UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Ivan Prokić

FUNKCIONALNO GUSTE RELACIONE ALGEBRE

-master teza-

Novi Sad, 2014

Sadržaj

Predgovor

Iz proučavanja osobina binarnih relacija nastale su relacione algebre. Alfred Tarski je prvi koji je napravio odabir najvažnijih osobina koje važe za sve binarne relacije na proizvoljnim skupovima. On je 1941. godine, odabirajući neke osobine za aksiome, uveo pojam relacione algebre. Sistem aksioma koje je Tarski predložio za opisivanje relacionih algebri biće osnovno polazište i u ovom radu.

Problemi reprezentacije u matematici su u suštini problemi jačine aksiomatskog sistema. Konkretno, u slučaju sistema aksioma relacione algebre problem reprezentacije glasi: da li je svaki algebarski sistem koji zadovoljava predložene aksiome neka od algebri binarnih relacija? Tarski je mislio da je odgovor pozitivan, sve dok američki matematičar Lyndon nije uspeo da konstruiše algebru koja zadovoljava sve aksiome Tarskog, ali nije izomorfna ni jednoj algebri binarnih relacija. Takva algebra se naziva nereprezentabilna relaciona algebra.

Jónsson i Tarski [10] su pokazali da je svaka (apstraktna) atomična relaciona algebra sa funkcionalnim atomima reprezentabilna kao algebra binarnih relacija. Oni su izveli zaključak da svaka relaciona algebra u kojoj je jedinica suma konačno mnogo funkcionalnih elemenata reprezentabilna kao algebra binarnih relacija. Tarski je postavio pitanje da li reprezentabilnost važi i za svaku funkcionalno gustu relacionu algebru, to jest svaku relacionu algebru u kojoj je 1 supremum nekog (konačnog ili beskonačnog) skupa funkcionalnih elemenata.

Potvrdan odgovor na ovo pitanje dali su Maddux i Tarski [14] i [13]. Jónsson i Tarski su dali svoj opis za sve kompletne i atomične relacione algebre sa funkcionalnim elementima, koristeći algebre kompleksa aksiomatski definisanog generalizovanog Brandtovog grupoida. Specijalno, dokazali su da je prosta relaciona algebra kompletna i atomična ako i samo ako je izomorfna algebri kompleksa Brandtovog grupoida.

U ovom radu predstavljen je drugačiji dokaz teoreme reprezentacije Maddux-Tarskog, koji je bliži originalnom dokazu teoreme reprezentacije Jónssona i Tarskog, a takođe i standardnoj Cayley-evoj teoremi reprezentacije za grupe. Potom će biti pokazano da je funkcionalno gusta relaciona algebra koja je prosta ili atomična ili bez atoma. Iz toga ćemo imati da se kompletizacija svake funkcionalno guste relacione algebre može dekomponovati na direktan proizvod $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ gde je: $\mathcal{B}$ direktan proizvod prostih, funkcionalno gustih relacionih algebri od kojih je svaka ili atomična ili bez atoma, a $\mathcal{C}$ je ili trivijalna (jednoelementna) ili je netrivijalna funkcionalno gusta relaciona algebra koja je bez atoma i nema prostih faktora, zato što je njena Booleova algebra idealnih elemenata bez atoma.

U uvodnom delu, pored definicija i osnovnih osobina za mreže i Booleove algebre, dati su i dokazi teorema o reprezentabilnosti distributivnih mreža i Booleovih algebri. Ovo poglavlje se najviše oslanja na knjigu "Bulove algebre i funkcije" [17].

Drugo poglavlje počinje sa definicijom i aritmetikom relacionih algebri. U nastavku drugog poglavlja definisane su Booleove algebre sa operatorima, a zatim i neki specijalni elementi relacionih algebri koji će biti neophodni za dalju diskusiju. Ovaj deo rada najvećim delom se oslanja na knjigu "Relacione algebre" [12], kao i na rad "Functionally dense relation algebras" [1].

Treće poglavlje sadrži definiciju reprezentabilnosti za relacione algebre. U ovom delu rada, pored teoreme o reprezentabilnosti atomičnih relacionih algebri sa funkcionalnim atomima, dat je i primer nereprezentabilne relacione algebre.

