UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Jovana Živković

MODELIRANJE DEVIZNOG KURSA EVRO-BRITANSKA FUNTA

-MASTER RAD-

Mentor
dr Nataša Krklec Jerinkić

Novi Sad, septembar 2017.

Sadržaj

Pregled grafika

Pregled tabela

Predgovor

" Ne postoji grana matematike koliko god bila apstraktna da jednog dana ne bi mogla biti primenjena u praksi"

Nikolay Ivanovich Lobachevsky

Tačnu prognozu o budućoj vrednosti deviznog kursa, s obzirom na raznovrsnost i složenost faktora koji utiču na njegovo kretanje, je gotovo nemoguće dati. Stoga se za ovaj poduhvat kaže da je pitanje za milion dolara.

Cilj ovog istraživanja jeste da utvrdi odnos Velike Britanije i Evropske unije, oslanjajući se prvenstveno na devizni kurs evro-britanska funta. Pored ovog deviznog kursa, u daljoj analizi koristiće se i devizni kursevi američki dolar-britanska funta i švajcarski franak-britanska funta. Razlog odabira baš ovih deviznih kurseva leži u ogromnom uticaju Sjedinjenih Američkih Država, kako na Veliku Britaniju, tako i na Evropu. Dok je Švajcarska zanimljiva evrposka, politički neutralna država koja nije članica Evropske unije, pa zbog toga ima drugačije odnose sa Velikom Britanijom nego evropske države članice. Podaci deviznih kurseva uzeti su za period od januara 2010. do juna 2017. godine. Fluktuacije kretanja deviznog kursa britanska funta-evro, za navedeni preiod objasnili smo i povezali sa značajnim političkim, ekonomskim dešavanjima. Doveli smo u vezu oscilacije deviznog kursa sa događajima koji naizgled nemaju veze sa istim.

Prvi deo rada posvećen je nastanku i radu Evropske unije, zatim bitnim činjenicama o Ujedinjenom Kraljevstvu Velike Britanije i Severne Irske. Pored toga bliže je objašnjen pojam deviznog kursa i fundamentalni faktori koji utiču na fluktuaciju kursa. Takođe je dato razmatranje o odnosima Velike Britanije sa Evropskom unijom, Sjedinjenim Američkim Državama i sa Švajcarskom.

Drugo poglavlje je posvećeno metodama kojima ćemo vršiti istraživanja. Objašnjeni su relevantni pojmovi iz teorije verovatnoće, zatim statistički testovi koje ćemo koristiti u ovom istraživanju, a služe za ispitivanje statističkih osobina datih serija. Takođe su objašnjeni i jednodimenzionalni i višedimenzionalni modeli vremenskih serija, zatim testovi kointegracije i kauzalnosti. Predstavljeni su i testovi za proveru adekvatnsti i stabilnosti ocenjenih modela, kao i postupci za formiranje prediktivnih vrednosti. Tačnije, drugo poglavlje pokriva teorijsku pozadinu istraživanja.

Na kraju, sledi istraživanje i primena objašnjenih metoda, statističkih testova i modela na konkretnom uzorku, što predstavlja glavnu temu ovog rada.

Grafici kretanja deviznog kursa, grafički i kvantitativni rezultati testova i ocenjeni modeli dobijeni su korišćenjem računarskog softvera *EViews*.

Na kraju, želim da izrazim posebnu zahvalnost svojoj mentorki, docentu doktoru Nataši Krklec Jerinkić, na pruženim savetima i smernicama tokom pisanja ovog rada, a pre svega na pruženom znanju tokom studiranja.

Takođe, zahvalila bih se članovima komisije, prof. dr Nataši Krejić i prof. dr Dori Seleši, na svom prenetom znanju tokom studiranja.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, na ljubavi i podršci koju mi neprestano pružaju.

1 Velika Britanija i Evropska unija

Svet novog doba odlikuju globalizacija, liberalizacija[1] i tehnološki razvoj. Pojam globalizacija počeo se intenzivnije koristiti u skorije vreme, a različiti autori ga različito definišu. Globalizacija dovodi do stvaranja trgovinskih blokova i globalne ekonomije, a svetsko tržište postaje dostupno svima. Ekonomska globalizacija nudi zemljama širom sveta mnoge mogućnosti. Cirkulacijom ljudi, roba i informacija povezuju se regije i ostvaruje interakcija [19]. Dolazi do procesa decentralizacije i ustupanja moći nadnacionalnim telima. Globalizacija ubrzava te procese i oblikuje nove zakone kojima se moraju prilagoditi svi koji žele da uspeju. Proces globalizacije je bitan faktor koji je doprineo jačanju međuzavisnosti tržišta. U današnje vreme čak i tržišta koja nemaju direktan kontakt, indirektno utiču jedno na drugo. Kako cilj ovog rada jeste ispratiti devizni kurs evro-britanska funta, da bismo bolje razumeli ovaj odnos treba da se upoznamo sa nekim činjenicama o Ujedinjenom Kraljevstvu Velike Britanije i Severne Irske (u daljem radu Velika Britanija, VB), čija je zvanična valuta britanska funta, i o Evropskoj uniji, čija je valuta evro. Ispratićemo odnos Velike Britanije i Evropske Unije. U radu ćemo koristiti i devizne kurseve američki dolar-britanska funta i švajcarski franak-britanska funta, tako da ćemo se osvrnuti i na odnos Velike Britanije i Sjedinjenihih Američkih Država (SAD) i na odnos Velike Britanije i Švajcarske.

Evropska unija [9] je jedinstvena međuvladina i nadnacionalna zajednica 28 evropskih država. Koreni osnivanja Evropske unije vode do 1952. godine. Kao prvi vid ujedinjenja, nastala je 1952. godine Evropska zajednica za ugalj i čelik. Ova zajednica je nastala kao proizvod nastojanja da se uspostavi trajan mir i stabilnost u Evropi. Osnovni ciljevi osnivanja ove zajednice su: kontrola tržišta i proizvodnje uglja i čelika, izgradnja međusobnog poverenja nakon Drugog svetskog rata i kontrolisanje proizvodnje naoružanja. Države osnivači prve zajednice su: Francuska, Nemačka, Italija, Belgija, Luksemburg i Holandija.

Ubrzo je postalo izvesno da Zajedinca za ugalj i čelik nije dovoljna, pa se 1958. godine osnivaju Evropska ekonomska zajednica i Evropska zajednica za atomsku energiju. Ideja je bila napraviti zajedničko tržište koje omogućava slobodno kretanje robe, ljudi, kapitala i usluga, ukinuti trgovinska ograničenja, standardizovati carine i pomoći nerazvijenim regionima država članica. Sporazumom iz 1967. godine sve tri zajednice dobijaju iste izvršne organe. Od tada se Evropska zajednica proširila pridruživanjem novih država članica i stekla veću moć. Ugovorom iz Mastrihta 1993. godine sve tri zajednice spojene su u jednu pod nazivom Evropska unija. Osnovna ideja nove zajednice je stvaranje zajedničke spoljne, monetarne i bezbednosne politike.

Evropska unija je politički projekat zasnovan na ideji da se širenjem privrednih sloboda učvrsti zona bezbednosti u Evropi. Nastala je na razumevanju da evropskim narodima i državama najveći rizici prete upravo od evropskih naroda i država, pa ova zajednica međunarodnu politiku pretvara u unutrašnju.

Evropska unija stvara jedinstveno tržište putem sistema zakona koji se primenjuje u svim državama članica, što garantuje slobodan protok ljudi, roba, usluga i kapitala. Evropska unija je 2002. godine uvela zajedničku valutu- evro, koju je do sada usvojilo 18 država članica.

Ujedinjeno Kraljevstvo Velike Britanije i Severne Irske [24] je suverena država[2] u zapadnoj Evropi. Ona obuhvata ostrvo Velika Britanija, severoistočni deo ostrva Irska i mnoga manja ostrva. Severna Irska je jedini deo Ujedninjenog Kraljevstva koji deli kopnenu granicu sa Republikom Irskom. Osim ove kopnene granice Ujedninjeno Kraljevstvo je okruženo Atlantskim okeanom, Severnim morem i Engleskim kanalom (Lamanš), koji odvaja Ujedni-

[1] Ukidanje krutih propisa u poslovanu privrede, naročito u spoljnotrgovinskom prometu.

[2] Država sa definisanom teritorijom koja ima unutrašnji i spoljašnji suverenitet, stalno stanovništvo, vladu, nezavisnost od drugih država i mogućnost da stupi u odnose sa drugim suverenim državama.
Suverenitet predstavlja vrhovnu, neograničenu vlast i potpunu državnu nezavisnost.

njeno Kraljevstvo od Evropskog kontinenta.
Ujedinjeno Kraljevstvo Velike Britanije i Severne Irske je ustavna monarhija sa parlamentarnom demokratijom. Na prestolu, od 1952. godine, je kraljica Elizabeta II. Glavni grad, a ujedno i najveći grad Ujedinjenog Kraljevstva je London. Ujedinjeno Kraljevstvo je nastalo nizom Zakona o uniji koji su ujedinili četiri zemlje- Englesku, Škotsku, Vels i Severnu Irsku. Ujedinjeno Kraljevstvo je razvijena zemlja sa visokim dohotkom i velika sila sa značajnim ekonomskim, kulturnim, vojnim, naučnim i političkim uticajem na međunarodnom nivou. Članica je Saveta bezbednosti Ujedninjenih nacija[3] od prve sednice Saveta 1946. godine. Evropskoj uniji je pristupila 1973. godine. Međutim, juna 2016. godine nacionalni referendum[4] o članstvu Velike Britanije u Evropskoj uniji rezultirao je odlukom o napuštanju Evropske unije. Velika Britanija je takođe i članica Komonvelt nacija (*engl.* Commonwealth of Nations)[5], NATO-a (*engl.* North Atlantic Treaty Organization)[6], Organizacije za ekonomsku saradnju i razvoj[7] i Svetske trgovinske organizacije[8].
Na osnovu tržišta deviznih kurseva Velika Britanija je peta po veličini privreda na svetu i druga po veličini u Evropi, posle Nemačke. Banka Engleske je centralna banka Velike Britanije i odgovorna je za izdavanje i novčanica i kovanica državne valute- britanske funte. Britanska funta je treća po veličini rezervna valuta u svetu, nakon američkog dolara i evra. London je jedan od tri "komandna centra" globalne ekonomije, pored Njujorka i Tokija, i najveći finansijski centar na svetu pored Njujorka. Velika Britanija je rangirana kao šesta glavna turistička destinacija na svetu. Ima važan geopolitički položaj, jer drži u posedu najprometniji deo svetskog mora i kanal Lamanš, koji joj je pomogao da postane svetska velesila. Velika Britanija je kolevka industrijske revolucije, a i danas šesta industrijska sila na svetu.
Kao posledica Velike ekonomske krize, u poslednjem kvartalu 2008. godine, britanska ekonomija je zvanično počela recesiju[9] po prvi put od 1991. godine. Stopa nezaposlenosti se od 2008. do 2015. godine povećavala, u tom periodu je rastao i državni dug Velike Britanije. Kao direktna posledica Velike ekonomske krize plate u Velikoj Britaniji su opale za 3.2% u periodu između 2010. i 2012. godine.

1.1 Britanska funta i devizni kurs

Britanska funta ili funta sterlinga predstavlja zvaničnu valutu Ujedinjenog Kraljevstva i jedna je od najstarijih i najčešće korišćenih valuta u svetu, zajedno sa američkim dolarom, japanskim jenom, australijskim dolarom i evrom. Izvorno, funta je bila vrednost jedne funte

[3]Najvažnije telo Organizacije Ujedinjenih nacija, zaduženo za održavanje mira i bezbednosti u svetu. Organizacija Ujedinjenih nacija je međunarodna organizacija koja se deklariše kao globalno udruženje vlada koje sarađuju na polju međunarodnog prava, globalne bezbednosti, ekonomskog razvoja i socijalne jednakosti.

[4]Oblik neposredne demokratije, tj. oblik neposrednog učešća građana u vršenju državne vlasti i donošenja političkih odluka. Putem referenduma građani se izjašnjavaju (neposredno i tajno) da li su za ili protiv određenog zakona, akta, političke ili druge odluke koje su već donešene ili se njihovo donošenje planira.

[5]Predstavlja udruženje nezavisnih suverenih zemalja širom sveta, od kojih su većina nekadašnji pripadnici Britanske imperije.

[6]Poznat kao i Severnoatlantski savez, je međunarodni vojni savez zasnovan na Severnoatlantskom sporazumu iz 1949. godine. Organizacija predstavlja sistem kolektivne odbrane pri čemu članovi organizacije pristaju na međusobnu odbranu od spoljnog napada.

[7]Međunarodna ekonomska organizacija nastala 1960. godine sa ciljem rekonstrukcije privrede razorene u Drugom svetskom ratu.

[8]Međunarodna multilateralna organizacija nastala sa ciljem da nadgleda i liberalizuje međunarodnu trgovinu.

[9]Povremena usporavanja u privrednoj aktivnosti neke zemlje. Ekonomska definicija kaže da je država u recesiji ako u periodu od šest meseci beleži pad BDP-a. U slučaju većeg pada BDP-a ili recesije koja traje više od dve godine, govori se o depresiji.
Pojam BDP objašnjen u daljem radu.

(jedinica težine)[10] srebra. Koristila se još pre 1200 godina. Prva zemlja koja je uvela zlatni standard bila je Velika Britanija, time je funta bila prva valuta koja je imala pokriće u zlatu. Kasnije je vrednost funte bila vezana za vrednost američkog dolara.
Britanska funta se danas slobodno kupuje i prodaje na berzama širom sveta i njena vrednost fluktuira.
Devizni kurs predstavlja vrednost strane valute (evro, američki dolar, švajcarski franak) izraženu u domaćoj valuti (britanska funta). Osnovna funkcija deviznog kursa je da omogući upoređivanje cena u zemlji i inostranstvu, što predstavlja osnovnu informaciju za ekonomske odnose sa inostranstvom. Devizni kurs na taj način ima ogroman uticaj na međunarodne tokove robe i kapitala, a posredno na celokupna ekonomska dešavanja u zemlji (BDP, zaposlenost, alokaciju resursa). Devizni kurs se formira na deviznom tržištu. Devizno tržište je mesto preseka ponude i tražnje deviza. Učesnici na deviznom tržištu su: stanovništvo, privredni subjekti, državne institucije, banke i druge finansijske institucije, ali i centralne banke. Imajući u vidu veliki značaj deviznog kursa za sve aspekte nacionalne ekonomije, monetarne vlasti (centralne banke) su zainteresovane za visinu i kretanje kursa, pa se u određenim okolnostima, pojavljuju na deviznom tržištu prodajući ili kupujući stranu valutu, čime direktno utiču na ponudu i tražnju deviza, a time i na visinu deviznog kursa. Ponuda i tražnja deviza proističu iz transakcija sa inostranstvom, tj. iz transakcija koje se beleže u platnom bilansu zemlje. Ponuda proističe iz: izvoza robe i usluga, priliva dohotka po osnovu investicija u inostranstvu, tekućih prihoda iz inostranstva, priliva stranog kapitala u bilo kom obliku i smanjenja deviznih rezervi. Sa druge strane, tražnja deviza proističe iz: uvoza robe i usluga, odliva dohotka po osnovu stranih investicija u zemlji, tekućih rashoda, odliva kapitala i povećanja deviznih rezervi. Sva dešavanja i pojave koje menjaju ponudu ili tražnju deviza, od elementarnih nepogoda (koje mogu ugroziti izvoznu prozvodnju i samim tim smanjiti ponudu deviza, što dovodi do rasta deviznog kursa), do psiholoških faktora (nesigurnost u buduću politiku vlade prilikom raspisivanja izbora), utiču na promenu deviznog kursa. Psihološki faktori su posebno značajni u međunarodnom kretanju kratkoročnog kapitala, pa se zemlja sa povećanom političkom nesigurnošću može suočiti sa značajnim odlivom kapitala, što povećava tražnju deviza i dovodi do rasta deviznog kursa.
Fundamentalni faktori koji najviše utiču na kretanje vrednosti britanske funte su:

- Monetarna politika Banke Engleske
  Odbor za monetarnu politiku Banke Engleske sastoji se od devet članova kojima predsedava guverner Banke. Odbor odlučuje o referentnoj kamatnoj stopi jednom mesečno. I pre njenog zvaničnog objavljivanja, analitičari najčešće znaju da li će stopa biti zadržana na istom nivou ili će doći do promene. U fokusu pažnje više od samog sastanka je govor predsednika Banke Engleske koji obično na konferenciji za novinare, nakon sastanka, detaljnije obrazlaže odluku i daje naznake budućih (mogućih) odluka. Tržište takođe obraća pažnju na ton izlaganja. ”Oštriji” ton ukazuje na dalje pooštravanje monetarne politike, što znači moguće povećanje kamatnih stopa, dok ”blaži” ton ukazuje na popustljiviju monetarnu politiku i mogućnost smanjenja kamatnih stopa. ”Oštriji” ton obično za posledicu ima rast valute dok nasuprot tome ”blaži” ton utiče na njen pad.

- Zaposlenost
  Više zaposlenih ljudi vodi većoj proizvodnji, većoj potrošnji, a time i jačanju funte u odnosu na druge valute. Standardna mera zaposlenosti je stopa nezaposlenosti.

- Inflacija
  Inflacija umanjuje kupovnu moć novca jer za istu količinu dobara i usluga potrebno

[10] Jedna funta srebra je 373 grama srebra.

je izdvojiti više novca. Tako, ukoliko je stopa inflacije u Velikoj Britaniji veća od očekivane, vrednost funte u odnosu na druge valute (bi trebalo da) opada. Od 1996. godine, Velika Britanija koristi indeks potrošačkih cena (*engl.* Consumer Price Index-CPI), koji meri prosečnu promenu cena standardne potrošačke korpe proizvoda i usluga u odnosu na prethodni mesec ili u odnosu na isti period prethodne godine. Ciljana stopa inflacija Banke Engleske je 2%.

- Bruto domaći proizvod (BDP)
  Predstavlja zbir vrednosti svih proizvedenih dobara i izvršenih usluga u jednoj državi za određeni vremenski period. BDP Velike Britanije se umnogome zasniva na sektoru usluga, a od njih ponajviše finansijskih usluga.

1.2 Odnos Velike Britanije sa Evropskom unijom, Sjedinjenim Američkim Državama i Švajcarskom

Velika Britanija je oduvek bila između SAD-a i Evrope, kako u geografskom, tako i u ekonomskom i političkom smislu. Mnogi je smatraju ”produženom rukom” SAD-a ili njenom ”polugom” u Evropsku uniju, stoga postoje pribojavanja kako će se u budućnosti odvijati odnosi između SAD-a i Evrposke unije, pošto je u Britaniji izglasan Brexit[11].
Velika Britanija i SAD su vezane zajedničkom istorijom, religijom, jezikom. Tokom Drugog svetskog rata ove dve zemlje su učvstile i ojačale svoje odnose. Danas Velika Britanija svoj odnos sa SAD-om definiše kao najvažnije bilateralno partnerstvo u aktuelnoj britanskoj spoljnoj politici, dok SAD definiše svoj odnos sa Velikom Britanijom kao najvažniju vezu međusobne saradnje u trgovinskom, finansijskom, tehnološkom smislu. Od 2015. godine Velika Britanija je peta po izvozu, a sedma po uvozu robe u SAD. Ove dve zemlje zajedno čine veliki procenat svetske trgovine. Smatra se da će u godinama nakon Brexit-a doći do još snažnijeg povezivanja Londona i Vašingtona, bez pritiska od strane Evropske unije.
Što se tiče Velike Britanije i Evrposke unije, njihov odnos nije jednostavan ni danas, niti je bio jednostavan u prošlosti. Smatra se da su mogući problemi ovog odnosa ”posebna veza” Velike Britanije i SAD-a. Velika Britanija nije učestvovala u formiranju Evropske ekonomske zajednice, ali je ubrzo promenila mišljenje. Dva puta su Britanci podnosili zahtev za članstvo u Evropsku ekonomsku zajednicu 1961. i 1967. godine, ali je Francuska oba puta položila veto na te zahteve. Francuska je, između ostalog, bila zabrinuta da će Velika Britanija u teškim vremenima biti na strani SAD-a, a ne evrposkih suseda. Konačno, 1973. godine Velika Britanija se priključila Zajednici. Ubrzo zatim održan je referendum o nastavku članstva, na kome je 67% birača glasalo za ostanak u Zajednici. Nakon toga, na mestu premijera Velike Britanije su se smenjivali oni koji su negovali dobre odnose sa Evropom i oni koji nisu u potpunosti podržavali članstvo Velike Britanije u Evropskoj uniji. Ponovni referendum o članstvu Velike Britanije u Evropskoj uniji održan je 23. juna 2016. godine. Tada su Britanci izglasali napuštanje Unije i postali prva zemlja koja napušta Evropsku uniju[12]. Nakon ovog događaja otvaraju se nova pitanja: u kakvim će odnosima Velika Britanija ostati sa Evropom, kako će se razvijati odnosi između SAD-a i Evrope.
Proces napuštanja Evropske unije nije jednostavan i podrazumeva ozbiljne i duge pregovore koji se odvijaju u tri etape. Prva etapa pregovora se odnosi na postizanje dogovora o tri pitanja: sudbini evropskih državljana u Velikoj Britaniji posle Brexit-a i Britanaca u Evropskoj uniji, o granici sa Irskom i iznosu finansijskih obaveza Londona prema Evropskoj uniji. Druga faza pregovora se odnosi na buduće trgovinske veze Velike Britanije i Evropske unije. Potom ostaje period od šest meseci, kada bi trebalo da se završi ratifikacija sporazuma u zemljama

[11] Populari termin koji označava napuštanje Evropske unije od strane Velike Britanije.
[12] Grenland, kao sastavni deo Danske, je 1985. godine napustio sve evropske institucije.

članicama i usledi zvaničan izlazak Velike Britanije iz Evropske unije.
Švajcarska, savezna država u Evropi, smatra se spoljnopolitički neutralnom, odnosno praktikuje politiku nemešanja u sukobe između država i ne meša se u unutrašnje stvari drugih država. Neutralnost Švajcarske je bila priznata na Bečkom kongresu[13] 1815. godine, a i danas je međunarodno priznata. Švajcarska je članica u mnogim međunarodnim organizacijama, ali nije članica Evropske unije. Međutim sa Evropskom unijom ima važne bilateralne sporazume, koji su potpisani u više navrata i pokrivaju razmenu u većini važnih sektora. Ugovori se odnose na liberalizaciju i otvaranje tržišta i jačanje saradnje u ekonomskom smislu. Odnosi Velike Britanije i Švajcarske se zasnivaju na odnosima Evropske unije i Švajcarske. Međutim postavlja se pitanje kako će se odnosi ove dve zemlje razvijati u budućnosti zbog napuštanja Unije od strane Velike Britanije.

[13]Bečki kongres je bio skup ambasadora velikih sila koji je održan u Beču od 1. septembra 1814. do 9. juna 1815. godine i koji se bavio određivanjem celokupnog političkog oblika Evrope nakon Napoleonovih ratova.

2 Teorijska pozadina istraživanja

2.1 Slučajne promenljive i stohastički procesi

Kao matematička osnova statistike, teorija verovatnoće je od velike važnosti za mnoge aktivnosti koje uključuju kvantitativnu analizu velikih skupova podataka. Metode teorije verovatnoće se primenjuju i za opisivanje kompleksnih sistema na osnovu delimičnog poznavanja njihovog stanja. Ovde ćemo objasniti neke osnovne pojmove iz teorije verovatnoće koji će nam služiti za dalji rad [25].

Definicija 2.1 *Prostor verovatnoća je trojka* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$*, određena slučajnim eksperimentom, gde je* $\mathbf{\Omega}$ *skup svih mogućih ishoda slučajnog eksperimenta,* $\mathcal{F}$ σ*-algebra, a* P *funkcija koja svakom skupu* $A \in \mathcal{F}$ *dodeljuje broj* $P(A)$*, koji se naziva verovatnoća da se desi događaj* A*.*

Definicija 2.2 *Preslikavanje* $X : \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$*, se zove n-dimenzionalna slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoća* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$*, ako važi da je* X $\mathcal{F}$*-merljivo, tj.* $X^{-1}(S) \in \mathcal{F}$*, za svaki Borelov skup* S*.*

Definicija 2.3 *Funkcija* $F_X(x) = F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 < x_1, \ldots, X_n < x_n)$*, za* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$*, zove se zajednička funkcija raspodele slučajnih promenljivih* $(X_1, \ldots, X_n)$*.*

Definicija 2.4 *Slučajna promenljiva* $X = (X_1, \ldots, X_n)$ *je apsolutno neprekidna ako postoji integrabilna funkcija* $f_X(x) = f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n)$*,* $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$*, takva da* $P(X \in S) = \int \ldots \int_S f_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n)dx_1, \ldots, dx_n$ *za* $S \in \mathcal{B}^n$*. Specijalno za* $S = \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n, u_i < x_i\}$*, dobićemo* $F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{(X_1,\ldots,X_n)}(u_1, \ldots, u_n)du_n \ldots du_1$*.*

Kod jednodimenzionalne slučajne promenljive kumulativna funkcije raspodele za X je $F_X(x) = P(X \leq x)$. Za datu verovatnoću p, najmanji broj x_p takav da zadovoljava $p \leq F_X(x_p)$ naziva se kvantil reda p slučajne promenljive X. U istraživanju ćemo koristiti kumulativnu funkciju raspodele da bismo izračunali p vrednosti.

Definicija 2.5 *Neka je* X *apsolutno neprekidna slučajna promenljiva. Očekivanje slučajne promenljive* X *dato je sa*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x)dx$$

i ono postoji ako i samo ako $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_x(x)dx < +\infty$*.*

Lema 2.1 *Neka je* $X : \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ *slučajna promenljiva. Tada je* $\mathcal{F} := \{X^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}^n\}$ *jedna* σ*-algebra koja se zove* σ*-algebra generisana sa* X*.*

Neka je $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoća i neka su događaji $A, B \in \mathcal{F}$, takvi da je $P(B) > 0$. Verovatnoća realizacije događaja A pod uslovima koji dovode do realizacije događaja B, u oznaci $P(A|B)$, naziva se *uslovna verovatnoća* i računa se na sledeći način

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) > 0.$$

$E(X|B)$ predstavlja očekivanu vrednost slučajne promenljive X, pod uslovom da se desio događaj B i prati sledeću formulu

$$E(X|B) = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP.$$

Očekivanu vrednost slučajne promenljive X, pod uslovom da je poznata vrednost slučajne promenljive Y nazivamo *uslovno očekivanje*, u oznaci $E(X|Y)$.
Neka je Y prosta slučajna promenljiva i neka je $\{y_1, ..., y_m\}$ skup vrednosti promenljive Y. Možemo zapisati $Y = \sum_{i=1}^{m} y_i I_{A_i}$, gde je

$$\begin{aligned} A_1 &= \{\omega \in \Omega | Y(\omega) = y_1\} \\ A_2 &= \{\omega \in \Omega | Y(\omega) = y_2\} \\ &\dots \\ A_m &= \{\omega \in \Omega | Y(\omega) = y_m\} \end{aligned}$$

i

$$I_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i, \\ 0, & \omega \notin A_i, \end{cases}$$

pa važi

$$Y = \begin{cases} y_1, & \omega \in A_1, \\ y_2, & \omega \in A_2, \\ \dots \\ y_m, & \omega \in A_m. \end{cases}$$

Konačno definišemo *uslovno očekivanje* kao

$$E(X|Y) = \begin{cases} \frac{1}{P(A_1)} \int_{A_1} X dP, & \omega \in A_1, \\ \frac{1}{P(A_2)} \int_{A_2} X dP, & \omega \in A_2, \\ \dots \\ \frac{1}{P(A_m)} \int_{A_m} X dP, & \omega \in A_m, \end{cases}$$

ili drugačije zapisano

$$E(X|Y) = \begin{cases} E(X|A_1), & \omega \in A_1, \\ E(X|A_2), & \omega \in A_2, \\ \dots \\ E(X|A_m), & \omega \in A_m, \end{cases}$$

ili

$$E(X|Y) : \begin{pmatrix} E(X|A_1) & E(X|A_2) & \dots & E(X|A_m) \\ P(A_1) & P(A_2) & \dots & P(A_m) \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.1 *Ako je X proizvoljna slučajna promenljiva na* $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ *i Y proizvoljna slučajna promenljiva, onda:*

- $E(X|Y)$ *je slučajna promenljiva,*
- $E(X|Y)$ *je* $\mathcal{F}(Y)$*-merljiva,*
- $\int_A X dP = \int_A E(X|Y) dP$*, za sve* $A \in \mathcal{F}(Y)$*.*

Teorema 2.2 *Osobine uslovnog očekivanja:*

- *Ako je X ν-merljivo, tada je $E(X|\nu) = X$ skoro svuda,*
- *Ako su a i b konstante, tada je $E(aX + bY|\nu) = aE(X|\nu) + bE(Y|\nu)$,*
- *Ako je X ν-merljivo i ako je XY integrabilna, tada $E(XY|\nu) = XE(Y|\nu)$ skoro svuda,*
- *Ako je X nezavisno od ν, tada $E(X|\nu) = E(X)$ skoro svuda.*

Posmatrajući familiju slučajnih promenljivih koja zavisi od vremena, dolazimo do pojma stohastičkog procesa.

Definicija 2.6 *Stohastički (slučajan) proces $\{X(t), t \in \tilde{T}\} := \{X_t, t \in \tilde{T}\}$ je familija slučajnih promenljivih definisanih na istom prostoru verovatnoća ($\mathbf{\Omega}$, $\mathcal{F}$, P).*

Skup $\tilde{T}$ zove se parametarski skup. Parametarski skup $\tilde{T}$ je najčešće skup koji predstavlja vremenski interval. Ako je parametarski skup konačan, dobićemo konačno mnogo slučajnih promenljivih. Ako je prebrojiv, onda govorimo o nizu slučajnih promenljivih. Specijalno, ako je neprebrojiv, onda govorimo o „pravom" stohastičkom procesu.

2.2 Analiza vremenskih serija

Analiza vremenskih serija predstavlja jednu od statističkih disciplina koja beleži najdinamičniji razvoj prethodnih nekoliko decenija. Do ovog burnog razvoja došlo je dostignutim stepenom razvoja same discipline, a i zbog prisutne interakcije sa ostalim disciplinama, posebno ekonomijom [17]. Podaci o pojavama u ekonomiji i drugim sferama istraživanja najčešće se prikupljaju kao vremenske serije i ti podaci su hronološki uređeni. Dok su kod klasične statističke analize ti podaci međusobno nezavisni, kod analize vremenskih serija opservacije u uzorku nisu međusobno nezavisne. Upravo ovu zavisnost koristimo u analizi vremenskih serija u cilju formiranja modela. Model zatim koristimo da na osnovu prošlih prognoziramo buduće opservacije.
Razumevanje analize vremenskih serija zahteva defiinisanje ciljeva ove analize. Analizom vremenskih serija želimo postići četiri parcijalna cilja: deskripcija, objašnjenje, prognoziranje i kontrola. Deskripcija podrazumeva izučavanje osnovnih karakteristika vremenske serije pri čemu se koristi grafički prikaz i statistički testovi. Opis ključnih karakteristika vremenske serije, ima važnost sam po sebi, ali predstavlja i početnu fazu u analizi vremenskih serija. Kada posmatramo više vremenskih serija, moguće je varijacije jedne vremenske serije objasniti varijacijom u drugoj vremenskoj seriji. Ovo se javlja kod višedimenzionalnih modela. Na osnovu prethodnih vrednosti serije ocenjujemo model, koji potom koristimo za formiranje prognoze budućih vrednosti serije. Pod kontrolom se podrazumeva da smo već formirali model i predikcije. Sada upoređujući stvarne i prediktivne vrednosti formiramo grešku predviđanja. Ukoliko je greška predviđanja veća od očekivane, razmotićemo unapređenje modela.

Definicija 2.7 *Vremenski niz ili vremenska serija je skup hronološki uređenih vrednosti promenljive, koja predstavlja pojavu ili stohastički proces u vremenu.*

Finansijske vremenske serije su bazirane na izučavanju procene vrednosti neke imovine tokom vremena. Najlakše ćemo ih prepoznati u praksi ukoliko serija poseduje neku od sledećih osobina: nestabilna varijansa, trend, sezonska komponenta ili strukturni lom.

Najcešće cena finansijskog instrumenta nije stabilna. Do promena cena akcije na tržištu dolazi usled novih informacija koje pristižu. Nova informacija utiče na rast varijabiliteta, koji se potom smiruje, pa ponovo može porasti ukoliko nova vest pristigne. Stepen promene cene akcije zavisi od toga kako na novopristiglu vest investitori gledaju. Ukoliko je vest negativna, varijabilitet raste.
Dugoročna komponenta u kretanju finansijske vremenske serije naziva se trend. Ukoliko serija sistemski raste (opada) tokom vremena, trend moze biti rastući (opadajući). Takođe, trend može biti deterministički ili stohastički u zavisnosti od toga da li se kretanje vremenske serije može predvideti na osnovu prošlih vrednosti ili ne.
Ukoliko vremenska serija ispoljava pravilnosti u kretanju u toku jedne kalendarske godine, na primer, tada se ona naziva sezonska vremenska serija. Postojanje ove komponente ukazuje da postoji veći stepen korelacije između opservacija istih meseci u različitim godinama nego između susednih meseci.
Strukturni lom predstavlja skup opservacija koje odstupaju od prethodnog toka vremenske serije. On je najčešće rezultat nekog događaja koji će uticati na kretanje vremenske serije.
U ovom poglavlju ćemo definisati neke pojmove iz teorije verovatnoće i statistike koji će nam biti korisni u istarživanju [20].

- Momenat reda k apsolutno neprekidne promenljive X:

$$m_k^{'} = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x)dx,$$

  gde je E oznaka za matematičko očekivanje, a $f_X(x)$ funkcija gustine za X i pod uslovom da dati integral postoji.

- Momenat reda jedan je očekivana vrednost promenljive X. Očekivanu vrednost označavamo sa μ_x.

- Centralni momenat reda k apsolutno neprekidne promenljive X:

$$m_k = E[(X - E(X))^k)] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^k f_X(x)dx,$$

  pod uslovom da dati integral postoji.

- Centralni momenat reda dva je varijansa ili disperzija promenljive X. Ona meri očekivano odstupanje promenljive od njene srednje vrednosti. Disperziju označavamo sa σ_x^2.

- Standardna devijacija predstavlja pozitivan kvadratni koren iz disperzije. Standardnu devijaciju označavamo sa σ_x.

- Normalizovan momenat reda tri apsolutno neprekidne promenljive X:

$$S(x) = E[\frac{(X - \mu_x)^3}{\sigma_x^3}].$$

  Normalizovani momenat reda tri zovemo koeficijent asimetrije slučajne promenljive.

- Normalizovani momenat reda četiri apsolutno neprekidne promenljive X:

$$K(x) = E[\frac{(X - \mu_x)^4}{\sigma_x^4}].$$

Normalizovani momenat reda četiri zovemo koeficijent spljoštenosti slučajne promenljive.

Neka je vremenska serija $x = \{x_1, ..., x_T\}$ slučajni uzorak, uzet iz populacije X, koji ima T vrednosti. Tada uzoračke vrednosti gore navedenih pojmova definišemo na sledeći način:

- Uzoračka sredina
$$\hat{\mu}_x = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t.$$
- Medijana uzorka
$$\hat{me}_x = \begin{cases} \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, & T = 2n \\ x_{n+1}, & T = 2n + 1. \end{cases}$$
- Najmanja vrednost u uzorku
$$x_{min} = min\{x_1, ..., x_T\}.$$
- Najveća vrednost u uzorku
$$x_{max} = max\{x_1, ..., x_T\}.$$
- Uzoračka varijansa
$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^2.$$
- Standardna devijacija uzorka
$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2}.$$
- Koeficijent asimetrije uzorka
$$\hat{S}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^3}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^3.$$

  Ovaj koeficijent meri simetričnost raspodele u odnosu na očekivanu vrednost i ukazuje nam da li je većina vrednosti iz uzorka manja (negativan predznak) ili veća od očekivane vrednosti (pozitivan predznak). U zavisnosti od vrednosti koeficijenta određuje se jačina asimetrije.

  1. $\left|\hat{S}_x\right| \leq 0.25$ mala asimetrija,
  2. $0.25 < \left|\hat{S}_x\right| \leq 0.50$ srednja asimetrija,
  3. $\left|\hat{S}_x\right| > 0.50$ jaka asimetrija.

  $\hat{S}_x$ prati asimptotski normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i disperzijom $6/T$. Asimptotske osobine ćemo koristiti za testiranje normalnosti vremenskih serija. Da bismo testirali vrednosti koeficijenta asimetrije testiramo nultu hipotezu $H_0 : \hat{S}_x = 0$, protiv alternativne $H_1 : \hat{S}_x \neq 0$. Vrednost test statistike za uzorački koeficijent asimetrije se računa:
$$t = \frac{\hat{S}_x}{\sqrt{6/T}}.$$

Nultu hipotezu odbacujemo na nivou značajnosti α ako važi $|t| > Z_{\alpha/2}$, gde je $Z_{\alpha/2}$ kvantil standardne normalne raspodele. Ili se računa p vrednost test statistike t, pa ukoliko je ta vrednost manja od α nulta hipoteza se odbacuje, u suprotnom se prihvata.

- Koeficijent spljoštenosti uzorka

$$\hat{K}(x) = \frac{1}{(T-1)\hat{\sigma}_x^4}\sum_{t=1}^{T}(x_t - \hat{\mu}_x)^4.$$

Ovaj koeficijent meri "debljinu repova" raspodele i izražava u kojoj je meri neka raspodela spljoštena u odnosu na normalnu.

1. $\hat{K}_x < 3$ raspodela je više spljoštena u odnosu na normalnu raspodelu,
2. $\hat{K}_x = 3$ raspodela je normalno spljoštena,
3. $\hat{K}_x > 3$ raspodela je više izdužena u odnosu na normalnu, raspodela ima "debele repove".

$\hat{K}_x - 3$ prati asimptotski normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i disperzijom $24/T$. Da bismo testirali vrednosti koeficijenta asimetrije testiramo nultu hipotezu $H_0 : \hat{K}_x - 3 = 0$, protiv alternativne $H_1 : \hat{K}_x - 3 \neq 0$. Vrednost test statistike za uzorački koeficijent spljoštenosti se računa:

$$t = \frac{\hat{K}_x - 3}{\sqrt{24/T}}.$$

Važe ista pravila za odbacivanje/prihvatanje nulte hipoteze.

- Kombinovanjem prethodna dva statistička testa Jarque i Bera su došli do sledeće test statistike:

$$JB = \frac{\hat{S}_x^2}{6/T} + \frac{(\hat{K}_x - 3)^2}{24/T},$$

koja prati asimptotsku χ^2 raspodelu sa dva stepena slobode. Nulta hipoteza glasi da serija prati normalnu raspodelu. I ako je izračunata p vrednost JB test statistike manja od α, onda odbacujemo nultu hipotezu, gde je α nivo značajnosti.

2.3 Prinosi

U mnogim istrazivačkim radovima umesto cena izučavaju se prinosi akcija. Razlozi za to leže u tome što su prinosi "imuni na skaliranje", lakše su uporedivi. Ukoliko imamo akcije na dva tržišta čije su cene izražene u različitim valutama, prinose tih akcija svakako možemo lako uporediti. Zatim, prinosi imaju lepše statističke osobine i stoga je lakše rukvati njima nego cenama.

Neka je P_t cena akcije u trenutku t. Navešćemo nekoliko vrsta prinosa, uz pretpostavku da se ne isplaćuje dividenda[14] na akcije.

[14]Deo profita koji akcionar naplaćuje na osnovu svoje akcije, a čiju visinu određuje skupština akcionara u zavisnosti od rezultata preduzeća i u skladu sa pravilima akcionarskog društva.

Neto prinos predstavlja dobit od investicije u trenutku t u odnosu na troškove ulaganja u trenutku $t-1$ i prati sledeću formulu

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}.$$

Bruto prinos je predstavljen formulom

$$G_t = 1 + R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}.$$

Logaritamski prinos ili neprkidni složeni prinos je prirodni logaritam bruto prinosa akcije i dobija se na sledeći način

$$r_t = \ln(1 + R_t) = \ln(G_t) = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1}).$$

Bruto prinos za k perioda predstavlja prinos od akcije od trenutka $t-k$ do trenutka t. Bruto prinos za k perioda predstavlja proizvod k bruto prinosa za jedan period:

$$\begin{aligned} G_t[k] &= \frac{P_t}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-1}} \times \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \times \cdots \times \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} \\ &= G_t \cdot G_{t-1} \cdots G_{t-k+1} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} G_{t-j}. \end{aligned}$$

Logaritamski prinos za k perioda predstavlja zbir logaritamskih prinosa za k perioda:

$$r_t[k] = \ln G_t[k] = \ln(G_t \cdot G_{t-1} \cdots G_{t-k+1}) = \ln G_t + \ln G_{t-1} + \ldots + \ln G_{t-k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} r_{t-j}.$$

2.4 Pojam stacionarnosti vremenske serije

Stacionarnost vremenskih serija je ključna pri njihovoj analizi. U zavisnosti od toga da li je vremenska serija stacionarna ili ne, biramo različite metode za analizu. U tom smislu, vremenske serije delimo na stacionarne i nestacionarne. Ukoliko se svojstva vremenske serije tokom vremena ne menjaju onda je vremenska serija stacionarna. U suprotnom, odnosno ako su parametri kretanja vremenske serije funkcije vremena ona je nestacionarna.

Definicija 2.8 *Vremenska serija $\{r_t\}$ je striktno stacionarna ako su raspodele slučajnih vektora $(r_{t_1}, ..., r_{t_k})$ i $(r_{t_1+h}, ..., r_{t_k+h})$ iste za sve $k, t_1, ..t_k \in \mathbb{N}$ i $h \in \mathbb{Z}$.*

Drugim rečima striktna stacionarnost zahteva da je raspodela slučajnog vektora $(r_{t_1}, ..., r_{t_k})$ imuna na translaciju u vremenu. Ovo je veoma jak uslov i retko se koristi u praksi. Stoga se uvodi pojam slabe stacionarnosti.

Definicija 2.9 *Vremenska serija $\{r_t\}$ je slabo stabionarna ako važi:*

1. $E(r_t) = \mu$ *za* $\forall t$,
2. $Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$ *za proizvoljno* $l \in \mathbb{N}$ *i* $\forall t$.

Vrednost l se naziva korak. Slaba stacionarnost podrazumeva da podaci fluktuiraju sa konstantnom varijacijom oko fiksnog nivoa. Dalje u tekstu, ako drugačije nije naznačeno pod pojmom stacionarnost podrazumevaćemo slabu stacionarnost. Slaba stacionarnost je neophodna za određivanje prediktivnih vrednosti.

2.5 Korelaciona i autokorelaciona funkcija

Korelacija predstavlja međusobnu povezanost između različitih pojava predstavljenih pomoću dve varijable. Pri tome povezanost znači da je vrednost jedne varijable moguće sa određenom verovatnoćom predvideti na osnovu saznanja o vrednosti druge varijable.
Koeficijent korelacije između dve slučajne promenljive X i Y definišemo na sledeći način:

$$\rho_{x,y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}},$$

gde je

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right],$$
$$Var(X) = E\left[(X-\mu_x)^2\right],$$
$$Var(Y) = E\left[(Y-\mu_y)^2\right],$$

a μ_x i μ_y očekivane vrednosti slučajnih promenljivih X i Y, respektivno, i to sve pod pretpostavakom da navedene varijanse postoje.
Neka su vremenske serije $x = \{x_1, ..., x_T\}$ i $y = \{y_1, ..., y_T\}$ slučajni uzorci, uzeti iz populacija X i Y, koje imaju T vrednosti. Tada je uzorački koeficijent korelacije definisan sa

$$\hat{\rho_{x,y}} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\overline{x})(y_t-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{t=1}^{T}(x_t-\overline{x})^2(y_t-\overline{y})^2}},$$

gde su

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t,$$

$$\overline{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t,$$

uzoračke srednje vrednosti promenljivih X i Y, respektivno.
Koeficijent korelacije meri jačinu linearne zavisnosti između dve slučajne promenljive i uzima vrednosti od -1 do 1. U zavisnosti od vrednosti koeficijenta imamo sledeću gradaciju jačine korelacije:

1. $\hat{\rho_{x,y}} = 0$ potpuno odsustvo korelacije,
2. $0 < \left|\hat{\rho_{x,y}}\right| \leq 0.2$ neznatna korelacija,
3. $0.2 < \left|\hat{\rho_{x,y}}\right| \leq 0.5$ relativno slaba korelacija,
4. $0.5 < \left|\hat{\rho_{x,y}}\right| \leq 0.8$ srednje jaka korelacija,
5. $0.8 < \left|\hat{\rho_{x,y}}\right| < 1$ jaka korelacija,
6. $\hat{\rho_{x,y}} = 1$ potpuna korelacija.

Autokorelacija predstavlja korelaciju izeđu sadašnjih i prošlih vrednosti iste vremenske serije. Korelacija između vrednosti r_t i r_{t-l} se naziva autokorelacija kašnjenja l. Formalno zapisano, autokorelaciona funkcija data je sledećom formulom

$$\rho_l = \frac{Cov(r_t, r_{t-l})}{\sqrt{Var(r_t)Var(r_{t-l})}},$$

pri čemu $Cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$ predstavlja autokovaijansu kašnjenja l. Neka je data serija prinosa $(r_1, r_2, ..., r_T)$, tada je uzorački koeficijent autokorelacije dat sa

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^{T}(r_t - \overline{r})(r_{t-l} - \overline{r})}{\sum_{t=1}^{T}(r_t - \overline{r})^2},$$

pri čemu l uzima vrednosti od 0 do $T - 1$.
Ako je serija prinosa $\{r_t\}$ slabo stacionarna, i zadovoljava jednakost $r_t = \mu + \sum_{i=0}^{q} \psi_i a_{t-i}$, gde je $\psi_0 = 1$, q nenegativan ceo broj i a_j Gausovski beli šum[15], onda $\hat{\rho}_l$ prati asimptotski normalnu raspodelu sa očekivanjem nula i disperzijom $(1 + 2\sum_{i=1}^{q} \rho_i^2)/T$, za $l > q$.
Koristeći navedenu osobinu formirani su statistički testovi za testiranje autokorelacije. Testiramo hipotezu $H_0 : \rho_l = 0$, protiv alternativne $H_1 : \rho_l \neq 0$. Vrednost test statistike računamo po formuli

$$t = \frac{\hat{\rho}_l}{(1 + 2\sum_{i=1}^{l-1} \hat{\rho_i^2})/T},$$

gde je $\rho_j = 0$ za $j > l$. Nultu hipotezu odbacujemo na nivou značajnosti α ukoliko je $|t| > Z_{\alpha/2}$, gde je $Z_{\alpha/2}$ kvantil standardne normalne raspodele. U suprotnom, prihvatamo nultu hipotezu.
Ljung i Box su definisali statistički test koji istovremeno ispituje odsustvo autokorelacije među više parova serije. Nulta hipoteza je $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = 0$, protiv alternativne $H_1 : \exists i \in \{1, 2, ..., m\}, \rho_i \neq 0$. Vrednost test statistike se računa na sledeći način:

$$Q(m) = T(T + 2)\sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{\rho_i^2}}{T - i}.$$

Nulta hipoteza se odbacuje na nivou značajnosti α ukoliko je $Q(m) > \chi_\alpha^2$, gde je χ_α^2 kvantil hi- kvadrat raspodele sa m stepeni slobode.

2.6 Beli šum i linearne vremenske serije

Definicija 2.10 *Vremenska serija $\{r_t\}$ se naziva beli šum, ako je $\{r_t\}$ niz nezavisnih slučanih promenljivih sa istom raspodelom i sa konačnim očekivanjem i disperzijom. Gausov beli šum je beli šum koji prati raspodelu $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.*

Za beli šum autokorelaciona funkcija je nula.

Definicija 2.11 *Vremenska serija $\{r_t\}$ je linearna ako se može zapisati kao $r_t = \mu + \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i a_{t-i}$, gde je $\mu = E(r_t)$, $\psi_0 = 1$, a $\{a_t\}$ niz nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih sa očekivanjem nula i dobro definisanom disperzijom.*

$\{a_t\}$ predstavlja nove informacije u trenutku t koje se nazivaju i šokovi. Dinamiku u nizu $\{r_t\}$ određuju koeficijenti ψ_i . Ukoliko je serija slabo stacionarna dobija se

$$E(r_t) = \mu,$$

$$D(r_t) = \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{+\infty} \psi_i^2,$$

gde je σ_a^2 disperzija šuma. Za stacionarne serije važi da uticaj šoka a_{t-i} na prinos r_t opada kako i raste.

[15]Objašnjeno u sledećem poglavlju.

2.7 Testiranje stacionarnosti vremenskih serija DF testom jediničnog korena

Formalni postupak za testiranje prisustva i tipa nestacionarnosti u modelima linearnih vremenskih serija čini grupa testova koji se zovu testovi jediničnog korena. Definisan je veći broj testova jediničnog korena. Prvi test definisali su Dickey i Fuller (DF test) [6] i on se najčešće koristi.

Posmatrajmo model

$$r_t = \phi_1 r_{t-1} + a_t, \tag{2.1}$$

gde je a_t beli šum.

Teorema 2.3 *Neka $\{r_t\}$ prati AR(1) model*[16] $r_t = \phi_1 r_{t-1} + a_t$*, gde je a_t beli šum. Ako je $\{r_t\}$ slabo stacionarna vremenska serija, tada je* $|\phi_1| < 1$.

Na osnovu teoreme 2.3 razlikujemo sledeća tri slučaja:

1. $|\phi_1| < 1$, serija je slabo stacionarna,
2. $|\phi_1| > 1$, serija eksplodira,
3. $|\phi_1| = 1$, serija ima jedinični koren i nestacionarna je.

Sa obe strane jednačine (2.1) oduzmimo r_{t-1} i dobijamo

$$r_t - r_{t-1} = (\phi_1 - 1)r_{t-1} + a_t.$$

Neka je $|\phi_1| = 1$. Tada dobijamo

$$\Delta r_t = a_t.$$

Kako je a_t beli šum, Δr_t je stacionarna vremenska serija. I na prethodno prikazan način diferenciranjem dolazimo do stacionarnosti. Može se desiti da je potrebno nestacionarne vremenske serije diferencirati više od jednog puta da bi postale stacionarne.

Definicija 2.12 *Vremenska serija $\{r_t\}$ je integrisana stepena d (u oznaci $r_t \sim I(d)$), ako je r_t nestacionarna, ali postaje stacionarna nakon d diferenciranja, pri čemu je $d \in \mathbb{N}$ najmanje takvo da važi da su sve $\Delta^{d-j} r_t$ nestacionarne serije, za j = 1,...,d −1, gde je* $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$, $\Delta^2 r_t = \Delta(\Delta r_t) = \Delta r_t - \Delta r_{t-1}, \ldots$

Specijalno,

Definicija 2.13 *Vremenska serija $\{r_t\}$ je integrisana stepena jedan (u oznaci $r_t \sim I(1)$) i sadrži jedinični koren, ako je r_t nestacionarna, a Δr_t stacionarna vremenska serija.*

Red integracije jednak je broju diferenciranja koje je potrebno da bi se od nestacionarne vremenske serije dobila stacionarna vremenska serija, a što je ekvivalentno broju jediničnih korena početne vremenske serije.
Neka $\{r_t\}$ prati $AR(1)$ model [31]:

$$r_t = \phi_1 r_{t-1} + a_t, \tag{2.2}$$

[16] Objašnjeno u daljem radu.

$$r_t = \alpha_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t, \tag{2.3}$$

$$r_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \phi_1 r_{t-1} + a_t, \tag{2.4}$$

gde je jednačina (2.2) bez konstante i trenda, jednačina (2.3) sa konstantom, ali bez trenda i (2.4) jednačina i sa konstantom i sa trendom. Sve tri jednačine se testiraju na postojanje jediničnog korena. Testira se nulta hipoteza $H_0 : |\phi_1| = 1$ protiv alternativne $H_1 : |\phi_1| < 1$. Nulta hipoteza glasi da imamo jedinični koren, odnosno da je serija nestacionarna. Test statistika pomoću koje se testira ova hipoteza, na osnovu DF testa data je sledećom formulom:

$$t = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{SE(\hat{\phi}_1)},$$

gde je $\hat{\phi}_1$ vrednost ocenjenog koeficijenta metodom najmanjih kvadrata, a $SE(\hat{\phi}_1)$ vrednost standardne greške ocenjenog koeficijenta. Ova test statistika nema Studentovu raspodelu, čak ni u asimptotskom smislu, nego je njena raspodela asimetrična ulevo. Autori testa su primenom metoda simulacije odredili kritične vrednosti za uzorke različitih veličina [21] (te tablice su uključene u većinu savremenih softvera koje koristimo pri analizi). Ukoliko je dobijena vrednost t statistike veća od kritične vrednosti, odbacujemo nultu hipotezu.
Treba naglasiti da najbolji test jediničnog korena ne postoji, jer se moć testa menja za razne specifikacije modela. Jedan od čestih problema u praksi je to što je test jediničnog korena izrazito osetljiv na postojanje strukturnog loma serije, pa rezultati često pokazuju postojanje integrisanosti i za serije koje su stacionarne. Zbog toga pre primene testa jediničnog korena treba pažljivo izanalizirati seriju, u smislu deskriptivne statistike, grafičkog prikaza.

2.8 Modeli jednodimenzionalnih jednačina

U ovom poglavlju ćemo približnije objasniti kako izgleda autoregresivni model (AR), model pokretnih proseka (MA) i autoregresivni model pokretnih proseka ($ARMA$). Prikazaćemo neke značajne osobine navedenih modela, i videti kako se ovi modeli koriste za formiranje prediktivnih vrednosti.

2.8.1 Autoregresivni model (AR)

Autoregresivni modeli vremenskih serija su oni modeli u kojima se zavisna promenljiva u trenutku t opisuje u funkciji od sopstvenih prethodnih vrednosti, tj. skup zavisnih promenljivih su elementi iste vremenske serije samo u trenucima $t-1$, $t-2$,..., $t-p$.

Definicija 2.14 *Autoregresivni model reda p definisan je sledećom formulom*

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \ldots + \phi_p r_{t-p} + a_t,$$

gde je a_t beli šum sa očekivanjem nula i disperzijom σ_a^2, a ϕ_i, $i \in \{1, 2, ..., p\}$ autoregresivni koeficijenti.

$AR(1)$ model
Autoregresivni model prvog reda, u oznaci $AR(1)$, prati sledeću jednačinu

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t,$$

gde je, kao što je već rečeno a_t beli šum sa očekivanjem nula i disperzijom σ_a^2, a ϕ_1 autoregresivni koeficijent.
Navešćemo dovoljan i potreban uslov za slabu stacionarnost $AR(1)$ modela u vidu sledeće dve teoreme.

Teorema 2.4 *Neka $\{r_t\}$ prati $AR(1)$ model, tj. $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t$, gde je a_t beli šum i važi $E(r_t) = 0$ i $D(r_t) = \sigma_a^2$. Ako je $\{r_t\}$ slabo stacionarna vremenska serija, onda važi $|\phi_1| < 1$.*

Ovo znači da uticaj prethodnih vrednosti nije velik, na neki način je kontrolisan.

Teorema 2.5 *Neka $\{r_t\}$ prati $AR(1)$ model, tj. $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + a_t$, gde je a_t beli šum i važi $E(r_t) = 0$ i $D(r_t) = \sigma_a^2$, i pretpostavimo da je $E(r_t)$ uniformno ograničeno za svako t. Tada je $\{r_t\}$ slabo stacionarna vremenska serija ako je $|\phi_1| < 1$.*

Očekivanje $AR(1)$ modela je dato sa

$$\mu = E(r_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1}.$$

Disperzija modela $AR(1)$ je predstavljena formulom

$$\sigma^2 = D(r_t) = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}.$$

Da bi očekivanje modela postojalo mora da važi $\phi_1 \neq 1$. Očekivanje modela je nula ako i samo ako je $\phi_0 = 0$. Disperzija treba da bude ograničena i nenegativna, tako da važi $\phi_1^2 < 1$. Slaba stacionarnost $AR(1)$ modela implicira da $\phi_1 \in (-1, 1)$.
Autokovarijansna i autokorelaciona funkcija kašnjenja l su date sa

$$\gamma_l = \begin{cases} \phi_1\gamma_1 + \sigma_a^2, & l = 0, \\ \phi_1\gamma_{l-1}, & l > 0, \end{cases}$$

$$\rho_l = \phi_1^l,$$

respektivno. Autokorelaciona funkcija kašnjenja slabo stacionarnog modela $AR(1)$ eksponencijalno opada sa stopom ϕ_1.

$AR(2)$ **model**
Autoregresivni model drugog reda, označen sa $AR(2)$, dat je sledećom jednačinom

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + a_t,$$

gde je a_t beli šum sa očekivanjem nula i disperzijom σ_a^2, a ϕ_1 i ϕ_2 autoregresivni koeficijenti. Očekivanje modela $AR(2)$ dato je sa

$$\mu = E(r_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2}.$$

Da bi očekivanje postojalo mora da važi $\phi_1 + \phi_2 \neq 1$.
Disperzija modela $AR(2)$ data je sa

$$\sigma^2 = D(r_t) = \frac{\sigma_a^2 + 2\phi_1\phi_2\gamma_1}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2}.$$

Kako disperzija treba da bude nenegativna i ograničena treba da važi $\phi_1^2 + \phi_2^2 < 1$.
Autokovarijansna funkcija kašnjenja l i autokorelaciona funkcija kašnjenja l date su sledećim formulama:

$$\gamma_l = \begin{cases} \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma_a^2, & l = 0, \\ \phi_1\gamma_{l-1} + \phi_2\gamma_{l-2}, & l > 0, \end{cases}$$

$$\rho_l = \phi_1 \rho_{l-1} + \phi_2 \rho_{l-2}. \tag{2.5}$$

Jednačina (2.5) govori da autokorelaciona funkcija $AR(2)$ modela zadovoljava diferencnu jednačinu drugog reda

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\rho_l = 0,$$

gde B nazivamo operator unazad (*engl.* back-shift) i važi $B\rho_l = \rho_{l-1}$. Prikazana diferencna jednačina određuje osobine autokorelacione funkcije i ponašanje prediktivnih vrednosti. Odgovarajuća polinomna jednačina za datu diferencnu jednačinu je

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = 0.$$

Rešenje ove jednačine je dato sa

$$x_{1,2} = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{-2\phi_2}.$$

Inverzna vrednost rešenja $x_{1,2}$ predstavlja karakteristične korene modela $AR(2)$ u oznaci $\omega_{1,2}$. Uslov slabe stacionarnosti postaje $\left|\omega_{1,2}\right| < 1$.

