliske nuli, što je poželjno za formiranje predikcije sa malim greškama.

Koeficijenti asimetrije su negativni, tj. većina vrednosti reziduala je manja od očekivane vrednosti.

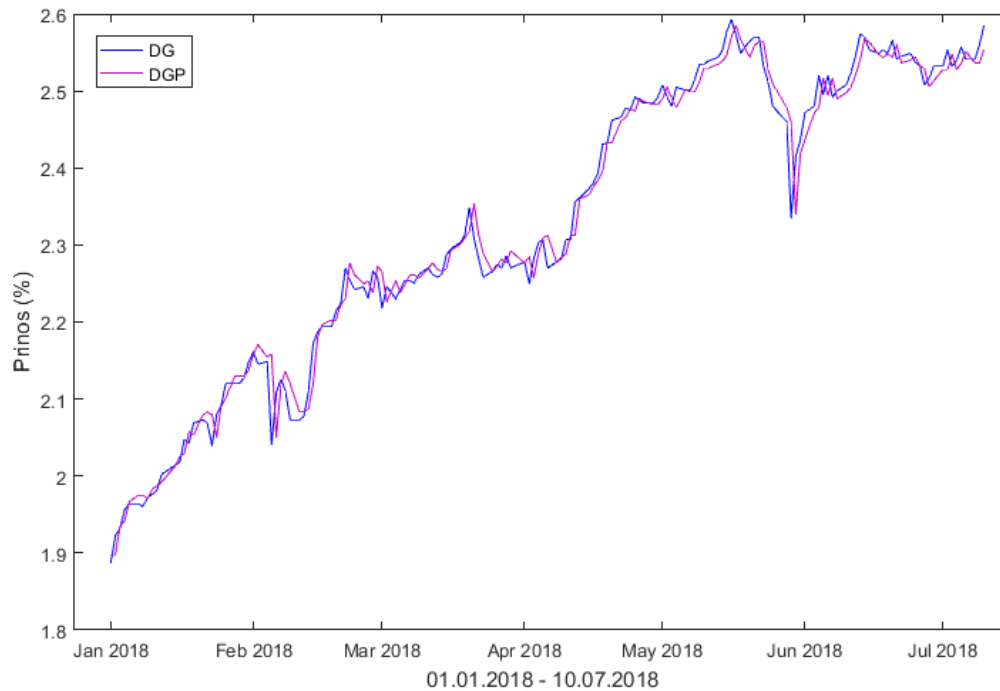
Koeficijenti ekscesa su znatno iznad tri, što ukazuje na to da raspodela reziduala je spljoštena u odnosu na normalnu i na prisustvo više aulajera među rezidualima.

Na osnovu p – vrednosti JB testa zaključujemo da reziduali nemaju normalnu raspodelu ni u ovom slučaju.

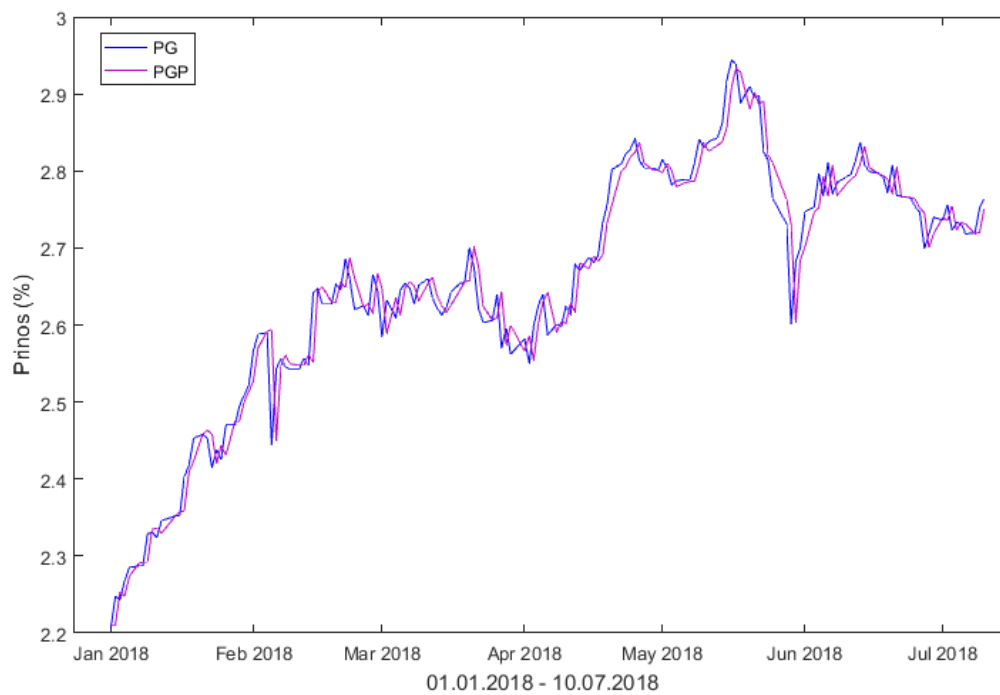
4.12 Formiranje predikcije pomoću NNAR modela za prinose

