I predavanje

Vektori u geometriji

U ovom kursu analitičke geometrije, izostavićemo napredniji matematički koncept, pošto ćemo ovde proučavati „fizički” prostor R^3. Ideja o analitizaciji geometrije je ideja o svođenju geometrijskih relacija između objekata u prostoru na brojeve i rad sa brojevima (to je koordinatni princip koji je uveo u XVII veku Rene Dekart).

Analitička geometrija je moćna alatka u matematici i cilj ovog predmeta je da tu alatku studentima obezbedi.

Nasuprot ideji o radu sa brojevnim sistemima u geometriji stoji sintetička geometrija koja ima aksiomatski prilaz objektima.

Osnovna alatka za uvođenje koordinatne metode je vektor. Ako izostane vektorski prilaz, ljudi analitičku geometriju uglavnom shvataju kao skup složenih formula za koje su im potrebne nekakve tablice koje će uvek imati u džepu. Međutim, korišćenje vektora kao osnovne alatke omogućuje da se sve formule brzo i lako izvedu.

U „fizičkom” prostoru, smatramo da je poznato šta su to pravac i dužina, a u okviru pravca i smer. Fizički prostor je metrički.

Definicija. Predstavnik vektora je duž AB, kod koje su uloge krajnjih tačaka različite: prvu zovemo početna, a drugu krajnja. Takvog predstavnika vektora obeležavamo sa $\overrightarrow{AB}$.

Definicija. U skupu predstavnika vektora u R^3, može se uvesti relacija ekvivalencije ω na sledeći način:

- $p(A, B) \parallel p(C, D)$ (isti pravac)
- $[AB] \cong [CD]$ (isti intenzitet)
- $\eta_{p(A,C)}(B, D)$ (isti smer ili orijentacija)

Definicija. Vektor u R^3 je klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju ω u skupu predstavnika vektora u R^3.

Sada ćemo izložiti osobine međusobnog odnosa vektra i skalara. Skalari su veličine drugačije prirode od vektora. U standardnoj analitičkoj geometriji, to su realni brojevi, koji čine polje. Izložićemo ovde osobine množenja vektora skalarom, pri čemu ćemo skalare obeležavati malim grčkim slovima, a vektore malim latinskim sa strelicom iznad.

Osobine množenja vektora skalarom

1. $\alpha\vec{v} \in V$ (V označava vektorski prostor);
2. $\vec{v}$ i $\alpha\vec{v}$ imaju isti pravac;
3. $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$ (obratiti pažnju na razliku između intenziteta i apsolutne vrednosti, bez obzira što se koriste iste oznake);
4. smer isti za α pozitivno, smer suprotan za α negativno;
5. 0 $\cdot\vec{v} = \vec{0}$ (ovo je nov pojam, nula-vektor).

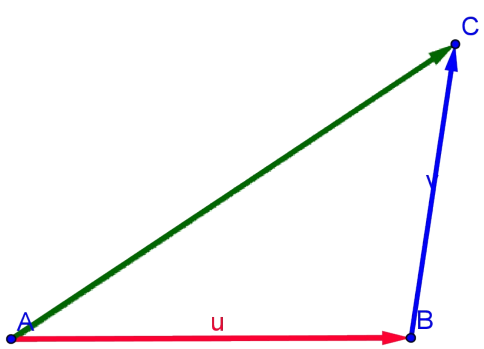
Osobine množenja vektora skalarom:

- $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$;
- $(\alpha+\beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}$;
- $\alpha(\vec{v}+\vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}$.

Poslednje dve osobine nisu jasne, jer još nismo definisali množenje vektora skalarom.