$AR(p)$ **model**
$AR(p)$ model je uopštenje modela $AR(1)$ i $AR(2)$. Sve osobine se izvode na sličan način, jedino što dodatno komplikuje račun jeste veći broj koeficijenata.
Očekivanje je dato sa

$$\mu = E(r_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p}.$$

Uvođenjem operatora unazad B za $AR(p)$ model dobijamo diferencnu jednačinu reda p

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p)\rho_l = 0.$$

Analogno, kao u modelu $AR(2)$ imamo polinomnu jednačinu

$$1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 - \ldots - \phi_p x^p = 0.$$

Karakteristični koreni modela $AR(p)$ su inverzne vrednosti rešenja ove polinomne jednačine i uslov slabe stacionarnosti je $|\omega_i| < 1$, gde je $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

2.8.2 Formiranje prediktivnih vrednosti na osnovu autoregresivnog modela

Predviđanje je važan korak u analizi vremenskih serija. Pretpostavimo da se nalazimo u trenutku t i zanima nas vrednost serije u trenutku $t + 1$.
Posmatramo $AR(p)$ model

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \ldots + \phi_p r_{t-p} + a_t.$$

Jednokoračna predikcija, odnosno predviđena vrednost za trenutak $t + 1$ na osnovu $AR(p)$ modela dobija se na sledeći način

$$\hat{r}_t(1) = E(r_{t+1}|F_t) = E(\phi_0 + \phi_1 r_t + \phi_2 r_{t-1} + \ldots + \phi_p r_{t+1-p} + a_{t+1}|F_t),$$

$$\hat{r}_t(1) = \phi_0 + \phi_1 r_t + \phi_2 r_{t-1} + \ldots + \phi_p r_{t+1-p}, \tag{2.6}$$

gde je F_t poznata istorija do trenutka t. U jednačini (2.6) koristili smo osobine uslovnog očekivanja $E(a_{t+1}|F_t) = E(a_{t+1}) = 0$.
Greška predviđanja za jedan korak unapred je

$$e_t(1) = r_{t+1} - \hat{r}_t(1) = a_{t+1}.$$

Stvarna vrednost serije u trenutku $t + 1$ i formirana prediktivna vrednost za taj trenutak, ako nam je poznata istorija do trenutka t razlikuju se samo za vrednost šuma u trenutku $t + 1$.
Pretpostavimo da se nalazimo u trenutku t i zanima nas vrednost serije u trenutku $t + 2$. Dvokoračna predikcija na osnovu modela $AR(p)$ dobija se na sledeći način

$$\hat{r}_t(2) = E(r_{t+2}|F_t) = E(\phi_0 + \phi_1 r_{t+1} + \phi_2 r_t + \ldots + \phi_p r_{t+2-p} + a_{t+2}|F_t),$$

$$\hat{r}_t(2) = E(r_{t+2}|F_t) = \phi_0 + \phi_1 \hat{r}_t(1) + \phi_2 r_t + \ldots + \phi_p r_{t+2-p}. \tag{2.7}$$

Greška predviđanja za dva koraka unapred je

$$e_t(2) = r_{t+2} - \hat{r}_t(2) = \phi_1 a_{t+1} + a_{t+2}.$$

Formiranje prediktivnih vrednosti za l koraka unapred, ukoliko znamo istoriju do trenutka t prati formulu

$$\hat{r}_t(l) = E(r_{t+l}|F_t) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \hat{r}_t(l-i),$$

i važi $\hat{r}_t(i) = r_{t+i}$, ako je $i \leq 0$.
Ovakav način predviđanja se naziva dinamičko predviđanje i zasniva se na određivanju predikcija za periode nakon prvog perioda u uzorku, tako što se koriste prethodne predviđene vrednosti. Nasuprot ovome, statički način predviđanja se zasniva na određivanu predikcija za periode nakon prvog perioda u uzorku, tako što se koriste prethodne stvarne vrednosti. U slučaju jednokoračnih predikcija vrednosti dinamičkih i statičkh predikcija se poklapaju.
Statičko predviđanje podrazumeva da ako formiramo predikcije za period $t + l$, poznata nam je istorija do trenutka $t + l - 1$. Tako da statičko predviđanje prati sledeću formulu

$$\hat{r}_t(l) = E(r_{t+l}|F_{t+l-1}) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t+l-i}.$$

U svakom koraku prediktivne vrednosti dobijene statičkom metodom će se od stvarnih razlikovati samo za vrednost šuma u tom koraku.
Statičko predviđanje ćemo koristiti uvek kada imamo poznate vrednosti za period za koji predviđamo. Statičko predviđanje je predviđanje "od danas do sutra". Kod dinamičkog načina predviđanja greška se povećava kako se povećava broj perioda za koje tražimo prediktivne vrednosti, jer se koriste vrednosti prethodnih predikcija, koje se razlikuju od stvarnih vredonsti. Dinamički metod koristimo kada na primer hoćemo da vidimo šta će se desiti sledeće godine, na osnovu podataka iz prethodnih par godina.

2.8.3 Model pokretnih proseka (MA)

Sledeća klasa modela koji imaju veliku primenu u modeliranju serija prinosa u finansijama su modeli pokretnih proseka. Model pokretnih proseka izvodimo iz autoregresivnog

modela beskonačnog reda sa određanim ograničenjima na koeficijente.
Posmatrajmo

$$AR(+\infty) : r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \phi_2 r_{t-2} + \ldots + a_t,$$

uz uslove $\phi_i = -\theta_1^i$, gde je $i \in \mathbb{N}$. Da bi model bio stacionaran mora da važi $|\theta_1| < 1$ ($\theta_1^i \to 0$, $i \to +\infty$), u suprotnom serija bi eksplodirala.
Dobijamo

$$r_t = \phi_0 - \theta_1 r_{t-1} - \theta_1^2 r_{t-2} + \ldots + a_t.$$

Ovo možemo zapisati na sledeći način

$$r_t + \theta_1 r_{t-1} + \theta_1^2 r_{t-2} + \ldots = \phi_0 + a_t, \tag{2.8}$$

$$r_{t-1} + \theta_1 r_{t-2} + \theta_1^2 r_{t-3} + \ldots = \phi_0 + a_{t-1}. \tag{2.9}$$

Kada jednačinu (2.9) pomnožimo sa $-\theta_1$ i dodamo jednačini (2.8) dobijamo sledeće

$$r_t = \phi_0(1 - \theta_1) + a_t - \theta_1 a_{t-1}.$$

Izraz $\phi_0(1 - \theta_1)$ predstavlja konstantu, a_t je beli šum, a a_{t-1} prethodna vrednost šuma.
$MA(1)$ model zapisujemo

$$r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1},$$

gde je c_0 konstanta, $\{a_t\}$ beli šum, a θ_1 koeficijent modela, sa uslovom $\theta_1 \in (-1, 1)$.
Uopštenjem $MA(1)$ modela, dobijamo $MA(q)$ model

$$r_t = c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q},$$

gde je $q > 0$ i govori nam koliko daleko idemo u istoriju.
U ovom modelu vrednost vremenske serije u trenutku t opisuje se kao funkcija članova serije belog šuma u trenucima t, $t-1$,...,$t-q$. Proces pokretnih proseka je koristan u modeliranju pojava kod kojih događaji uzrokuju trenutne efekte, a koji traju kratak vremenski period.

Osobine $MA(q)$ modela

MA model je uvek slabo stacionaran jer predstavlja linearnu kombinaciju belih šumova, pa su prva dva momenta nezavisna od vremenskog trenutka t.
Očekivanje modela je

$$E(r_t) = E(c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}) = c_0.$$

Disperzija modela je

$$D(r_t) = D(c_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}) = \sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2),$$

jer $\{a_t\}$ seija nezavisnih, isto raspodeljenih promenljivih.
Sada definišimo vrednosti koeficijenta modela za neke specifične slučajeve: $\theta_0 = -1$, $\theta_j = 0$ za $j > q$.
Autokovarijansa kašnjenja l definisana je na sledeći način

$$\gamma_l = \begin{cases} \sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2), & l = 0, \\ \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{q-l} \theta_{j+l}\theta_j, & 0 < l \leq q, \\ 0, & l > q. \end{cases} \tag{2.10}$$

Autokorelacija kašnjenja l predstavljena je sledećom formulom

$$\rho_l = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ \frac{\sum_{j=0}^{q-1} \theta_{j+l}\theta_j}{\sum_{j=0}^{l} \theta_j^2}, & 0 < l \leq q, \\ 0, & l > q. \end{cases} \tag{2.11}$$

Iz jednačina (2.10) i (2.11) vidimo da je $MA(q)$ serija modela korelisana sa prethodnih q vrednosti, dok u slučaju $l > q$ nema korelacije, stoga kažemo da model ima "konačnu memoriju".

2.8.4 Formiranje prediktivnih vrednosti na osnovu modela pokretnih proseka

Pretpostavimo da znamo vrednosti serije do trenutka t, uključujući i taj trenutak i da nas zanima koje su vrednosti serije u trenucima $t+1$, $t+2$,...,$t+l$. Kako MA model ima konačnu memoriju, prediktivne vrednosti će težiti sredini.
Jednokoračna predikcija, odnosno predviđena vrednost za trenutak $t+1$ na osnovu $MA(q)$ modela dobija se na sledeći način

$$\hat{r}_t(1) = E(r_{t+1}|F_t) = E(c_0 + a_{t+1} - \theta_1 a_t - \dots - \theta_q a_{t+1-q}|F_t) = c_0 - \theta_1 a_t - \dots - \theta_q a_{t+1-q},$$

pri čemu smo iskoristili osobine uslovnog očekivanja i belog šuma.
Greška predviđanja za jedan korak unapred je

$$e_t(1) = r_{t+1} - \hat{r}_t(1) = a_{t+1}.$$

Prediktivna vrednost za trenutak $t+1$ se razlikuje od stvarne za vrednost šuma u trenutku $t+1$, ukoliko nam je poznata istorija do trenutka t.
Dvokoračna predikcija na osnovu $MA(q)$ modela dobija se na sledeći način

$$\hat{r}_t(2) = E(r_{t+2}|F_t) = E(c_0 + a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1} - \dots - \theta_q a_{t+2-q}|F_t) = c_0 - \theta_2 a_t - \dots - \theta_q a_{t+1-q}.$$

Greška predviđanja za dva koraka unapred je

$$e_t(2) = r_{t+2} - \hat{r}_t(2) = a_{t+2} - \theta_1 a_{t+1}.$$

Vidimo da se greška povećava kako idemo dalje u budućnost.
Ukoliko se nalazimo u trenutku t, a zanima nas vrednost serije u trenutku $t+q$, to možemo dobiti na sledeći način

$$\hat{r}_t(q) = E(r_{t+q}|F_t) = E(c_0 + a_{t+q} - \theta_1 a_{t+q-1} - \dots - \theta_q a_t|F_t) = c_0 - \theta_q a_t.$$

Greška predviđanja za q koraka unapred je

$$e_t(q) = r_{t+q} - \hat{r}_t(q) = a_{t+q} - \theta_1 a_{t+q-1} \dots - \theta_{q-1} a_{t+1}.$$

Predikcije za l koraka unapred, gde je $l > q$ bile bi

$$\hat{r}_t(l) = c_0.$$

Počevši od nekog momenta imamo samo konstantu c_0, što je i očekivanje modela. Ovde se takođe vidi "konačna memorija" modela.
Sve do sada navedeno se odnosi na dinamički način formiranja prediktivnih vrednosti. Što se

tiče statičkog metoda za formiranje predikcija, podrazumevamo da za formiranje predikcija za trenutak $t + l$ znamo istoriju do trenutka $t + l - 1$. Ovo znači sledeće

$$\hat{r}_t(l) = E(r_{t+l}|F_{t+l-1}) = c_0 - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t+l-i},$$

prediktivne vrednosti dobijene statičkom metodom od stvarnih će se razlikovati samo za vrednost šuma.

2.8.5 Autoregresivni model pokretnih proseka ($ARMA$)

Autoregresivni modeli i modeli pokretnih proseka, koji su bili prikazani u radu, prilikom primene u pojedinim slučajevima mogu da postanu glomazni za opisivanje dinamičke strukture podataka tj. mogu sadržati mnogo parametara. U cilju prevazilaženja ovog problema nastali su tzv. $ARMA$ modeli, kao kombinacija prethodnih, kojima se broj parametara pokušava svesti na manji, prihvatljiv nivo. $ARMA$ modeli su najviše prilagođeni ocenjivanju volatilnosti modela.

$ARMA(1, 1)$
Vremenska serija $\{r_t\}$ prati model $ARMA(1, 1)$ ako zadovoljava

$$r_t - \phi_1 r_{t-1} = \phi_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1}, \tag{2.12}$$

gde je a_t beli šum.
Leva strana jednačine (2.12) predstavlja komponentu AR modela, dok desna strana predstavlja komponentu MA modela. Konstanta modela je ϕ_0. Da bi model bio smislen, mora da važi $\phi_1 \neq \theta_1$, u suprotnom model bi se sveo na seriju belih šumova. Ovaj model je označen sa $ARMA(1, 1)$, gde je prva jedinica red autoregresivne komponentne, a druga jedinica red komponentne pokretnih proseka.
Očekivanje modela je

$$\mu = E(r_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1},$$

i jednako je očekivanju $AR(1)$ modela.
Diseprzija modela je

$$\sigma^2 = D(r_t) = \frac{\sigma_a^2(1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2}.$$

Kako varijansa treba da bude pozitivna imamo uslov $\phi_1^2 < 1$. Ovo je uslov slabe stacionarnosti i isti je kao kod $AR(1)$ modela.
Autokovarijansna funkcija kašnjenja l data je sa

$$\gamma_l = \begin{cases} \sigma^2, & l = 0, \\ \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma_a^2, & l = 1, \\ \phi_1\gamma_{l-1}, & l > 1. \end{cases}$$

Autokorelaciona funkcija kašnjenja l data je sa

$$\rho_l = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ \phi_1 - \frac{\theta_1\sigma_a^2}{\gamma_0}, & l = 1, \\ \phi_1\rho_{l-1}, & l > 1. \end{cases}$$

Autokorelaciona funkcija kašnjenja l modela $ARMA(1,1)$ se ponaša slično kao autokoreliaciona funkcija kašnjenja l modela $AR(1)$, eksponencijalno opada, s tim što ovde pad počinje od ρ_2.

$ARMA(p,q)$
Model $ARMA(p,q)$ je u formi

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t-i},$$

gde je $\{a_t\}$ serija belog šuma, a p i q nenegativni celi brojevi.
Važi sledeće $ARMA(p,0) = AR(p)$ i $ARMA(0,q) = MA(q)$. Kao što smo već napomenuli p predstavlja red autoregresivne komponente u modelu, a q predstavlja red komponente pokretnih proseka. Koristeći operator unazad B, model $ARMA(p,q)$ možemo zapisati kao

$$(1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p) r_t = \phi_0 + (1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q) a_t.$$

Polinom $1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p$ je AR polinom modela, dok je $1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q$ MA polinom modela. AR polinom određuje karakteristike $ARMA$ modela. Ako su sva rešenja karakteristične jednačine, odrđene AR polinomom, manja od 1 po apsolutnoj vrednosti, onda je $ARMA$ model slabo stacionaran.
Očekivanje $ARMA(p,q)$ modela dato je sa

$$\mu = E(r_t) = \frac{\phi_0}{1 - \phi_1 - ... - \phi_p}.$$

2.8.6 Određivanje reda $ARMA$ modela

Optimalan red modela moguće je odrediti na više načina koristeći više različitih kriterijuma. Za određivanje reda $ARMA$ modela koristićemo Akaike informacijski kriterijum (Akaike information criterion, AIC). Ovaj kriterijum je baziran na proceni verovatnoće po statističkom metodu maksimalne verodostojnosti. Formula za izračunavanje vrednosti AIC kriterijuma je

$$AIC = ln(\hat{\sigma_k}^2) + \frac{2k}{T},$$

gde je T veličina uzorka, k ukupan broj parametara koji se ocenjuje i $\hat{\sigma_k}^2$ je ocena za varijansu šuma σ_a^2, metodom maksimalne verodostojnosti.
Funkcija maksimalne verodostojnosti prati sledeću formulu

$$f(X) = \frac{T}{2} ln(2\pi) + \frac{T}{2} ln(\sigma_a^2) + \sum_{t=1}^{T} \frac{a_t^2}{2\sigma_a^2}.$$

Vektor $X = (\theta_q, ..., \theta_1, \phi_0, \sigma_a, \phi_p, ..., \phi_1)$ predstavlja vektor koeficijenta $ARMA$ modela koje treba oceniti. U tom slučaju $k = p + 1 + 1 + q$. Prilikom ocene koeficijenata treba rešiti problem

$$min_X f(X).$$

Za red modela izabraćemo onaj koji daje najmanju vrednost AIC kriterijuma.

2.8.7 Formiranje prediktivnih vrednosti na osnovu autoregresivnog modela pokretnih proseka

Kako je ponašanje autokorelacione funkcije kašnjenja slično za $ARMA$ i AR model, tako se i prediktivne vrednosti formiraju na sličan način, uz dodatak MA komponente. Pretpostavimo da u trenutku t znamo istoriju do tog trenutka i zanima nas šta se dešava u narednom $t+1$. Jednokoračna predikcija na osnovu $ARMA(p,q)$ modela je

$$\hat{r}_t(1) = E(r_{t+1}|F_t) = E(\phi_0 + a_{t+1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t+1-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t+1-i}|F_t) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t+1-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t+1-i}.$$

Greška predviđanja za jedan korak unapred je

$$e_t(1) = r_{t+1} - \hat{r}_t(1) = a_{t+1}.$$

Prediktivne vrednosti za l koraka unapred dobijaju se na sledeći način

$$\hat{r}_t(l) = E(r_{t+l}|F_t) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i E(r_{t+l-i}|F_t) - \sum_{i=1}^{q} \theta_i E(a_{t+l-i}|F_t),$$

gde je $E(r_{t+l-i}|F_t) = r_{t+l-i}$ i $E(a_{t+l-i}|F_t) = a_{t+l-i}$ ako je $l-i \leq 0$ i $E(r_{t+l-i}|F_t) = \hat{r}_t(l-i)$ i $E(a_{t+l-i}|F_t) = 0$ ako je $l-i > 0$.
Statički način predviđanja podrazumeva predviđanje "od danas do sutra" i prediktivne se od stvarnih vrednosti razlikuju samo za vrednost šuma "danas".

$$\hat{r}_t(l) = E(r_{t+l}|F_{t+l-1}) = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t+l-i} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t+l-i}.$$

2.8.8 Nestacionarni procesi i $ARIMA$ model

U prethodnom delu rada bilo je reči o stacionarnim stohastičkim procesima koji se opisuju AR, MA i $ARMA$ modelima. Međutim, najveći broj vremenskih serija, posebno finansijske serije, pokazuju neke karakteristike koje odstupaju od uobičajenog ponašanja stacionarnih serija. Stacionarnost odnosno nestacionarnost vremenske serije ima ogroman značaj u analizi ekonomskih fenomena. Tako na primer, neočekivane promene tj. šokovi kod stacionarnih serija izazivaju poremećaje u "sistemu", ali se taj intenzitet gubi i smanjuje tokom vremena. Efekti šoka koji se desio u trenutku t manji su u periodu $t+1$, još manji u $t+2$ i tako redom. Ovo nije slučaj kod nestacionarnih serija, već je eksterni šok na seriju trajan i ne gubi se. Analiza serija koje ne zadovoljavaju uslov stacionarnosti može dovesti do pogrešnih zaključaka o rezultatima statističkog testiranja. U ekonometrijskoj analizi poznat je pojam lažne regresije, koji je rezultat korišćenja nestacionarnih serija u regresionim modelima. Na primer, regresijom dve nestacionarne serije mogu se dobiti veoma visoke vrednosti koeficijenta determinacije, bez obzira na nepostojanje veze između njih. Ocene u takvim modelima su pristrasne, a testovi pogrešni, koeficijent determinacije i vrednosti t-statistike navode na pogrešno zaključivanje o značajnosti modela. Zbog toga da bi se valjano utvrdila zavisnost među vremenskim seijama treba ih prvo svesti na stacionarne. A zatim na stacionarnim serijama ocenjivati modele i formirati prediktivne vrednosti. Dobijene prediktivne vrednosti na stacionarnim serijama pomoću odgovarajućih modela treba vratiti na početni nivo, izvršiti operacije suprotne diferenciranju.
Ako kažemo da serija prati proces $ARIMA(p,k,q)$ to znači da je nakon k diferenciranja nestacionarna serija svedena na stacionarnu koja prati $ARMA(p,q)$ model.

Definicija 2.15 *Serija* $\{y_t\}$ *prati* $ARIMA(p,1,q)$ *model ako* $\{c_t\} = \{y_t - y_{t-1}\}$ *prati slabo-stacionarni* $ARMA(p,q)$ *model.*

Definicija 2.16 *Serija* $\{y_t\}$ *prati* $ARIMA(p,k,q)$ *model ako* $\{c_t\} = \{y_t - y_{t-1}\}$ *prati slabo-stacionarni* $ARMA(p,k-1,q)$ *model.*

Primer 2.1 $\{y_t\} : ARIMA(p,2,q)$
Nakon prvog diferenciranja $\{c_t\} = \{y_t - y_{t-1}\}$*:*$ARIMA(p,1,q)$
Nakon ponovnog diferenciranja $\{s_t\} = \{c_t - c_{t-1}\}$*:*$ARMA(p,q)$
Početnu seriju $\{y_t\}$ *nakon dva diferenciranja smo sveli na stacionarnu* $\{s_t\}$ *i pomoću* $ARMA(p,q)$ *modela formirali prediktivne vrednosti na stacionarnoj seriji* $(\hat{s_{t+1}}, \hat{s_{t+2}}, ..., \hat{s_{t+l}})$. *Međutim nas zanimaju prediktivne vrednosti za početnu seriju* $\{y_t\}$. *Do njih dolazimo na sledeći način:*

$$\hat{s_{t+1}} = \hat{c_{t+1}} - \hat{c_t} = \hat{y_{t+1}} - \hat{y_t} - (\hat{y_t} - \hat{y_{t-1}}) = \hat{y_{t+1}} - 2\hat{y_t} + \hat{y_{t-1}}$$

$$\hat{y_{t+1}} = \hat{s_{t+1}} + 2y_t - y_{t-1}$$

$\hat{y_{t+1}}$ *predstavlja vrednost koju tražimo,*
$\hat{s_{t+1}}$ *imamo iz* $ARMA(p,q)$ *modela,*
$2y_t$ *i* y_{t-1} *su poznate vrednosti.*

Prethodni primer pokazuje kako doći do prediktivnih vrednosti serije $\{y_t\}$ koja nije stacionarna, ali postaje nakon dvostrukog diferenciranja.

2.9 Modeli višedimenzionalnih jednačina

U poslednjih nekoliko decenija ekonomska globalizacija je doprinela jačanju međuzavisnosti među različitim tržištima, stoga treba razmatrati međusobni uticaj tržišta kako bismo bolje razumeli dinamiku globalnih finansija. Pod određenim okolnostima cene na jednom tržištu mogu diktirati cene na drugom, dok pod uticajem drugih okolnosti može biti obrnuto. Za investitora koji poseduje akcije na različitim tržištima bitno je u kom su odnosu ta tržišta. Za izučavanje odnosa među različitim tržištima koristićemo vektorske ili višedimenzionalne vremenske serije. U ekonometrijskoj literaturi, od višedimenzionalnih modela vremenskih serija najzastupljeniji je vektorski autoregresivni model, koji će biti predmet pažnje u nastavku.

2.9.1 Vektorski autoregresivni model (VAR)

VAR modeli se formiraju tako što se sadašnje vrednosti niza varijabli iskažu preko sopstvenih prethodnih vrednosti i prethodnih vrednosti drugih varijabli uključenih u model. Sve varijable u modelu se tretiraju kao endogene [26]. Endogene varijable su one koje su određene drugim varijablama unutar sistema, dok egzogena varijabla utiče na druge unutar sistema, dok na nju druge varijable nemaju uticaja. Izbor broja varijabli u VAR modelu je posebno pitanje. U praksi se teži što manjem broju koraka, ali i malom broju serija. To znači da ovi modeli imaju najčešće dve do tri dimenzije.
Vremenska serija reda k $\mathbf{r}_t = (r_{1t}, ..., r_{kt})$ prati VAR model reda 1 ($VAR(1)$) ako se može zapisati kao

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{r}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t, \tag{2.13}$$

gde je $\boldsymbol{\phi}_0$ k-dimenzionalni vektor, $\boldsymbol{\Phi}$ $k \times k$ matrica, a $\{\boldsymbol{a}_t\}$ niz serijski nekorelisanih slučajnih vektora sa očekivanjem nula i matricom kovarijansi $\boldsymbol{\Sigma}$. Potrebno je da matrica kovarijansi $\boldsymbol{\Sigma}$

bude pozitivno definitna[17], u suprotnom treba redukovati dimenzije vektora $\boldsymbol{r}_t$.
Posmatrajmo model $VAR(1)$ za slučaj $k = 2$ ($\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, r_{2t})^{'}$ i $\boldsymbol{a}_t = (a_{1t}, a_{2t})^{'}$) predstavljen sistemom jednačina

$$r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + a_{1t} \tag{2.14}$$

$$r_{2t} = \phi_{20} + \Phi_{21} r_{1,t-1} + \Phi_{22} r_{2,t-1} + a_{2t}, \tag{2.15}$$

gde je Φ_{ij} elemenat i-te vrste i j-te kolone matrice $\boldsymbol{\Phi}$, a ϕ_{i0} i-ti elemenat vektora $\boldsymbol{\phi}_0$. Posmatrajući prvu jednačinu, koeficijent Φ_{12} predstavlja jačinu linearnog uticaja $r_{2,t-1}$ na r_{1t} uz prisustvo promenljive $r_{1,t-1}$. Odnosno, Φ_{12} predstavlja uslovni efekat promenljive $r_{2,t-1}$ na r_{1t} za dato $r_{1,t-1}$. Ukoliko je $\Phi_{12} = 0$, tada $r_{2,t-1}$ nema uticaja na r_{1t}, nego r_{1t} zavisi samo od sopstvenih prethodnih vrednosti. Slično ako je $\Phi_{21} = 0$ promenljiva r_{2t} ne zavisi od $r_{1,t-1}$, nego samo od sopstvenih prethodnih vrednosti. Posmatrajmo obe jednačine zajedno. Ako je $\Phi_{12} = 0$ i $\Phi_{21} = 0$ onda su promenljive nepovezane. Ukoliko je jedan od ta dva koeficijenta jednak nuli, a drugi različit od nule tada postoji jednosmerna veza ove dve promenljive, tj. jedna promenljiva ima uticaja na drugu, dok obrnuto ne važi. Konačno ako je $\Phi_{12} \neq 0$ i $\Phi_{21} \neq 0$ postoji povratna veza dve serije.

Elementi matrice $\boldsymbol{\Phi}$ mere dinamiku zavisnosti elemenata vektora $\boldsymbol{r}_t$. A obostrani uticaj promenljivih r_{1t} i r_{2t} se može videti u vandijagonalnom elementu σ_{12} matrice $\boldsymbol{\Sigma}$. Ako je $\sigma_{12} = 0$ nema povratne veze između ove dve serije. U ekonometrijskoj literaturi, model dat jednačinom (2.13) naziva se $VAR(1)$ model u redukovanoj formi jer ne pokazuje eksplicitno konkurentsku zavisnost između komponenata serija. Linearnom transformacijom može se dobiti druga, strukturalna forma modela, koja pokazuje uticaj trenutne vrednosti jedne serije na trenutnu vrednost druge serije. Kako je $\boldsymbol{\Sigma}$ pozitivno definitna matrica postoji Čoleski (*engl.* Cholesky) dekompozicija ove matrice. Postoje donja trougaona matrica $\boldsymbol{L}$ sa jedinicama na glavnoj dijagonali i dijagonalna matrica $\boldsymbol{G}$ takve da važi $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{G}\boldsymbol{L}^{'}$. Tada važi i $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}^{'})^{-1}$.
Definišimo $\boldsymbol{b}_t = (b_{1t}, ..., b_{kt})^{'} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_t$. Tada je

$$E(\boldsymbol{b}_t) = \boldsymbol{L}^{-1}E(\boldsymbol{a}_t) = 0, \tag{2.16}$$

$$Cov(\boldsymbol{b}_t) = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}^{-1})^{'} = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{L}^{'})^{-1} = \boldsymbol{G}. \tag{2.17}$$

Pošto je $\boldsymbol{G}$ dijagonalna matrica, elementi vektora $\boldsymbol{b}_t$ su nekorelisani. Ako se jednačina (2.13) pomnoži sa $\boldsymbol{L}^{-1}$ sa leve strane dobija se jednakost

$$\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{r}_{t-1} + \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{a}_t = \boldsymbol{\phi}_0^* + \boldsymbol{\Phi}^*\boldsymbol{r}_{t-1} + \boldsymbol{b}_t, \tag{2.18}$$

gde je $\boldsymbol{\phi}_0^* = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\phi}_0$ k-dimenzionalni vektor, a $\boldsymbol{\Phi}^* = \boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ matrica dimenzije $k \times k$. Zbog specijalne matrične strukture, k-ta vrsta matrice $\boldsymbol{L}^{-1}$ je vektor $(w_{k1}, w_{k2}, ..., w_{k,k-1}, 1)$. Pa je k-ta jednačina modela (2.18)

$$r_{kt} + \sum_{i=1}^{k-1} w_{ki} r_{it} = \phi_{k0}^* + \sum_{i=1}^{k} \phi_{ki}^* r_{i,t-1} + b_{kt}, \tag{2.19}$$

gde je ϕ_{k0}^* k-ti element matrice $\boldsymbol{\phi}_0^*$, a ϕ_{ki}^* element k-te vrste i i-te kolone matrice $\boldsymbol{\Phi}^*$. Kako je b_{kt} nekorelisano sa b_{it} za sve $1 \leq i \leq k-1$, jednačina (2.19) eksplicitno pokazuje linearnu vezu između r_{kt} i r_{it} za sve $1 \leq i \leq k-1$. U ekonometrijskoj literaturi ova jednačina predstavlja strukturalnu jednačinu za r_{kt}.

