IV predavanje

Transformacije baza i koordinata

Neka su date dve baze u $R^{3},$ $e=\left\{\vec{e}\_{1}, \vec{e}\_{2},\vec{e}\_{3}\right\} $i $\overbar{e}=\left\{\vec{\overbar{e}}\_{1}, \vec{\overbar{e}}\_{2},\vec{\overbar{e}}\_{3}\right\} $na istom trodimenzionom prostoru $V^{3}.$

Vektor $\vec{x}$ iz $V^{3}$ se može prikazati preko obe baze:

$$\vec{x}=x\_{1}\vec{e}\_{1}+x\_{2}\vec{e}\_{2}+x\_{3}\vec{e}\_{3}=\overbar{x}\_{1}\vec{\overbar{e}}\_{1}+ \overbar{x}\_{2}\vec{\overbar{e}}\_{2}+\overbar{x}\_{3}\vec{\vec{e}}\_{3}.$$

Postavlja se pitanje kakva je veza između ova dva predstavljanja.

Veza izmđu baza- transformacija baza:

$$\vec{\overbar{e}}\_{1}=γ\_{11}\vec{e}\_{1}+γ\_{21}\vec{e}\_{2}+γ\_{31}\vec{e}\_{3}$$

$$\vec{\overbar{e}}\_{2}=γ\_{12}\vec{e}\_{1}+γ\_{22}\vec{e}\_{2}+γ\_{32}\vec{e}\_{3}$$

$$\vec{\overbar{e}}\_{3}=γ\_{13}\vec{e}\_{1}+γ\_{23}\vec{e}\_{2}+γ\_{33}\vec{e}\_{3}.$$

Takođe, važiće i obrnut sistem jednačina

$$\vec{e}\_{1}=\overbar{γ}\_{11}\vec{\overbar{e}}\_{1}+\overbar{γ}\_{21}\vec{\overbar{e}}\_{2}+\overbar{γ}\_{31}\vec{\overbar{e}}\_{3}$$

$$\vec{e}\_{2}=\overbar{γ}\_{12}\vec{\overbar{e}}\_{1}+\overbar{γ}\_{22}\vec{\overbar{e}}\_{2}+\overbar{γ}\_{32}\vec{\overbar{e}}\_{3}$$

$$\vec{e}\_{3}=\overbar{γ}\_{13}\vec{\overbar{e}}\_{1}+\overbar{γ}\_{23}\vec{\overbar{e}}\_{2}+\overbar{γ}\_{33}\vec{\overbar{e}}\_{3}$$

ili, sve to u kraćem zapisu,

$$\vec{\overbar{e}}\_{i}=\sum\_{k=1}^{3}γ\_{ki}\vec{e}\_{k}; \vec{e}\_{j}=\sum\_{l=1}^{3}\overbar{γ}\_{li}\vec{\overbar{e}}\_{l}.$$

Označimo matrice transformacije baza

$\left[\begin{matrix}γ\_{11}&γ\_{12}&γ\_{13}\\γ\_{21}&γ\_{22}&γ\_{23}\\γ\_{31}&γ\_{32}&γ\_{33}\end{matrix}\right]=Γ ; \left[\begin{matrix}\overbar{γ}\_{11}&\overbar{γ}\_{12}&\overbar{γ}\_{13}\\\overbar{γ}\_{21}&\overbar{γ}\_{22}&\overbar{γ}\_{23}\\\overbar{γ}\_{31}&\overbar{γ}\_{32}&\overbar{γ}\_{33}\end{matrix}\right]=\overbar{Γ}$.