Grafički prikaz statičkih prediktivnih vrednosti za period od 01.01.2018 do 10.07.2018 je sledeći:

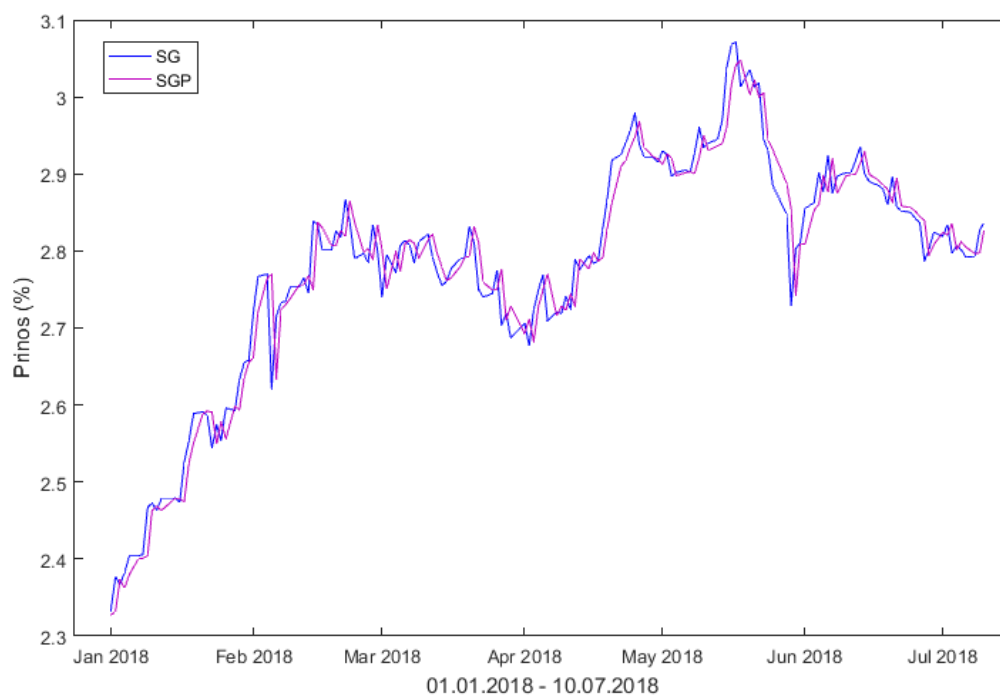
Grafik 4.12.1: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za DG*



Grafik 4.12.2: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za PG*



Grafik 4.12.3: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za SG*



Vidimo da i NNAR modelom možemo lepo pogoditi kretanje vrednosti prinosa za duži vremenski period statičkom metodom predviđanja. Rezultati su vrlo slični onima koje smo dobili primenom VAR modela i mala kašnjenja prediktivnih vrednosti i ovom slučaju su primetna. Da bismo mogli bolje oceniti rezultate, posmatrajmo sada greške dobijene predikcije.

Tablea 4.12.1: *Greške predikcije NNAR modela za prinose*

	DG	PG	SG
RMSE	0.024226	0.032055	0.033883
BP	0.002664	0.006594	0.007286
CP	0.971690	0.993333	0.988737
VP	0.025646	0.000073	0.003977
MAE	0.016691	0.022779	0.024932
MAPE	0.722897	0.861760	0.898089
U	0.003351	0.001811	0.001524

RMSE su bliski nuli, što znači da kvadratna odstupnja predviđenih od stvarnih vrednosti su mala. Mere apsolutne odstupanja (MAE) su takođe male kao što su i Tejlovi koeficijenti (U). MAPE nam pokazuje prosečno apsolutno relativno odstupanje stvarnih od prediktivnih vrednosti i izraženo je u procentima. Ona iznosi redom samo 0.7228969%, 0.86176% i 0.898089% predikcije prinosa dvo – , peto – i sedmogodišnje obveznice. Proporcija pristrasnosti (BP) koja meri udeo grešaka koji dolazi iz modela je takođe jako mala. Svega 0.2664%/0.6594%/0.7286% procenat greške je došao iz modela u predikcijama DG, PG i SG. Proporcija varijanse (VP) nam govori da su predikcije jako lepo ispratile fluktuacije stvarnih vrednosti, naročito PG. Sumirajući dobijene rezultate, možemo tvrditi da smo najbolje predikcije dobili modelom za DLDG(t), ali nema velika razlika u predikcijama modela.

Što se tiče dimamičkog metoda predviđanja, možemo pogoditi kretanja vrednosti samo za nekoliko dana. U Tabeli 4.12.2 je dat primer dinamičke predikcije za period 05.01.208 – 10.01.2018.

Tabela4.12.2: *Primer dinamičke predikcije za prinose*

	DG(%)	DGP(%)	PG (%)	PGP (%)	SG (%)	SGP (%)
05.01.2018	1.964	1.960304	2.285	2.271625	2.404	2.379653
07.01.2018	1.964	1.964558	2.287	2.275254	2.404	2.378063
08.01.2018	1.960	1.968762	2.287	2.278888	2,406	2.376433
09.01.2018	1.972	1.972915	2.239	2.282525	2.467	2.374798
10.01.2018	1.976	1.977017	2.331	2.286165	2.473	2.373157

4.13 Upoređivanje modela za prinose

Da bi videli kakva je razlika u performansama VAR i NNAR modela, izvešćemo uporednu analizu greške dobijene predikcije.