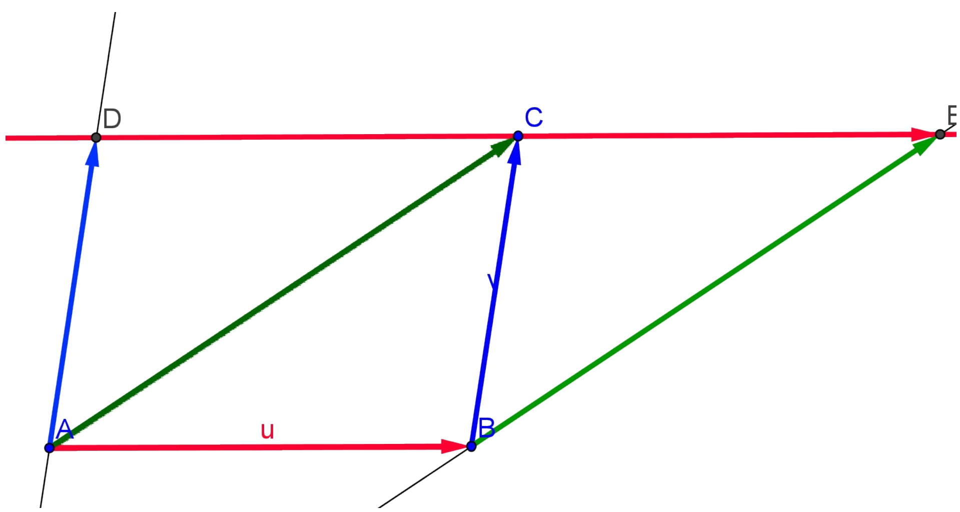
Definicija. Predstavnik zbira dva vektora, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ dobija se tako što se predstavnik prvog sabirka nadoveže na predstavnika drugog sabirka tako da je krajnja tačka prvog istovremeno početna tačka drugog sabirka. Zbir dva vektora je predstavljen orijentisanom duži čija je početna tačka početna tačka prvog sabirka, a krajnja tačka krajnja tačka drugog sabirka.

Kod sabiranja vektora je prisutna fizička motivacija. Ovo izgleda kao superpozicija sila, kao, naprimer, plovljenje čamca niz reku. A gde je tu matematika?



Teorema 1. Sabiranje vektora u R^3 je komutativna operacija.

Dokaz. Ako se promeni redosled nadovezivanja u smislu definicije, kroz tačku C povučemo pravu paralelnu sa pravom $p(A,B)$ i na njoj sa iste strane prave $p(A,C)$ na kojoj je tačka B odredimo tačku D takvu da je zadovoljeno $[AB]\cong[CD]$. Kako su $[AB]$ i $[CD]$ paralelne i podudarne duži, četvorougao $ABCD$ je paralelogram, pa je i drugi par njegovih stranica par paralelnih i podudarnih duži. (pogledati sliku na naspramnoj strani)



Odavde sledi mogućnost alternativne definicije sabiranja vektora, iz koje se vidi komutativnost sabiranja.

Definicija. Linearna kombinacija skupa vektora $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ je vektor $\vec{v}=\alpha_1\vec{e}_1+\dots+\alpha_k\vec{e}_k$, gde su α_i skalarne vrednosti.

Definicija. Skup vektora $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ je linearno nezavisan ako važi $\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_k \vec{e}_k = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, k$.

Na osnovu ovih definicija možemo da formiramo pojam vektorskog prostora. Skup generatora je skup vektora preko čije linearne kombinacije može da se prikaže svaki vektor iz prostora. Baza vektorskog prostora je minimalni skup generatora ili (što je isto) linearno nezavisni skup generatora.

$B = \{\vec{e}_k\}, k = 1, \dots, n, \dots$

$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_k \vec{e}_k$, x_i su koordinate vektora.

Na taj način, vrši se preslikavanje vektorskog prostora u realni (fizički) prostor.