Poslednje poglavlje je posvećeno funkcionalno gustim relacionim algebrama. U ovom delu rada data je teorema o reprezentabilnosti funkcionalno gustih relacionih algebri, kao i razni opisi za funkcionalno guste realcione algebre, i to: prvo za one sa funkcionalnim atomima, zatim za one koje su bez atoma i na kraju za one čija je Booleova algebra idealnih elemenata bez atoma. Treće i četvrto poglavlje se takođe najvećim delom oslanjaju na rad "Functionally dense relation algebras" [1].

Na kraju želim da izrazim zahvalnost svom mentoru, dr Rozáliji Madarász Szilágyi, kako na odabiru ovako zanimljive teme, tako i na ažurnosti i svesrdnoj pomoći. Zahvalnost dugujem i dr Ivici Bošnjaku, na korisnim savetima, kao i dr Siniši Crvenkoviću.

Ivan Prokić

Glava 1

Uvod

1.1 Mreže i reprezentabilnost distributivnih mreža

Da bismo došli do pojma relacione algebre najpre ćemo se upoznati sa pojmom mreže, a potom i Booleove algebre.

Definicija 1.1 **Mreža** *je uređen skup* $\mathcal{L} = (L, \leq)$ *u kome za svaka dva elementa* a *i* b *postoji* $\inf\{a, b\}$ *i* $\sup\{a, b\}$.

Napomenimo da infimum praznog skupa postoji u L ako i samo ako u L postoji najveći element, i taj infimum jednak je najvećem elementu. Analogno, supremum praznog skupa postoji ako i samo ako u L postoji najmanji element, i supremum je jednak najmanjem elementu.

Tvrđenje 1.2 *Ako je* $(L, \leq)$ *mreža, onda za svaki konačan podskup* M *skupa* L *postoje* $\inf M$ *i* $\sup M$.

Dokaz. Dokaz izvodimo indukcijom po broju elemenata u skupu M. Ako je $M = \{a\}$, onda je $\inf M = \sup M = a$. Ako M ima dva elementa onda infimum i supremum postoje po pretpostavci. Dalje, neka je $M = \{a_1, ..., a_n\}$ i $p = \inf M$. Ako je $b \in L$, onda, budući da je L mreža, $\inf(M \cup \{b\}) = \inf\{p, b\}$, što se neposredno proverava. Po indukciji, svaki konačan podskup od L tako ima infimum. Dokaz da postoje i supremumi je analogan. □

Definicija 1.3 **Kompletna mreža** *je uređeni skup u kome svaki podskup ima infimum i supremum.*

Dakle, u kompletnoj mreži svaki podskup ima infimum i supremum, uključujući prazan skup i sam skup L. Infimum i supremum skupa L su, respektivno, najmanji 0 i najveći element 1. Isto važi i za prazan skup, samo u obrnutom redosledu: $\inf(\emptyset) = 1$ i $\sup(\emptyset) = 0$.

Definicija 1.4 *Mreža je* **ograničena**, *ako je ograničena kao uređen skup, to jest ako poseduje najmanji element* 0 *i najveći* 1.

Posledica 1.5 *Svaka kompletna mreža je ograničena (odnosno ima najmanji i najveći element).*

Kao posledica tvrđenja 1.2 za konačne mreže važi sledeće tvrđenje.

Posledica 1.6 *Svaka konačna mreža je kompletna i ograničena.*

Primer 1.7 *1. Svi skupovi brojeva, od prirodnih do realnih, jesu mreže u odnosu na poredak $\leq$, jer u tim uređenim skupovima*

$$\inf\{a,b\} = \min\{a,b\}, \quad a \quad \sup\{a,b\} = \max\{a,b\},$$

pa infimum i supremum za dvoelementni skup uvek postoje.

U odnosu na kompletnost, navedene mreže brojeva se razlikuju. Skup $\mathbb{R}$ realnih brojeva u odnosu na $\leq$ nije potpuna mreža, ali se lako kompletira dodavanjem najmanjeg $-\infty$, i najvećeg elementa ∞, i definiše se tako da $-\infty \leq x \leq \infty$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Takvo kompletiranje ne daje rezultat u slučaju skupa $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva jer i dalje skup $\{x \in \mathbb{Q}, x^2 < 2\}$ kao ni slični, analogno konstruisani skupovi, nema ni infimum ni supremum, a ima i donja i gornja ograničenja.