Tabela 4.13.1 : *Greške predikcije VAR i NNAR modela za prinose*

DG		
	VAR model	NNAR model
RMSE	0.026630	0.024226
BP	0.000179	0.002664
CP	0.995924	0.971690
VP	0.003896	0.025646
MAE	0.018326	0.016691
MAPE	0.799200	0.722897
U	0.005696	0.003351

PG		
	VAR model	NNAR model
RMSE	0.032222	0.03205509
BP	0.005733	0.006594
CP	0.980677	0.993333
VP	0.013590	0.000073
MAE	0.022944	0.022779
MAPE	0.868085	0.861760
U	0.006060	0.001811

SG		
	VAR model	NNAR model
RMSE	0.034041	0.03388331
BP	0.006941	0.007286
CP	0.977988	0.988737
VP	0.015070	0.003977
MAE	0.024871	0.024932
MAPE	0.896039	0.898089
U	0.006111	0.001524

Posmatrajući greške predikcije DG, proporcija pristrasnosti (BP) govori da 0.0179%/0.2664% procenat grešaka je došao iz modela VAR i NNAR, respektivno. Po tom kriterijumu performansa VAR modela je bolja. Proporcija kovarijanse (CP), koja meri udeo greške koja dolazi izvan modela, treba da sadrži najveći udeo grešaka ako su dobijene predikcije dobre i to u oba slučaja zadovoljeno. Proporcija varijanse (VP) nam kaže da su predikcije VAR modela bolje ispratile fluktuacije stvarnih vrednosti. Sve ostale mere grešaka ukazuju na to da su predikcije NNAR modela za nijansu bolje.

U slučaju predikcija vrednosti PG imamo sličnu situaciju prethodnoj, s tim da u ovom primeru fluktuacije su bolje ispraćene NNAR modelom i značajnija je i razlika u Tejlovom koeficijentu (U). Ovde možemo jednoznačno tvrditi da performansa NNAR modela je malo bolja.

Na kraju, posmatrajući greške predikcije SG, izvedemo analogan zaključak kao i kod PG, jer sve vrednosti pokazuju identičnu situaciju.

Možemo zaključiti da smo dobili dobre predikcije pri korišćenju oba modela. Bez obzira na to da oni pristupaju potpuno drugačije podacima, ne postoji značajna razlika u performansama modela, stoga, odavne ne možemo zaključiti koji od njih daje preciznije predikcije statičkom metodom.

Zaključak

Svrha ovog istraživanja je bila da se testira performansa autoregresivnih modela u predviđanju različitih finansijskih instrumenata. Posmatrali smo dva modela i dve vrste finansijskog instrumenta. Jedan od finansijskih instrumenata su bile kriptovalute, od kojih smo izabrali pet najpoznatijih za analizu, to su: Bitcoin, Litecoin, Ethereum, Ethereum Classic i Ripple. Od njih smo izabrali Bitcoin, Ethereum i Ripple za formiranje predikcije. Drugi finansijski instrument su činili prinosi do dospeća srednjoročnih kuponskih obveznica SAD, od kojih smo izabrali dvo – , peto – i semogodišnju za analizu i za formiranje predikcije. Osnovna razlika između posmatranih instrumenata je stabilnost promena vrednosti.

Analizom ovih finansijskih instrumenata smo utvrdili i njihove linearne zavisnosti i opšte statističke osobine. Svi posmatrani instrumenti su bili nestacionarni na osnovnom i logaritamskom nivou, dok diferenciranjem logaritmovane vrednosti smo dobili stacionarne serije. Ova osobina je tipična na finansijske vremenske serije. Nasuprot očekivanjima, stacionarni podaci kriptovalute nisu pokazali velik stepen međusobne zavisnosti, dok za prinose važi suprotno samo u slučaju peto – i sedmogodišnje obveznice.

Da bi testirali performansu izabranih modela, podatke smo podelili na dva perioda, od kojih prvi potperiod korišćen za ocenu koeficijenata i izgradnju modela, dok drugi za evaluaciju prediktivnih vrednosti. Prvi potperiod je 01.07.2017 – 31.07.2017 za kriptovalute, a drugi je dan 01.08.2018, pri tome, u ovom slučaju smo koristili podatke koji se odnose na svaki čas. Prvi potperiod za prinose je 20.10.2013 – 29.12.2017, dok je drugi 01.01.2018 – 10.07.2018 za obveznice, gde se podaci odnose na svaki radni dan berze NYSE. Razlog izbora frekvencija i podela podataka za kriptovalute opravdava neuobičajena i intenzivna fluktuacija vrednosti, što nakon izabranog perioda dolazi do još većeg izražavanja. Na takvim podacima modeli su postali adekvatni, dok u slučaju bilo kojeg drugog izbora, uključujući i dnevene podatke pre 2017. godine, gde su fluktuacije bile relativno stabilne, ne možemo dobiti adekvatne modele. U slučaju prinosa može se primetiti intenzivniji rast u periodu predviđanja, međutim, pošto se ovaj rast dešava u dugom vremenskom periodu i relativno je stabilan, nije stvarao nikakav problem prilikom predviđanja.

