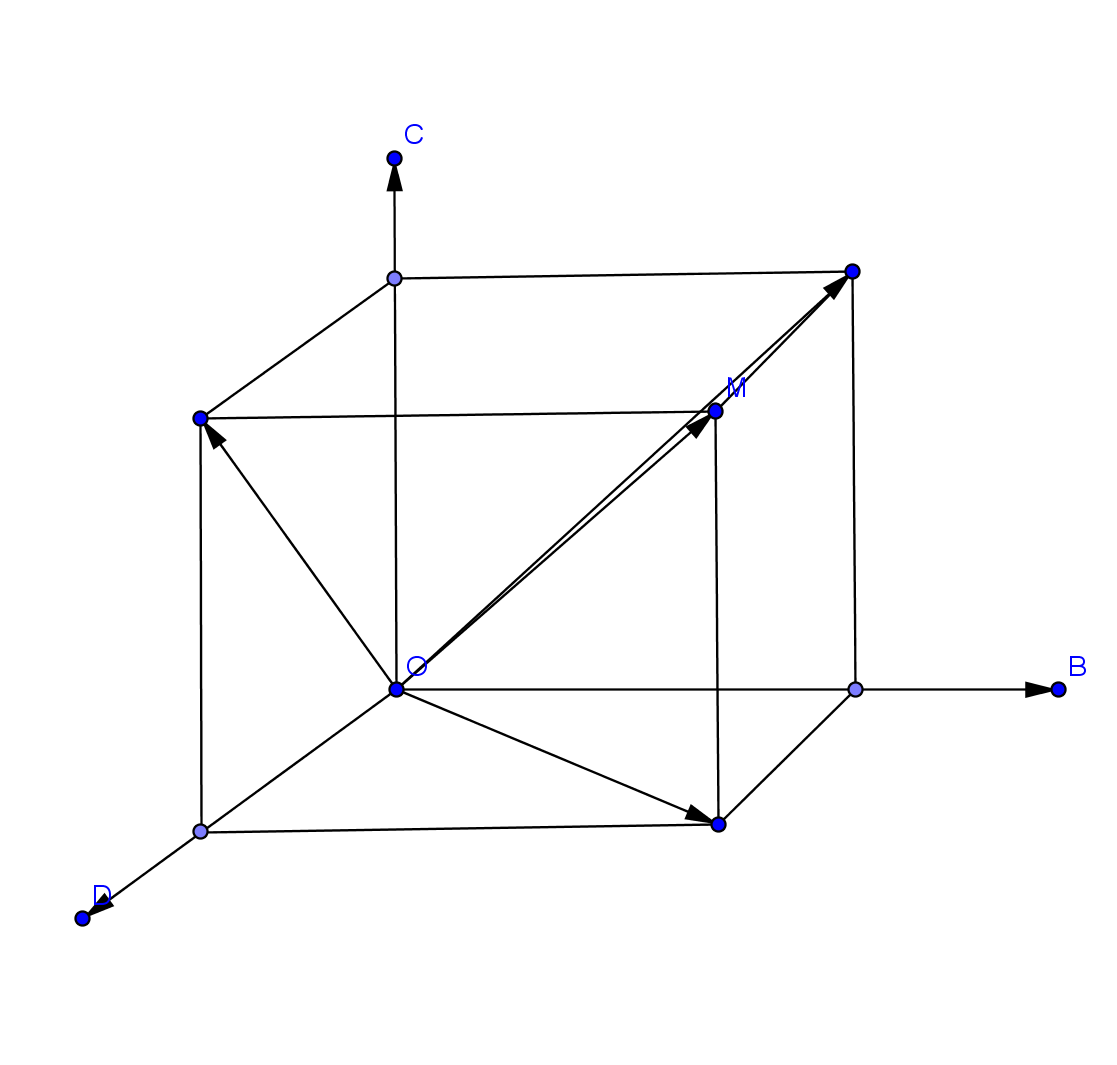
IX predavanje

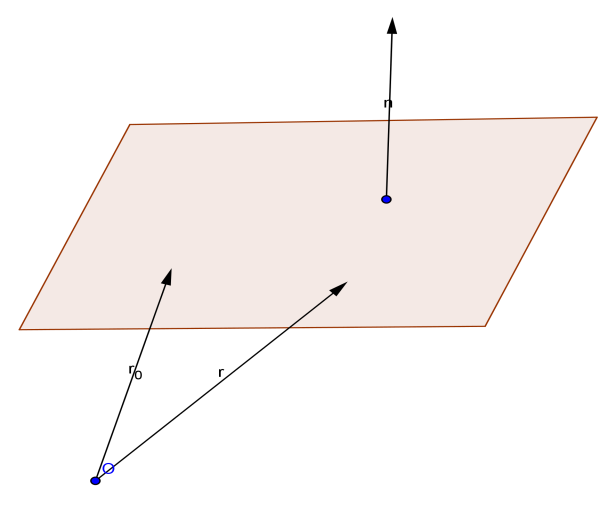
Površi i krive u prostoru

 U trodimenzionom prostoru, svaka tačka ims svoj radijus-vektor

gde su ortovi osa, a koordinate tačke su (x, y, z).

Najpre ćemo dati jednačine i međusobne odnose ravnih objekata.

1. jednačina ravni

 Ravan je i sama dvodimenzioni vektorski prostor koji je potprostor fizičkog prostora. Uobičajeno je reći, pošto je ravan dvodimenzioni vektorski prostor u trodimenzionom vektorskom prostoru, da je ona prostor kodimenzije 1. Neka ravan prolazi kroz fiksnu tačku i neka je normalna na vektor Tada je njena vektorska jednačina ili gde je Odavde je lako preći na oblik jednačine koji žovemo opšti:

; važiće

ili gde je

Ako ravan prolazi kroz koordinatni početak, njena jednačina je jer koordinate koordinatnog početka moraju da zadovoljavaju jednačinu ravni. Koordinate vektora normale na ravan su date u jednačini i iz nje se čitaju: (do na homogenost).

2) jednačina prave

a) vektorska: prava koja prolazi kroz utvrđenu tačku i paralelna je vektoru , čije su koordinate

.

Ako stavimo , dobija se Parametarske jednačine se dobijaju iz vektorske.