Može se objasniti kako se množe matrice, po vrstama i kolonama; rezultat množenja dveju kvadratnih matrica istih dimenzija je kvadratna matrica tih istih dimenzija.Pri tome, vrste (horizontalni redovi) matrice koja stoji sa leve strane se množe sa kolonama (vertikalnim redovima) matrice koja stoji sa desne strane i to član po član i vrši se sabiranje. Množenje matrica je generalno nekomutativno. Svaka matrica ima svoju determinantu. Ona matrica čija je determinanta jednaka nuli je singularna; u protivnom, ona je nesingularna. Jedinična matrica je ona koja na glavnoj dijagonali ima jedinice, a ostalo su nule. Ta matrica je komutativna sa svakom matricom odgovarajućih dimenzija i reprodukuje je. Matrica koja pri množenju sa nekom kvadratnom matricom daje jediničnu matricu odgovarajućih dimenzija je njoj inverzna matrica. Za singularne matrice ne postoje inverzne matrice.

Može se primetiti da važi

$$Γ=\left(γ\_{ij}\right); Γ^{-1}=\left(\overbar{γ}\_{ij}\right).$$

Formalno se transformacija baza može zapisati i ovako:

$$\overbar{e}=\left(\vec{\overbar{e}}\_{1}, \vec{\overbar{e}}\_{2}, \vec{\overbar{e}}\_{3}\right)=\left(\vec{e}\_{1}, \vec{e}\_{2 },\vec{e}\_{3}\right)Γ;$$

 $e=$($\vec{e}\_{1}, \vec{e}\_{2},\vec{e}\_{3})$=$( \vec{\overbar{e}}\_{1}, \vec{\overbar{e}}\_{2},\vec{\overbar{e}}\_{3}$)$\overbar{Γ}$.

U kraćem zapisu, ovo će biti $\overbar{e}= e Γ i e=\overbar{e})\overbar{Γ}.$ Paralelno sa transformacijom baza ide i transformacija koordinata. Za proizvoljni vektor $\vec{x} $ važi

$$\vec{x}=\sum\_{j}^{}\overbar{x}\_{j}\vec{\overbar{e}}\_{j}=\sum\_{i}^{}x\_{i}\vec{e}\_{i}=\sum\_{i}^{}x\_{i}\sum\_{j}^{}\overbar{γ}\_{kj}\vec{\overbar{e}}\_{j}=\sum\_{j}^{}\vec{\overbar{e}}\_{j}\sum\_{i}^{}x\_{i}\overbar{γ}\_{ji},$$

odakle sledi $\overbar{x}\_{j}=\sum\_{j}^{}\overbar{γ}\_{ji}x\_{i}.$

Takođe, važi i obrnuto, što se izvodi u potpunosti analogno

$$\vec{x}=\sum\_{i}^{}x\_{i}\vec{e}\_{i}=\sum\_{j}^{}\overbar{x}\_{j}\vec{\overbar{e}}\_{j}=\sum\_{j}^{}\overbar{x}\_{j}\sum\_{k}^{}γ\_{kj}\vec{e}\_{k}=\sum\_{j}^{}\sum\_{i}^{}\overbar{x}\_{j}γ\_{ij}\vec{e}\_{i},$$

odakle sledi $x\_{i}=\sum\_{j}^{}\overbar{x}\_{j}γ\_{ij}.$

Matrični oblik gornjih jednačina transformacije koordinata izgleda ovako

 $\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}γ\_{11}&γ\_{12}&γ\_{13}\\γ\_{21}&γ\_{22}&γ\_{23}\\γ\_{31}&γ\_{32}&γ\_{33}\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}\overbar{x}\_{1}\\\overbar{x}\_{2}\\\overbar{x}\_{3}\end{matrix}\right]$,

 $\left[\begin{matrix}\overbar{x}\_{1}\\\overbar{x}\_{2}\\\overbar{x}\_{3}\end{matrix}\right]=\left[\begin{matrix}\overbar{γ}\_{11}&\overbar{γ}\_{12}&\overbar{γ}\_{13}\\\overbar{γ}\_{21}&\overbar{γ}\_{22}&\overbar{γ}\_{23}\\\overbar{γ}\_{31}&\overbar{γ}\_{32}&\overbar{γ}\_{33}\end{matrix}\right]$ $\left[\begin{matrix}x\_{1}\\x\_{2}\\x\_{3}\end{matrix}\right]$.