U toku formiranja VAR modela, testirali smo moguću kointegraciju u modelu među posmatranim serijama i dobili smo da to nije statistički značajna ni kod kriptovalute, ni kod prinosa. Grendžerovim testom kauzalnosti smo utvrdili koje promenljive su korisne za formiranje predikcije druge serije, pri čemu uopšte nismo posmatrali statistički značajnost koeficijenata. U slučaju kriptovalute, jedino u jednačini Ripple – a smo trebali da uključimo promenljive Bitcoin – a i Ethereum – a, dok ostala dva modela su sadržali samo svoje sopstvene promenljive. Kod prinosa smo dobili zanimljiv rezultat, jer u jednačini prinosa dvogodišnje obveznice trebali smo da uključimo promenljive prinosa i peto – i sedmogodišnje obveznice, u petogodišnju samo sedmogodišnju, dok u sedmogodišnju samo svoje sopstvene promenljive. Što ukazuje na to da što duži je rok do dospeća neke obveznice, manje zavisi od promene vrednosti ostalih obveznica.

Modeli neuronske mreže su postali veoma popularni u predviđanju razne vremenske serijeu današnje vreme, zahvalajući tome što daju izuzetno dobre rezultate uprkos njihovoj

jednostavnoj primeni. Oni su najčešće korišćeni modeli za predviđanje vrednosti kriptovalute, pa izbor NNAR modela prvenstveno opravdava ova činjenica. NNAR modelom smo dobili za nijansu bolje rezultate kod oba instrumenta, međutim, performansa modela je veoma slična VAR modelu u predviđanju izabranih instrumenta. Ipak proglašavamo NNAR boljim s obzirom da je mnogo jednostavnija primena u odnosu na VAR model.

U slučaju predviđanja vrednosti kriptovalute ni sa jednim modelom nismo dobili zadovoljavajuće predikcije, jer došli smo do rezultata da najbolja predikcija za sledeći čas je sadašnja vrednost. Ovo je veoma interesantan rezultat, jer na raznim sajtovima može se čitati čak i o predikcijama ovih instrumenta koje se odnose na dug vremenski period, obično do pet godina, gde se ponekad pokazuju i tačne brojčane vrednosti. Iako te predikcije posmatraju i druge faktore, ovim istraživanjem smo dokazali da ne možemo im verovati.

Prinose državnih obveznica smo mogli jako lepo pogoditi primenom oba modela. Najbolje predikcije smo dobili za prinose dvogodišnje obveznice, dok najlošije za prinose sedmogodišnje, što je u skladu sa intenzitetom promene vrednosti. Kod ove vremesne serije mogli smo formirati zadovoljavajuće predikcije za dug vremenski period, a takođe, i dinamičke predikcije su lepo pogodile kretanje vrednosti za nekoliko dana.

Na osnovu ovih rezultatata možemo zaključiti, da što manje intenzivno fluktuiraju vrednosti nekog finansijskog instrumenta i predikcije autoregresivnih modela su bolje, što znači da one prošle vrednosti koje imaju lepše statističke osobine i pravilnije ponašaje, mnogo su korisnije za opis buduće vrednosti.

Buduća istraživanja bi mogla da uključe neke složenije modele neuronske mreže, kao što su *deep feedforwrd neural networks* ili *recurrent neural networks*, koje su mnogo složenije povezane i koriste više funkciju aktivacije, kao i druge algoritme učenja. Takođe, moglo bi se uvoditi ARCH model i njegove modifikacije kako bi se rešio problem heteroskedastičnosti reziduala i na taj način bi se ispratilo kretanje volatilnosti tokom vremena.

Dodatak

Rudarenje kriptovalute

U mreži kriptovalute rudarski čvor predstavlja jedan ili više moćnih računara koji rade na rešavanju bloka. Rudarski čvorovi su vrlo moćni računari u odnosu na kućne računare. Posao rudara je da transakcije koje su prethodno verifikovane od strane mreže korisnika, pakuju u blokove. Svi rudari na svetu se takmiče u kreiranju blokova. Oni pogađaju heš broj prethodnog bloka i primenjuju heš funkciju na kombinaciji pogođenog broja i podataka potencijalnog novog bloka. Kada neko predloži pobeđnički blok on ga šalje ostalim čvorovima mreže na proveru. Ako mreža utvrdi da je blok validan, dodaju ga u ulačanim blokovima. Pobeđnik je onaj koji prvi kreira blok čiji heš je manji od utvrđenog broja. Taj broj je u direktnoj vezi sa težinom rudarenja. Rudar koji je prvi put dobio heš u željenom rasponu objavljuje svoju pobedu ostatku mreže. Svi ostali rudari odmah prestaju da rade na tom bloku i pokušaju da otkrivaju tajni broj sledećih blokova. Kao nagrada za svoj rad, pobeđnički rudar dobija nove novčiće. Postoji mnogo rudarskih čvorova koji se takmiče za nagradu jednog bloka. Pogodak zavisi od računarske snage (brzine procesora) i sreće. U slučaju istovremenog pogotka, dele se nagradni novčići u jednakim iznosima ili slučajno u zavisnosti od definisanog načina nagrađivanja. Nagradni novčići su delom generisani iz ničega, odnosno na takav način se povećava broj raspoloživih novčića u opticaju. Određeni procenat nagrade je naknada koji korisnici mreže plaćaju zbog posredovanje transakcije.