Teorema 2. Neka je $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ baza vektorskog prostora. Tada važi

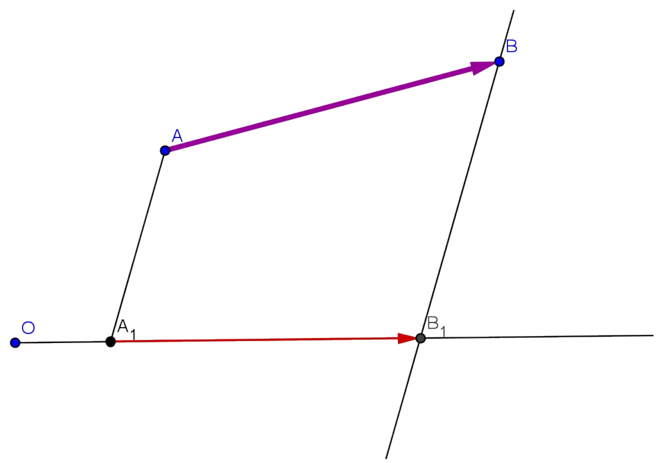
1. dva vektora su jednaka ako i samo ako su jednake njihove koordinate u odnosu na bazu B.
2. svaka koordinata zbira dvaju vektora jednaka je zbiru odgovarajućih koordinata vektora-sabiraka.
3. svaka koordinata proizvoda skalara i vektora jednaka je proizvodu tog skalara i odgovarajuće koordinate vektora.

Ova teorema se lako dokazuje ako se ima u vidu definicija linearne nezavisnosti, za vektore baze.

Da bi bile poznate koordinate neke tačke X u trodimenzionom prostoru, potrebno je da bude zadata tačka O kao element referentnog sistema (koordinatni početak). Tako je jednoznačno određen vektor $\overrightarrow{OX}$ (radijus-vektor tačke X).

U V^3, dva nekolinearna vektora određuju ravan. Ako se odabere i treći tako da ne pripada toj ravni, oni su linarno nezavisni i predstavljaju bazu. Koordinatne ose su nosači ovih triju vektora.

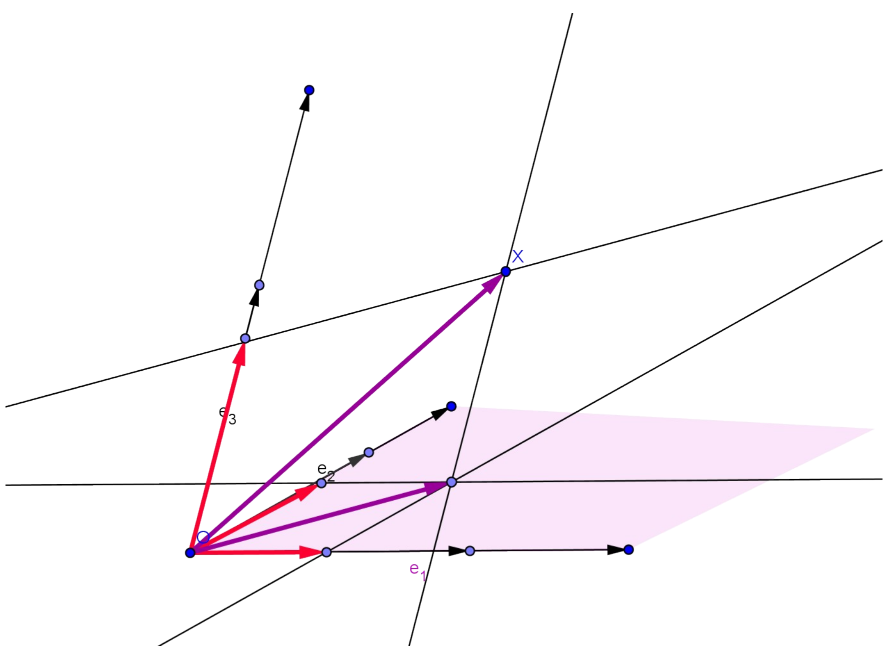
Projektovanje na osu:



$pr_o\left(\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{A_1B_1}$

ovo je projektovanje na osu koje je paralelno i vektorsko

Skalar-projekcija vektora $\overrightarrow{AB}$ na osu o je $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$.



Ovde se lepo vide i vektor i skalar-projekcije vektora na koordinatne ose. $\vec{e}_i$ su jedinični vektori (ortovi) u pravcima koordinatnih osa. Početna tačka O i ose čine koordinatni sistem. Skalar-projekcije vektora $\overrightarrow{OX}$ na ose su koordinate tačke X u odnosu na dati koordinatni sistem.