X predavanje

Odstojanje tačke od prave, drugi način:

Prava$ l$ je data svojom tačkom $Q$ i vektorom pravca $\vec{ν};$ tačka $A$ima radijus-vektor $\vec{a}, $a tačka $Q $radijus-vektor $\vec{q}.$

 Postoji bezbroj normala iz tačke $A$ na pravu $l;$ one sve pripadaju istoj ravni. Ta ravan prolazi kroz tačku $A $i normalna je na pravu $l.$ Njena jednačina je tada $\left〈\vec{r}-\vec{a}, \vec{ν}\right〉$=$0.$Treba naći tačku prodora $S$ prave $l$ kroz tu ravan i zatim dužinu duži $AS.$ Dakle, $\left〈\vec{q}+t\vec{ν}-\vec{a},\vec{ν} \right〉=\left〈\vec{q}, \vec{ν}\right〉+t\left|\vec{ν}\right|^{2}-\left〈\vec{a},\vec{ν}\right〉=0,$ odakle dobijamo vrednost parametra

$$t=\frac{\left〈\vec{a}-\vec{q},\vec{ν}\right〉}{\left|\vec{ν}\right|^{2}}. $$

Kada se ova vrednost parametra zameni u jednačinu prave, dobija se radijus-vektor tačke $S$: $\vec{s}=\vec{q}+\frac{\left〈\vec{a}-\vec{q},\vec{ν}\right〉}{\left|\vec{ν}\right|^{2}}\vec{ν}.$ Odstojanje tačke $S$ od tačke $A$ je $\left|\vec{s}-\vec{a}\right|=\left|\vec{q}-\vec{a}+\frac{\left〈\vec{a}-\vec{q},\vec{ν}\right〉}{\left|\vec{ν}\right|^{2}}\vec{ν}\right|, $a to u potpunosti odgovara ranije izvedenoj formuli.

Ugao između dveju pravih, bilo da se one seku ili da su mimoilazne, jeste ugao između njihovih vektora pravca.

Ugao između prave i ravni izračunavamo posredno: to je ugao između prave i njene projekcije na tu ravan. Projekcija prave $l$ na ravan $α$ je presek ravni $α$ sa ravni koja sadrži pravu $l$, a normalna je na ravan $α.$ Dakle, prema priloženoj slici, to je ugao koji je suplementan uglu između prave $l$ i normale $\vec{n} $na ravan $α.$ Ak je vektor pravca prave $l$ $\vec{u}$, onda, dakle, važi

$$\sin(β=\frac{\left|\left〈\vec{u}, \vec{n}\right〉\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{n}\right|}.)$$

  Ugao između dveju ravni je ugao normalnog preseka diedra koji one formiraju, odnosno ugao između pravih $a$ i $b$ koje su, redom, prva u ravni $α,$ a druga u ravni $β, $ normalne na ivicu $s$ tog diedra. Pri tome, tačka u kojoj se to posmatra je potpuno proizvoljna. Ako posmatramo normale na $α$ i $β$ u toj tački, vidimo da je ugao između normala podudaran tom uglu normalnog preseka.

Površi nivoa Dekartovog koordinatnog sistema su ravni!

Krivolinijski koordinatni sistemi u prostoru
a) cilindrični koordinatni sistem

$ x=ρcosφ, y=ρsinφ, z=z.$ Cilindrične koordinate tačke u prostoru su $\left(ρ, φ, z\right); ρ$ je odstojanje uočene tačke od $z-$ose, $φ$ je ugao između potega tačke i $x-$ose, $z $je odstojanje tačke od koordinatne ravni $xOy.$

Ako stavimo $ρ=a, $onda je $x^{2}+y^{2}=a^{2}.$ Sistem površi nivoa ove vrste je onda sistem koncentričnih cilindara čija je osa $z$ –osa.

Ako stavimo $φ=const,$ dobijamo za sistem površi nivoa ravni koje sadrže $z-$osu.