Održavanja rudarskih alata je skup, ne samo zbog toga što treba moćni hardver, već i koristi se velika količina električne energije koje troše procesori. Takođe, broj nagradnih novčića se postepeno smanjuje.

Generisanje kriptovalute

Trenutno je jako jednostavno generisati kriptovalutu, što se može učiniti jednostavno pravljenjem *fork* – a, kao što je u slučaju Ethereum – a i Ethereum Classic – a, i uvesti neka poboljšanja u tehnologiji ulančanih blokova. Može se generisati i programiranjem nove mreže ulančanih blokova. Ono što je u današnje vreme najviše popularano, jeste generisanje tokena²⁸. Dok novčići imaju sopstvene, nezavisne transakcione evidencije, tokeni se oslanjaju na tehnologiju osnovne mreže radi provere i obezbeđivanja sigurnosti transakcije.

Zbog jednostavnosti generisanja novih novčića ili tokena, moramo biti dovoljno informisani i oprezni prilikom ulaganja u novopojavljene valute, jer postoji element prevare. Recimo, veoma je popularan ICO (*Initial Coin Offering*), koji je nov način podizanja kapitala za projekte. Kapital za investiciju se stekne tako što se kreira i prodaju sopstvena kriptovaluta organizacije projekta. Pri tome, dosta projekata ide ka tome da se prevare investitori.

²⁸Njemu se može svako generisati, recimo jedna web stranica za takvu svrhu je <https://dev.cryptolife.net/order/custom-altcoin/>

Kalkulacija prinosa obveznice

Prinos obveznice je kamata koju investitor ostvari na obveznici. Možemo ga definisati na različite načine. Najjednostavnija definicija je kada prinos izjednačimo sa kuponskom stopom obveznice koja se računa kao:

$$\text{Kuponska stopa} = \frac{\text{Godišnji kupon}}{\text{Nominalna vrednost}}$$

Gornja jednačina prinosa zasniva se na pretpostavci da je kupovna cena obveznice jednaka svojoj nominalnoj vrednosti, međutim, može da se desi da se obveznice ne prodaju po toj vrednosti. Ako se obveznica prodaje po diskontovanoj nominalnoj vrednosti ili sa premijumom, menjaće se prinos koji investitor zarađuje na obveznici. U slučaju pada kamatnih stopa, ako vlasnik originalne obveznice želi prodati svoju obveznicu, moraće spustiti cenu tako da se izjednači prinos obveznice sa novom kuponskom stopom i obratno. Bilo koji scenario da se desi, kuponska stopa više nema značaj novim investitorima. Da bi dobili grubu procenu stvarnog prinosa, možemo izračunati tekući prinosa obveznice na sledeći način:

$$\text{Tekući prinos} = \frac{\text{Godišnji kupon}}{\text{Tekuća kupovna cena}}$$

Tekući prinos i kuponska stopa su nepotpune kalkulacije prinosa obveznice, jer ne uključuju vremensku vrednost novca, rok do dospeća obveznice ili frekvenciju plaćanja kupona. Zato se nameće potreba za složeniju kalkulaciju prinosa. Prinos do dospeća (PDD) označava diskontnu stopu koja izjednačava kupovnu cenu obveznice sa sadašnjom vrednošću svih očekivanih neto novčanih tokova. Ovi novčani tokovi uključuju sve kupone za isplatu, premije i nominalnu vrednost obveznice.

$$\text{Kupovna cena} = \sum_{t=1}^T \frac{\text{Novčani tok}_t}{(1 + PDD)^t}$$

Rast tekućeg prinosa uvek ukazuje na rast prinosa do dospeća. U slučaju da isplata prinosa nije godišnja, investitori mogu dobiti preciznu godišnju stopu prinosa pomoću efektivnog godišnjeg prinosa (EGP). U slučaju m godišnje isplate, EGP se računa kao:

$$\text{EGP} = (1 + PDD)^m - 1.$$

Relativne mere evaluacije predikcije

Ako su ispunjeni svi kriterijumi optimalne predikcije modela, onda je sledeći korak evaluacija predikcije. Na osnovu prediktivnih vrednosti \hat{r}_{t+i} i odgovarajuće realizacije r_{t+i} , gde $i = 1, \dots, h$, h je broj koraka za koji se formira predikcija, a t je trenutak nakon čega se formira predikcija, ispituje se „moć“ predikcije modela i pokušava se napraviti poboljšanje.

Na osnovu predikcije koje posmatramo, možemo izračunati grešku, kao razliku između stvarne i realizovane vrednosti, tj. $\hat{e}_{t+i} = \hat{r}_{t+i} - r_{t+i}$. Generalno se teži da ona bude što manja.