[17]Simetrična matrica $k \times k$ je pozitivno definitna ukoliko su joj svi karakteristični koreni pozitivni

Nestacionarnost $VAR(1)$ modela

Pretpostavimo da je model $VAR(1)$ slabo stacionaran. Koristeći osobinu $E(\boldsymbol{a}_t) = 0$ očekivanje modela je dato sa

$$E(\boldsymbol{r}_t) = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi} E(\boldsymbol{r}_{t-1}).$$

Zbog pretpostavke o stacionarnosti $E(\boldsymbol{r}_t)$ je nezavisno od vremenskog trenutka t, pa dobijamo

$$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}_t) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\phi}_0,$$

pod pretpostavkom da je $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi})$ nesingularna[18] matrica, a matrica $\boldsymbol{I}$ jedinična dimenzija $k \times k$. Koristeći jednakost $\boldsymbol{\phi}_0 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi})\boldsymbol{\mu}$ $VAR(1)$ model možemo zapisati kao

$$(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{r}_{t-1} - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{a}_t.$$

Neka je $\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{\mu}$ vremenska serija korigovana za očekivanje. Tada $VAR(1)$ model postaje

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \boldsymbol{\Phi}\tilde{\boldsymbol{r}}_{t-1} + \boldsymbol{a}_t.$$

Ponavljanjem istog postupka prethodnu jednačinu možemo zapisati kao

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_t = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{a}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}^2\boldsymbol{a}_{t-2} + \boldsymbol{\Phi}^3\boldsymbol{a}_{t-3} + \dots \tag{2.20}$$

Model (2.20) daje nekoliko karakteristika $VAR(1)$ procesa. Najpre, kako su elementi vektora $\boldsymbol{a}_t$ serijski nekorelisani, sledi da je $Cov(\boldsymbol{a}_t, \boldsymbol{r}_{t-l}) = 0$ za sve $l > 0$. Zbog toga se $\boldsymbol{a}_t$ nazivaju šokovi ili inovacije u trenutku t. Zatim, množenjem izraza sa $\boldsymbol{a}_t'$ i primenom očekivanja dobija se $Cov(\boldsymbol{r}_t, \boldsymbol{a}_t) = \boldsymbol{\Sigma}$. Sledeća karakteristika jeste ta da $\boldsymbol{r}_t$ zavisi od prethodnih vrednosti $\boldsymbol{a}_{t-j}$, a tu zavisnost mere koeficijenti matrice $\boldsymbol{\Phi}$. Da bi ova zavisnost bila smislena $\boldsymbol{\Phi}^j$ mora da konvergira ka nuli kada $j \longrightarrow +\infty$. Ovo znači da svih k karakterističnih korena matrice $\boldsymbol{\Phi}$ mora biti manje od jedan po modulu, u suprotnom serija će eksplodirati. Ovo je ujedno potreban i dovoljan uslov za slabu stacionarnost serije $\boldsymbol{r}_t$, pod uslovom da je matrica $\boldsymbol{\Sigma}$ dobro definisana.

Vektorski $VAR(p)$ model

$VAR(p)$ model je uopštenje $VAR(1)$ modela. Vremenska serija $\boldsymbol{r}_t$ prati $VAR(p)$ model ako zadovoljava jednačinu (2.21)

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{r}_{t-1} + \dots + \boldsymbol{\Phi}_p\boldsymbol{r}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t, \tag{2.21}$$

gde je gde je $\boldsymbol{\phi}_0$ k-dimenzionalni vektor, $\boldsymbol{\Phi}_i$, $i \in \{1, 2, ..., p\}$, $k \times k$ matrica, a $\{\boldsymbol{a}_t\}$ niz serijski nekorelisanih slučajnih vektora sa očekivanjem nula i matricom kovarijansi $\boldsymbol{\Sigma}$.
Koristeći operator unazad B, model $VAR(p)$ možemo zapisati kao

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a}_t,$$

gde je $\boldsymbol{I}$ jedinična matrica dimenzija $k \times k$. Ovako predstavljen model može biti zapisan i u sledećoj formi

$$\boldsymbol{\Phi}(B)\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{a}_t,$$

pri čemu $\boldsymbol{\Phi}(B) = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p$ predstavlja matrični polinom. Ako je $\boldsymbol{r}_t$ slabo stacionarna važi

$$\boldsymbol{\mu} = E(\boldsymbol{r}_t) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Phi}_1 B - \dots - \boldsymbol{\Phi}_p B^p)^{-1}\boldsymbol{\phi}_0 = [\boldsymbol{\Phi}(1)]^{-1}\boldsymbol{\phi}_0,$$

[18]Matrica $\boldsymbol{A}$ dimenzija $k \times k$ je nesingularna ili invertibilna ako postoji matrica $\boldsymbol{B}$ istih dimenzija takva da važi $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_{k \times k}$

pod uslovom da je $\mathbf{\Phi}(1)$ nesingularna matrica.

Prednosti i nedostaci VAR modela
U poređenju sa drugim pristupima u ekonometrijskom modeliranju, posebno u odnosu na jednodimenzionalne modele vremenskih serija neke od prednosti VAR modela dolaze do izražaja:

- U odnosu na jednodimenzionalne autoregresivne modele, VAR modeli su fleksibilniji. Zbog uključivanja drugih promenljivih u model, a ne samo jedne promenljive VAR modeli svojom strukturom omogućavaju da se na bolji način aproksimira ponašanje posmatranih serija.
- Ne mora da se određuje koje varijable su endogene, a koje egzogene- sve varijable se smatraju endogenim. Ovo je vrlo značajna prednost, jer nije uvek lako odrediti koje promenljive tretirati kao egzogene.
- Ocenjivanje nepoznatih koeficijenata u VAR modelu moguće je sprovesti metodom najmanjih kvadrata.
- Predviđanja na osnovu VAR modela su obično bolja nego ona dobijena pomoću nekih kompleksnijih modela [23].

Iako su prednosti VAR modela značajne, ni VAR modeli nisu bez mana:

- U VAR modelu sve varijable moraju da budu stacionarne, pa su transformacije varijabli neophodne, iako se takvim postupkom mogu izgubiti važne informacije. Stvari se komplikuju i kada su serije različitog reda integrisanosti. Ovaj problem se pojednostavljuje u slučaju korišćenja kointegrisanih serija, odnosno $VECM$ modela.
- Broj parametara u modelu je često ogroman, pa ukoliko se u uzorku nalazi mali broj podataka, ocenjivanje velikog broja parametara može dovesti do problema u tačnosti ocena.
- Kako je interpretacija rezultata često komplikovana, obično se zaključci izvode na osnovu testova kauzalnosti.

2.9.2 Određivanje reda VAR modela

Red modela može da se odredi na više načina. Jedan od načina jeste Akaike informacijski kriterijum (Akaike information criterion, AIC) koji ćemo ovde objasniti i koristiti u daljem radu. Formula za izračunavanje vrednosti AIC kriterijuma je sledeća

$$AIC(i) = ln(|\hat{\mathbf{\Sigma}}_i|) + \frac{2k^2 i}{T},$$

gde i predstavlja broj prethodnih vrednosti koje uključujemo u model, $\hat{\mathbf{\Sigma}}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T} \hat{\boldsymbol{a}}_t^{(i)}[\hat{\boldsymbol{a}}_t^{(i)}]'$ uzoračka matrica kovarijansi reziduala, $|\hat{\mathbf{\Sigma}}_i|$ oznaka za determinantu date matrice, T predstavlja veličinu uzorka, a k broj koeficijenata u jednačini. Vektor reziduala definišemo na sledeći način

$$\hat{\boldsymbol{a}}_t^{(i)} = \boldsymbol{r}_t - \hat{\boldsymbol{\phi}}_0^{(i)} - \hat{\mathbf{\Phi}}_1^{(i)}\boldsymbol{r}_{t-1} - \ldots - \hat{\mathbf{\Phi}}_i^{(i)}\boldsymbol{r}_{t-i}$$

i specijalno za $i = 0$ $\hat{\boldsymbol{a}}_t^{(0)} = \boldsymbol{r}_t - \overline{\boldsymbol{r}}$, gde je $\overline{\boldsymbol{r}}$ uzoračka sredina za $\boldsymbol{r}_t$. Za red model biramo onaj za koji je vrednost $AIC(i)$ kriterijuma najniža. Nakon određivanja reda modela ocenjuju se koeficijenti metodom najmanjih kvadrata. Ova metoda je najčešće korišćena jer u slučaju odsustva autokorelacije i u slučaju heteroskedastičnosti daje nepristrasne i konzistentne ocene.

2.9.3 Pojam kointegracije i model sa korekcijom greške

Neke vremenske serije se ponašaju slično, skokovi jednih serija mogu biti praćeni skokovima drugih ili njihovim padovima. Odnosno svaka velika promena u jednoj vremenskoj seriji praćena je nekom promenom u drugoj seriji. Uvođenje pojma kointegracije omogućava da se ove istovremene promene vremenskih serija formalizuju.
Postojanje kointegracije može biti od koristi pri donošenju odluka o strategiji investiranja. Svaki investitor pokušava da umanji sopstveni rizik, ali to se komplikuje sve većom povezanošću različitih tržišta. Kako bi redukovao rizik investitor investira u različita tržišta. Ova tehnika se naziva diverzifikacija portfolija, tj. ukoliko dođe do gubitaka na jednom tržištu, investitor može da kompenzuje te gubitke dobicima na drugom tržištu. Ovo zavisi od trenda kretanja tržišta o čemu govori njihova kointegracijska analiza.
Kao što je već navedeno u radu, korišćenje nestacionarnih vremenskih serija u regresionim modelima može izazvati pojavu lažne regresije. Zbog toga se regresioni modeli ocenjuju transformisanim vrednostima vremenske serije. Ovakav pristup otklanja pojavu lažne regresije, ali i čini nemogućim izvođenje dugoročne ravnotežne veze između zavisne i nezavisne promenljive. Pod pojmom kointegracije se podrazumeva stacionarnost linearne kombinacije individualno nestacionarnih vremenskih serija. Sa ekonomskog stanovišta, dve varijable će biti kointegrisane ukoliko postoji dugoročna ravnotežna veza između njih.

Definicija 2.17 *Dve vremenske serije X_t i Y_t su kointegrisane reda (d, b), $0 < b \leq d$ ($X_t, Y_t \sim CI(d, b)$) ako je red integrisanosti obe serije jednak d i postoji netrivijalna linearna kombinacija ovih serija čiji je red integrisanosti $(d - b)$. Vektor koeficijenata linearne kombinacije $[\alpha_1, \alpha_2]$ naziva se vektor kointegracionih koeficijenata.*

Neka serije X_t i Y_t, prvog reda integrisanosti, prate sledeći model

$$\Delta Y_t = \beta \Delta X_t + \gamma \Delta X_{t-1} + \delta \Delta Y_{t-1} + a_t. \tag{2.22}$$

Ukoliko se utvrdi da između dve serije postoji kointegracijska veza, uvodi se *model sa korekcijom greške* [18]. Objasnićemo ovaj model posmatrajući dve vremenske serije i njihovu kointegracijsku vezu, da bismo bolje razumeli *vekrtorski model sa korekcijom greške (VECM)* koji uključuje više vremenskih serija, a o kom će biti reči u narednom poglavlju.
Ako su vremenske serije X_t i Y_t prvog reda integrisanosti i među sobom kointegrisane vektorom kointegracije $[-\beta^*, 1]$ tada postoji reprezentacija modela sa korekcijom greške data jednačinom (2.23), koja se dobija preformulacijom modela (2.22)

$$\Delta Y_t = \alpha + \beta \Delta X_t + (\delta - 1)(Y_{t-1} - \beta^* X_{t-1}) + a_t. \tag{2.23}$$

Uočavamo da su u modelu (2.23) uključene i promenljive na osnovnom nivou (X_{t-1}, Y_{t-1}) i njihove diferencirane vrednosti $(\Delta X_t, \Delta Y_t)$. Pošto su X_t i Y_t prvog reda integrisanosti, tada su ΔX_t i ΔY_t stacionarne serije. Kako su serije kointegrisane, njihova linearna kombinacija $Y_{t-1} - \beta^* X_{t-1}$ biće stacionarna, prema tome u modelu (2.23) svi regresori, kao i zavisna promenljiva su stacionarni. Dugoročna veza između X_t i Y_t data je izrazom $\delta - 1$, koji je ključan u funkcionisanju datog modela. Ako je δ blisko jedinici, tada je opravdano oceniti model u kome figurišu samo diferencirane vrednosti serija. U opštem slučaju δ je manje od jedinice, pa je model sa samo diferenciranim serijama neadekvatan. Pretpostavimo da promenljiva X_t raste brže nego što je to u saglasnsti sa ravnotežnim stanjem modela. To ima za posledicu da će i zavisna promenljiva Y_t ispasti iz ravnotežne putanje. Međutim kako je $\delta - 1 < 0$ to će prisiliti zavisnu promenljivu da se vrati na dugoročnu putanju u sledećem periodu. Zbog toga se izraz $Y_{t-1} - \beta^* X_{t-1}$ naziva korekcijom greške. Odstupanje vrednosti serija od njihove dugoročne ravnoteže, koriguje se već u sledećem periodu.
Sledećom definicijom predstavićemo kointegrisanost višedimenzionalne vremenske serije.

Definicija 2.18 *Neka je $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, ..., r_{kt})'$ višedimenzionalna vremenska serija čije su komponente vremenske serije koje poseduju d jediničnih korena. Ako postoji vektor $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_k)$ takav da je $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{r}_t = \beta_1 r_{1t} + ... + \beta_k r_{kt}$ vremenska serija koja poseduje d-b jediničnih korena, $0 < b \leq d$, za $\boldsymbol{r}_t$ kažemo da je kointegrisana vremenska serija reda (d,b) i tu klasu vremenskih serija označavamo sa CI(d,b).*

2.9.4 Vektorski model korekcije ravnotežne greške ($VECM$)

Kada se utvrdi da između vremenskih serija postoji jedna ili više kointegracijskih veza, potrebno je VAR model upotpuniti dugoročnim komponentama. Ovako formiran model se naziva vektorski model korekcije ravnotežne greške ($VECM$).
Neka k-dimenzionalna vremenska serija $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, ..., r_{kt})$ prati $VAR(p)$ model

$$\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\Phi}_1\boldsymbol{r}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\Phi}_p\boldsymbol{r}_{t-p} + \boldsymbol{a}_t,$$

gde je $\boldsymbol{a}_t$ Gausovski beli šum, a $\boldsymbol{\mu}_t = \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{\mu}_1 t$, gde su $\boldsymbol{\mu}_0$ i $\boldsymbol{\mu}_1$ k-dimenzionalni vektori konstanti.
Korekcija greške za seriju $\boldsymbol{r}_t$ koja prati $VAR(p)$ proces daje $VECM$ model koji predstavljen jednačinom

$$\Delta\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{r}_{t-1} + \boldsymbol{\Phi}_1^*\Delta\boldsymbol{r}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\Phi}_{p-1}^*\Delta\boldsymbol{r}_{t-p+1} + \boldsymbol{a}_t, \tag{2.24}$$

gde je $\boldsymbol{\Phi}_j^* = -\sum_{i=j+1}^{p}\boldsymbol{\Phi}_i$, $j = 1, 2, ..., p-1$, a $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\Phi}_p + \boldsymbol{\Phi}_{p-1} + ... + \boldsymbol{\Phi}_1 - \boldsymbol{I} = -\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{1})$.
Elementi matrice $\boldsymbol{\alpha}$ se nazivaju koeficjenti prilagođavanja i predstavljaju reakciju serije na odstupanje od dugoročnog ravnotežnog stanja, koje je opisano sistemom jednačina $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{r}_{t-1}$.
Da bi sistem dat jednačinom (2.24) bio dobro definisan $\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{r}_{t-1}$ mora biti stacionarna serija.
Član $\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{r}_{t-1}$ se naziva član korekcije greške i igra ključnu ulogu u funkcionisanju ovog modela i izučavanju kointegracije. O načinu na koji formiramo vektorski model odlučujemo na osnovu ranga matrice $\boldsymbol{\Pi}$:

- $rank(\boldsymbol{\Pi}) = 0$ implicira da je $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}$ i vremenske serije u vektoru $\boldsymbol{r}_t$ nisu kointegrisane. U tom sličaju sistem (2.24) redukujemo na sistem

  $$\Delta\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\Phi}_1^*\Delta\boldsymbol{r}_{t-1} + ... + \boldsymbol{\Phi}_{p-1}\Delta\boldsymbol{r}_{t-p+1} + \boldsymbol{a}_t,$$

  odnosno koristimo $VAR(p-1)$ model na diferenciranim serijama.

- $rank(\boldsymbol{\Pi}) = k$ implicira da su svi karakteristični koreni matrice $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{1})$ različiti od nule i sve vremenske serije u vektoru $\boldsymbol{r}_t$ su stacionarne. Tada nam član korekcije greške nije potreban i formiramo $VAR(p)$ model na serijama na osnovnom nivou (bez diferenciranja).

- $0 < rank(\boldsymbol{\Pi}) = m < k$ implicira da se $\boldsymbol{\Pi}$ može zapisati kao $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}'$, gde su $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$ matrice dimenzija $k \times m$, ranga m ($rank(\boldsymbol{\alpha}) = rank(\boldsymbol{\beta}) = m$). U tom slučaju postoji m linearnih kombinacija promenljivih iz vektora $\boldsymbol{r}_t$, takvih da su te linearne kombinacije stacionarne i predstavljaju korekciju greške u $VECM$ modelu koji se koristi u ovom slučaju.

Da bismo bolje razumeli ponašanje vektorskog modela korekcije greške posmatraćemo dvodimenzionalni model i zapisati ga na malo drugačiji način [15] jednačinama (2.25) i (2.26)

$$\Delta r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11}\Delta r_{1,t-1} + \Phi_{12}\Delta r_{2,t-1} + \lambda_1(r_{1,t-1} - \beta r_{2,t-1}) + a_{1t} \tag{2.25}$$

$$\Delta r_{2t} = \phi_{20} + \Phi_{21}\Delta r_{1,t-1} + \Phi_{22}\Delta r_{2,t-1} + \lambda_2(r_{1,t-1} - \beta r_{2,t-1}) + a_{2t}, \tag{2.26}$$

gde je $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, r_{2t})$ dvodimenzionalna vremenska serija, $\boldsymbol{a}_t = (a_{1t}, a_{2t})$ vektor belog šuma, $\phi_{ij}, i \in \{1, 2\}, j \in \{0, 1, 2\}$ koeficijenti modela, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ koeficijenti korekcije modela i $(1, -\beta)$ vektor kointegracije. Ako je $r_{1,t-1}$ iznad svoje dugoročne ravnoteže u odnosu na $r_{2,t-1}$, onda je izraz koji predstavlja korekciju greške $r_{1,t-1} - \beta r_{2,t-1}$ pozitivan, i pod pretpostavkom da su ostali članovi kostantni, koeficijent korekcije modela λ_1 treba da bude negativan da bi se r_{1t} opet vratila u stanje ravnoteže u trenutku t.

2.9.5 Testiranje kointegracije Johansenovim testom

Od mnogih metoda za testiranje kointegracije među vremenskim serijama najpoznatiji su EG (Engle- Granger)[7] test i Johansenov [14] test kointegracije. EG test pretpostavlja da među varijablama postoji samo jedna kointegracijska relacija i da je samo jedna varijabla endogena, a ostale su egzogene. Ovakav pristup nije adekvatan za testiranje finansijskih vremenskih serija. Stoga ćemo mi u radu koristiti Johansenov test, koji omogućava utvrđivanje broja kointegracionih veza (može biti više od jedne veze) i sve varijable smatra endogenim. Johansenov test se oslanja na testiranje vrednosti ranga matrice $\boldsymbol{\Pi}$ i ocenjivanje vrednosti u matricama $\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\beta}$, kroz proceduru zvanu regresija redukovanog ranga. Treba da znamo broj koraka koji uključujemo u model, kao i koji vid modela koristimo. Test sprovodimo na diferenciranim serijama. Modeli koje možemo koristiti zavise od toga da li uključujemo samo konstantu, ili i konstantu i trend ili ni konstantu, ni trend u kointegracijsku jednačinu i u VAR model. Na osnovu toga, modeli su:

- *Model 1*- nema odsečka ili trenda u kointegracijskoj jednačini ili u VAR modelu. U tom slučaju, nema determinističkih komponenti u podacima ili u kointegracijskoj jednačini. Ovo se retko dešava u praksi.
- *Model 2*- samo konstanta (bez trenda) u kointegracijskoj jednačini, ali nema ni konstante ni trenda u VAR modelu. Ovo je slučaj kada nemamo linearni trend u podacima.
- *Model 3* -konstanta u kointegracijskoj jednačini i VAR modelu, ali bez trenda u oba slučaja.
- *Model 4*- konstanta u kointegracijskoj jednačini i VAR modelu, linearni trend u kointegracijskoj jednačini, ali bez trenda u VAR modelu.
- *Model 5*- konstanta i kvadratni trend u kointegracijskoj jednačini, a konstanta i linearni trend u VAR modelu. Kao i *Model 1*, ovaj model je retko primenjivan u praksi.

Problem jeste i koji model od navedenih odabrati. Mi ćemo u istraživanju koristiti *Model 2*, jer se on najčešće koristi u finansijskim vremenskim serijama. Test statistika koja se koristi u testiranju kointegracije, naziva se statistika traga i bazira se na izračunavanju traga matrice $\boldsymbol{\Pi}$. Trag matrice predstavlja sumu karakterističnih korena matrice. Karakteristični koreni matrice uređeni su po opadajućem redosledu $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > ... > \hat{\lambda}_k$. Iskorišteno je asimptotsko ponašanje $ln(1-x) \sim x$, i konačno test statistika traga prati sledeću formulu

$$\lambda(m) = -T \sum_{i=m+1}^{k} ln(1 - \hat{\lambda}_i),$$

gde su $\hat{\lambda}_i$ ocenjeni karakteristični koreni matrice $\boldsymbol{\Pi}$.
Nulta hipoteza koja se testira H_0: broj kointegracijskih jednačina je i. Dok je alternativna H_1: broj kointegracijskih jednačina je veći od i. Ukoliko je registrovana vrednost test

statistike traga veća od kritične vrednosti, nulta hipoteza se odbacuje. Kritične vrednosti nisu standardne, nego zavise od broja nestacionarnih serija i od modela koji se koristi, ugrađene su u softvere, koji podržavaju ovu metodu testiranja kointegracije [16].

2.9.6 Testiranje Grendžerove kauzalnosti

Grendžerova kauzalnost[12] definiše se na osnovu postojanja zavisnosti jedne varijable, ne samo od njenih sopstvenih prethodnih vrednosti, već i od prethodnih vrednosti drugih varijabli. Drugim rečima, za vremensku seriju X_t kažemo da uzrokuje Y_t u smislu Grendžera ako se buduće vrednosti Y_t mogu predvideti sa većom preciznošću na osnovu prethodnih vrednosti X_t, nego bez njih. Obrnuto, X_t ne uzrokuje Y_t ako prethodno kretanje X_t ne poboljšava kvalitet predviđanja Y_t. Često se termin kauzalnost, odnosno uzročna povezanost, pogrešno koristi za uzročnost u smislu Grendžera, koja je u stvari samo korelacija između sadašnje vrednosti jedne varijable i prethodnih vrednosti neke druge varijable, ali to ne znači nužno da promena jedne varijable izaziva promenu druge. Najpoznatiji test kauzalnosti je Grendžerov test. Grendžerova test statistika definiže se u formi F-testa, upoređujući sume rezidualnih kvadrata modela bez ograničenja i modela sa izostavljenim prethodnim vrednostima testirane varijable.

Neka je $\boldsymbol{r}_t = (r_{1t}, r_{2t})$ dvodimenzionalna vektorska serija, čije su komponente stacionarne vremenske serije i neka prati sledeći model

$$r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + a_{1t} \tag{2.27}$$

$$r_{2t} = \phi_{20} + \Phi_{21} r_{1,t-1} + \Phi_{22} r_{2,t-1} + a_{2t}, \tag{2.28}$$

pod pretpostavkom da su a_{1t} i a_{2t} nekorelisani beli šumovi. Možemo imati sledeće slučajeve:

- U jednačini (2.27) koeficijent Φ_{12} je statistički značajan, dok je u jednačini (2.28) koeficijent Φ_{21} statistički jednak nuli. Ovo znači da promenljiva r_{2t} uzrokuje promenljivu r_{1t}.
- U jednačini (2.27) koeficijent Φ_{12} je statistički jednak nuli, dok je u jednačini (2.28) koeficijent Φ_{21} statistički značajno različit od nule. Ovo znači da promenljiva r_{1t} uzrokuje promenljivu r_{2t}.
- I u jednačini (2.27) koeficijent Φ_{12} je statistički značajan, i u jednačini (2.28) koeficijent Φ_{21} je statistički značajan. U tom slučaju imamo dvosmernu kauzalnu vezu.
- I u jednačini (2.27) koeficijent Φ_{12} je statistički jednak nuli, i u jednačini (2.28) koeficijent Φ_{21} je statistički jednak nuli. U ovom slučaju su promenljive r_{1t} i r_{2t} nezavisne.

Navešćemo pojedinačne korake koji su uključeni u testiranje kauzalnosti.

- Posmatrajmo model dat jednačinama (2.27) i (2.28). Prvi korak podrazumeva ocenu koeficijenata u restiriktivnom modelu

  $$r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + a_{1t}$$

  $$r_{2t} = \phi_{20} + \Phi_{21} r_{1,t-1} + a_{2t}.$$

  Dobijene ocenje koeficijente označimo redom $\hat{\phi}_{10}$, $\hat{\Phi}_{11}$, $\hat{\phi}_{20}$ i $\hat{\Phi}_{21}$, zatim izračunamo restrikovanu sumu kvadrata reziduala za obe jednačine $RSS_{R1} = \sum_{i=1}^{T} \hat{a}_{1t}^2$ i $RSS_{R2} = \sum_{i=1}^{T} \hat{a}_{2t}^2$, gde je $\hat{a}_{1t} = r_{1t} - \hat{\phi}_{10} - \hat{\Phi}_{11} r_{t-1}$ i $\hat{a}_{2t} = r_{2t} - \hat{\phi}_{20} - \hat{\Phi}_{21} r_{t-1}$.

- Sledeći korak porazumeva ocenu koeficijenata nerestriktivnog modela datog jednačinama (2.27) i (2.28). Ocenjeni koeficijenti nerestriktivnog modela su $\tilde{\phi}_{10}, \tilde{\Phi}_{11}, \tilde{\Phi}_{12}\ \tilde{\phi}_{20}$, $\tilde{\Phi}_{21}$ i $\tilde{\Phi}_{22}$. Zatim se računa nerestrikovana suma kvadrata reziduala za obe jednačine- $RSS_{U1} = \sum_{i=1}^{T} \tilde{a}_{1t}^2$ i $RSS_{U2} = \sum_{i=1}^{T} \tilde{a}_{2t}^2$, gde su $\tilde{a}_{1t} = r_{1t} - \tilde{\phi}_{10} - \tilde{\Phi}_{11}r_{t-1} - \tilde{\Phi}_{12}r_{t-2}$ i $\tilde{a}_{2t} = r_{2t} - \tilde{\phi}_{20} - \tilde{\Phi}_{21}r_{t-1}\tilde{\Phi}_{22}r_{t-2}$.

- Potom sledi postavka hipoteza:

  - Posmatrajući prvu jednačinu (2.27) u sistemu
    $H_0 : \Phi_{12} = 0$ (r_{2t} ne uzrokuje r_{1t})
    $H_1 : \Phi_{12} \neq 0$ (r_{2t} uzrokuje r_{1t})
  - Posmatrajući drugu jednačinu (2.28) u sistemu
    $H_0 : \Phi_{21} = 0$ (r_{1t} ne uzrokuje r_{2t})
    $H_1 : \Phi_{21} \neq 0$ (r_{1t} uzrokuje r_{2t})

- U ovom korkaku računa se vrednost test statistike na sledeći način

$$F = \frac{(RSS_R - RSS_U)/m}{RSS_U/(T-k-1)}.$$

  Test statistika prati Fišerovu $F_{m,T-k}$ raspodelu sa k stepeni slobode, pri čemu je m broj serija koje se uključuju u model, ne računajući onu čija sadašnja vrednost predstavlja zavisnu promenljivu (u jednačini (2.27) je $m = 1$, serija r_{2t}), T je veličina uzorka, a $k+1$ ukupan broj koeficijenata u nerestriktivnom modelu (ovde je to $k+1=3$).

- Poslednji korak podrazumeva poređenje vrednosti test statistike i kritične vrednosti za obe jednačine redom. Ukoliko je izračunata vrednost F statistike za prvu jednačinu veća od kritične vredosti, odbacujemo hipotezu H_0 i zaključujemo da r_{2t} uzorkuje r_{1t}. Analogno se izvodi zaključak i za drugu jednačinu.

Testiranje Grendžerove kauzalnosti za VAR modele višeg reda vrši se analogno, kao za prikazan $VAR(1)$ model.

2.9.7 Koeficijent determinacije (R^2)

Koeficijent determinacije nam kazuje koliko su podaci određeni modelom blizu stvarnim podacima. Podaci određeni modelom se od stvarnih podataka razlikuju za vrednost reziduala. Važi veza

$$r_t = \hat{r}_t + \hat{a}_t, \tag{2.29}$$

gde r_t označava stvarnu vrednost, $\hat{r}_t$ vrednost dobijenu pomoću modela, a $\hat{a}_t$ je vrednost reziduala, odnosno vrednost za koju se razlikuju stvarna i vrednost predviđena modelom. Kada se u jednačini (2.29) sa obe strane oduzme aritmetička sredina uzorka $\overline{r}$, dobija se

$$r_t - \overline{r} = \hat{r}_t - \overline{r} + \hat{a}_t.$$

Jednačina (2.30) se dobija kada se izvrši sumiranje po svim vremenskim trenucima u uzorku, kako bi se dobila potpuna mera varijacije u svakom trenutku t, i kada se izvrši kvadriranje, da ne bi bilo problema sa negativnim vrednostima u sumi.

$$\sum_{t=1}^{T}(r_t - \overline{r})^2 = \sum_{t=1}^{T}(\hat{r}_t - \overline{r})^2 + \sum_{t=1}^{T}\hat{a}_t{}^2 \tag{2.30}$$

Izraz na levoj strani jednakosti se označava sa TSS i naziva ukupna varijacija ili totalna suma kvadrata, a izrazi na desnoj strani jednakosti se označavaju sa ESS i RSS i nazivaju suma kvadrata greške regresije i suma kvadrata reziduala, respektivno. Prema tome, jednačina (2.30) se može zapisati kao $TSS = ESS + RSS$. Ovaj izraz podelimo sa TSS i dobijamo

$$1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS}.$$

Izraz

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS}$$

naziva se koeficijent determinacije i pokazuje u kojoj meri je totalna varijacija u uzorku objašnjena modelom, odnosno u kojoj meri model prikazuje stvarno stanje. Mera ukupne varijanse TSS može se posmatrati kao količina varjanse koja postoji pre nego sto je uveden model. RSS meri varijansu koja je ostala neobjašnjena posle uvođenja modela. Zbog toga ESS meri varijansu koja je objašnjena modelom. Koeficijent determinacije uzima vrednosti između nule i jedinice, i što je bliži jedinici model je bolji.
Treba napomenuti da ne znači nužno da je model dobar ako je koeficijent determinacije blizak jedinici, ili da je model loš ukoliko je koeficijent determinacije blizak nuli. U slučajevima pojave lažne regresije u modelu, dešava se da je koeficijent determinacije visok, a model ne opisuje dobro stvarno stanje. Jedan od razloga može biti formiranje modela pomoću nestacionarnih serija. Može se desiti i da je koeficijent determinacije blizak nuli, ali da model nije loš. Razlog ovakve pojave može biti mali broj promenljivih uključenih u model ili linearnost modela. Problem sa koeficijentom determinacije je taj što se on povećava uvođenjem novih varijabli u model. Stoga se uvodi prilagođeni koeficijent determinacije u kom važnu ulogu igra i broj promenljivih uključenih u model. Prilagođeni koeficijent determinacije prati sledeću formulu

$$AdjR^2 = 1 - \frac{RSS/(T-k-1)}{TSS/(T-1)},$$

gde je T veličina uzorka, a $k+1$ broj promenljivih u modelu. Prilagođeni koeficijent determinacije ne mora da bude veći od nule. A važi isto kao i za običan koeficijent determinacije, što je koeficijent veći, to je model bolji.