b) Kanonička jednačina iste prave se dobija eliminacijom parametra iz parametarskih jednačina:

Kod ovog oblika jednačine prave, vektor pravca se čita iz imenioca, do na faktor homogenosti. Dopušteno je u imeniocu imati i nulu, ali tada deljenje treba shvatiti isključivo formalno.

Incidencija prave i ravni

Prava i ravan, koje su date svojim jednačinama, incidentne su ako važi

1) dve tačke te prave incidentne su sa ravni

gde su koordinate tačaka odabrane tako da zadovoljavaju jednačinu prave.

2) vektor pravca prave normalan na vektor normale na ravan i ako prava sadrži jednu tačku ravni

.

Prava i ravan su paralelne ako je vektor pravca te prave normalan na vektor normale na tu ravan i ako prava i ravan nemaju zajedničkih tačaka.

U svim ostalim slučajevima, prava prodire ravan u jednoj tački koja se dobija kao jednoznačno određeno rešenje sistema jednačina.

Odstojanje tačke od ravni

Neka je ravan zadata svojom vektorskom jednačinom i neka je tačka zadata svojim radijus-vektorom . Tada je odstojanje tačke od ravni određeno formulom

Dokazaćemo ispravnost ove formule. Da bismo našli to odstojanje, kroz tačku treba da postavimo pravu koja je normalna na ravan Njena jednačina je Zatim treba da odredimo onu tačku prave koja pripada ravni :