Daleko najveću primenu među merama tačnosti predikcije ima srednja kvadratna greška MSE koja se definiše

$$MSE = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \hat{e}_{i+t}^2.$$

Kao što se vidi, radi se o sumi kvadrata razlike predikcije i stvarne vrednosti u periodu $i = 1, \dots, h$.

Ovaj broj se može dekomponovati na sledeći način:

$$\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h (\hat{r}_{t+i} - r_{t+i})^2 = (\bar{\hat{r}} - \bar{r})^2 + (s_{\hat{r}} - s_r)^2 + 2(1 - \rho)s_{\hat{r}}s_r$$

gde su $\bar{\hat{r}}$ i \bar{r} aritmetičke sredine, $s_{\hat{r}}$ i s_r su standardne devijacije prediktivne i stvarne promenljive, respektivno, a ρ je koeficijent korelacije između $\hat{\mathbf{r}}$ i \mathbf{r} koje predstavljaju vektore prediktivnih i stvarnih vrednosti dimenzije $h \times 1$.

Proporcije u MSE su definisane na sledeći način:

Proporcija pristrasnosti BP je

$$BP = \frac{(\bar{\hat{r}} - \bar{r})^2}{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h (\hat{r}_{t+i} - r_{t+i})^2}$$

Ovaj broj meri koliko je daleko aritmetička sredina predikcije od aritmetičke sredine stvarne vrednosti. Drugim rečima, ona je mera systemske greške i pokazuje koliko grešaka dolazi iz modela, pa ta vrednost treba da bude što bliže nuli.

Proporcija varijanse VP je

$$VP = \frac{(s_{\hat{r}} - s_r)^2}{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h (\hat{r}_{t+i} - r_{t+i})^2}$$

Ona meri koliko je daleko varijansa prediktivnih vrednosti od varijanse stvarnih vrednosti. Velike vrednosti ovog koeficijena ukazuju na to da imamo velike fluktuacije u stvarnim vrednostima i da prediktivne vrednosti nisu uspele da isprate te fluktuacije.

Kovarijansna proporcija CP je

$$CP = \frac{2(1 - \rho)s_{\hat{r}}s_r}{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h (\hat{r}_{t+i} - r_{t+i})^2}$$

Ona je mera nesistemske greške predikcije. Ukoliko je predikcija dobra, u CP je sadržan najveći udeo grešaka.

Često se koristi i standardna devijacija greške predviđanja RMSE kako bi se sačuvala jedinica mere. Ona je relativna mera koja je pogodna za upoređivanje predikcije iste serije kroz različite modele. Što je manja ova vrednost, prediktivna „moć” modela je bolja.

Jednačina RMSE glasi

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \hat{e}_{t+i}^2}$$

Prosečna apsolutna greška MAE je manje osetljiva na velike devijacije nego RMSE i definiše se kao

$$MAE = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h |\hat{e}_{t+i}|$$

Još jedna popularna mera tačnosti predikcije je prosečna apsolutna relativna greška MAPE koja je iskazana u procentima i njena jednačina glasi

$$MAPE = \frac{100}{h} \sum_{i=1}^h \left| \frac{\hat{e}_{i+t}}{r_{i+t}} \right|$$

Ideja standardizovanja korena prosečne kvadratne greške (RMSE) je olakšanje poređenja predikcije različite promenljive. Standardizovana jednačina je referencirana na Tejlovo pravilo bez promene. Dakle, Tejlov koeficijent ima sledeći oblik:

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \hat{e}_{i+t}^2}}{\sqrt{\frac{1}{h} \sum_{i=1}^h r_{i+t}^2 + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^h \hat{r}_{i+t}^2}}$$

Ovaj koeficijent uvek ima vrednost koja leži između 0 i 1 i ako je ovaj koeficijent jednak nuli, onda imamo savršenu predikciju.

