VI predavanje

Kružnica

Data je jednačinom $(x-p)^{2}+(y-q)^{2}=r^{2}, $gde su $\left(p,q\right)$ koordinate centra, a $r$ je poluprečnik, ili

$x^{2}+y^{2}-2px-2qy+p^{2}+q^{2}=r^{2}$, ili

 $x^{2}+y^{2}-2px-2qy+c=0,$ gde mora da bude zadovoljeno $p^{2}+q^{2}\geq c.$

Bitna je jedinična kružnica.

Polarni koordinatni sistem

Polarne koordinate za neku tačku su ugao $φ $koji radijus vektor tačke zaklapa sa osom (pozitivni smer $x-$ose) i dužina odstojanja tačke od koordinatnog početka (pola koordinatnog sistema). Ovo odstojanje se obeležava sa $ρ.$

Može se primetiti da važi

$$\left(ρ, φ\right)∼(ρ, φ+2kπ)$$

Da bi se izbegla višeznačnost, uzima se da je domen za $ρ$ $\left[0,\infty \right), $a domen za $φ$ je [0, 2$π).$

Veza između polarnih i Dekartovih koordinata

$$x=ρcosφ, y=ρsinφ, ρ=\sqrt{x^{2}+y^{2}}, φ=arctg \frac{y}{x}.$$

Jednačine prelaska iz Dekartov u polarni koordinatni sistem nisu jednoznačno određene.

$ρ=1$ jedinična kružnica sa centrom u polu.

**Definicija.** Kriva drugog reda (konika) u ravni je kriva za čiju proizvoljnu tačku važi da je odnos njenog odstojanja od fiksne tačke $F$ i fiksne prave $d$ u toj ravni konstantan.

Izvođenje jednačine krive drugog reda je odličan primer primene polarnog koordinatnog sistema.

$l=LF=eLH$

Brojna vrednost $e$ je taj odnos koji se pominje u definiciji konike.

$L$ je tačka na konici koja je istovremeno i na pravoj koja je paralelna sa $d$, a prolazi kroz $F;$ uzmimo polarni koordinatni sistem u kome je tačka $F$ središte, a osa je normalna na $d.$ Tada za proizvoljnu tačku $K$konike važi :

$ρ=FK=eKA=e\left(LH-ρcosφ\right)=l-eρcosφ.$
Odavde dobijamo da važi

$$ρ=\frac{l}{1+ecosφ}\left(\*\right),$$

što je jednačina krive drugog reda (konike) u polarnom koordinatnom sistemu. Tačka $F$ je fokus, a $d$ odgovarajuća direktrisa konike. Ako u jednačini $φ$ zamenimo sa $–φ, $jednačina se ne menja, što znači da je konika simetrična u odnosu na osu polarnog koordinatnog sistema, koja se poklapa sa $x-$osom. Tačke $ρ=\frac{l}{1+e} \left(φ=0\right), ρ=\frac{l}{1-e} \left(φ=π\right)$ pripadaju osi $x$, osim ako je $e=1.$

Klasifikacija konika: $e<1 $ elipsa

 $e>1$ hiperbola

 $e=1 $parabola

$e<1 $ za sve moguće vrednosti $φ, ρ$ je konačno i pozitivno, kriva je zatvorena, funkcija je neprekidna.

$e=1⟹ρ$ je konačno i pozitivno za sve $φ, $ osim za $φ=π.$

$e>1$ $:ρ>0$ za $cosφ>-\frac{1}{e}$

 $ρ<0$ za $cosφ<-\frac{1}{e}.$ Zbog ove oblasti nedefinisanosti, hiperbola ima dve grane.

Ako želimo da jednačinu $\left(\*\right)$ prevedemo u Dekartov koordinatni sistem, dobijamo

$$ρ^{2}=\frac{l^{2}}{(1+ecosφ)^{2}}=\frac{l^{2}}{1+2ecosφ+e^{2}cos^{2}φ};$$

$$φ=arctg\frac{y}{x}; \frac{sinφ}{cosφ}=\frac{y}{x}; \frac{1-cos^{2}φ}{cos^{2}φ}=\frac{y^{2}}{x^{2}};$$

$$1-cos^{2}φ=cos^{2}φ\frac{y^{2}}{x^{2}}; 1=cos^{2}φ\frac{x^{2}+y^{2}}{x^{2}}⟹\cos(φ=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}.)$$