Ovo je specijalan slučaj množenja matrica, jedne formata $3×3 $i druge formata $3×1;$ rezultat je ponovo $3×1$. $Γ$ i $\overbar{Γ}$ su matrice prelaza.

**Definicija.** Dve baze imaju istu orijentaciju ako matrice prelaza imaju pozitivne determinante.

Zašto nas zanimaju ovakve transformacije? Zato da bismo odabrali dobre baze, u kojima nam je jednostavnije da rešavamo neke stvari.

Smatraćemo da su obe baze $e$ i $\overbar{e}$ ortonormirane.

$$\left〈\vec{\overbar{e}}\_{i}, \vec{e}\_{j}\right〉=\sum\_{k}^{}γ\_{ki}\left〈\vec{e}\_{k},\vec{e}\_{j}\right〉=\sum\_{k}^{}γ\_{ki}δ\_{kj}=γ\_{ji}.$$

Takođe će važiti i $\left〈\vec{\overbar{e}}\_{i}, \vec{e}\_{j}\right〉=cos⁡(\vec{\overbar{e}}\_{i}, \vec{e}\_{j})$=$γ\_{ji}.$

Analogno ovome, važi i

$$\left〈\vec{e}\_{i},\vec{\overbar{e}}\_{j}\right〉=\overbar{γ}\_{ji}; \overbar{γ}\_{ji}=\cos(\left(\vec{e}\_{i},\vec{\overbar{e}}\_{j} \right));$$

$$γ\_{ji}=\left〈\vec{\overbar{e}}\_{i}, \vec{e}\_{j}\right〉=\overbar{γ}\_{ij}=\left〈\vec{e}\_{j},\vec{\overbar{e}}\_{i}\right〉.$$

Tada su matrice $Γ$ i $\overbar{Γ }$ transponovane (zamenjene su uloge vrsta i kolona) i onda važi $Γ$ $\overbar{Γ }$=E (jedinična matrica).

Dokazali smo da važi jedan smer

**Teorema 7.** Matrice koje zadovoljavaju gornju osobinu prevode ortonormiranu bazu u ortonormiranu bazu i obrnuto.

Ovakve matrice se zovu ortogonalne.

Dokazaćemo i drugi smer ove teoreme:

$$\left〈\vec{e}\_{i},\vec{e}\_{k}\right〉=\sum\_{j}^{}γ\_{ji}γ\_{jk}=δ\_{ik},$$

$$\left〈\vec{\overbar{e}}\_{i},\vec{\overbar{e}}\_{k}\right〉=\sum\_{j}^{}γ\_{ij}γ\_{kj}=δ\_{ik}.$$

Dakle, treba pokazati da svaka ortogonalna matrica prevodi jednu ortonormiranu bazu u drugu.

$e$ ortonormirana baza i neka je $\overbar{e}=\left(\vec{\overbar{e}}\_{1},\vec{\overbar{e}}\_{2}, \vec{\overbar{e}}\_{3}\right)=\left(\vec{e}\_{1}, \vec{e}\_{2 },\vec{e}\_{3}\right)Γ. $ Ako je polazna baza ortonormirana, onda važi

$$\left〈\vec{\overbar{e}}\_{i}, \vec{\overbar{e}}\_{j}\right〉=\sum\_{k}^{}\sum\_{l}^{}γ\_{ki}γ\_{lj}\left〈\vec{e}\_{k},\vec{e}\_{l}\right〉=\sum\_{k}^{}γ\_{ki}\sum\_{l}^{}γ\_{lj}δ\_{kl}=\sum\_{k}^{}γ\_{ki}γ\_{kj}=δ\_{ij},$$

pa je i ona baza koja se dobija ortonormirana.