Literatura

- [1] LinkedIn, Mark van Rijmenam, *What is the Blockchain and Why is it so Important*, 2016
Dostupno na: <https://www.linkedin.com/pulse/what-blockchain-why-so-important-mark-van-rijmenam>
- [2] MyCryptopedia, Bisade Asolo, *Blockchain Public Key and Private Key Explained*, 2018
Dostupno na: <https://www.mycryptopedia.com/public-key-private-key-explained/>
- [3] SigningHub, *What are digital signatures?*
Dostupno na: <https://www.signinghub.com/digital-signatures/>
- [4] CoinDesk, Noelle Achenson, *What is Bitcoin?*, 2018
Dostupno na: <https://www.coindesk.com/information/what-is-bitcoin>
- [5] Satoshi Nakamoto, *Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System*, 2010
Dostupno na: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>
- [6] CoinDesk, Noelle Achenson, *How do Bitcoin Transactions Work?*, 2018
Dostupno na: <https://www.coindesk.com/information/how-do-bitcoin-transactions-work>
- [7] CoinDesk, Noelle Achenson, *How Bitcoin Mining Works?*, 2018
Dostupno na: <https://www.coindesk.com/information/how-bitcoin-mining-works>
- [8] CoinDesk, Alysa Hertig, *What is Ethereum?*, 2018
Dostupno na: <https://www.coindesk.com/information/what-is-ethereum>
- [9] Investopedia, Shobhit Seth, *What's the Difference between Bitcoin and Ripple?*, 2018
Dostupno na: <https://www.investopedia.com/tech/whats-difference-between-bitcoin-and-ripple/>
- [10] Wikipedia, the free encyclopedia, *Ripple (payment protocol)*
Dostupno na: [https://en.wikipedia.org/wiki/Ripple_\(payment_protocol\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Ripple_(payment_protocol))
- [11] CoinDesk, *What is the Difference Between Litecoin and Bitcoin?*, 2014
Dostupno na: <https://www.coindesk.com/information/comparing-litecoin-bitcoin>
- [12] Wikipedia, the free encyclopedia, *Ethereum Classic*
Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Ethereum_Classic
- [13] Investopedia, Benjamin Sherry, *What is An ICO?*, 2018
Dostupno na: <https://www.investopedia.com/news/what-ico/>
- [14] Advokat Dragan Milić, *Pravnii fiskalni aspekti trgovine kriptovalutama – Da li se plaća porez na Bitcoin transakcije?*, 2017
Dostupno na: <http://www.milic.rs/blog/it-pravo/173-pravni-i-fiskalni-aspekt-trgovine-kriptovalutama-da-li-se-placa-porez-na-bitcoin-transakcije>
- [15] Investopedia, James Chen, *Bond Yield*, 2018
Dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/b/bond-yield.asp>
- [16] Moodrad Choudhry, *The Bond and Money Markets: Strategy, Trading, Analysis*, Great Britain, Bath Press, 2001
Dostupno na: <https://books.mec.biz/tmp/books/HREWWOJW3VCSQK68FBNW.pdf>
- [17] Investopedia, James Chen, *Tresury Note*, 2018
Dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/t/treasurynote.asp>
- [18] Investopedia, James Chen, *Tresury Bill – T – Bill*, 2018
Dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/t/treasurybill.asp>

- [19] Investopedia, James Chen, *Tresury Bond – T – Bond*, 2018
Dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/t/treasurybond.asp>
- [20] Investopedia, James Chen, *Tresury Inflation Protected Securities – TIPS*, 2018
Dostupno na: <https://www.investopedia.com/terms/t/tips.asp>
- [21] Wikipedia, the free encyclopedia, *United States Tresury security*
Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/United_States_Treasury_security
- [22] Rajter-Ćirić, Danijela, *Verovatnoća*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, 2009
- [23] Lozanov-Crvenković, Zagorka, *Statistika*, Univerzitet u Novom Sadu, Prirodnomatematički fakultet u Novom Sadu, 2012
- [24] Gardner, William A., *Introduction to Random Processes: with applications to signals and systems*. Macmillan Publishing Company, 1986
Dostupno
na: http://www.ece.ucdavis.edu/~gardner/doc/Introduction_to_Random_Processes_with_Applications_to_Signal.pdf
- [25] Tsay RS, *Analysis of Financial Time Series, 2th ed.* New Jersey: A John Wiley & Sons; 2005
- [26] Eric Zivot and Jiahui Wang, *Modelling Financial Time Series with S- PLUS, 2th ed.*, Springer, New York, 2006
- [27] Ratnadip Adhikari and R.K Agrawal, *An Introductory Study on Time Series Modelling and Forecasting*, Germany, LAP Lambert Academic Publishing, 2013
- [28] Maddala G.S and In – Moo Kim, *Unit Roots, Cointegration and Structural Change*, New York, Cambridge University Press, 2004
- [29] Dr. Bernhard Pfaff, *Analysis of Integrated and Cointegrated Time Series with R*, Springer, New York, 2009
- [30] A. Ian McLeod, Hao Yu and Esam Mahdi, *Time Series Analysis with R*, Department of Statistical and Actuariel Sciences, The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, 2012
- [31] Soren Johansen, *Estimating hypothesis testing of cointegration vectors in gaussian vector autoregressive models*, Institute od mathematical statistics, Univesity of Copenhagen, 1989
- [32] Comincioli B., *The Stock Market as a Leading Indicator: An Application of Granger Causality*, The Park Place Econ, 1996
Dostupno na: <http://digitalcommons.iwu.edu/parkplace/vol4/iss1/13>
- [33] Rob J. Hyndman and George Athanasopoulos, *Forecasting principles and practice, 2th ed.*, Monash University, Australia, 2018
Dostupno na: <https://otexts.org/fpp2/index.html>
- [34] Rohit Raturi and Hayk Sargsyan, *A Nonlinear Autoregressive Scheme for Time Series Prediction via Artificial Neural Network*, Journal of Computer and Communication, New York, 2018
- [35] Frauke Günter and Stefan Fritsch, *neuralnet: Training of Neural Networks*, The R Journal Vol.2/1, 2010
Dotupno na: <https://journal.r-project.org/archive/2010/RJ-2010-006/RJ-2010-006.pdf>
- [36] edureka!, *Backpropagation – Algorithm For Training A Neural Network*