2.9.8 Osobine reziduala

Formiranje modela vremenskih serija predstavlja iterativan proces. Pre svega potrebno je identifikovati model, zatim oceniti koeficijente modela, izvršiti redukciju modela ukoliko je to potrebno, a zatim ispitati adekvatnost modela. U ekonometrijskoj literaturi model se smatra adekvatnim ukoliko reziduali zadovoljavaju sledeće

- Ne postoji serijska autokorelacija među rezidualima,
- Ne postoji heteroskedastičnost među rezidualima i
- Reziduali su normalno raspodeljeni.

Testiranje odsustva autokorelacije među rezidualima

Postoji više pristupa i različitih testova za proveru odsustva autokorelacije među rezidualima. Za testiranje odsustva autokorelacije među rezidualima moguće je koristiti *Ljung- Box* statsistiku, koja je objašnjena u prethodnom delu rada. A ovde ćemo bliže objasniti LM [3],

[11] test koji se zasniva na principu Lagranžovih množitelja i testira postojanje autokorelacije višeg reda među rezidualima[22]. Posmatrajmo regresijsku jednačinu

$$r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + a_{1t}, t = 1, 2, ..., T \tag{2.31}$$

i

$a_{1t} = \sum_{s=1}^{h} \rho_s a_{1,t-s} + e_t, e_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_e^2)$.

Nulta hipoteza je $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_h = 0$ i glasi da među rezidualima nema autokorelacije. Alternativna hipoteza je $H_1 : \exists i, \rho_i \neq 0$. Kako bismo testirali nultu hipotezu prvo treba oceniti koeficijente modela i izračunati reziduale. Neka su ocenjeni koeficijenti u jednačini (2.31) sledeći $\hat{\phi}_{10}$, $\hat{\Phi}_{11}$ i $\hat{\Phi}_{12}$, tada serija reziduala prati formulu

$$\hat{a}_{1t} = r_{1t} - \hat{\phi}_{10} - \hat{\Phi}_{11} r_{1,t-1} - \hat{\Phi}_{12} r_{2,t-1}.$$

Zatim treba da ocenimo model

$$\hat{a}_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + \sum_{s=1}^{h} \rho_s \hat{a}_{1,t-s} + \eta_t.$$

Koristi se χ^2 test sa h stepeni slobode. Ukoliko je registrovana p vrednost manja od 0.05 odbacujemo nultu hipotezu. U suprotnom je prihvatamo i izvodimo zaključak da za red h nema autokorelacije među rezidualima. Za red h se uzima ista vrednost kao i za red modela. Odsustvo autokorelacije među rezidualima daje mogućnost dobijanja nepristrasnih i efikasnih ocena metodom najmanjih kvadrata, dok prisustvo autokorelacije narušava efikasnost ocene i utiče na odluke o statističkoj značajnosti koeficijenata.

Testiranje heteroskedastičnosti među rezidualima

Heteroskedastičnost predstavlja različitu vrednost varijanse reziduala u pojedninim opservacijama. Nasuprot tome je homoskedastičnost, odnosno varijansa reziduala je ista za sve opservacije. Najviše korišćen test za ispitivanje heteroskedastičnosti među rezidualima je BP (Breusch-Pagan)[4] test, koji se zasniva na regresiji koja se formira nad kvadratima reziduala i svim ostalim nezavisnim varijablama u modelu. Posmatrajmo jednačinu

$$r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + a_{1t}, t = 1, 2, ..., T. \tag{2.32}$$

Istim postupkom kao i malopre, ocenjujemo koeficijente datog modela i računamo seriju reziduala $\{\hat{a}_t\}$. Zatim se vrši ocena koeficijenata jednačine

$$\hat{a}_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11} r_{1,t-1} + \Phi_{12} r_{2,t-1} + \eta_t.$$

Potom se računa vrednost χ^2 statistike sa dva stepena slobode, na sledeći način

$$\chi^2(2) = T R^2_{\hat{a}_{1t}},$$

gde je sa $R^2_{\hat{a}_{1t}}$ označen koeficijent determinacije za ocenjeni model predstavljen jednačinom (2.32), a sa T veličina uzorka. Nulta hipoteza je $H_0 : \phi_{10} = \Phi_{11} = \Phi_{12} = 0$ i glasi da postoji homoskedastičnost u seriji reziduala. Ukoliko je registrovana p vrednost manja od 0.05 odbacujemo nultu hipotezu sa nivoom značajnosti od 5% i zaključujemo da postoji heteroskedastičnost u seriji reziduala. Prisustvo heteroskedastičnosti za posledicu ima neadekvatne intervale poverenja, pa se mogu koeficijenti prihvatiti kao statistički značajni iako to nisu.

Testiranje činjenice da li reziduali prate normalnu raspodelu vrši se uobičajenim testovima za normalnost, recimo JB testom. Međutim isti zaključak se može izvesti na osnovu deskriptivne analize rezidula, posmatrajući koeficijent asimetrije i spljoštenosti.

2.9.9 Testiranje stabilnosti modela

Stabilnost modela je svojstvo modela da se vrati u ravnotežno stanje, nakon prestanka delovanja uzorka koji je poremetio ravnotežu, odnosno uticaji šokova moraju opadati tokom vremena i ne smeju se gomilati. Ako je model nestabilan on nije dobra reprezentacija ponašanja vremenske serije tokom vremena i ne možemo očekivati da će model dati dobre prediktivne vrednosti.
Nakon ocenjivanja modela potrebno je formirati jednokoračne predikcije i izračunati grešku predviđanja. Greška predviđanja $\hat{e}_{1t,s}(1)$ je razlika stvarne vrednosti serije $r_{1,t+1}$ i jednokoračne prediktivne vrednosti $\hat{r}_{1t,s}(1)$ dobijene statičkom metodom. Ukoliko je model stabilan, formirane prediktivne vrednosti će biti dobre i suma grešaka predviđanja biće bliska nuli. Ovo se može ispitati grafičkim prikazom sume grešaka predviđanja. Međutim, potreban je i formalni statistički test koji će ispitati stabilnost modela. Bliže ćemo objasniti $CUSUM$[5] test stabilnosti modela. $CUSUM_t$ vrednost je definisana kao

$$CUSUM_t = \sum_{i=k+1}^{t} \frac{\hat{e}_{1i,s}(1)}{\hat{\sigma}_e}, t = k+1, ..., T,$$

gde je k trenutak kada se prvi put formira prediktivna vrednost i greška predviđanja, T je veličina uzorka, a $\hat{\sigma}_e$ ocenjena standardna devijacija grešaka predviđanja. Pošto je suma kumulativna, potrebno je iscrtati vrednosti sume u zavisnosti od vremenskog trenutka t, da bi se videlo kako se reziduali kreću. Iscrtavaju se još i granice značajnosti modela. Granica za nivo značajnosti od 5% se dobija kada se povežu tačke $[k, \pm - 0.948\sqrt{(T-k)}]$ i $[T, \pm 3 \times 0.948\sqrt{(T-k)}]$. Ukoliko se vrednosti $CUSUM_t$ kreću van granica značajnosti model je nestabilan. Period za koji proveravamo stabilnost jeste onaj za koji smo formirali model.

2.9.10 Formiranje prediktivnih vrednosti na osnovu $VECM$ modela

Posmatrajmo $VECM$ model

$$\Delta r_{1t} = \phi_{10} + \Phi_{11}\Delta r_{1,t-1} + \Phi_{12}\Delta r_{2,t-1} + \lambda_1(r_{1,t-1} - \beta r_{2,t-1}) + a_{1t} \tag{2.33}$$

$$\Delta r_{2t} = \phi_{20} + \Phi_{21}\Delta r_{1,t-1} + \Phi_{22}\Delta r_{2,t-1} + \lambda_2(r_{1,t-1} - \beta r_{2,t-1}) + a_{2t}. \tag{2.34}$$

Ukoliko raspišemo vrednosti $\Delta r_{1t}, \Delta r_{2t}, \Delta r_{1,t-1}, \Delta r_{2,t-1}$ dobićemo sledeći sistem

$$r_{1t} - r_{1,t-1} = \phi_{10} + \Phi_{11}(r_{1,t-1} - r_{1,t-2}) + \Phi_{12}(r_{2,t-1} - r_{2,t-2}) + \lambda_1(r_{1,t-1} - \beta r_{2,t-1}) + a_{1t}$$

$$r_{2t} - r_{2,t-1} = \phi_{20} + \Phi_{21}(r_{1,t-1} - r_{1,t-2}) + \Phi_{22}(r_{2,t-1} - r_{2,t-2}) + \lambda_2(r_{1,t-1} - \beta r_{2,t-1}) + a_{2t}.$$

Pretpostavimo da se nalazimo u trenutku t i da nam je poznata istorija do trenutka t i zanima nas šta se dešava u narednom trenutku $t+1$. Jednokoračna predikcija na osnovu $VECM$ modela je

$$\hat{r}_{1t}(1) = E(r_{1,t+1}|F_t) = r_{1t} + \phi_{10} + \Phi_{11}(r_{1t} - r_{1,t-1}) + \Phi_{12}(r_{2t} - r_{2,t-1}) + \lambda_1(r_{1t} - \beta r_{2t}),$$

$$\hat{r}_{2t}(1) = E(r_{2,t+1}|F_t) = r_{2t} + \phi_{10} + \Phi_{11}(r_{1t} - r_{1,t-1}) + \Phi_{12}(r_{2t} - r_{2,t-1}) + \lambda_2(r_{1t} - \beta r_{2t}).$$

U slučaju jednokoračnih predikcija stvarna i prediktivna vrednost se razlikuju za vrednost šuma. Još jedna specifična stvar za jednokoračne predikcije jeste ta što su formirane prediktivne vrednosti statičkom i dinamičkom metodom jednake.
Prediktivne vrednosti za l korak dobijene statičkom metodom su

$$\hat{r}_{1t}(l) = E(r_{1,t+l}|F_t + l - 1),$$

$\hat{r}_{1t}(l) = r_{1,t+l-1} + \phi_{10} + \Phi_{11}(r_{1,t+l-1} - r_{1,t+l-2}) + \Phi_{12}(r_{2,t+l-1} - r_{2,t+l-2}) + \lambda_1(r_{1,t+l-1} - \beta r_{2,t+l-1}).$

i

$$\hat{r}_{2t}(l) = E(r_{2,t+l}|F_t + l - 1).$$

$\hat{r}_{2t}(l) = r_{2,t+l-1} + \phi_{10} + \Phi_{11}(r_{1,t+l-1} - r_{1,t+l-2}) + \Phi_{12}(r_{2,t+l-1} - r_{2,t+l-2}) + \lambda_2(r_{1,t+l-1} - \beta r_{2,t+l-1}).$

Kod dinamičkog metoda predikcije za l koraka unapred su

$$\hat{r}_{1t}(l) = E(r_{1,t+l}|F_t),$$

$\hat{r}_{1t}(l) = \hat{r}_{1,t}(l-1)+\phi_{10}+\Phi_{11}(\hat{r}_{1,t}(l-1)-\hat{r}_{1,t}(l-2))+\Phi_{12}(\hat{r}_{2,t}(l-1)-\hat{r}_{2,t}(l-2))+\lambda_1(\hat{r}_{1,t}(l-1)-\beta\hat{r}_{2,t}(l-1)).$

i

$$\hat{r}_{2t}(l) = E(r_{2,t+l}|F_t),$$

$\hat{r}_{2t}(l) = \hat{r}_{2,t}(l-1)+\phi_{10}+\Phi_{11}(\hat{r}_{1,t}(l-1)-\hat{r}_{1,t}(l-2))+\Phi_{12}(\hat{r}_{2,t}(l-1)-\hat{r}_{2,t}(l-2))+\lambda_2(\hat{r}_{1,t}(l-1)-\beta\hat{r}_{2,t}(l-1)).$

Budući da se kod dinamičkog metoda formiranja prediktivnih vrednosti koriste prethodne predikcije, iz koraka u korak dolazi do gomilanja greške.
Ovde je prikazano kako se dolazi do prediktivnih vrednosti za najprostiji vektorski model korekcije greške reda jedan. Postupak se analogno uopštava i na modele višeg reda.

2.9.11 Greške predviđanja

Greške predviđanja nam govore koliko je model pomoću koga smo formirali prediktivne vrednosti dobar. Što su greške predviđanja bliže nuli, model je bolji. Kako model pravimo na 80% uzorka, a za preostalih 20% formiramo prediktivne vrednosti, upoređujući stvarne vrednosti i prediktivne vrednosti iz uzorka dolazimo do grešaka predviđanja.
Neka je T veličina uzorka, odnosno serije. Na uzorku veličine $T - h$ se vrši ocenjivanje modela, a za trenutke $\{T - h + 1, T - h + 2, ..., T\}$ se formiraju prediktivne vrednosti. Neka je $\{\hat{e}_{1t}(1), \hat{e}_{1t}(2), ..., \hat{e}_{1t}(h)\}$ niz grešaka predviđanja dobijen za model predstavljen jednačinama (2.33) i (2.34).
Standardna devijacija grešaka predviđanja ($RMSE$) je kvadratni koren iz prosečne sume kvadrata odstupanja i prati formulu

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^{h} \frac{\hat{e}_{1t}^2(i)}{h}}.$$

Prosečna apsolutna greška (MAE) predstavlja prosečnu sumu apsolutnih odstupanja i predstavljena je sledećom jednakošću

$$MAE = \sum_{i=1}^{h} \frac{|\hat{e}_{1t}(i)|}{h}.$$

Prosečna apsolutna procentualna greška ($MAPE$) predstavlja prosečno apsolutno procentualno odstupanje i prati jednakost

$$MAPE = \frac{100}{h} \sum_{i=1}^{h} \frac{|\hat{e}_{1t}(i)|}{|r_{1,t+i}|}.$$

Tejlov koeficijent nejednakosti (U) predstavljen je formulom

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \hat{e}_{1t}^2(i)}}{\sqrt{\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} r_{1,t+i}^2} + \sqrt{\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h} \hat{r}_{1t}^2(i)}}.$$

Vrednost Tejlovog koeficijenta uzima vrednosti između nula i jedan, i što je bliži jedinici, model je bolji. Ovaj koeficijent se može razložiti na tri vrednosti: meru pristrasnosti (BP), meru disperzije (VP) i meru kovarijanse (CP). Mera pristrasnosti meri grešku koja dolazi iz modela, i iz tog razloga vrednost mere pristrasnosti treba da bude što bliže nuli. Mera disperzije pokazuje u kojoj meri je varijansa u stvarnim vrednostima ispraćena varijansom u prediktivnim vrednostima. Ako je ova vrednost velika, to znači da postoje velike fluktuacije u stvarnim vrednostima, ali da prediktivne vrednosti nisu uspele da isprate ove fluktuacije. Mera kovarijanse meri nesistematsku grešku, koja se ne može kontrolisati. Ukoliko je ova vrednost velika, tj. ukoliko ima najveći udeo u Tejlovom koeficijentu, model smatramo dobrim.

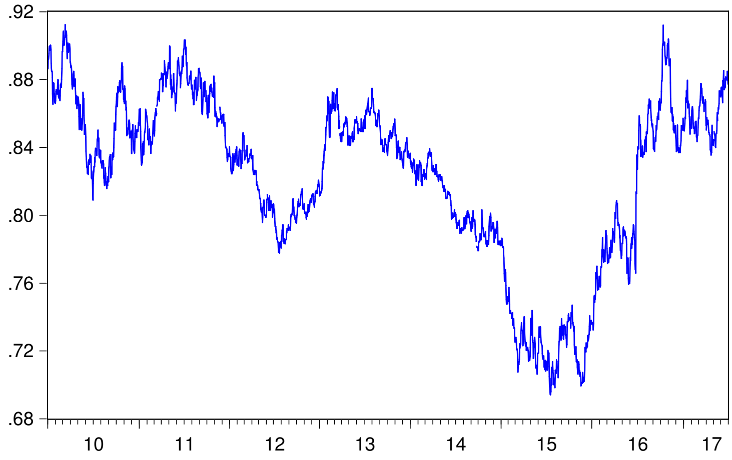
3 Istraživanje

U ovom poglavlju ćemo posmatrati podatke o sledećim deviznim kursevima: evro-britanska funta (EUR/GDB), američki dolar-britanska funta (USD/GBP) i švajcarski franak-britanska funta (CHF/GBP) i to za period od 1. januara 2010. do 30. juna 2017. godine[19]. Pratićemo fluktuacije deviznog kursa kroz istoriju, vršiti ekonometrijsku analizu podataka i ocenjivati modele pomoću kojih ćemo formirati prediktivne vrednosti. Iako veliki broj stručnih radova koristi mesečne podatke, mi ćemo koristiti podatke na dnevnom nivou. Ovako smo obezbedili veći broj podataka što je pogodno prilikom ocenjivanja modela.
Posmatrajući kretanje datih deviznih kurseva u prethodnih sedam godina, sagledaćemo kako je britanska funta slabila i jačala pod uticajem raznih spoljašnjih i unutrašnjih faktora. Ispratićemo uticaj parlamentarnih izbora u Velikoj Britaniji, stope nezaposlenosti, planova za vraćanje javnog duga, odnosa Velike Britanije i Evropske unije na fluktuacije vrednosti funte. Grafički ćemo predstaviti fluktuacije pomenutih deviznih kurseva za navedeni period i ispitati statističke osobine datih vremenskih serija.
Kako bismo mogli formirati odgovarajuće modele, ispitaćemo stacionarnost serija. Ukoliko se pokaže da serije nisu stacionarne, diferenciraćemo ih, pa sa diferencama serija formirati jednodimenzionalni $ARIMA$ model i višedimenzionalni VAR model. Za formiranje modela nećemo koristiti celu vremensku seriju, nego samo podatke pre Brexit-a, od 1. januara 2010. do 31. maja 2016. godine. Ovaj period ćemo podeliti na dva potperioda, gde prvi potperiod obuhvata podatke od 1. januara 2010. do 31. decembra 2014. godine, a drugi potperiod podatke od 1. januara 2015. do 31. maja 2016. godine. Na prvom potperiodu vršićemo ocenjivanje modela, dok ćemo za drugi formirati predikcije. Razlog zbog kog nećemo u model uključti podatke posle Brexit-a, leži u činjenici, da je ovakakav događaj totalno oslabio britansku funtu i da jednostavno model ne može verno da isprati takve fluktuacije. Nakon ocenjivanja modela ispitaćemo njihovu adekvatnost preko reziduala, zatim dati predikcije i ispitati stabilnost modela.
Na kraju istraživanja ukratko ćemo opisati šta bi bilo da je cela vremenska serija uključena u ocenjivanje modela i formiranje prediktivnih vrednosti, uključujući i podatke posle Brexit-a.

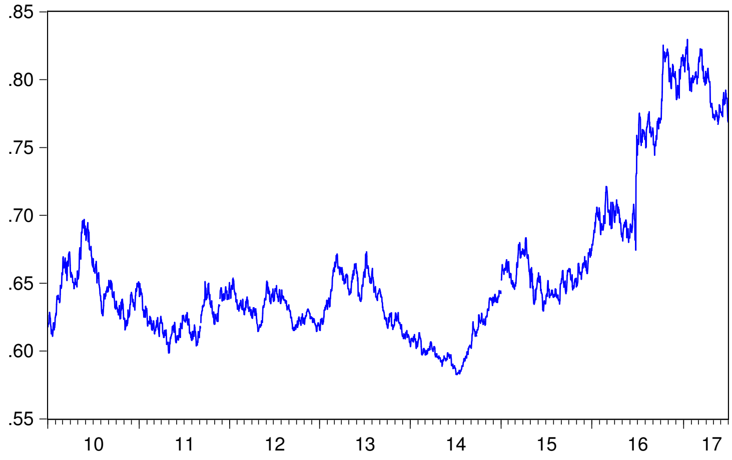
3.1 Grafički prikaz i fluktuacije deviznog kursa

Grafici 3.1, 3.2 i 3.3 nam daju vizuelnu predstavu kretanja deviznih kurseva EUR/GBP, USD/GBP i CHF/GBP, respektivno. Posmatrajući ovakav grafički prikaz, možemo zaključiti da su sve tri serije nestacionarne, što ćemo dijagnostikovati i statističkim testovima.
Posmatrajući grafički prikaz deviznih kurseva EUR/GBP, USD/GBP i CHF/GBP i prateći podatke o njima, osvrnućemo se na jačanje i slabljenje britanske funte prema evru, američkom dolaru i švajcarskom franku u prethodnih sedam godina.
Krenućemo od odnosa EUR/GBP. Posmatrajući grafik 3.1 vidimo da ovaj devizni kurs konstantno fluktuira. Ovo nije začuđujuće, budući da razlog fluktuacija možemo pronaći u odnosu Velike Britanije i Evropske Unije, zatim u lokalnim dešavanjima u Velikoj Britaniji (padom/rastom stope nezaposlenosti, padom/rastom kamatne stope). Uočavamo da britanska funta jača u odnosu na evro u prvoj polovini 2010. godine, međutim u drugoj polovini dolazi do slabljena funte. Otprilike sredinom 2011. počinje jačanje funte, koje traje do sredine 2012. godine. Ovaj rast vrednosti funte nije konstantan, praćen je manjim fluktuacijama. Zatim funta počinje da slabi. Veliki pad u kratkom roku zabeležen je početkom 2013. godine. Potom, krajem 2014. i početkom 2015. vrednost funte dosta jača u odnosu na evro. Tokom

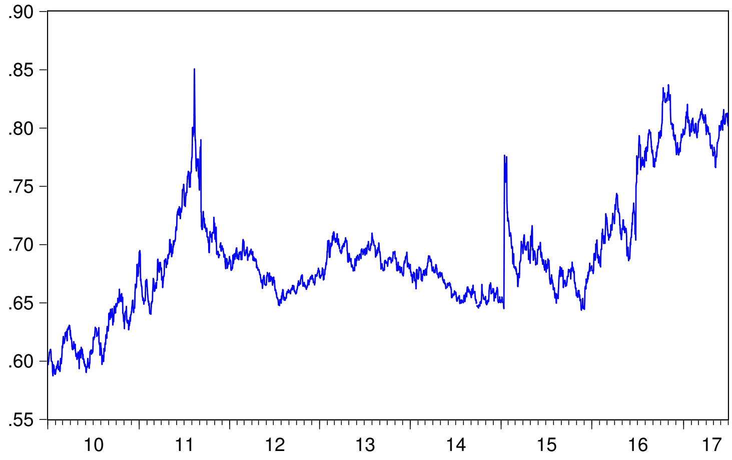
[19]Podaci o deviznim kursevima su preuzeti sa sajta *www.ofx.com*



Grafik 3.1: *Devizni kurs EUR/GBP*



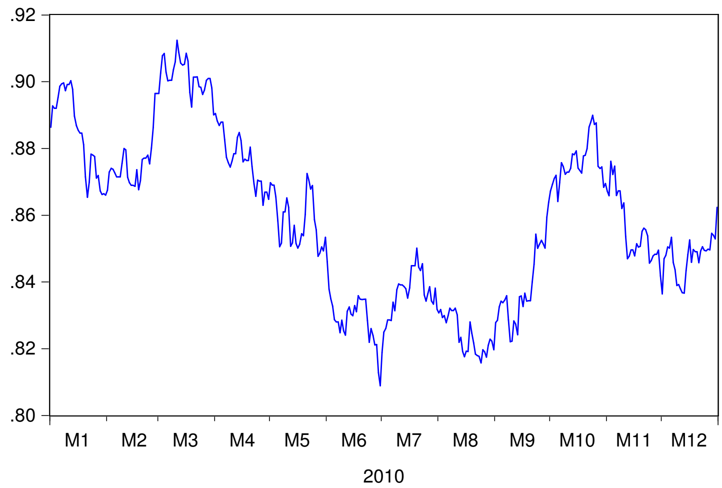
Grafik 3.2: *Devizni kurs USD/GBP*



Grafik 3.3: *Devizni kurs CHF/GBP*

2016. godine funta slabi, i to je u junu zabeležen najveći jednodnevni pad.

Fluktuacije deviznog kursa evro-britanska funta 2010. godine, između ostalog možemo pripisati održavanju parlamentarnih izbora u Velikoj Britaniji[30]. Ovi izbori su tada smatrani istorijskim. Decenijama pre ovoga izbori u Velikoj Britaniji su bili trka između dve vodeće patije: laburista i konzervativaca. Posle predizborne kampanje, liberal demoktare su pomrsile račune vodećim partijama i ušle u trku sa njima, što označava kraj dvopartijskog sistema i prouzrokuje neizvesnost za ishod na izborima. Teška ekonomska situacija u Velikoj Bitaniji izazvana Svetskom ekonomskom krizom, zatim velikim budžetskim deficitom[20] utiče na politiku i ekonomiju zemlje, što prouzrokuje fluktuacije vrednosti funte. U aprilu se beleži pad stope nezaposlenosti, što mnogi povezuju sa jačanjem funte u tom periodu. Pomenuti izbori održani su 6. maja 2010. i tada je vrednost britanske funte oslabila u odnosu na evro. Treba napomenuti da je 4. juna 2010. godine vrednost evra pala u odnosu na američki dolar i dostigla najnižu vrednost za tada poslednje četiri godine. To je uzrokovalo i pad britanske funte tada, u odnosu na evro. Primećuje se značajno slabljenje britanske funte u odnosu na evro u oktobru 2010. godine. Ovo se može povezati sa tim što je vlada Velike Britanije najavila smanjenje javnih troškova i uvođenje drastičnih mera petogodišnje štednje, kao i povećanje poreza. Tokom ovog perioda bez posla u javnom sektoru je ostalo 500 000 radnika, pa se stopa nezaposlenosti povećala, što je uzrokovalo pad vrednosti britanske funte u odnosu na evro. Početkom novembra 2010. godine evro je skočio u odnosu na dolar, što je prouzrokovalo jačanje britanske funte u odnosu na evro. Grafički ćemo predstaviti devizni kurs EUR/GBP za 2010. godinu grafikom 3.4.

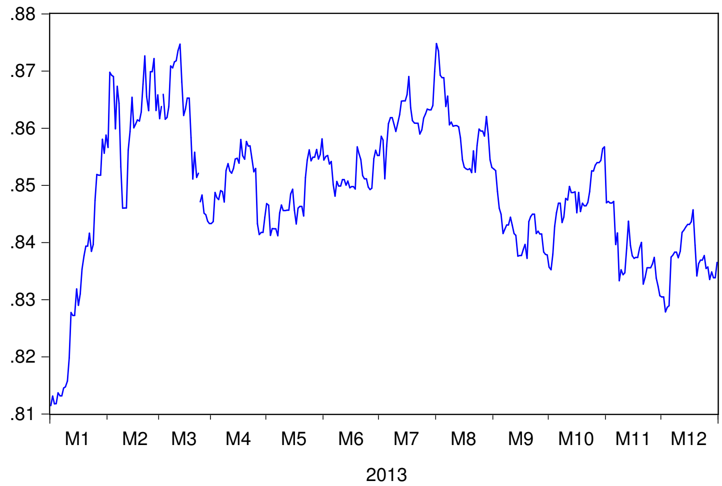


Grafik 3.4: *Devizni kurs EUR/GBP 2010. godine*

U 2012. godini uočava se zanimljiva situacija, britanska funta jača u odnosu na evro sve do jula, a nakon toga sledi pad vrednosti funte. Svakog dana u Londonu u 11h se odlučuje o vrednosti novca. Ukoliko se to ne uradi na osnovu realnih odlika privrede, može doći do prevara velikih razmera. Barkliz (*engl.* Barclays) banka treća po veličini u Velikoj Britaniji,

[20]Budžetski suficit i budžetski deficit nastaju usled neravnoteže između ukupnih prihoda i primanja s jedne strane i ukupnih rashoda i izdataka budžeta države, pokrajine ili jedinice lokalne samouprave, s druge strane. Budžetski deficit nastaje kada su rashodi i izdaci veći od prihoda i primanja. To zapravo znači da država ili drugi nivo vlasti nisu u mogućnosti da obezbede dovoljno novca za finansiranje planiranih rashoda i izdataka.