Ako stavimo $z=const,$ taj sistem površi novoa su ravni koje su normalne na $z-$osu.

$ρ $nije odstojanje tačke od koordinatnog početka, nego od $z-$ose; ono se pri projektovanju na $xOy$ ravan vidi kao $ρ$ u polarnom koordinatnom sistemu.

**Sfera**

$\left〈\vec{r}-\vec{a},\vec{r}-\vec{a}\right〉=r^{2}$

$$(x-a\_{1})^{2}+(y-a\_{2})^{2}+(z-a\_{3})^{2}=r^{2}.$$

b) sferni koordinatni sistem

Ovde imamo tri krivolinijske koordinate, od kojih je jedna dužinska mera ($ρ, $odstojanje tačke od koordinatnog početka), a druge dve su ugaone, $θ $i $φ.$

Veza između Dekartovih i sfernih koordinata je sledeća:

$$x=ρcosθcosφ, y=ρcosθsinφ, z=ρsinφ.$$

Ugao $θ $je ugao između prave povučene kroz koordinatni početak i posmatranu tačku i njene projekcije na $xOy$ ravan. Ugao $φ$ je ugao između projekcije prave koja prolazi kroz koordinatni početak i posmatranu tačku i $x-$ose.

Može se primetiti da važi $x^{2}+y^{2}+z^{2}=r^{2}.$

Površi nivoa u ovom sistemu:

1) Za $ρ=const,$ dobijamo razne koncentrične sfere, čiji je centar u koordinatnom početku.

2) Ako je $φ$ konstantno, a $ρ$ i $θ$ proizvoljni, dobijamo razne ravni koje sve sadrže $z-$osu.

3) Ako je $θ$ konstantno, a $ρ$ i $φ$ proizvoljni, dobijamo konuse sa vrhom u koordinatnom početku; njihov otvor je $2\left(\frac{π}{2}-θ\right).$

Sferne koordinate se zovu još i Merkatorove koordinate- geografska širina i dužina, tablice efemerida.

c) rotacione (obrtne) površi





Ako je zadata neka ravna kriva u $xOz$ ravni svojim parametarskim jednačinama $x=x\left(t\right), y=y\left(t\right), $pustimo da ona rotira oko $z-$ose; tada će svaka tačka te krive opisivati kružnicu poluprečnika $x$, sa centrom na $z-$osi, na visini $z$ od $xOz$ ravni. To znači da, ako celu stvar posmatramo u cilindričnom koordinatnom sistemu, onda ono što je u gornjoj jednačini krive koja generiše obrtnu površ (generatrise) $x(t)$ zapravo postaje $ρ.$

Primeri rotacionih površi su sfera, cilindar, konus, torus,...

Izvedimo sada jednačinu torusa. Torus nastaje rotacijom ekscentrično postavljenog kruga sa centrom na $x-$osi oko $z-$ose.





Torus ima oblik automobilske gume, šlaufa,... Parametarske jednačine kružnice su $x\left(t\right)=a+b\cos(t,) z\left(t\right)=bsint. $Dakle, pri prelasku na parametarske cilindrične koordinate, važiće $ρ\left(t\right)=\sqrt{x^{2}+y^{2}}=a+b\cos(t,) z\left(t\right)=bsint.$ Ako želimo jednačinu torusa u Dekartovim koordinatama, moramo imati u vidu da se po znaku razlikuju gornja i donja polovina torusa.

$$x^{2}+y^{2}=a^{2}+2ab\cos(t)+b^{2}cos^{2}t, bcost=b\sqrt{1-sin^{2}t}=\sqrt{b^{2}-z^{2}};$$

$$x^{2}+y^{2}=a^{2}+2a\sqrt{b^{2}-z^{2}}+b^{2}-z^{2}, \sqrt{b^{2}-z^{2}}=p,x^{2}+y^{2}+2ap+p^{2}+a^{2}=0. $$

Zatim se reši ova kvadratna jednačina; jedno rešenje daje gornju, a drugo donju polovinu torusa. Mora biti $a>b.$