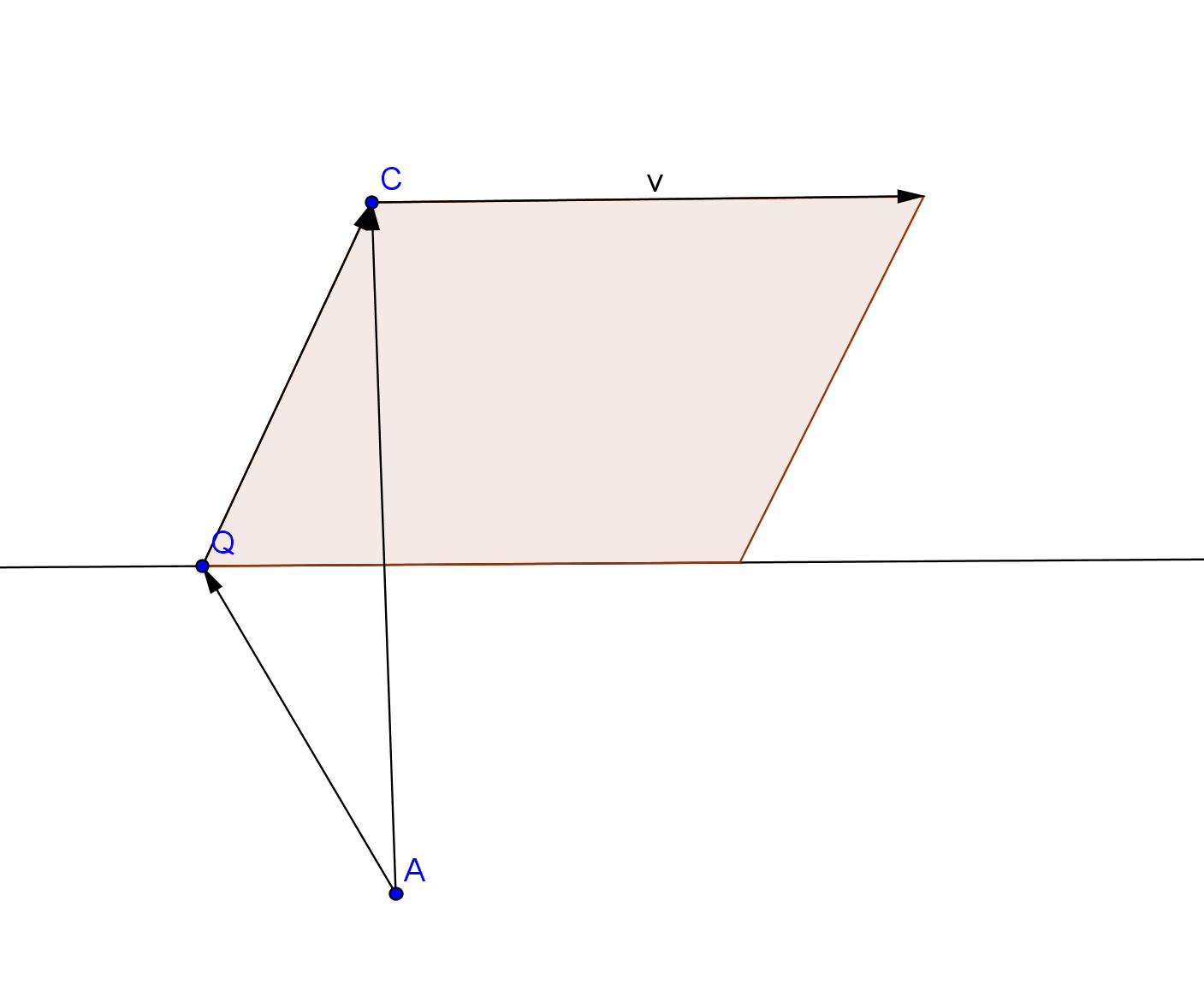
Dobijenu vrednost parametra uvrstimo u jednačinu prave, da bismo videli o kojoj se tačno tački radi.

Međusobno odstojanje ovih dveju tačaka dobijamo kao

Odstojanje tačke od prave

Neka je prava određena svojom tačkom i vektorom pravca ; tačke i su određene vektorima položaja i respektivno.

Da bismo izveli ovu formulu, posmatrajmo paralelogram čije su stranice određene vektorima i



Površina ovog paralelograma je, s jedne strane (osnovica i visina). Sa druge strane, ta površina je Upoređivanjem ova dva rezultata, dobijamo da važi

.

Postoji i drugi način da se izračuna ovo odstojanje: kroz tačku se postavi ravan normalna na pravu, nađe se prodor prave kroz tu ravan i zatim odstojanje tog prodora od date tačke.

Jednačina ravni kroz tri tačke

Neka su date tri tačke svojim radijus vektorima respektivno. Ako tačka sa opštim radijus vektorom treba da pripada toj ravni, onda vektori ne treba da formiraju paralelepiped i mora da važi što može, zbog linearnosti, da se zapiše i ovako:

ili, u skalarnom obliku

Pošto ima više nepoznatih nego jednačina, moraće da važi

Ovakav sistem je homogen i ima bezbroj rešenja. Sva rešenja su između sebe proporcionalna.

Mimoilazne prave su prave koje se ne seku i nisu ni međusobno paralelne, tako da ne pripadaju istoj ravni. One imaju zajedničku normalu. Njihovo odstojanje je odsečak na njihovoj zajedničkoj normali.

Neka su vektorske jednačine ovih dveju pravih

Treba svakako imati u vidu da svaka od ovih dveju pravih ima sopstveni parametar.

Mimoilazne prave pripadaju međusobno paralelnim ravnima. Prikazaćemo to.

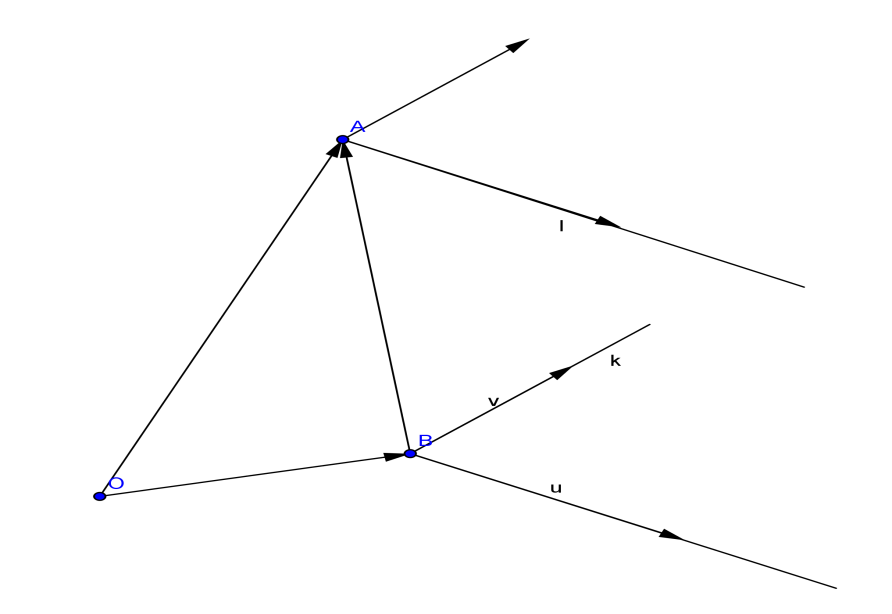
 Zajednička normala ovih dveju paralelnih ravni je poznata ; jedna od njih je zajednička normala ovih dveju mimoilaznih pravih. je prava koja je paralelna sa , a prolazi kroz neku tačku prave i određuju ravan koja ne zavisi od izbora tačke na pravoj . Dakle, tražena normala je normalna na ravan Ako pustimo tu normalu da klizi duž prave ona opisuje ravan koja sadrži pravu a normalna je i na pravu i na pravu i na pravu

Dakle, ta ravan sadrži pravu (dve njene tačke), a normalna je na ravan (sadrži pravu koja je normalna na odnosno jednu njenu tačku.) Ona može da se postavi kroz tri tačke (dva načina) ili kroz jednu tačku, ako se poznaje normala na Kako odrediti normalu na Ona je normalna na i na dakle, to je Kada odredimo jednačinu ravni treba odrediti još i prodor prave kroz nju. To se najlakše radi iz parametarskog oblika. Tražena zajednička normala prolazi kroz tu tačku prodora, a vektor pravca joj je