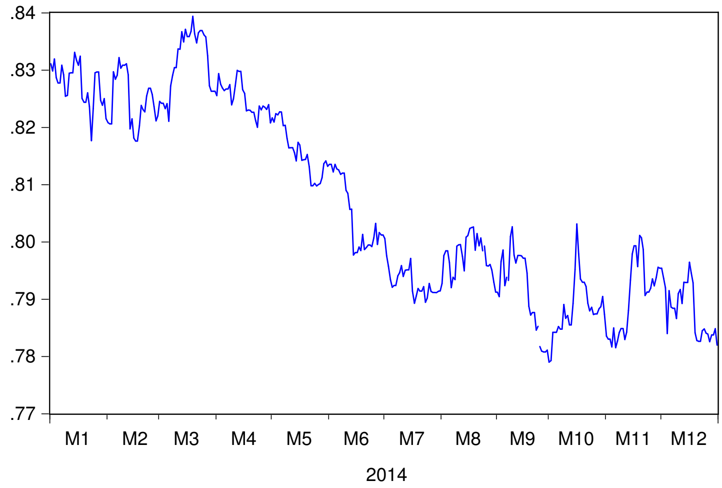
2012. godine analizom Univerziteta u Cirihu proglašena je za najuticajniji koncern[21] svetske privrede. Britanska finansijska kontrola i ministarstvo pravde, jula 2012. godine, kaznili su ovu banku jer je manipulisala takozvanim Liborom[22][29]. Od Libor kamatne stope zavise i finansijsko tržište i privreda zone u kojoj se koristi britanska funta. Ona se određuje svakog dana na osnovu informacija 16 najvećih banaka i trebalo bi da bude usklađena sa realnim uslovima na tržištu. U ovoj prevari su pored još britanskih učestvovale i neke svetske banke. Ovo je izazvalo nepoverenje u privredu i ekonomiju Velike Britanije, pa se čini da razlozi za slabljenje vrednosti britanske funte leže u ovom događaju. U ovom periodu, kada je funta prestala da jača i počela da slabi, u Londonu su održane i Olimpijske igre, od 27. jula do 12. avgusta 2012. godine. Organizacija Olimpijskih igara koštala je mnogo Veliku Britaniju. Time je poremećena planirana štednja i planirano vraćanje javnog duga[27]. Tako da je i ovo imalo uticaja na pad vrednosti britanske funte u odnosu na evro. Ova promena kretanja vredosti britanske funte jasno se uočava i na grafiku 3.1.
Na grafiku 3.5 grafički je predstavljen devizni kurs EUR/GBP za 2013. godinu. Možemo uočiti da je vrednost britanske funta drastično oslabila u odnosu na evro na samom početku 2013. godine. Devizni kurs EUR/GBP 1. januara 2013. godine, iznosio je 0.811455, a nakon mesec i po dana, tačnije 13. marta iste godine iznosio je 0.874719. Funta je oslabila u odnosu na evro za mesec i po dana za 7.8%. Uzrok ovakvog slabljenja vrednosti funte možemo naći u tome što je agencija Mudis (*engl.* Moody's)[23] snizila kreditni rejting[24] Velike Britanije sa najvišeg AAA na stepen niže AA1[1]. Mudis je tada saopštio da je smanjenje britanskog rejtinga rezultat slabih izgleda za ekonomski rast, što slabo utiče na vladinu strategiju za smanjenje javnog duga i da daljih promena rejtinga neće biti u narednih godinu dana. To je prvi put da je Velika Britanija izgubila vrhunski rejting koji je imala od 1978. godine.



Grafik 3.5: *Devizni kurs EUR/GBP 2013. godine*

[21]Nastaje udruživanjem većeg broja firmi ili preduzeća, obično iste privredne grane.
[22]Londonska međubankarska stopa (*engl.* London Interbank Offered Rate) predstavlja dnevnu referentnu kamatnu stopu po kojoj banke jedna drugoj nude novac na londonskom međubankarskom tržištu.
[23]Američka kompanija koja se bavi međunarodnim finansijskim istraživanjima o obveznicama koje izdaju državni i komercijalni subjekti. Ova agencija, zajedno sa "Standard & Poor's" i "Fitch Group" smatra se jednom od najvećih agencija za kreditni rejting.
[24]Zajednički naziv za kriterijume na osnovu kojih se određuje sposobnost fizičkog ili pravnog lica da vraća kredit.

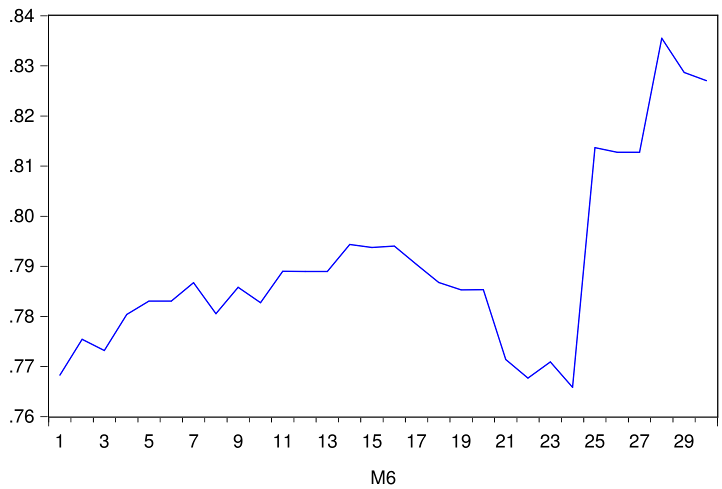
Devizni kurs EUR/GBP 1. januara 2014. godine, je iznosio 0.831095, dok je na kraju godine, 31. decembra jedan evro vredeo 0.781963 funti. Ovo znači da je britanska funta ojačala u odnosu na evro za 5.91%, posmatrajući početak i kraj godine. Rast vrednosti funte u odnosu na evro može se videti i na grafiku 3.6. Uočavamo da rast vrednosti funte u odnosu na evro počinje otprilike krajem marta i praćen manjim fluktuacijama traje do oktobra. Objavljivani mesečni podaci o stopi nezaposlenosti su pokazali da se ona smanjuje, što je imalo uticaja na rast vrednosti funte. Funta je imala tendenciju rasta i zbog očekivanja investitora da bi Centralna banka Ujedinjenog Kraljevstva mogla započeti sa zaoštravanjem monetarne politike pre nego što je to prvobitno planirano. Centralna banka Ujedinjenog Kraljevstva odlučuje o kamatnim stopama na mesečnom nivou. Generalno gledano, kamatna stopa je obično već procenjena od strane tržišta i pre njenog zvaničnog objavljivanja. Zaoštravanje monetarne politike, između ostalog, podrazumeva rast kamatne stope, koji za posledicu obično ima rast vrednosti valute. U Škotskoj je 18. septembra 2014. godine održan referendum o nezavisnosti od Ujedinjenog Kraljevstva Velike Britanije i Severne Irske[2]. Nakon održanog referenduma 55% glasača je bilo za ostanak Škotske u Ujedinjenom Kraljevstvu. Nakon što su rano ujutru 19. septembra objavljeni rezultati referenduma, funta je porasla na dvogodišnji maksimum prema evru. Jula 2012. godine funta je bila u ovom odnosu prema evru. Zanimljiva situacija uočena je pre referenduma. Sprovođenjem anketa nedelju dana pre referenduma moglo se doći do zaključka da je većina stanovnika Škotske za nezavisnot, što je izazvalo u tom periodu mali pad u vrednosti funte prema evru. Međutim, referendum je dao drugačije rezultate.



Grafik 3.6: *Devizni kurs EUR/GBP 2014. godine*

Posmatrajući grafik 3.1 vidimo da je britanska funta u odnosu na evro najjača bila tokom 2015. godine. Naravno i tada su postojale fluktuacije u deviznom kursu EUR/GBP. Britanska funta našla se u raskoraku između dolara i evra u martu 2015. godine. Ovo je doprinelo neizvesnosti u britanskoj ekonomiji u tom periodu. Američki dolar je marta 2015. godine zahvaljujući jačanju privrede SAD-a i najavi podizanja referente kamatne stope zabeležio najvišu vrednost u odnosu na evro u prethodnih 12 godina. U raskoraku između jačanja dolara i slabljenja evra, funta je pala na petogodišnji minimum u odnosu na dolar, ali i skočila na sedmogodišnji maksimum u odnosu na evro. U Velikoj Britaniji su održani parlamentarni izbori 7. maja 2015. godine. Ovi izbori su bili od izuzetnog značaja jer su dve vodeće stranke imale totalno različite stavove o planovima bitnim za budućnost Velike Britanije. Dok su jedni zagovarali održavanje referenduma o izlasku

Britanije iz Evropske unije, kao i održavanje ponovnog referenduma o nezavisnosti Škotske, drugi su bili protiv. Neizvesnost koju nose izbori sami po sebi, a pogotovo kada su u pitanju ovako bitne stvari, uzrokuje prebacivanje kapitala iz britanske funte u druge valute koje investitori na finansijskim tržištima smatraju sigurnijim. Te je vrednost britanske funte oslabila neposredno pred održavanje izbora[13]. Pobedom konzervativaca na izborima u Britaniji vrednost britanske funte je porasla u odnosu na evro. Kako su pobedu odneli konzervativci koji su zagovarali održavanje referenduma, bilo je jasno da će se pokrenuti rešavanje pitanja ostanka Velike Britanije u Evropskoj uniji.
Posmatrajući grafik 3.1 vidimo da devizni kurs EUR/GBP 2016. godine prati rastući trend. Drugim rečima, vrednost britanske funte slabi u odnosu na evro. Kao što je prethodno rečeno 2015. godine na parlamentrnim izborima u Velikoj Britaniji trijumf su odneli konzervativci. Oni su zagovarali raspisivanje referenduma o izlasku Britanije iz Evropske unije i ponovni referendum o nezavisnosti Škotske. 22. februara 2016. godine dogovoreno i objavljeno je da će referendum o izlasku Britanije iz Evropske unije biti održan 23. juna iste godine. Tada je gradonačelnik Londona otvoreno podržao i ušao u kampanju za napuštanje Evropske unije. Ovo je dodatno uticalo na pad vrednosti funte, pa je vrednost funte za svega tri dana oslabila u odnosu na evro za 2.28%. Kako se približavao referendum, neizvesnost je rasla, a vrednost funte opadala. Međutim, krajem maja došlo je do neznatnog rasta vrednosti funte nakon što su rezultati tadašnje ankete pokazali da je podrška za ostanak Britanije u Evropskoj uniji na najvišem nivou. Međutim rezultati referenduma nisu bili takvi. 51.9% Britanaca se izjasnilo da podržava napuštanje Evropske unije. Pobeda Brexit-a dovela je do strmoglavog pada funte što se vidi i na grafiku 3.7. Za samo jedan dan vrednost britanske funte je oslabila u odnosu na evro za 6.25%. Najveći pad funte je bio u odnosu na dolar, za skoro 9%, gde se beleži i najniža vrednost u prethodnih 31 godinu[28]. Najveći pad funte, pre ovog, zabeležen je oktobra 2008. godine, kada je pala za 5.9% zbog kraha globalnog tržišta.

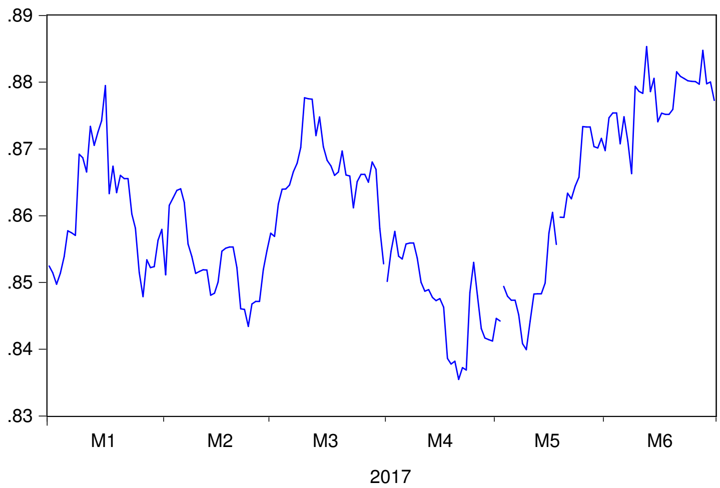


Grafik 3.7: *Devizni kurs EUR/GBP u junu 2016. godine*

Pored pada vrednosti funte u odnosu na druge valute, Brexit je doneo i pometnju na ostalim tržištima. Zabeležen je pad akcija britanskih banaka, kao i pad vrednosti londonskog berzanskog indeksa[25] FTSE 100. Potražnja za zlatom je naglo porasla, pa je cena zlata dostigla najviši nivo još od velike finansijske krize 2008. godine. U dolarima skok iznosi

[25]Predstavlja najkvalitetniji instrument analize kretanja berzanskih tržišta, u određenom vremenskom periodu. Berzanski indeks predstavlja ponderisani prosek cena i obima trgovanja akcijama ili obveznicama. Izražava se kroz kretanje tržišne kapitalizacije u posmatranom vremenskom periodu.

8%, dok je skok u funtama čak 15%. Nakon Brexit-a javlja se strah kod Britanaca da bi se međunarodne kompanije mogle povući iz Velike Britanije i ukinuti hiljade radnih mesta. I nakon Brexit-a pad vrednosti funte se nastavlja, jer je vlada Velike Britanije primorana da zbog postojeće ekonomske situacije menja monetarnu politiku. Politička i ekonomska situacija svakako nisu sjajne, što implicira dalji pad vrednosti funte. Iako nakon Brexit-a funta prati tendenciju pada, na kratko dolazi do oporavljanja vrednosti funte. Početkom oktobra vrednost britanske funte je na kratko porasla zbog boljih ekonomskih podataka iz Britanije nego što su očekivani- zabeležen je rast BDP-a.
Dalje ćemo ispratiti kako se britanska funta ponašala u odnosu na evro do juna 2017. godine i da li su se i dalje osetile posledice Brexit-a. Ovo kretanje je grafički predstavljeno grafikom 3.8. Odmah u januaru uočavamo pad vrednosti funte. Pad je izazvan izjavom premijerke Velike Britanije Tereze Mej da će Velika Britanija verovatno napustiti evropsko tržište roba i usluga nakon zvaničnog i konačnog napuštanja Evropske unije. Potom vidimo oporavak funte, da bi u februaru opet došlo do pada. Tada je krenula priča o ponovnom referendumu o nezavisnosti u Škotskoj, na šta su vlasti bile spremne. Ovo nije začuđujuće, budući da na referendumu 2014. godine nije bilo velike razlike u glasovima, a i znajući da Škotska na referendumu 23. juna 2016. godine nije podržala napuštanje Evropske unije. Krajem marta, početkom aprila vidimo oporavak funte. Jedan od razloga jeste zvanično pokretanje procesa napuštanja Evropske unije i samim tim otklanjanje neizvesnosti da li će se želja građana sa referenuma 2016. godine sprovesti u delo. Isto tako, na rast vrednosti funte prema evru uticao je i zahtev premijerke za raspisivanje vanrednih parlamentarnih izbora. Pre izbora sprovođene ankete pokazale su da vladajuća partija nema najvišu podršku građana, što je uzrokovalo pad vrednosti funte. Parlamentarni izbori održani su 9. juna 2017. godine. I pre objavljenih rezultata, bilo je jasno da vladajuća partija neće osvojiti većinu, funta je u odnosu na evro pala na najnižu vrednost od februara[10]. Par dana nakon izbora, funta se malo oporavlja, da bi joj posle opet vrednost oslabila.



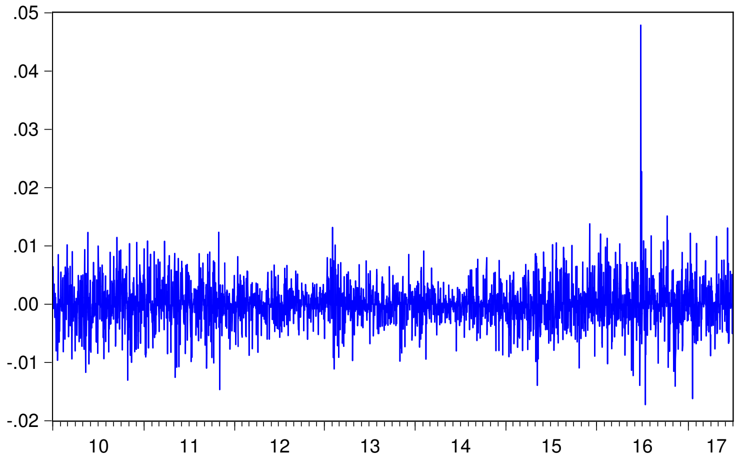
Grafik 3.8: *Devizni kurs EUR/GBP 2017. godine*

Vidimo da se u prethodnih sedam godina vrednost funte u odnosu na evro menjala posredstvom mnogih faktora. Na promenu vrednosti funte uticali su promena stope nezaposlenosti, promena BDP-a, zatim održavani parlamentarni izbori, održavani referendumi o nezavisnosti Škotske i napuštanju Evropske unije... Sva ova dešavanja uticala su i na promenu monetarne politike i planova za štednju i vraćanje javnog duga, što je takođe uticalo na promenu vrednosti funte u odnosu na evro. U narednom poglavlju napravićemo matematički model koji će ispratiti stvarne podatke za vrednost kursa EUR/GBP i koristićemo ga za formiranje prediktivnih vrednosti.

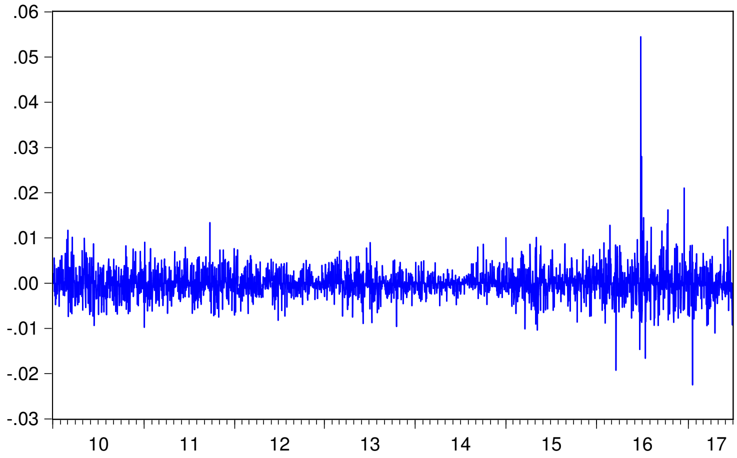
Na grafiku 3.2 grafički su predstavljene vrednosti deviznog kursa USD/GBP. Posmatranjem ovog grafika vidimo da se prethodnih sedam godina kurs dosta menjao, kako na godišnjem, tako i na mesečnom i dnevnom nivou. Razloge za promenu ovog kursa možemo poistovetiti sa navedenim razlozima za promenu deviznog kursa EUR/GBP, s obzirom da su američko, evropsko i britansko tržište povezani. I na vrednost ovog kursa je uticala monetarna politika vlade, zatim stope nezaposlenosti, referendumi. Imamo otprilike sličnu situaciju u kretanju ova dva devizna kursa. Deluje da se najveća razlika javlja 2014. godine, kada vrednost funte do sredine godine raste u odnosu na američki dolar, dok posle slabi. Razlog ovakvom kretanju deviznog kursa USD/GBP moguće leži u tome što je vrednost američkog dolara oslabila. U junu 2014. godine Centralna banka SAD-a je smanjila prognoze ekonomskog rasta za 2014. godinu. Smanjene prognoze ekonomskog rasta oslabile su američku valutu što se pozitivno odrazilo na vrednost britanske funte u odnosu na dolar. U ovom periodu britanska funta je dostigla rekordnu vrednost u odnosu na dolar u poslednjih 5 godina. Nakon toga američki dolar je jačao što se odrazilo na pad vrednosti funte u odnosu na dolar.

Posmatrajući grafik 3.3 vidimo fluktuacije u kretanju deviznog kursa CHF/GBP. Možemo zaključiti i da je ovaj devizni kurs ispratio promene i dešavanje vezane za parlamentarne izbore 2010. i 2015. godine, kao i promene zbog referenduma 2016. godine. Međutim interesantna stvar se uočava 2011. i 2015. godine, kada vrednost funte dosta slabi u odnosu na švajcarski franak u kratkom periodu, ali se funta brzo oporavlja[8]. Ove promene vrednosti kursa CHF/GBP su posledica odluke Švajcarske narodne banke da 2011. godine veže vrednost švajcarskog franka za evro, a 2015. godine je odlučeno da taj kurs neće biti fiksiran. U leto 2011. godine franak je vredeo više nego danas. Kako bi zaštitila svoju valutu od precenjenosti, a sa njom i švajcarsku izvoznu industriju, turizam, Švajcarska narodna banka je odlučila da veže franak sa evrom na nivou 1.2 švajcarska franka za evro i da otkupljuje sve viškove koji bi se pojavili na tržištu. U periodu od 2011. do 2014. godine Švajcarska je za odbranu franka otkupila 450 milijardi evra. Krajem 2014. godine dolar je počeo vrtoglavo da raste u odnosu na evro, što znači da 450 milijardi evra koje su Švajcarci otkupili poslednjih nekoliko godina gube vrednost naspram svetske valute broj jedan- dolara i to čak po nekoliko procenata dnevno. Stoga je 5. januara 2015. godine, Švajcarska narodna banka praktično preko noći, bez prethodne najave, odlučila da napusti fiksirani kurs CHF/EUR. Iznenadno odmrzavanje švajcarskog franka prema evru iznenadilo je i zateklo sva tržišta, čak i najrazvijenija. Jačanje franka se moglo očekivati, ali ovakav devizni udar (jačanje švajcarskog franka za oko 15% u jednom danu), nije mogao da se predvidi, niti je bilo koja centralna banka predvidela reakciju Narodne banke Švajcarske. Otuda 2011. i 2015. godine nagle promene u deviznom kursu CHF/GBP.

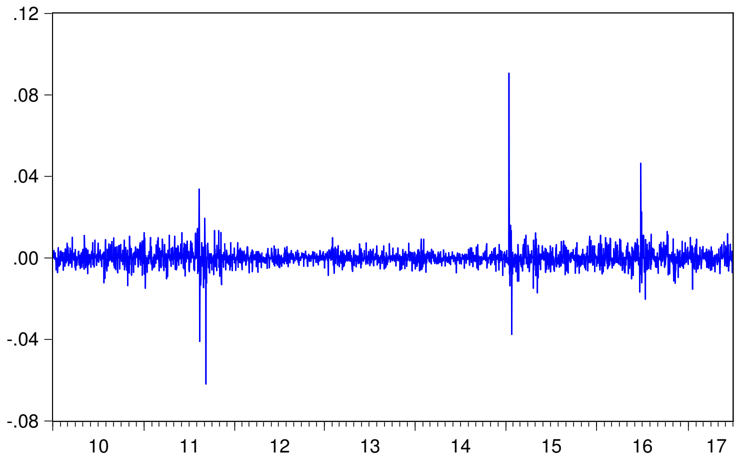
Na graficima 3.9, 3.10 i 3.11 vidimo prinose naših vremenskih serija, odnosno kako izgledaju serije nakon prvog diferenciranja. Uočavamo da su prinosi stacionarne serije, osciliraju oko nule i nema rastućih i opadajućih trendova. Preciznije sve tri serije su klase $I(1)$.



Grafik 3.9: *Prinosi deviznog kursa EUR/GBP*



Grafik 3.10: *Prinosi deviznog kursa USD/GBP*



Grafik 3.11: *Prinosi deviznog kursa CHF/GBP*

3.2 Statističke osobine deviznih kurseva

U analizi bilo kojih podataka jedan od početnih koraka podrazumeva ispitivanje statističkih osobina serije. Recimo, posmatrajući koeficijent asimetrije možemo zaključiti da li je većina vrednosti u seriji veća ili manja od očekivane vrednosti. Koeficijent ekcesa nam daje odgovor na pitanje da li serija ima debele repove. Takođe je interesantno razmotriti mogućnost da podaci prate normalnu raspodelu.
U daljem istraživanju koristićemo neke skraćenice radi lakšeg zapisa:

- EUR će označavati vrednosti deviznog kursa EUR/GBP,
- $DEUR$ vrednosti prinosa deviznog kursa EUR/GBP,
- USD će označavati vrednosti deviznog kursa USD/GBP,
- $DUSD$ vrednosti prinosa deviznog kursa USD/GBP,
- CHF će označavati vrednosti deviznog kursa CHF/GBP i
- $DCHF$ vrednosti prinosa deviznog kursa CHF/GBP.

U tabeli 3.1 date su vrednosti deskriptivnih statistika za naše tri vremenske serije, na diferenciranom nivou. Očekivanje sve tri serije je blisko nuli. Standardna devijacija nam govori

	$DEUR$	$DUSD$	$DCHF$
Očekivanje	-3.35e-06	5.56e-0.5	7.55e-05
Medijana	0.000000	0.000000	0.000000
Max	0.47839	0.54455	0.090599
Min	-0.017225	-0.022460	-0.061905
Standardna devijacija	0.003699	0.003251	0.004430
Koeficijent asimetrije	0.812602	1.984897	2.530265
Koeficijent spoljoštenosti	15.07962	36.79905	94.04357
JB test	16793.30	130917.5	939889.6
p vrednost	0.000000	0.000000	0.000000

Tabela 3.1: *Deskriptivna statistika za prinose deviznog kursa*

koliko u proseku elementi u uzorku odstupaju od očekivane vrednosti i najveća vrednost standardne devijacije se javlja kod švajcarskog franka.
Koeficijent asimetrije nam daje informaciju o tome da li je većina vrednosti u uzorku veća (pozitivan predznak) ili manja (negativan predznak) od očekivane vrednosti. Ukoliko je koeficijent asimetrije nula, možemo pretpostaviti da podaci prate standardnu normalnu raspodelu. Za svaki naš uzorak asimetrija je jaka i koeficijent asimetrije ima pozitivan predznak, što znači da je većina podataka veća od očekivane vrednosti. Odnosno sve tri serije su asimetrične na desno.
Koeficijent spljoštenosti meri koliko je neka raspodela spljoštena u odnosu na normalnu. Kod sve tri serije ovaj koeficijent je daleko iznad tri. Ovo ukazuje na raspodele sa debelim repovima i na postojanje više autlajera (ima dosta vrednosti u uzorku koje su značajno udaljene od ostalih vrednosti). Posmatranjem koeficijenata asimetrije i spljoštenosti dolazimo do zaključka da naši podaci vrlo verovatno ne prate standardnu normalnu raspodelu. Ovo potvrđuje JB test, kod kog hipoteza koja se testira, nulta hipoteza glasi da podaci prate standardnu normalnu raspodelu, nasuprot alternativne da podaci nisu normalno raspodeljeni. Kako su sve p vrednosti manje od 0.05 nulta hipoteza se odbacuje na nivou poverenja od 95%.

	$DEUR$	$DUSD$	$DCHF$
$DEUR$	1.000000		
	–		
$DUSD$	0.439874	1.000000	
	0.000000	–	
$DCHF$	0.574150	0.408390	1
	0.000000	0.000000	–

Tabela 3.2: *Korelaciona matrica*

U tabeli 3.2 je data matrica koeficijenata korelacije koja nam pokazuje na koji način i u kolikoj meri više varijabli utiču jedna na drugu. Slaba korelacija se javlja između $DUSD$ i $DEUR$ i između $DUSD$ i $DCHF$, dok se između $DEUR$ i $DCHF$ javlja srednje jaka korelacija. Testirana je i hipoteza koja kaže da dobijeni koeficijenti korelacije nisu statistički značajni. Kako su sve dobijene p vrednosti (prikazane u tabeli) manje od 0.05 nulta hipoteza se odbacuje na nivou poverenja od 95%.

3.3 Testiranje stacionarnosti

Testiranje stacionarnosti jedan je od osnovnih koraka pri formiranju modela. Do sada smo statističke testove i analizu sprovodili na vrednostima iz cele populacije. Stacionarnost ćemo testirati na uzorku na kom ćemo praviti model. Koristićemo podatke od 1. januara 2010. do 31. decembra 2014. godine. Vrednosti serije ćemo testirati na postojanje jediničnog korena koristeći DF test. Nulta hipoteza, koju testiramo glasi da serija ima jedinični koren. Ovu hipotezu ćemo odbaciti na nivou poverenja od 95% ako registrovana p vrednost bude manja od 0.05, u suprotnom je prihvatamo. Kolika će biti registrovana p vrednost zavisiće i od toga da li u model uključujemo konstantu, konstantu i linearni trend ili ni jedno, ni drugo.

	Konstanta	Konstanta i trend	Ni konstanta, ni trend
EUR	0.2874	0.7731	0.6091
USD	0.8036	0.7385	0.8839
CHF	0.4695	0.3423	0.8850

Tabela 3.3: *DF test za serije na osnovnom nivou*

U tabeli 3.3 se nalaze registrovane p vrednosti DF testa. Kako su sve registrovane p vrednost veće od 0.05, prihvatamo nultu hipotezu. Preciznije, naše serije su nestacionarne.
Nakon prvog diferenciranja imamo sledeću situaciju prikazanu u tabeli 3.4.

	Konstanta	Konstanta i trend	Ni konstanta, ni trend
$DEUR$	0.0000	0.0000	0.0000
$DUSD$	0.0000	0.0000	0.0000
$DCHF$	0.0000	0.0000	0.0000

Tabela 3.4: *DF test za serije prinosa*

Sprovođenjem DF testa na serijama prinosa, dobijamo sve registrovane p vrednosti manje od 0.05. Ovo znači da odbacujemo nultu hipotezu, sa nivoom značajnosti od 5%,

odnosno vremenske serije nemaju jedinični koren, stacionarne su.
Naše serije su klase $I(1)$- nestacionarne vremenske serije posle prvog diferenciranja postaju stacionarne.

3.4 ARIMA model za EUR/GBP

Jednodimenzionalni $ARIMA$ model ćemo oceniti na diferenciranim serijama i to za period od 1. januara 2010. do 31. decembra 2014. godine. Pomoću dobijenog modela formiraćemo vrednosti predikcija za period od 1. januara 2015. do 31. maja 2016. godine. Adekvatnost modela ispitaćemo preko osobina reziduala. Proverićemo da li su oni korelisani i da li prate standardnu normalnu raspodelu. Vrednosti dobijenih predikcija uporedićemo sa stvarnim vrednostim i to predstaviti grafički.

