II predavanje

Vektorska algebra

 Smatraćemo da poznajemo svih pet grupa aksioma euklidske geometrije i sve njihove posledice koje se tiču duži i uglova (dužina duži, ugao između dve prave, naporedni uglovi,...), dakle, smatraćemo da imamo sve mogućnosti merenja, kao i trigonometriju, koja je posledica geometrije sličnosti. Pomoću svega toga, definisaćemo još neke vektorske alatke, koje će biti od velike koristi.

 **Definicija.** Skalarni (unutrašnji) proizvod dva vektora je binarna operacija : kojom se paru vektora dodeljuje broj

 =

gde je ugao između ova dva vektora. Skalarni proizvod dvaju vektora je jednak nuli u jednom od sledeca tri slučaja:

 . =0 je potreban i dovoljan uslov za ortogonalnost dvaju nenula vektora.


Ugao između dva vektora je ugao između pozitivnih smerova osa kojima oni pripadaju, a ose treba da imaju zajednički početak. Ako za ugao paralelnog projektovanja odaberemo prav ugao, vidimo da tada važi

 i takođe , odnosno .

 Može se dokazati da skalarni proizvod dva vektora ima sledeće osobine:

 **Teorema 3.** Skalarni proizvod dva vektora ima sledeće osobine

1. simetričnost;
2. aditivnost;
3. homogenost;
4. pozitivna definitnost;
5. nedegenerisanost.

 **Dokaz.** Osobine (1), (4) i (5) se lako dokazuju po definiciji. Za ostale dokaz mora biti temeljnije fundiran.

 2. očigledno je da važi.

=

Ovde su uključena dva slučaja koja dovode do istog rezultata. Kod ovakvih problema treba voditi računa o znaku, orijentaciji i apsolutnoj vrednosti.

 (3) očigledno



=

=.

Ovde su takođe, očigledno,

uključena dva slučaja.

Σ

Svaki vektorski prostor na kome je uvedena binarna operacija sa skalarnim vrednostima tako da su zadovoljene osobine iz Teoreme 3. naziva se euklidski vektorski prostor. Neka je baza vektorskog prostora Tada se svaki vektor može izraziti kao linearna kombinacija vektora baze na sledeći način (i to jednoznačno):

Prema osobinama iz Teoreme 3, važiće

Dakle, da bi se odredio skalarni proizvod bilo koja dva vektora, potrebno je i dovoljno poznavati skalarne proizvode bazisnih vektora.

 ovo su metrički koeficijenti eulidskog prostora

Izraz za skalerni proizvod dva vektora se onda dobija ovako

Ako odaberemo ovako

 , ta baza se naziva ortonormirana i u njoj važi

Ortonormirana baya vektorskog prostora je, dakle, važna zbog toga što su u njoj koordinate vektora jednake ortogonalnim projekcijama tog vektora na ose određene vektorima baze.

**Interpretacija**

* normiranje vektora jediničan, ort vektora , ort ose koja je određena vektorom .
* kosinus ugla između dva vektora može da se definiše ovako:
*
* ako je vektor jediničan, tada važi i takođe, pošto je njegova jediničnost već iyražena preko komponenata, važiće i jer je

 Zbog značaja ortonormirane baze (pojednostavljivanje izraza), dokazaćemo da važi

 **Teorema 4.** Za proizvoljna tri linearno nezavisna vektora postoji ortonormirana baza takva da važi

 Dokaz. Ovakvu bazu treba konstruisati i verifikovati da u njoj važe gornje jednačine. Iz prve jednačine sledi

 Iz druge jednačine, sledi

 odnosno, kada zamenimo, u kraćem zapisu,

, čime je dokaz završen, a istovremeno dat i postupak za konstrukciju odgovarajuće baze.

Ovaj postupak se zove Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije.