VIII predavanje

Krive višeg reda

Kinematički metod opisivanja krive potiče iz mehanike, a opisuje krivu kao putanju po kojoj se kreće tačka koja sledi određene zakone fizike.

1. Cikloidne krive
2. 1. Cikloida



Kružnica poluprečnika $a $(na slici označeno sa $r) $se kotrlja po $x$ osi, a tačka sa njene periferije pri tom kotrljanju opisje cikloidu. Izvešćemo ovde parametarske jednačine cikloide. Neka je tačka *O* (koordinatni početak) početni položaj tačke *A* (na slici *M*) koja opisuje cikloidu. $t$ je ugao za koji se kružnica obrnula ($∢ACB,$ na slici $∢MCQ).$ $a$ je poluprečnik kružnice (na slici obeležen sa $r).$ Važi, jer je kotrljanje bez klizanja,

$$\breve{AB}=OB=at.$$

Za pretpostavljeni položaj tačke $A,$ koordinate su

$$x=OB-AE;y=CB-CE.$$

$E $je tačka koja je na slici obeležena sa $N.$ Međutim, sa slike vidimo da važi

$$AE=asint, CE=acost,$$

odakle se dobijaju parametarske jednačine cikloide

$$x=a\left(t-sint\right), y=a\left(1-cost\right).$$

Sada ćemo izvesti i jednačinu cikloide u Dekartovim koordinatama (druga jednačina je podesnija):

$$\cos(t)=\frac{a-y}{a }⟹t=arccos\frac{a-y}{a }; \sin(\arccos(z)=\sqrt{1-z^{2}})$$

$x=aarccos\frac{a-y}{a }-a\sqrt{1-\frac{(a-y)^{2}}{a^{2}}}$*=*$aarccos\frac{a-y}{a }-\sqrt{a^{2}-a^{2}+2ay-y^{2}}=$

$$=aarccos\frac{a-y}{a }-\sqrt{2ay-y^{2}},$$

što je jednačina cikloide u Dekartovim koordinatama. Izraziti $y$ kao funkciju od $x$ nije moguće u podesnom i elegantnom obliku.

1. 2. epicikloida



Epicikloida nastaje kada se jedna kružnica kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici i to kada je pokretna kružnica u spoljašnjoj oblasti nepokretne. Neka je nepokretna kružnica veća, sa poluprečnikom $a,$ neka je njen centar u koordinatnom početku. Neka je poluprečnik manje kružnice $r.$

Neka je situacija u određenom trenutku opisana gornjom slikom, neka je $t$ ugao za koji se obrnula pokretna (manja) kružnica i neka je $\frac{r}{a}=m.$ Tada važi $\breve{AB}=\breve{BM,} $odnosno $mat=rt$, pri čemu je $∢AOB=mt$ i $∢BMC=t$ ($r=ma).$

Za tačku $M,$ koordinate se mogu dobiti na sledeći način

$$x=OE+FM, y=EF=CE-CF.$$

Može da se izračuna

$$OE=\left(a+r\right)cos∢COE=\left(a+ma\right)cosmt;$$

$FM=masin∢FCM, CF=macos∢FCM, CE=\left(a+ma\right)sinmt.$

$OE $i $CE$ nisu sporne duži; sada treba naći način da se izraze duži $FM$ i $CF.$

$$sin∢FCM=\sin(\left(∢BCM-∢OCE\right))=\sin(\left(t-\frac{π}{2}+mt\right))=-\cos(\left(1+m\right))t;$$

$$cos∢FCM=\cos(\left[\left(1+m\right)t-\frac{π}{2}\right])=\sin(\left(1+m\right))t.$$

Kada to uvrstimo u gornju jednačinu, dobijamo parametarske jednačine epicikloide

$$x=a\left[\left(1+m\right)cosmt-mcos\left(1+m\right)t\right],$$

$$y=a\left[\left(1+m\right)sinmt-msin\left(1+m\right)t\right].$$

* 1. hipocikloida



Hipocikloida se dobija na način koji je u potpunosti analogan načinu za dobijanje epicikloide; jedino ovde uvek ima smisla da pokretna kružnica bude manja od fiksne, jer se nalazi u njenoj unutrašnjosti.