3.4.1 Formiranje $ARIMA$ modela za EUR/GBP

Na osnovu AIC kriterijuma, model koji najbolje može da isprati stvarne vrednosti podataka, formiran je pomoću logaritamskih prinosa, uključujući prethodne četiri vrednosti serije i tri prethodne vrednosti šuma. Model koji ćemo koristiti na logaritamskim prinosima naše serije je $ARMA(4,3)$[26].
Ocenjeni koeficijenti modela dati su u tabeli 3.5.

	Koeficijenti	p vrednost
Konstanta	-7.00e-05	0.3615
$AR(1)$	0.969769	0.0000
$AR(2)$	-1.131669	0.0000
$AR(3)$	0.861785	0.0000
$AR(4)$	-0.062485	0.0073
$MA(1)$	-0.942007	0.0475
$MA(2)$	1.084497	0.2756
$MA(3)$	-0.841605	0.4806
R^2	0.014328	
$adj.R^2$	0.009943	

Tabela 3.5: *Model ARMA(4,3) za logaritamske prinose*

Model $ARMA(4,3)$ formiran pomoću logaritamskih prinosa prati jednačinu (3.1).

$$\begin{aligned} DLEUR(t) = -7.00e-05 + 0.969769DLEUR(t-1) \\ -1.131669DLEUR(t-2) + 0.861785DLEUR(t-3) \\ -0.062485DLEUR(t-4) + a_t + 0.942007a_{t-1} \\ -1.084497a_{t-2} + 0.841605a_{t-3} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Iz tabele 3.5 vidimo da nisu svi koeficijenti statistički značajni na nivou značajnosti od 5%. Konstanta modela, zatim koeficijenti uz šumove a_{t-2} i a_{t-3} nisu statistički značajni. Videćemo šta će se desiti kada te koeficijente izbacimo iz modela i ponovo ocenimo model. Ocenjeni koeficijenti redukovanog modela dati su u tabeli 3.6

[26]Najbolji mogući model odabran je uz pomoć softvera *EViews*, koristeći AIC kriterijum pri odabiru modela.

	Koeficijenti	p vrednost
Konstanta	-7.00e-05	0.3615
$AR(1)$	0.876201	0.0000
$AR(2)$	-0.072837	0.0151
$AR(3)$	0.027424	0.3659
$AR(4)$	-0.016663	0.4779
$MA(1)$	-0.845956	0.0000
R^2	0.005106	
$adj.R^2$	0.002344	

Tabela 3.6: *Redukovan ARMA model za logaritamske prinose*

Jednačina redukovanog modela je data sa:

$$\begin{aligned} DLEUR(t) = 0.876201DLEUR(t-1) - 0.072837DLEUR(t-2) \\ +0.027424DLEUR(t-3) - 0.016663DEUR(t-4) \\ +a_t + 0.845956a_{t-1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Primetimo da su i kod jednog i kod drugog modela koeficijent determinacije i prilagođeni koeficijent determinacije popriličn niski. Međutim ovo nisu validni pokazatelji da je model loš. Iako su koeficijenti determinacije niski, i u jednom i u drugom modelu imamo statistički značajnih koeficijenata, što impilicira da možemo analizirati uticaj prethodnih vrednosti serije i prethodnih vrednosti šumova na ponašanje vremenske serije danas. Problem koji može uzrokovati niska vrednost koeficijenta determinacije jeste to da ne možemo očekivati precizne predikcije. Kako radimo sa deviznim kursevima, svakako da to ni ne očekujemo, jer su fluktuacije deviznog kursa prilično nepredvidive.

3.4.2 Provera adekvatnosti $ARIMA$ modela

Adekvatnost $ARIMA$ modela i redukovanog $ARIMA$ modela proverićemo tako što ćemo ispitati osobine reziduala. Testiraćemo odsustvo autokorelacije među rezidualima i mogućnost da reziduali prate normalnu raspodelu. Ukoliko je bar jedan uslov zadovoljen smatraćemo model adekvatnim.
Testiranje autokorelacije nad rezidualima svodi se na primenu *Ljung-Box* statistike. Hipoteza koja se testira, nulta hipoteza, glasi da među rezidualima nema korelacije, nasuprot alternativne da korelacija ipak postoji. Prikazaćemo vrednosti test statistike i registrovane p vrednosti za par koraka unazad.

	$ARIMA$ model		Redukovani $ARIMA$ model	
Broj koraka unazad	Q statistika	p vrednost	Q statistika	p vrednost
1	0.0033	0.954	0.0004	0.984
2	0.5420	0.963	0.0008	1.000
3	1.0799	0.782	0.0017	1.000
4	1.1554	0.885	0.0182	1.000
5	1.1762	0.947	0.0287	1.000

Tabela 3.7: *Rezultati Ljung-Box statistike*

U tabeli 3.7 vidimo da su sve p vrednosti veće od 0.05 što implicira da prihvatamo nultu hipotezu, koja kaže da među rezidualima nema korelacije. I za preostale korake, koji nisu prikazani ovde dobijamo sve p vrednosti veće od 0.05. Preciznije, ne postoji autokorelacija

među rezidualima ni kod $ARIMA$ modela, ni kod redukovanog $ARIMA$ modela.
Koristeći deskriptivnu statistiku ispitaćemo još neke osobine reziduala i proveriti da li prate normalnu raspodelu. Vrednosti deskriptivne statistike za oba modela date su u tabeli 3.8.

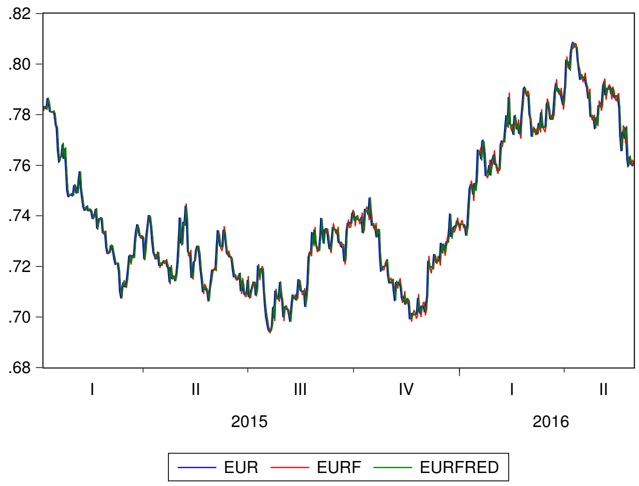
	Reziduali $ARIMA$ modela	Reziduali redukovanog $ARIMA$ modela
Očekivanje	1.11e-06	-8.33e-05
Medijana	6.21e-05	-2.60e-05
Max	0.013013	0.015949
Min	-0.016126	-0.016650
Standardna devijacija	0.003874	0.003892
Koeficijent asimetrije	-0.104061	-0.115781
Koeficijent spljoštenosti	4.630065	4.666028
JB test	203.3197	213.0204
p vrednost	0.000000	0.000000

Tabela 3.8: *Deskriptivna statistika za reziduale*

Očekivanje reziduala i jednog i drugog modela je blisko nuli. Koeficijent asimetrije je negativan za oba modela, što znači da je većina vrednosti reziduala manja od očekivane vrednosti. Koeficijent spljoštenosti je veći od tri, pa imamo raspodelu reziduala sa debelim repovima. Ovo sve nagoveštava odsustvo normalne raspodele, a što potvrđuju JB test i registrovana p vrednost tog testa.
Na osnovu prethodno iznesenog, oba modela možemo smatrati adekvatnim modelima zbog odsustva autokorelacije među rezidualima.

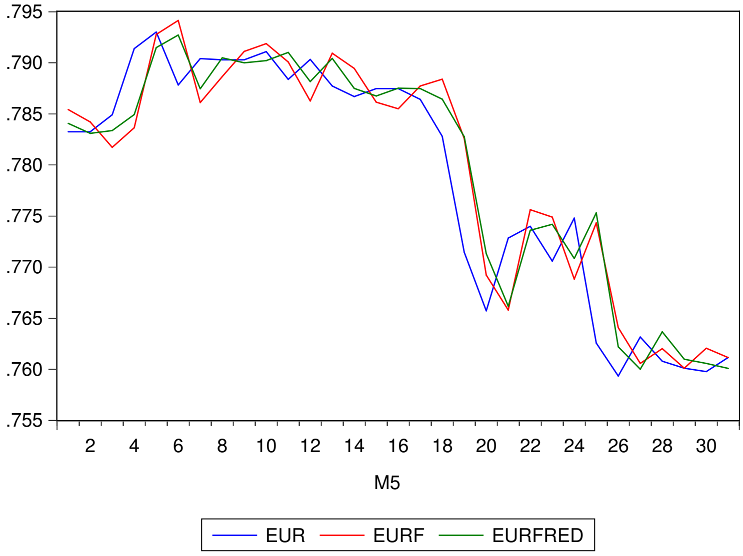
3.4.3 Predikcije na osnovu $ARIMA$ modela

Na osnovu podataka od 1. januara 2010. do 31. decembra 2014. godine, ocenili smo jednodimenzionalni $ARIMA$ model. Sada ćemo za period od 1. januara 2015. do 31. maja 2016. godine odrediti prediktivne vrednosti statičkom metodom pomoću modela $ARIMA(4,1,3)$ i redukovanog $ARIMA$ modela, datih jednačinama (3.1) i (3.2). Grafički ćemo predstaviti stvarne i prediktivne vrednosti za navedeni period na slici 3.12.



Grafik 3.12: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti*

Plavom linijom u oznaci EUR prikazane su stvarne vrednosti, crvenom prediktivne vrednosti dobijene statičkom metodom pomoću modela $ARIMA(4,1,3)$ $EURF$, a zelenom takođe prediktivne, ali dobijene isto statičkom metodom, pomoću redukovanog $ARIMA$ modela $EURFRED$.
Da bismo bolje uočili kretanje stvarnih i prediktivnih vrednosti prikazaćemo grafički slikom 3.13, samo period od mesec dana i to od 1. maja do 31. maja 2016. godine.



Grafik 3.13: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za mesec maj 2016. godine*

Vidimo da naše prediktivne vrednosti kasne za stvarnim, ali da njihova razlika nije značajna. Da bismo mogli bolje analizirati prediktivne vrednosti, tačnije njihovu validnost, nije nam dovoljan samo grafički prikaz. S toga ćemo prikazati greške predviđanje u tabeli 3.9.

	$ARIMA$ model	Redukovani $ARIMA$ model
$RMSE$	0.004043	0.003868
MAE	0.002997	0.002770
$MAPE$	0.404573	0.373981
U	0.002726	0.002608
BP	0.000012	0.000134
VP	0.000031	0.000000
CP	0.999975	0.999849

Tabela 3.9: *Greške predviđanja ARIMA i redukovanog ARIMA modela*

Vidimo da je standardna devijacija greške predviđanja ($RMSE$) blizu nule, pa možemo zaključiti da su kvadratna odstupanja predviđenih od stvarnih vrednosti mala. Ista situacija je i kod vrednosti apsolutnih odstupanja (MAE). Vrednost $MAPE$ se izražava u procentima, pa vidimo da je prosečno relativno odstupanje od stvarnih vrednosti 0.4046%, odnosno 0.3739% za redukovani model. Tejlov koeficijent (U) je blizu nule i to nam odgovara, pa su i po tom kriterijumu prediktivne vrednosti dobre. Dalje, mera sistematske greške (BP) govori da je 0.0012%/ 0.0134% greške došlo iz modela, što je veoma mali procenat i to takođe implicira da su predikcije dobre. Mera sistematske greške (CP) je 99.9975%/ 99.9849% i kazuje nam koliko greške nastaje zbog uticaja izvan modela. Na kraju, 0.0031%/0.0000% flutuacija u

stvarnim vrednostima nisu dostižne preko fluktuacija iz modela, što govori mera varijanse (VP).
Na osnovu grafičkog prikaza i analize grešaka, možemo zaključiti da su jednodimenzionalni $ARMA(4,3)$ model na logaritamskim prinosima, i redukcija tog modela zajedno sa statičkim načinom predviđanja dali dobre prediktivne vrednosti.
Što se tiče dinamičkog načina predvidjanja, dobijene rezultate za period od 4. januara do 10. januara 2015. godine prikazaćemo u tabeli 3.10.

t	EUR	$EURF$	$EURFRED$
4. januar 2015.	0.783068	0.781792	0.781873
5. januar 2015.	0.783068	0.782006	0.782034
6. januar 2015.	0.782349	0.782090	0.782085
7. januar 2015.	0.786403	0.781943	0.782163
8. januar 2015.	0.784653	0.781880	0.782234
9. januar 2015.	0.781319	0.782025	0.782289
10. januar 2015.	0.781084	0.782085	0.782333

Tabela 3.10: *Dinamičke prediktivne i stvarne vrednosti*

Najveće odstupanje smo dobili za 7. januar, kada su prediktivne vrednosti odstupale od stvarnih za 0.00446, odnosno za 0.00424 za redukovani model. Dinamičke prediktivne vrednosti su dobro ispratile stvarne za prikazani period. Za ceo period za koji smo pravili predikcije, tendenciju rasta i pada bolje je ispratio model $ARMA(4,3)$ za logaritamske prinose, nego redukovani model. Stoga ćemo model $ARMA(4,3)$ ocenjen na logaritamskim prinosima proglasiti za bolji.

3.5 Vektorski autoregresivni model (VAR)

Višedimenzionalni VAR model ćemo oceniti pomoću diferenciranih serija, jer su nam serije na osnovnom nivou nestacionarne. Na osnovu AIC kriterijuma odredićemo optimalan broj korak koji treba uvrstiti u model. Zatim ćemo sprovesti Johansenov test kointegracije, da vidimo da li u model treba uključiti kointegracijsku jednačinu. Ispitaćemo Grendžerovu kauzalnost, da bi utvrdili imaju li promenljive uticaja jedna na drugu, i smer tog uticaja. Svi ovi testovi biće od pomoći pri formiranju optimalnog modela. Adekvatnost dobijenog modela ispitaćemo preko osobina reziduala i testom za stabilnost modela. Konačno, prediktivne vrednosti dobićemo statičkom i dinamičkom metodom i proveriti tačnost prediktivnih vrednosti. Prikazaćemo samo jednačine i modele gde je zavisna promenljiva EUR, odnosno $DEUR$ jer je suština ovog istraživanja ispratiti i predvideti kretanje deviznog kursa evro-britanska funta.

3.5.1 Formiranje VAR modela

Pre svega, treba da utvrdimo koji je optimalan broj koraka koji treba uvrstiti u model. Ovaj podatak dobićemo pomoću AIC kriterijuma, koji ćemo sprovesti na serijama prinosa. Rezultati testa dati su u tabeli 3.11. AIC kriterijum ima najmanju vrednost za korak dva, pa ćemo pri formiranju VAR modela koristiti vrednosti deviznog kursa za prethodna dva dana na diferenciranom nivou. Ocenjeni VAR model za prinose prikazan je u tabeli 3.12.
U drugoj koloni tabele 3.12 dati su koeficijenti ocenjenog modela, dok su u trećoj koloni prikazane odgovarajuće p vrednosti za ocenjene koeficijente. Hipoteza koja se testira, nulta hipoteza kaže da je ocenjeni koeficijent statistički jednak nuli, nasuprot alternativne da je ocenjeni koeficijent statistički različit od nule. Ukoliko je registrovana p vrednost manja od

i	$AIC(i)$
0	-26.43588
1	-26.43612
2	-26.43917^*
3	-26.43398
4	-26.42775
5	-26.42743
6	-26.42356

Tabela 3.11: *Rezultati AIC kriterijuma*

	$DEUR$	p vrednost
$DEUR(-1)$	0.017234	0.5408
$DEUR(-2)$	-0.061002	0.0303
$DUSD(-1)$	0.055820	0.0751
$DUSD(-2)$	-0.044613	0.1547
$DCHF(-1)$	0.010915	0.6643
$DCHF(-2)$	0.042955	0.0876
C	-6.25e-05	0.4018
R^2	0.007610	
$adj.R^2$	0.004299	

Tabela 3.12: *VAR model za serije prinosa*

0.05 odbacujemo nultu hipotezu, odnosno ocenjeni koeficijent je statistički značajan. Vidimo da je samo koeficijent uz $DEUR(-2)$ statistički značajan. Ovo bi značilo da na današnju vrednost prinosa deviznog kursa EUR/GBP značajan uticaj ima samo prinos istog tog kursa od prekjuce. Koeficijent determinacije i prilagođeni koeficijent determinacije su poprilično niski.
Stoga prelazimo na dalje testiranje međusobnog uticaja promenljivih.

3.5.2 Johansenov test kointegracije

Kako ćemo model formirati pomoću prinosa datih serija, moramo odlučiti da li ćemo u model uključiti kointegracijsku jednačinu ili ne. Zato serije moramo testirati na postojanje kointegracije. Postojanje kointegracije podrazumeva da se naše vremenske serije ponašaju slično, skokovi jednih serija su praćeni skokovima drugih ili njihovim padovima. U našem modelu možemo imati najviše dve kointegracijske jednačine. Model koji ćemo koristiti pri sprovođenju Johansenovog testa je model dva. Ovaj model se najčešće koristi u finansijskim vremenskim serijama, pa otuda ovaj izbor. U tabeli 3.13 prikazane su uzoračke vrednosti traga i registrovane p vrednosti za svaku statistiku. Podsetimo se da je nulta hipoteza koja se testira H_0: broj kointegracijskih jednačina je i, gde i ide od nula do dva. Dok je alternativna H_1: broj kointegracijskih jednačina je veći od i. Ukoliko je registrovana p vrednost manja od 0.05 nulta hipoteza se odbacuje na nivou poverenja od 95%.
Prilikom testiranja primenjujemo sekvencijalnu proceduru, odnosno prvo testiramo nultu hipotezu koja kaže da je broj kointegracijskih jednačina nula, protiv alternativne, da je taj broj veći od nule. Ako prihvatimo nultu hipotezu postupak testiranja se zaustavlja, a ako ne, to znači da postoji bar jedna kointegracijska jednačina. Dalje, testiramo nultu hipotezu da postoji tačno jedna kointegracijska jednačna, protiv alternativne da je broj jednačina veći od jedan. Ako prihvatimo nultu hipotezu, to znači da postoji tačno jedan kointegracijiski vektor,

H_0	Test traga	p vrednost
Nema KJ	1655.722	0.0000
Jedna KJ	1056.371	1.0000
Dve KJ	499.0197	0.0001

Tabela 3.13: *Rezultati Johansenovog testa kointegracije*

u suprotnom se testiranje nastavlja, sve dok prvi put ne prihvatimo nultu hipotezu.
U našem slučaju prvi put smo prihvatili nultu hipotezu kada smo testirali da postoji tačno jedna kointegracijska jednačina, pa ćemo u model uključiti jednu kointegracijsku jednačinu.

3.5.3 Formiranje $VECM$ modela

Konačno dolazimo do ocenjenog vektorskog modela sa korekcijom greške. Ocenjeni $VECM$ model prikazan je u tabelama 3.14 i 3.15.

	$EUR(-1)$	$USD(-1)$	$CHF(-1)$	C
KJ	1.000000	-1.816629	-1.278292	1.174384

Tabela 3.14: *Koeficijenti kointegracijske jednačine VECM modela*

	$DEUR$
KJ	-0.000613
$DEUR(-1)$	0.017860
$DEUR(-2)$	-0.060325
$DUSD(-1)$	0.055204
$DUSD(-2)$	-0.045238
$DCHF(-1)$	0.010398
$DCHF(-2)$	0.042368
R^2	0.007308
$adj.R^2$	0.003996

Tabela 3.15: *VECM model*

U prvoj tabeli data je interpretacija kointegracijske jednačine, dok je u drugoj tabeli predstavljen vektorski model sa korekcijom greške. Ovaj model se može zapisati kao što je prikazano jednačinom 3.3.

$$\begin{aligned} DEUR(t) = -0.000613(&EUR(t-1) - 1.816629USD(t-1) \\ &-1.278292CHF(t-1) + 1.174384) \\ &+0.017860DEUR(t-1) - 0.060325DEUR(t-2) \\ &+0.055204DUSD(t-1) - 0.045238DUSD(t-2) \\ &+0.010398DCHF(t-1) + 0.042368DCHF(t-2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Podsetimo se da se pojam kointegracije definiše kao stacionarna linearna kombinacija nestacionarnih serija. Na osnovu koeficijenata koji definišu kointegracijsku jednačinu, napravićemo niz podaka po jednačini datoj sa (3.4) i testirati stacionarnost tih podataka pomoću DF testa.

$$KJ(t) = EUR(t-1) - 1.816629USD(t-1) - 1.278292CHF(t-1) + 1.174384 \tag{3.4}$$

Rezultati DF testa prikazani su u tabeli 3.16.

	Konstanta	Konstanta i trend	Ni konstanta, ni trend
KJ	0.0045	0.0278	0.0002

Tabela 3.16: *Rezultati DF testa*

Sve registrovane p vrednosti manje su od 0.05, što implicira da odbacujemo nultu hipotezu. Nulta hipoteza glasi da serija ima jedinični koren. Ukoliko serija ima jedinični koren nestacionarna je. Kako smo odbacili nultu hipotezu, zaključujemo da je naša serija stacionarna, što smo i trebali da pokažemo. Ovo znači da postoji dugoročna povezanost nestacionarnih vremenskih serija.
Vratimo se na jednačinu (3.3) koja predstavlja vektorski model sa korekcijom greške. Uočavamo da su u ovaj model uključene vrednosti naših serija na osnovnom nivou, kao i njihovi prinosi. Međutim ovo neće predstavljati problem, jer smo pokazali da je deo modela koji predstavlja linearnu kombinaciju nestacionarnih serija, ustvari stacionaran. Tako da su svi regresori u modelu, kao i zavisna promenljiva stacionarni, pa neće biti problema sa lažnom regresijom.
Dugoročna veza između serija EUR, USD i CHF data je jednačinom (3.4). Ovaj izraz igra ključnu ulogu u funkcionisanju modela. Kada bi koeficijent prilagođavanja (onaj koji stoji uz izraz $EUR(t-1)-1.816629USD(t-1)-1.278292CHF(t-1)+1.174384$ u jednačini (3.3)) bio pozitivan, tada bi bilo opravdano u ocenjivanju modela koristiti samo prinose. Ali u tom slučaju bi se mogao ispitati samo kratkoročni uticaj promenljivih $DUSD$ i $DCHF$ na $DEUR$. Kako je ovaj koeficijent negativan, model samo sa prinosima bi svakako bio neadekvatan.
Pretpostavimo da je u trenutku $t-1$ tržište u stanju ravnoteže. To znači da važi sledeće:

$$EUR(t-1) = 1.816629USD(t-1) + 1.278292CHF(t-1) - 1.174384. \tag{3.5}$$

Dalje, neka promenljiva $DUSD(t-1)$ raste i neka su pri tome ostale promenljive ostale na istom nivou. Ovo implicira da će zavisna promenljiva porasti. U sledećem koraku tržište će ispasti iz ravnotežnog stanja. Kako je koeficijent prilagođavanja negativan, u narednom koraku vratiće tržište u ravnotežno stanje.

Preciznije, odstupanje vrednosti serija od njihove dugoročne ravnoteže koriguje se već u sledećem koraku. S toga se izraz (3.5) naziva mehanizmom korekcije greške. U našem slučaju koeficijent prilagođavanja je blizak nuli, ali negativan. Tako da ima ulogu u vraćanju zavisne promenljive na ravnotežnu putanju.

3.5.4 Testiranje Grendžerove kauzalnosti i redukcija modela

Podsetićemo se šta znači kauzalnost u Grendžerovom smislu. Za promenljivu X_t se može tvrditi da uzrokuje Y_t, ukoliko Y_t može da se predvidi preciznije korišćenjem prošlih vrednosti X_t, nego u slučaju kada se te vrednosti ne koriste, dok sve ostale promenljive ostaju nepromenjene.
Sprovešćemo Grendžerov test kauzalnosti na diferenciranim serijama. Testiraćemo da li prethodne vrednosti promenljivih $DUSD$ i $DCHF$ doprinose tačnijem formiranju prediktivnih vrednosti promenljive $DEUR$. Testiraćemo uticaj svake promenljive posebno za dva koraka unazad. Nulta hipoteza je da promenljive $DUSD$ i $DCHF$ ne uzrokuju promenljivu $DEUR$. Kao sto je rečeno u poglavlju 2.9.6 test statistika koja se koristi je u formi F testa. Ukoliko je registrovana vrednost F statistike veća od kritične vrednosti na izabranom nivou značajnosti odbacujemo nultu hipotezu. Napomenimo da smo do sada hipoteze testirali sa

nivoom značajnosti od 5%. Ako bi i ovde to bio slučaj dobili bismo kao rezultat da nijedna nezavisna promenljiva u modelu ne uzrokuje zavisnu. U tom slučaju naš model ne bi imao smisla. Stoga ćemo ovde koristiti nivo značajnosti od 10%. U tabeli 3.17 dati su rezultati Grendžerovog testa i u trećoj koloni je data kritična vrednost Fišerove $F_{2,1799}$ raspodele.

H_0	F statistika	F kritična
$DUSD$ ne uzrokuje $DEUR$	2.38799	2.30259
$DCHF$ ne uzrokuje $DEUR$	1.40228	

Tabela 3.17: *Rezultati Grendžerovog testa kauzalnosti*

Možemo zaključiti da u prvom slučaju odbacujemo nultu hipotezu, odnosno $DUSD$ uzrokuje $DEUR$. Dok je u drugom slučaju kritična vrednost veća od registrovane vrednosti F statistike, pa prihvatamo nultu hipotezu i izvodimo zaključak da $DCHF$ ne uzrokuje $DEUR$. Ovo znači da uključivanjem prošlih vrednosti kursa franak-funta u model, ne bi preciznje predvideli vrednost kursa evro-funta, nego da te vrednosti ne koristimo. Dok će nam prethodne vrednosti kursa dolar-funta pomoći u preciznijem predviđanju sadašnjeg kursa evro-funta. Značajnost koeficijenta koji stoji uz kointegracijsku vezu nismo testirali. Dovoljno je što je negativan, pa možemo govoriti o dugoročnoj ravnoteži zavisne promenljive.

Redukcija modela podrazumeva isključivanje pojedinih promenljivih iz modela. Testiranje Grendžerove kauzalnosti nam je pokazalo koje promenljive treba da isključimo iz modela, sa svim njihovim koracima. Iz modela ćemo izbaciti promenljivu $DCHF$ u potpunosti. Redukovani model predstavljen je jednačinom (3.6).

$$\begin{aligned} DEUR(t) = -0.000677(EUR(t-1) - 1.816629USD(t-1) \\ -1.278292CHF(t-1) + 1.174384) \\ +0.024318DEUR(t-1) - 0.036520DEUR(t-2) \\ +0.056571DUSD(t-1) - 0.037181DUSD(t-2) \\ \\ R^2 = 0.005595 \\ adj.R^2 = 0.003385 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Koficijent determinacije i prilagođeni koeficijent determinacije su veoma niski. Međutim to ne znači nužno da je naš model loš. Nisku vrednost koeficijenta determinacije možemo pripisati linearnosti modela. Adekvatnost modela ćemo ispitati preko osobina rezidula. Osvrnimo se na model predstavljen jednačinom (3.6). Na primer, rast od 1% u promenljivoj $DUSD(t-1)$ izaziva rast današnje vrednosti prmenljive $DEUR(t)$ za 0.056%. Dok rast od 1% u promenljivoj $DUSD(t-2)$ izaziva pad današnje vrednosti promenljive $DEUR(t)$ za 0.037%, pri čemu se pretpostavlja da su vrednosti ostalih promenljivih nepromenjene.
Interpretacija koeficijenata u vektorskim autoregresivnim modelima je popriličnoteška. Deluje komplikovano i nelogično pričati o današnjim promenama na osnovu promena koje su se desile juče ili pre nekoliko dana. Iz tog razloga, u ovakvim modelima, koeficijenti se ne interpretiraju kao koeficijenti elastičnosti, nego se samo razmatra međusoban uticaj promenljivih, testiranjem kointegracije i kauzalnosti.

3.5.5 Adekvatnost i stabilnost modela

Kao što smo više puta ponovili adekvatnost modela ispitujemo preko osobina reziduala. A stabilnost modela ćemo ispitati pomoću $CUSUM$ testa.

Što se reziduala tiče testiraćemo odsustvo autokorelacije i odsustvo heteroskedastičnosti među njima. Proverićemo i mogućnost da reziduali prate normalnu raspodelu. Naš model ćemo smatrati adekvatnim ukoliko među rezidualima nema autokorelacije, ili ako su homoskedastični. Treba da važi barem jedan od ta dva uslova.
Pomoću testa Lagranžovih množitelja (LM test) testiraćemo postojanje serijske autokorelacije reda dva među rezidualima. Za red autokorelacije se obično uzima red modela. Rezultati ovog testa dati su u tabeli 3.18.

	Broj perioda	p vrednost
Reziduali	2	0.7183

Tabela 3.18: *Rezultati LM testa*

Nulta hipoteza je da nema autokorelacije među rezidualima, nasuprot alternativne da autokorelacija ipak postoji. Vidimo da je registrovana p vrednost veća od 0.05 pa odbacujemo nultu hipotezu sa nivoom značajnosti od 5%. Zaključak je da nema autokorelacije među rezidualima.