Odavde sledi

$$x^{2}+y^{2}=\frac{l^{2}}{1+2e\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}+e^{2}\frac{x^{2}}{x^{2}+y^{2}}}=$$

$$\frac{l^{2}}{\frac{x^{2}+y^{2}+2ex\sqrt{x^{2}+y^{2}}+e^{2}x^{2}}{x^{2}+y^{2}}}=$$

$$=\frac{l^{2}(x^{2}+y^{2})}{(\sqrt{x^{2}+y^{2}}+ex)^{2}}.$$

Iz ovoga sledi $l^{2}=(\sqrt{x^{2}+y^{2}}+ex)^{2}, $ što daje $l=\pm (\sqrt{x^{2}+y^{2}}$ $+ex$), a to daje dve mogućnosti

$$\left(1\right)x^{2}+y^{2}=\left(l+ex\right)^{2 };$$

$$\left(2\right)x^{2}+y^{2}=\left(l-ex\right)^{2 }.$$

Ako stavimo $e=0, $ vidi se da se dobija jednačina kružnice. Dakle, kružnica je specijalni slučaj elipse za $e=0.$ Veličina $e$ se zove ekscentricitet krive.

Kada je $e\ne 1,$ deljenjem jednačine sa $1-e^{2}, $ dobijamo

$$\frac{x^{2}+y^{2}}{1-e^{2}}=\frac{(l-ex)^{2}}{1-e^{2}}=\frac{l^{2}}{1-e^{2}}-\frac{2lex}{1-e^{2}}+\frac{e^{2}x^{2}}{1-e^{2}}.$$

Sada stavimo $\frac{l}{1-e^{2}}=a;$ dobijamo

$$x^{2}+\frac{y^{2}}{1-e^{2}}=la-2eax$$

$$(x+ea)^{2}+\frac{a}{l}y^{2}=la+a^{2}e^{2}=\left(l+e^{2}a\right)a=a^{2}.$$

Ovo je jednačina krive drugog reda, gde je fokus referentna tačka Dekartovog koordinatnog sistema.

Translacijom koordinatnog početka u tačku $\left(-ea, 0\right), $dobija se, posle deljenja sa $a^{2},$

$$\frac{x^{2}}{a^{2}}\pm \frac{y^{2}}{b^{2}}=1,$$

gde je $b^{2}=\left|la\right|=\left|1-e^{2}\right|a^{2};la=\pm b^{2}$ u zavisnosti od toga da li je $e<1$ ili $e>1.$

Dakle, posle ove translacije vidi se da su elipsa i hiperbola simetrične i u odnosu na $y-$osu.

Veličine $a$ i $b$ zovemo poluose elipse i hiperbole.

Hiperbola $\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{y^{2}}{b^{2}}=1⟺\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1$ pripada paru unakrsnih uglova određenih pravama $\frac{y}{b}=\frac{x}{a}$ i $\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}$ , koje zovemo njenim asimptotama.

Ako je $e=1 $(parabola), onda važi

$$ρ^{2}=\frac{l^{2}}{1+2cosφ+cos^{2}φ}=\frac{l^{2}}{\frac{x^{2}+y^{2}+2x\sqrt{x^{2}+y^{2}}+x^{2}}{x^{2}+y^{2}}},$$

odnosno $\frac{l^{2}}{x^{2}+y^{2}+2x\sqrt{x^{2}+y^{2}}+x^{2}}=1$ ili

$$l^{2}=x^{2}+y^{2}+2x\sqrt{x^{2}+y^{2}}+x^{2}=\left(\sqrt{x^{2}+y^{2}}+x\right)^{2},$$

odakle se dobijaju sledeće mogućnosti:

(1) $x^{2}+y^{2}=(x-l)^{2}⟹y^{2}=-2lx+l^{2}=2l(\frac{l}{2}-x)$

$(2)$ $x^{2}+y^{2}=(x+l)^{2}⟹y^{2}=2lx+l^{2}=2l(\frac{l}{2}+x)$,

a zatim, translacijom koordinatnog sistema duž ose $y^{2}=2lx.$

Parametarske jednačine ovih krivih su

* elipsa $x=acost, y=bsint;$
* parabola $x=2lt^{2}, y=2lt$;
* hiperbola $x=acht, y=bsht.$

Zašto se konika zove još i kriva drugog reda? Zato što sa pravom može da ima najviše dve zajedničke tačke.

Elipsa i hiperbola imaju dva para fokus-direktrisa, što sledi iz jednačine (1). Osim toga, one su simetrične u odnosu na koordinatne ose, pa prema tome i u odnosu na koordinatni početak.