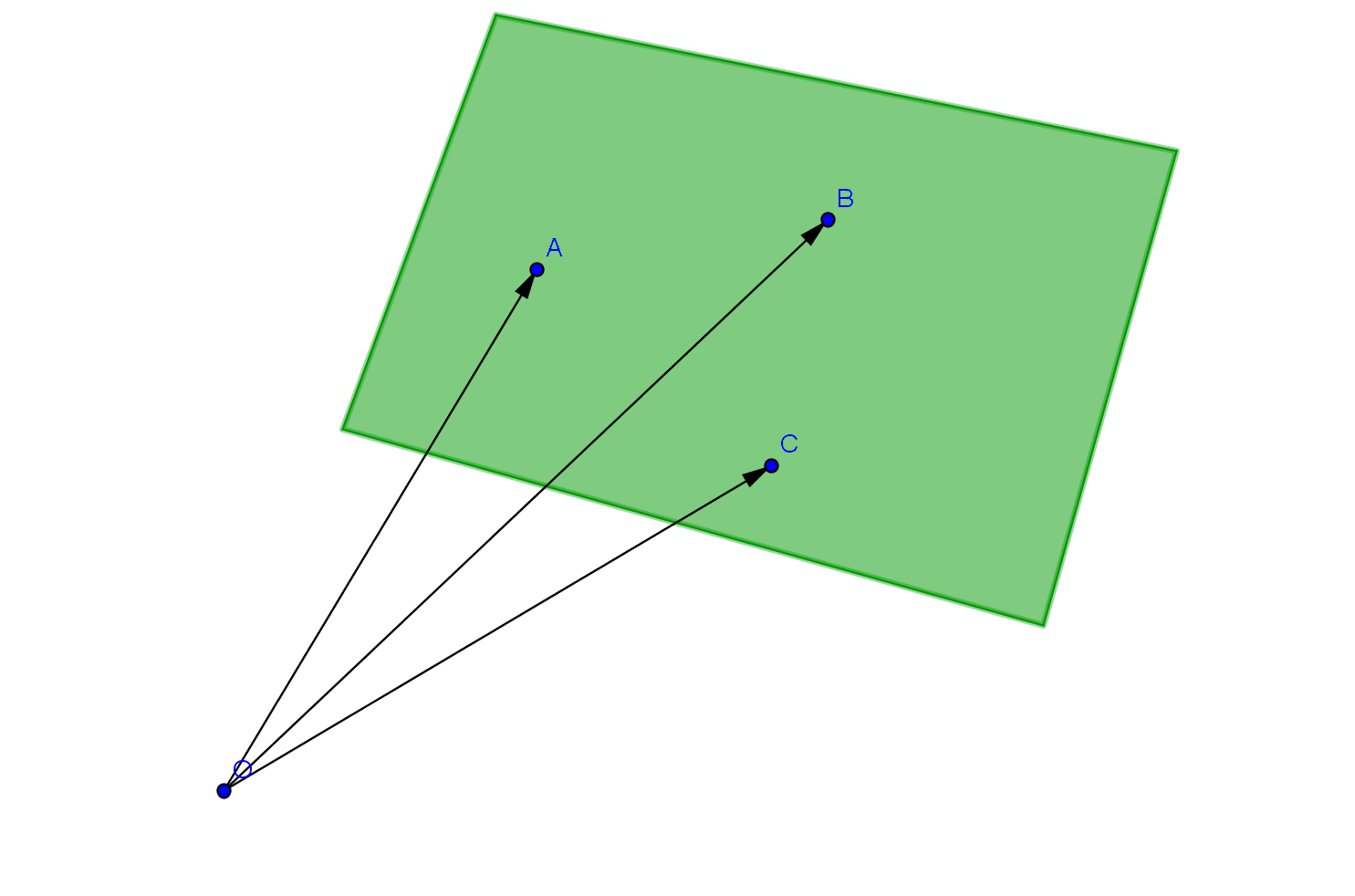
Odstojanje može da se odredi u nastavku ovog metoda, a može i drugačije.

Sada možemo da posmatramo fiksne tačke i na pravama i redom i koordinatni početak Posmatramo paralelepiped čije su osnovice, gornja i donja, određene vektorima i u dvema međusobno paralelnim ravnima; bočna ivica ovog paralelepipeda je duž Zapremina ovog paralelepipeda je Površina njegove baze je Traženo odstojanje je tada visina posmatranog paralelepipeda. Dakle, važi

.



Jednačina ravni, kroz tri tačke, drugi način:



Ta ravan prolazi kroz tačku a njen vektor normale može da se odredi na sledeći način: Tada je vektorski oblik jednačine ove ravni Na desnoj strani tokom računanja ima još sabiraka, ali se oni anuliraju.