Dakle, ponovo važi $\breve{AB}=\breve{BM}$, $t$ je ugao obrtanja, $\frac{r}{a}=m, mat=rt, ∢AOB=mt, ∢MCB=t.$

Za tačku $M,$ koordinate su $x=OE-FM, y=CE-CF, $ gde je $OE=OC cosmt, CE=OC sinmt.$ Ali, sada je zbog drugačijeg rasporeda tačaka, $OC=a-ma=a\left(1-m\right),$ dok slična relacija važi i za ugao malog trougla koji nam je potreban. Odatle lako dobijamo jednačine hipocikloide na način analogan onom na koji dobijamo jednačine epicikloide

$$x=a\left[\left(1-m\right)cosmt+mcos\left(1-m\right)t\right]$$

$$y=a\left[-\left(1-m\right)sinmt+msin\left(1-m\right)t\right].$$

1. 4. astroida

To je specijalni slučaj hipocikloide kada je $m=\frac{1}{4}.$


Uopšte, za $m=\frac{1}{k}, k>2,$ dobijamo zvezdaste krive. Šta se dobija kada je $k=2?$

1. Spirale
	1. Hiperbolična spirala je zadata jednačinom u polarnim koordinatama $ρ=\frac{a}{φ}.$

Važi $y=\frac{a}{φ}\sin(φ, )$ asimptota je $y=a$ kada $φ⟶0. $Kada $φ⟶\infty , $onda $ρ⟶0.$

2. 2. Arhimedova spirala $ρ=aφ$; ako dopustimo mogućnost $ρ<0,$ onda postoje dve grane ove krive.

2. 3. logaritamska spirala $ρ=a^{kφ}.$

Ako $φ$ uzima vrednosti $0, θ, 2θ, 3θ,…,nθ$

onda $ρ$ uzima vrednosti $1, ρ, ρ^{2}, ρ^{3},…, ρ^{n}$.

Gornji niz je aritmetički, donji je geometrijski:



2. 4. sinusoidne spirale

$ρ^{m}=a^{m}\cos(mφ,)$ $m$ je broj

1. $m=1, x=ρcosφ=acos^{2}φ, y=a\cos(φ\sin(φ, ρ^{2}-ax=0⟹))$

$$x^{2}+y^{2}-ax=0⟹(x-\frac{a}{2})^{2}+y^{2}=\frac{a^{2}}{4},$$

a to je kružnica koja je translirana po $x-$osi tako da prolazi kroz koordinatni početak.

1. $m=-1, ρ=\frac{a}{\cos(φ)};x=a, y=atgφ,$ a to je prava koja je normalna na $x-$osu.
2. $m=2, ρ^{2}=a^{2}\cos(2φ)$



Ovo je Bernulijeva lemniskata ili dvolisna ruža.

1. $m=-2$

$$ρ^{2}=\frac{a^{2}}{\cos(2φ)}⟹ρ^{2}cos^{2}φ-ρ^{2}sin^{2}φ=a^{2}⟹x^{2}-y^{2}=a^{2}.$$

Ovo je jednograna hiperbola. Zašto je jednograna?

1. $m=\frac{1}{2}, ρ=acos^{2}\left(\frac{φ}{2}\right)$ kardioida



1. $m=-\frac{1}{2}; ρ=\frac{2a}{1+cosφ}; $ovo je parabola

$m>0$ kriva je ograničena i sadrži pol koordinatnog sistema

$m<0 $kriva je neograničena

Sve su simetrične u odnosu na polarnu osu. Ako je $m$ prirodan broj, imaće latice.