- Dostupno na: <https://www.edureka.co/blog/backpropagation/>
- [37] Zhuo Chen and Yuhong Yang, *Assessing Forecast Accuracy Measure*, Ioowa State University, 2004
- Dostupno na:
https://www.researchgate.net/publication/228774888_Assessing_forecast_accuracy_measures
- [38] Federal Reserve Bank of St. Louis, *After Years of Decline, Yields on U.S. Treasuries Rise*, 2017
- Dostupno na: https://www.stlouisfed.org/publications/regional-economist/first_quarter_2017/after-years-of-decline-yields-on-us-treasuries-rise
- [39] Multiact, *Beware of the Rising U.S Bond Yields!*, 2018
- Dostupno na: <https://multi-act.com/beware-of-rising-us-bond-yields/>

KRATKA BIOGRAFIJA

Enika Juhas je rođena 07.09.1993. godine u Kikindi. Osnovnu školu „Mora Karolj” završila je u Sajanu 2008. godine i dobitnik je „Vukove diplome“. Srednju školu „Gimnazija Svetozar Marković” završila je u Subotici 2012. godine. Nakon završene srednje škole upisuje Prirodno–matematički fakultet u Novom Sadu, smer primenjena matematika, modul – matematika finansija. Osnovne studije završava 2016. godine pri čemu iste godine upisuje master studije na istom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija 2018.godine.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*

TD

Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*

TZ

Vrsta rada: *master rad*

VR

Autor: *Enika Juhas*

AU

Mentor: *dr Nataša Krklec Jerinkić*

MN

Naslov rada: *Neke primene autoregresivnih modela*

NR

Jezik publikacije: *srpski (latinica)*

JP

Jezik izvoda: *s/e*

JI

Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*

ZP

Uže geografsko područje: *Vojvodina*

UGP

Godina: *2019.*

GO

Izdavač: *autorski reprint*

IZ

Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

MA

Fizički opis rada: 4 poglavlja, 90 strana, 39 lit. citata, 20 slika, 31 tabela

FO

Naučna oblast: *matematika*

NO

Naučna disciplina: *primenjena matematika*

ND

Ključne reči: *kriptovaluta, Bitcoin, Ethereum, Ripple, prinos državne obveznice SAD, srednjoročne kuponske obveznice, autoregresivni modeli, predikcija, kauzalnost, kointegracija, VAR, veštačke neuronske mreže, NNAR*

PO

UDK

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: *Master rad će se baviti primenom nekih autoregresivnih modela na cenu neke od vodećih kriptovaluta na današnjem finansijskom tržištu kao i na prinosima srednjoročne kuponske obveznice SAD. Cilj master rada je da se testira performansa izabranih modela u predikciji vrednosti posmatranih finansijskih instrumenata, kao i utvrđivanje koje osobine trebaju da poseduju podaci za dobijanje dobre predikcije autoregresijom. Među kriptovalute posebno pažnju obraćamo na Bitcoin, Ethereum i Ripple, a među prinosima, na prinose dvo -, peto – i sedmogodišnje obveznice SAD. U radu se koriste VAR i NNAR modeli. U master radu će takođe biti više reči i o međusobnim odnosima posmatranih instrumenata.*

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *30. november 2018.*

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: *dr Nataša Krejić, redovni profesor*

Član: *dr Nataša Krklec Jerinkić, docent*

Član: *dr Dora Seleši, redovni profesor*

Član: *dr Jasna Atanasijević, docent*

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION**

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: *monograph type*

DT

Type of record: *printed text*

TR

Content code: *master thesis*

CC

Autor: *Enika Juhas*

AU

Mentor: *dr Nataša Krklec Jerinkić*

MN

Title: *Some applications of autoregressive models*

XI

Language of text: *serbian (latin)*

LT

Language of abstract: *s/e*

LA

Country of publication: *Republic of Serbia*

CP

Locality of publication: *Vojvodina*

LP

Publication year: *2019.*

PY

Publisher: *author's reprint*

PU

Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*

PP

Physical description: *4 sections, 90 pages, 39 references, 20 graphs, 31 tables*

PD

Scientific field: *mathematics*

SF

Scientific discipline: *applied mathematics*

SD

Key words: *cryptocurrency, Bitcoin, Ethereum, Ripple, U.S Bond yield, Treasury Notes, autoregressive models, predictions, causality, cointegration, VAR, artificial neural networks, NNAR*

UC

Holding data: Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, *Novi Sad*

HD

Note:

N

Abstract: Master's thesis deals with applying some autoregressive models for the prices of currently leading cryptocurrencies on the financial markets and for yields of U.S Treasury Notes. The purpose of the thesis is to test the performance of the selected models in predicting the values of the observed financial instruments, as well as determining which properties must hold the data to obtain good predictions by autoregression. Among cryptocurrencies, we pay special attention to Bitcoin, Ethereum and Ripple, and among yields, we have selected two -, five – and sevenyear yield to maturity of Treasury Notes for analysis. The paper uses VAR and NNAR models. In these thesis will also be more words about the mutual relations of the observed instruments.

AB

Accepted by the Scientific Board on: *30 November 2018*

ASB

Defended:

DE

Thesis defend board:

DB

President: *dr Nataša Krejić, full professor*

Member: *dr Nataša Krklec Jerinkić, docent*

Member: *dr Dora Seleši, full professor*

Member: *dr Jasna Atanasijević, docent*