**Lema.** Determinanta ortogonalne matrice je $\pm 1.$

$$detΓ=detΓ^{T}$$

$$detΓ∙detΓ^{-1}=1=detΓ∙detΓ^{T}=(detΓ)^{2}.$$

Primer iz $V^{2}:$

baza $\left\{\vec{e}\_{1},\vec{e}\_{2}\right\}$ je ortonormirana

$\vec{\overbar{e}}\_{1}=cosθ\vec{e}\_{1}+sinθ\vec{e}\_{2} ; \vec{\overbar{e}}\_{2}=-\sin(θ\vec{e}\_{1})+\cos(θ\vec{e}\_{2})$, što čuva orijentaciju

$\vec{\overbar{e}}\_{1}=cosθ\vec{e}\_{1}+sinθ\vec{e}\_{2} ;$ $\vec{\overbar{e}}\_{2}=-\sin(θ\vec{e}\_{1})+\cos(θ\vec{e}\_{2}),$ što menja orijentaciju.

**Geometrija** je ono što se ne menja prilikom promene baze.

**Teorema 8.** Skalarni i vektorski proizvod dva vektora se ne menjaju prilikom promene baze.

Dokaz.

$$\sum\_{i}^{}x\_{i}y\_{i}=\sum\_{i}^{}\sum\_{j}^{}γ\_{ij}\overbar{x}\_{j}\sum\_{k}^{}γ\_{ik}\overbar{y}\_{k}=\sum\_{i}^{}\sum\_{j}^{}\sum\_{k}^{}γ\_{ij}γ\_{ik}\overbar{x}\_{j}\overbar{y}\_{k}=$$

$$=\sum\_{j}^{}\sum\_{k}^{}\overbar{x}\_{j}\overbar{y}\_{k}δ\_{jk}=\sum\_{j}^{}\overbar{x}\_{j}\overbar{y}\_{j}.$$

Za vektorski proizvod, označimo sa$ ε\_{ijk}$=$\left[\vec{e}\_{i}, \vec{e}\_{j}, \vec{e}\_{k}\right]$. Ovo zovemo antisimetrični Kronekerov simbol.

Kako se menja pri promeni baze?

$$\overbar{ε}\_{pqr}=\left[\sum\_{i}^{}γ\_{ip}\vec{e}\_{i}, \sum\_{j}^{}γ\_{jq}\vec{e}\_{j},\sum\_{k}^{}γ\_{kl}\vec{e}\_{k}\right]$$

$$=\sum\_{i}^{}\sum\_{j}^{}\sum\_{k}^{}γ\_{ip}γ\_{jq}γ\_{kl}\left[\vec{e}\_{i}, \vec{e}\_{j}, \vec{e}\_{k}\right]$$

Ako je $\vec{z}=\vec{x}×\vec{y}, $ onda se može pokazati da važi $z\_{k}=\sum\_{i}^{}\sum\_{j}^{}ε\_{ijk}x\_{i}y\_{j}.$

$$x\_{i}=\sum\_{p}^{}γ\_{ip}\overbar{x}\_{p}, y\_{j}=\sum\_{q}^{}γ\_{jq}\overbar{y}\_{q}, z\_{k}=\sum\_{r}^{}γ\_{kr}\overbar{z}\_{r}$$

$$\sum\_{r}^{}\sum\_{k}^{}\left(γ\_{kr}γ\_{ks}\right)\overbar{z}\_{r}=\sum\_{r}^{}δ\_{rs}\overbar{z}\_{r}=\overbar{z}\_{s}=$$

$$\sum\_{i}^{}\sum\_{j}^{}\sum\_{k}^{}\sum\_{p}^{}\sum\_{q}^{}ε\_{ijk}γ\_{ip}γ\_{jq}γ\_{ks}\overbar{x}\_{p}\overbar{y}\_{q},$$

jer je zadovoljeno

$$\sum\_{r}^{}γ\_{kr}z\_{r}=\sum\_{i}^{}\sum\_{j}^{}\sum\_{p}^{}\sum\_{q}^{}ε\_{ijk}γ\_{ip}\overbar{x}\_{p}γ\_{jq}\overbar{y}\_{q}.$$

Na osnovu ovoga, sledi da se ni mešoviti prizvod ne menja pri promeni ortonormirane baze, što je i pirodno, jer je on tako i definisan.