Dalje, testiramo odsustvo heteroskedastičnosti kod reziduala pomoću BP testa, čiji su rezultati predstavljeni u tabeli

	p vrednost
Reziduali	0.0000

Tabela 3.19: *Rezultati BP testa*

Hipoteza koju smo testirali kaže da reziduali imaju istu varijansu, odnosno postoji homoskedastičnost u seriji reziduala. Kako je registrovana p vrednost manja od 0.05, odbacujemo nultu hipotezu. Preciznije, među serijom reziduala postoji heteroskedastičnost. Zbog heteroskedastičnosti realno je očekivati da ocene koeficijenata dobijene metodom najmanjih kvadrata nemaju poželjna statistička svojstva- npr. nemaju minimalnu varijansu, odnosno nisu efikasne. Prisustvo heteroskedastičnosti uslovljava da predviđanja pomoću originalnog modela neće biti efikasna. Kad su ocene parametra neefikasne, predviđanje dobijeno primenom tih ocena, takođe je neefikasno.
Koristeći deskriptivnu statistiku sagledaćemo još neke osobine reziduala i proveriti mogućnost da prate normalnu raspodelu. U tabeli 3.20 date su vrednosti deskriptivne statistike. Očekivana vrednost reziduala je bliska nuli. Koeficijent asimetrije je negativan, što znači da

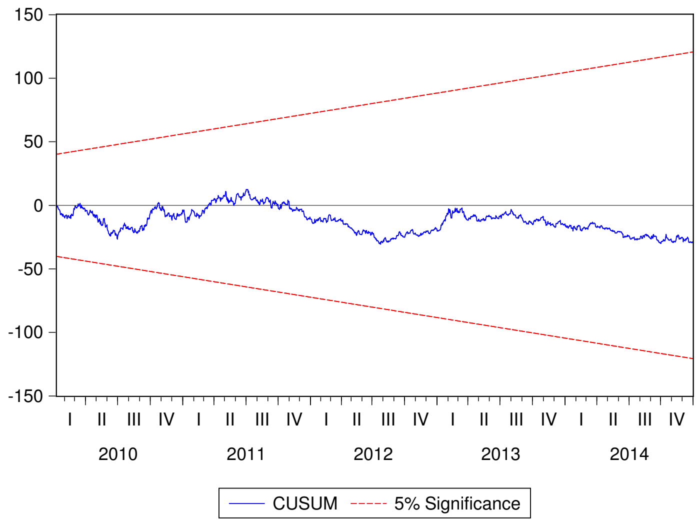
	Reziduali
Očekivanje	-5.41e-05
Medijana	2.34e-05
Max	0.013386
Min	-0.014744
Standardna devijacija	0.003297
Koeficijent asimetrije	-0.133218
Koeficijent spljoštenosti	4.838188
JB test	259.4630
p vrednost	0.000000

Tabela 3.20: *Deskriptivna statistika na seriji reziduala*

je većina vrednosti reziduala manja od očekivane vrednosti. Koeficijent spljoštenosti govori

da raspodela ima debele repove i da ima autlajera. Koeficijenti asimetrije i spljoštenosti nagoveštavaju odsustvo normalne raspodele, što potrvđuje JB test. Registrovana p vrednost ovog testa je manja od 0.05, pa odbacujemo nultu hipotezu. Podsetimo se, nulta hipoteza kaže da reziduli prate normalnu raspodelu.
Kažemo da je ekonometrijski model dobar ako su koeficijenti u modelu statistički značajni, ukoliko model ima visoku vrednost koeficijenta determinacije i ako nema autokorelacije ili heteroskedastičnosti među rezidualima. Naš model ima statistički značajne koeficijente. Nisku vrednost koeficijenta determinacije smo opravdali linearnošću modela. Možda kada model ne bi bio lineran, vrednost koeficijenta detrminacije bi bila viša. Rekli smo, da niska vrednost koeficijenta determinacije ne znači nužno da je model loš. Dalje, u modelu nemamo autokorelaciju, ali imamo heteroskedastičnost. Tako da možemo izvesti zaključak da je naš model adekvatan.

Podsetimo se, stabilnost modela podrazumeva da model samostalno uspostavlja ravnotežno stanje nakon delovanja uzroka koji je tu ravnotežu poremetio. Stabilnost ćemo ispitati $CUSUM$ testom. Ovaj test daje grafički prikaz vrednosti, i ako grafički prikaz vrednosti $CUSUM$ testa ne izlazi van granica specijalno određenih za taj test, kažemo da je model stabilan. Grafički prikaz dobijenih rezultata predstavljen je grafikom 3.14.

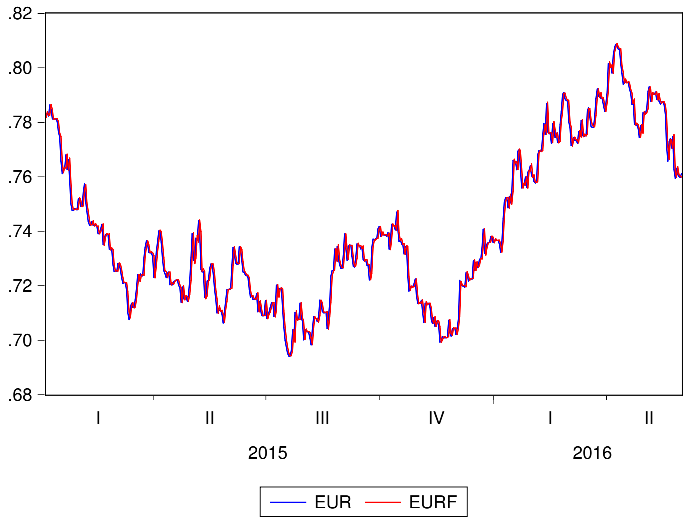


Grafik 3.14: *Rezultati CUSUM testa*

Plava linija predstavlja vrednosti $CUSUM$ testa, dok crvena predstavlja granicu značajnosti na nivou od 5%. Vrednosti testa predstavljene plavom linijom osciliraju oko nule i ostaju u granicama specijalno određenim za ovaj test, predstavljenim crvenom linijom. Zaključak na osnovu $CUSUM$ testa je da je naš model stabilan. Ovo nam je važno kako bismo mogli da formiramo prediktivne vrednosti.

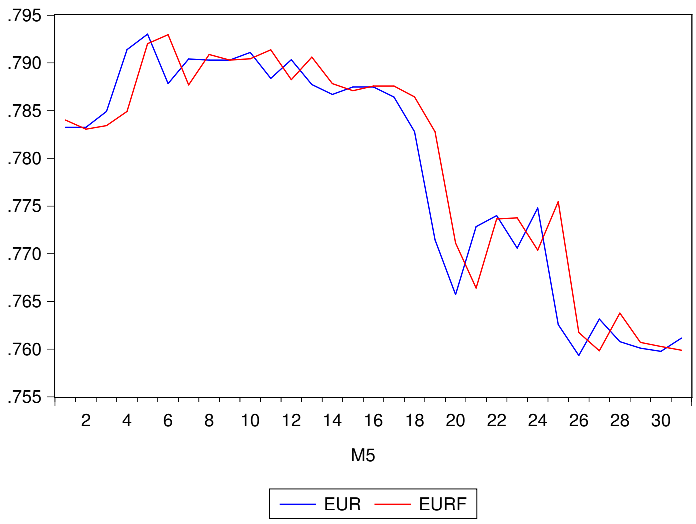
3.5.6 Predikcije na osnovu $VECM$ modela

Navedeni $VECM$ model smo ocenili za serije koje obuhvataju period od 1. januara 2010. do 31. decembra 2014. godine. Prediktivne vrednosti, koristeći najpre statičku, a potom dinamičku metodu, formiraćemo pomoću ocenjenog $VECM$ modela i to za period od 1. januara 2015. do 31. maja 2016. godine.
Prediktivne vrednosti dobijene statičkom metodom grafički ćemo predstaviti grafikom 3.15.



Grafik 3.15: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti*

Plavom linijom prikazane su stvarne vrednosti i označene sa EUR, dok su crvenom prikazane prediktivne $EURF$ dobijene pomoću $VECM$ modela. Kako ima mnogo podataka, da bi bolje uočili kretanje prediktivnih vrednosti u odnosu na stvarne, prikazaćemo grafički manji interval i to za mesec maj 2016. godine. Na grafiku 3.16 takođe su plavom bojom prkazane stvarne, a crvenom prediktivne vrednosti sa istim oznakama kao i na prethodnoj slici. Na ovom grafiku bolje uočavamo razliku između stvarnih i prediktivnih vrednosti. Vidimo da prediktivne vrednosti uglavnom kasne za stvarnim. Ovakav slučaj smo imali i kada smo za formiranje prediktivnih vrednosti koristili $ARIMA(4, 1, 3)$ model na logaritmovanim vrednostima serije.



Grafik 3.16: *Statičke prediktivne i stvarne vrednosti za mesec maj 2016. godine*

Sem grafičkog prikaza odredili smo i vrednosti grešaka predviđanja, prikazane u tabeli 3.21 koje će nam pomoći da bolje izanaliziramo prediktivne vrednosti.
Podsetimo se, da se vrednost $MAPE$ izražava u procentima i govori nam da relativno odstupamo od stvarnih vrednosti prosečno za 0.3753%. Standardna devijacija greške predviđanja

	$VECM$ model
$RMSE$	0.003863
MAE	0.002780
$MAPE$	0.375385
U	0.002605
BP	0.001754
VP	0.000226
CP	0.998025

Tabela 3.21: *Greške predviđanja VECM modela*

$(RMSE)$ je 0.3863%, te su kvadratna odstupanja predviđenih od stvarnih vrednosti mala. Isto je i sa vrednošću apsolutnih odstupanja, bliska su nuli. Posmatrajući Tejlov koeficijent (U), možemo reći da je model dobro odredio prediktivne vrednosti, jer je ovaj koeficijent blizak nuli. 0.1754% odsupanja je došlo iz modela o čemu govori mera sistematske greške (BP). Dok je 99.8025% greške nastalo pod uticajem sredine, o čemu govori mera nesistematske greške (CP). Na osnovu mere varijanse (VP) možemo zaključiti da 0.0226% fluktuacija u stvarnim vrednostima nisu dostižne preko fluktuacija u prediktivnim vrednostima.
Na osnovu prikazanih grafika i vrednosti statistika možemo izvesti zaključak da je naš model dao zadovoljavajuće prediktivne vrednosti metodom statičkog predviđanja.
Što se tiče dinamičkog metoda za formiranje prediktivnih vrednosti, rezultate ćemo predstaviti tabelarno u tabeli 3.22, za period od 4. januara do 10. januara 2015. godine.

t	EUR	$EURF$
4. januar 2015.	0.783068	0.781717
5. januar 2015.	0.783068	0.782497
6. januar 2015.	0.782349	0.782192
7. januar 2015.	0.786403	0.782428
8. januar 2015.	0.784653	0.782493
9. januar 2015.	0.781319	0.782708
10. januar 2015.	0.781084	0.782484

Tabela 3.22: *Dinamičke prediktivne i stvarne vrednosti*

Iz tabele vidimo da se prediktivne vrednosti dobijene dinamičkom metodom za navedeni period ne razlikuju mnogo od stvarnih vrednosti. Najveća razlika javlja se 7. januara, tada se prediktivne od stvarnih vrednosti razlikuju za 0.003975. Dobijene prediktivne vrednosti mogu da isprate stvarne samo za kratak rok, nerealno je očekivati da će se dinamičkim metodom dobiti dobre predikcije i za buduće vrednosti, koje nisu prikazane u tabeli.

Statička metoda za dobijanje prediktivnih vrednosti veoma je zahvalna za predviđanja "od danas do sutra". Dok se za periode od nekoliko narednih dana koristi dinamička metoda. Od dinamičke metode ne možemo očekivati dobre prediktivne vrednosti za duži period, jer moramo biti svesni nagomilavanja greške, s obzirom da se koriste prethodne prediktivne vrednosti.

3.6 Poređenje jednodimenzionalnog $ARIMA$ i višedimenzionalnog $VECM$ modela

U prethodnom delu rada smo posmatrajući serije deviznih kurseva EUR/GBP, USD/GBP i CHF/GBP ocenili jednodimenzionalni model $ARIMA(4, 1, 3)$ i višedimenzionali model sa korekcijom greške ($VECM$) na identičnom uzorku. Razlika je u tome što jednodimenzionalni $ARIMA$ model koristi samo vrednosti vremenske serije EUR/GBP, dok višedimenzionali $VECM$ model uključuje i vrednosti iz serija USD/GBP i CHF/GBP. Za oba modela smo izveli zaključak da su adekvatni, zbog odsustva autokorelacije među rezidualima. Na osnovu oba modela formirali smo prediktivne vrednosti, za isti period, statičkom i dinamičkom metodom. Zanima nas koji model je dao bolje predikcije. Zbog toga ćemo uporediti greške predviđanja dobijene za oba modela statičkom metodom.

	$ARIMA$ model	$VECM$ model
$RMSE$	0.004043	0.003863
MAE	0.002997	0.002780
$MAPE$	0.404573	0.375385
U	0.002726	0.002605
BP	0.000012	0.001754
VP	0.000031	0.000226
CP	0.999975	0.998025

Tabela 3.23: *Greške predviđanja ARIMA i VECM modela*

U tabeli 3.23 prikazane su greške odstupanja oba modela. Vidimo da su svi parametri približni. Standardna devijacija grešaka je 0.40% kod jednog i 0.39% kod drugog modela, apsolutna odstupanja i jednog i drugog modela su bliska nuli. Kod $ARIMA$ modela od stvarnih vrednosti odstupamo za 0.40%, a kod $VECM$ modela za 0.37% ($MAPE$ vrednost). Tejlov koeficijent i jednog i drugog modela su bliski nuli. Stoga odavde ne možemo zaključiti koji model daje preciznije prediktivne vrednosti statičkom metodom.
A što se dinamičkog načina predviđanja tiče i jedan i drugi model daju dobre prediktivne vrednosti za prvih nekoliko dana. A za dalje predviđanje i jedan i drugi model su uspeli da isprate kretanje deviznog kursa EUR/GBP.

3.7 Analiza $VECM$ modela uključujući i podatke posle BREXIT-a

Sada ćemo videti kakvi su rezultati kada za ocenjivanje modela koristimo više podataka i kada period za koji formiramo prediktivne vrednosti obuhvata i Brexit. Podaci koje koristimo za ocenjivanje modela obuhvataju period od 1. januara 2010. godine do 31. decembra 2015. godine. Prediktivne vrednosti ćemo formirati statičkom i dinamičkom metodom za period od 1. januara 2016. do 30. juna 2017. godine.
Koraci koje ćemo pratiti prilikom ocenjivanja modela su isti kao u prethodnom poglavlju. DF test nam daje odgovor na pitanje da li naše serije imaju jedinični koren. Nakon sprovođenja ovog testa zaključujemo da serije imaju jedinični koren, odnosno nestacionarne su. Sprovođenjem testa na diferenciranim serijama vidimo da one postaju stacionarne nakon prvog diferenciranja. Preciznije naše vremenske serije su klase $I(1)$. Na osnovu AIC kriterijuma zaključujemo da je broj koraka koji treba uvrstiti u model, ocenjujući model pomoću diferenciranih serija, dva. Ocenićemo VAR model za serije prinosa za dva koraka. Ovde nećemo stati, jer treba da proverimo da li u model treba uključiti i kointegracijsku jednačinu. Johansenov test kointegracije daje odgovor na to pitanje. Nakon sprovođenja testa zaključujemo da u

model treba da uključimo jednu kointegracijsku jednačinu. Zato ćemo sada oceniti vektorski model sa korekcijom greške ($VECM$). Ocenjeni model prikazan je jednačinom (3.7).

$$\begin{aligned} DEUR(t) = -0.000506(&EUR(t-1) + 6.431677USD(t-1) \\ &+6.615318CHF(t-1) - 9.370807) \\ &+0.036348DEUR(t-1) - 0.051959DEUR(t-2) \\ &+0.047358DUSD(t-1) - 0.055734DUSD(t-2) \\ &-0.002251DCHF(t-1) + 0.025427DCHF(t-2) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Koeficijent prilagođavanja je negativan, što je dobar znak, znači da model uspeva da održi ravnotežu nakon šokova.
Testiranjem Grendžerove kauzalnosti, na nivou značajnosti od 10%, dobijamo rezultate kao i u prethodno formiranom $VECM$ modelu. Prethodne vrednosti kursa franak-funta ne doprinose preciznijem određivanju prediktivnih vrednosti. Odnosno promenljiva $DCHF$ ne uzrokuje zavisnu promenljivu $DEUR$ u smislu Grendžera. Tako da ćemo izvršiti redukciju modela, i zavisnu promenljivu $DCHF$ izbaciti iz modela sa svim koracima. Redukovani model predstavljen je jednačinom (3.8).

$$\begin{aligned} DEUR(t) = -0.000481(&EUR(t-1) + 6.431677USD(t-1) \\ &+6.6153185CHF(t-1) - 9.370807) \\ &+0.035087DEUR(t-1) - 0.038402DEUR(t-2) \\ &+0.046798DUSD(t-1) - 0.049572DUSD(t-2) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Za redukovani model ispitaćemo osobine reziduala i stabilnost modela. Na osnovu ovog modela formiraćemo prediktivne vrednosti statičkom i dinamičkom metodom. LM testom smo testirali odsustvo autokorelacije među rezidualima. Dobili smo rezultate koji potvrđuju da nema autokorelacije. Heteroskedastičnost smo testirali BP testom i javlja se heteroskedastičnost kod reziduala. Međutim što se tiče stabilnosti modela, rezultati nisu zadovoljavajući. Rezultati $CUSUM$ testa ostaju u granicama specijalno određenim za taj test, ali značajno odstupaju od nule. Najveće oscilacije javljaju se za period 2015. godine. Ovo ne začuđuje, jer se za ovaj period javljaju i oscilacije u podacima koje su prouzrokovane parlamentarnim izborima u Velikoj Britaniji te godine.
Iako nismo zadovoljni stabilnošću modela, formiraćemo predikcije za period od 1. januara 2016. do 30. juna 2017. godine i analiziraćemo model na osnovu prediktivnih vrednosti.
Što se tiče formiranih predikcija statičkom metodom, one daju zadovoljavajuće rezultate. Kvadratna odstupanja predviđenih od stvarnih vrednosti su mala, kao i apsolutna odstupanja-i jedna i druga su bliska nuli. Relativno odstupanje od stvarnih vrednosti je prosečno 0.3853%, što su dobri rezultati. Međutim, 3.7528% odstupanja je došlo iz modela. Svakako bi bili zadovoljniji da je ova vrednost manja. Ali generalno statička metoda nam je dala dobre predikcije i možemo zaključiti da su predvidjanja "od danas do sutra" zadovoljavajuća i na ne baš najstabilnijem modelu.
Što se tiče dinamičkog načina predviđanja situacija nije tako dobra. Pre svega model za prediktivne vrednosti pokazuje tendeciju naglog pada, dok sa stvarnim vrednostima nije tako. Štaviše stvarne vrednosti imaju tendenciju rasta. Relativno odstupanje od stvarnih vrednosti je prosečno 26.14218%, što je zaista veliki procenat odstupanja.
Zbog nestabilnosti modela i loše formiranih prediktivnh vrednosti dinamičkom metodom, model ne možemo smatrati dobrim. Razlozi za ovako formiran model i prediktivne vrednosti leže u oscilaciji samih podataka u nekim vremenskim periodima o čemu smo govorili na samom početku ovog istraživanja.

Zaključak

Svrha ovog istraživanja jeste utvrditi potencijalnu zavisnost među odabranim serijama deviznih kurseva i oceniti model i formirati prediktivne vrednosti. Koristili smo podatke o tri devizna kursa: evro-britanska funta, američki dolar-britanska funta i švajcarski franak-britanska funta. Sve serija su nestacionarne na osnovnom nivou, pa smo nakon prvog diferenciranja dobili stacionarne serije. Prvi potperiod od januara 2010. do decembra 2014. godine korišćen je za ocenjivanje modela, dok je drugi potperiod od januara 2015. do maja 2016. godine korišćen za formiranje, a potom i kontrolu prediktivnih vrednosti. Formirali smo $VECM$ model nad stacionarnim serijama i utvrdili kauzalne veze. Vrednosti deviznog kursa švajcarski franak-britanska funta ne doprinose formiranju preciznijih prediktivnih vrednosti deviznog kursa evro-britanska funta. Dok devizni kurs američki dolar-britanska funta doprinosi preciznijem formiranju prediktivnih vrednosti kursa evro-britanska funta. Ovo nije potpuno neočekivano, znajući koliki je uticaj SAD-a na Veliku Britaniju i na Evropu. Na kraju smo dobili adekvatne i stabilne modele, pomoću kojih smo formirali prediktivne vrednosti koje dobro opisuju stvarno stanje. Ocenjen $VECM$ model daje dobre prediktivne vrednosti dobijene statičkom metodom, dok je dinamička metoda dobra za formiranje predikcija za par koraka unapred. Tačnije predviđanje od danas do sutra je prilično precizno, dok predviđanje za duži vremenski period podrazumeva gomilanje grešaka prethodnih predviđanja, pa što se više ide u budućnost, to su greške predviđanja veće.

Ocenjivanjem modela na potperiodu od januara 2010. godine do decembra 2015. godine i formiranjem prediktivnih vrednosti za period od januara 2016. do juna 2017. godine, dobijamo model koji nije stabilan i prediktivne vrednosti koje značajno odstupaju od stvarnih. Razlog ovome jesu oscilacije kursa u oba potperioda.

Buduća istraživanja mogu uključiti $ARCH$ model i njegove modifikacije, kako bi se rešio problem heteroskedastičnosti reziduala, i na taj način bi se ispratilo kretanje volatilnosti tokom vremena.

Tokom istraživanja primećeno je da devizni kurs evro-britanska funta oscilira i u zavisnosti od kretanja deviznog kursa evro-američki dolar. Ovo nije iznenađujuće jer sva tri tržišta: evropsko, američko i britansko imaju međusobnog uticaja. Stoga bi buduća istraživanja mogla proučavati međusobni uticaj ova tri tržišta oslanjajući se na devizne kurseve evro-britanska funta, evro-američki dolar i američki dolar-britanska funta.

Literatura

[1] BBC News (2013). UK loses top AAA credit rating for first time since 1978. [online] Dostupno na: http://www.bbc.com/news/business-21554311

[2] BBC News (2014). Scottish referendum: Scotland votes 'No' to independence. [online] Dostupno na: http://www.bbc.com/news/uk-scotland-29270441

[3] Breusch TS. Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models. Aust Econ Pap. Decembar 1978.

[4] Breusch TS, Pagan AR. A Simple Test for Heteroskedasticity and Random Coefficient Variation. Econometrica. 1979.

[5] Brown RL, Durbin J, Evans JM. (1975) Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time. J Roy Soc B Met. 1975.

[6] Dickey DA, Fuller WA. Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. J Am Stat Assoc. Jun 1979.

[7] Engle RF, Granger CW. Cointegration and error correction: Representation, estimation, and testing. Econometrica. Mart 1987.

[8] Erste Bank Serbia Blog (2015). Šta se desilo sa švajcarcem? [online] Dostupno na: https://blog.erstebank.rs/sadrzaj-bloga/sta-se-desilo-sa-svajcarcem/

[9] Evropska unija blog (2017). Osnovne informacije o Evropskoj uniji. [online] Dostupno na: https://europa.eu/european-union/about-eu/eu-in-briefsl

[10] FXCM Market Insights (2017). What Is The 2017 UK General Election's Impact On The GBP? [online] Dostupno na: https://www.fxcm.com/insights/2017-uk-general-elections-impact-gbp/

[11] Godfrey LG. Testing for Higher Order Serial Correlation in Regression Equations When the Regressors Include Lagged Dependent Variables. Econometrica. Novembar 1978.

[12] Granger CW. Some recent development in a concept of causality. J Econometrics. 1988.

[13] Independent (2015). General Election 2015: Pound surges against the euro after Conservatives storm ahead. [online] Dostupno na: http://www.independent.co.uk/news/uk/politics/generalelection/general-election-2015-pound-surges-against-the-euro-after-conservatives-storm-ahead-10233937.html

[14] Johansen S. Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models. Econometrica. Novembar 1991.

[15] Johansen S. Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models. Oxford. 1995.

[16] Johansen S, Juselius K. Maximum likelihood estimation and inference on cointegration - with applications to the demand for money. Oxford B Econ Stat. 1990.

[17] Kovačić Z.J. Analiza vremenskih serija. Univerzitet u Beogradu. Ekonomski fakultet u Beogradu. 1995.

[18] Lipovina-Božović M. Ekonometrijski modeli za prognozu makroekonomskih indikatora na primjeru Crne Gore. Univerzitet Crne Gore. Ekonomski fakultet u Podgorici. 2014.

[19] Lončar j. Globalizacija-pojam, nastanak i trendovi razvoja. Prirodno-matematički fakultet u Zagrebu. 2005.

[20] Lozanov-Crvenković Z. Statistika, Univerzitet u Novom Sadu. Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. 2012.

[21] MacKinnon JG, White H. Some heteroskedasticity-consistent covariance matrix estimators with improved finite sample properties. J Econometrics. 1985;

[22] Maddala GS. Introduction to Econometrics. 2^{th}ed. New York: Macmillan Publishing Company; 1992.

[23] McNees SK. Forecasting accuracy of alternative techniques: A comparison of US macroeconomic forecasts. J Bus Econ Stat. 1986.

[24] New World Encyclopedia blog (2017). Great Britain. [online] Dostupno na: http://www.newworldencyclopedia.org/entry/GreatBritain

[25] Rajter-Ćirić D. Verovatnoća. Univerzitet u Novom Sadu. Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu. 2008.

[26] Sims CA. Macroeconomics and reality. Econometrica. Januar 1980.

[27] The Guardian (2012). Olympics: why the British economy isn't a winner. [online] Dostupno na: https://www.theguardian.com/sport/2012/aug/02/olympics-british-economy-not-winner

[28] The Guardian (2016). Pound slumps to 31-year low following Brexit vote. [online] Dostupno na: https://www.theguardian.com/business/2016/jun/23/british-pound-given-boost-by-projected-remain-win-in-eu-referendum

[29] The Telegraph (2012). Barclays Libor scandal: as it happened - June 28, 2012. [online] Dostupno na: http://www.telegraph.co.uk/finance/newsbysector/banksandfinance/9361646/Barclays-Libor-scandal-as-it-happened-June-28-2012.html

[30] The Telegraph (2010). General Election 2010: Pound falls as exit polls point to hung parliament. [online] Dostupno na: http://www.telegraph.co.uk/finance/economics/7688396/General-Election-2010-Pound-falls-as-exit-polls-point-to-hung-parliament.html

[31] Tsay RS. Analysis of Financial Time Series. 2^{th}ed. New Jersey: A John Wiley & Sons; 2005.

Kratka biografija

Jovana Živković je rođena 14. septembra 1992. godine u Sremskoj Mitrovici. Osnovnu školu "Sveti Sava" završila je u Divošu 2007. godine i dobitnik je "Vukove diplome". Gimnaziju "Mitrovačka Gimnazija", prirodno-matematički smer, završila je u Sremskoj Mitrovici 2011. godine. Sve četiri godine bila je odličan učenik. Nakon toga, upisala je Prirodno-matematički fakultet, smer Primenjena matematika, modul Matematika finansija, gde je 2015. godine završila osnovne studije. Iste godine upisala je i master studije na Prirodno-matematičkom fakultetu. Položila je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom master studija, zaključno sa julskim rokom 2017. godine.

Novi Sad, septembar 2017.

Jovana Živković

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: *monografska dokumentacija*
TD
Tip zapisa: *tekstualni štampani materijal*
TZ
Vrsta rada: *master rad*
VR
Autor: *Jovana Živković*
AU
Mentor: *docent dr Nataša Krklec Jerinkić*
MN
Naslov rada: *Modeliranje deviznog kursa evro-britanska funta*
NR
Jezik publikacije: *srpski (latinica)*
JP
Jezik izvoda: *s/e*
JI
Zemlja publikovanja: *Republika Srbija*
ZP
Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
Godina: *2017.*
GO
Izdavač: *autorski reprint*
IZ
Mesto i adresa: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
MA
Fizički opis rada: *5 poglavlja, 78 strana, 31 lit. citat, 23 tabele, 16 grafika*
FO
Naučna oblast: *matematika*
NO
Naučna disciplina: *primenjena matematika*
ND
Ključne reči: *devizni kurs, britanska funta, Velika Britanija, Evropska unija, kauzalnost, kointegracija, ARIMA, VAR, VECM*
PO
UDK

Čuva se: *u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematičkog fakulteta, u Novom Sadu*
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod: *Cilj rada je da istraži odnos Velike Britanije i Evropske unije, koristeći devizne kurseve evro-britanska funta, američki dolar-britanska funta i švajcarski franak-britanska funta. Koristeći podatke navedenih deviznih kurseva, formiraće se matematički modeli i predikcije. U radu se koriste $ARIMA$, VAR i $VECM$ modeli, kao i razni statistički testovi.*
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: *8. jun 2017.*
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO
Predsednik: *dr Nataša Krejić, redovni profesor*
Član: *dr Nataša Krklec Jerinkić, docent*
Član: *dr Dora Seleši, vanredni profesor*

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: *monograph type*
DT

Type of record: *printed text*
TR

Contents code: *master thesis*
CC

Author: *Jovana Živković*
AU

Mentor: *docent dr Nataša Krklec Jerinkić*
MN

Title: *Modeling Euro-British Pound Exchange Rate*
XI

Language of text: *serbian (latin)*
LT

Language of abstract: *s/e*
LA

Country of publication: *Republic of Serbia*
CP

Locality of publication: *Vojvodina*
LP

Publication year: *2017.*
PY

Publisher: *author's reprint*
PU

Publ. place: *Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4*
PP

Physical description: *5 sections, 78 pages, 31 references, 23 tables, 16 graphs*
PD

Scientific field: *mathematics*
SF

Scientific discipline: *applied mathematics*
SD

Key words: *exchange rate, british pound, Great Britain, European Union, causality, cointegration, ARIMA, VAR, VECM*
UC

Holding data: *Department of Mathematics and Informatics' Library, Faculty of Sciences, Novi Sad*
HD

Note:
N

Abstract: *The purpose of the paper is to investigate relationship between Great Britain and European Union, using exchange rates euro-british pound, american dollar-british pound and swiss franc-british pound. Using data from selected excange rate will be set up mathematical models and predictions. The paper uses $ARIMA$, VAR and $VECM$ models and various statistical tests.*
AB

Accepted by the Scientific Board on: *8 June 2017*
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB
President: *dr Nataša Krejić, full professor*
Member: *dr Nataša Krklec Jerinkić, assistant professor*
Member: *dr Dora Seleši, associate professor*