2. **Lanac** *je linearno uređen skup $(P, \leq)$, to jest svaka dva elementa x, y su uporedivi $x \leq y$ ili $y \leq x$.*

   Svaki lanac je mreža:

$$\inf\{a,b\} = \min\{a,b\}, \quad a \quad \sup\{a,b\} = \max\{a,b\},$$

3. *Partitivni skup $P(A)$, za neki neprazan skup A, je kompletna mreža u odnosu na inkluziju $\subseteq$, jer je infimum svake kolekcije skupova njen presek, a supremum unija.*

4. *Uređeni skup $(\mathbb{N}, |)$ je mreža, jer je*

$$\inf\{a,b\} = NZD\{a,b\}, \quad a \quad \sup\{a,b\} = NZS\{a,b\}.$$

   Ova mreža nije kompletna (dovoljno je samo primetiti da nije ograničena).

5. *Neka je $(G, \circ, ^{-1}, \iota)$ grupa i sa $Sub(G)$ označimo familiju svih podgrupa grupe G. Tada je parcijalno uređeni skup $(Sub(G), \subseteq)$ (gde je $\subseteq$ skupovna inkluzija) mreža (***mreža podgrupa***), jer je za H, K podgrupe grupe G,*

$$\inf\{H,K\} = H \cap K,$$

$$\sup\{H,K\} = H \vee K = \cap\{M \in Sub(G) : H \cup K \subseteq M\}.$$

   Presek svake familije podgrupa je ponovo podgrupa date grupe G, pa infimum postoji u datom parcijalno uređenom skupu. Ova mreža je kompletna.

6. *Ponovo posmatramo grupu $(G, \circ, ^{-1}, \iota)$ i sa $\mathcal{N}(G)$ označimo skup svih normalnih podgrupa grupe G. Tada je parcijalno uređeni skup $(\mathcal{N}(G), \subseteq)$ mreža (***mreža normalnih podgrupa***), jer je za H, K podgrupe grupe G,*

$$\inf\{H,K\} = H \cap K,$$

$$\sup\{H,K\} = H \circ K = \{h \circ k : h \in H, k \in K\}.$$

Definicija 1.8 *Neka je* $(L \leq)$ *mreža sa najmanjim elementom,* 0*. Element* a *iz* L *se naziva* **atom** *ako važi* $a \neq 0$ *i ako postoji* b *takvo da* $(0 \leq b \leq a)$*, onda je* $b = 0$ *ili* $b = a$*. Kaže se da* a *pokriva* 0*. Skup svih atoma* L *označavamo sa* $\mathcal{A}t(L)$*.*

Definicija 1.9 *Mreža sa najmanjim elementom* (0)*, je* **atomična** *ako za svaki nenula element* s *postoji atom* a *takav da je* $a \leq s$*.*

Primer 1.10

1. *U* $(P(A), \subseteq)$*, gde je* A *neprazan skup, atomi su jednočlani skupovi. Dakle, ova mreža je atomična jer za svaki neprazan podskup* B *skupa* A *postoji atom* $\{b\} \subseteq B$*, jer je* B *neprazan.*
2. *U* $(\mathbb{N}, \leq)$ *jedini atom je* 1*, a u* $(\mathbb{N}, |)$ *atomi su prosti brojevi. Obe ove mreže su atomične.*
3. *Svaka konačna mreža je atomična.*
4. *Mreža* $([0,1], \leq)$ *nema atoma, pa nije ni atomična.*

Mreže možemo definisati i na drugi način, kao algebarsku strukturu.

Definicija 1.11 **Mreža** *je algebra* $\mathcal{L} = (L, +, \cdot)$*, gde važe sledeći identiteti:*

$$r + s = s + r,\ r \cdot s = s \cdot r \ \ \textit{(komutativnost)},$$

$$r + (s + t) = (r + s) + t,\ r \cdot (s \cdot t) = (r \cdot s) \cdot t \ \ \textit{(asocijativnost)},$$

$$r = r + (r \cdot s),\ r = r \cdot (r + s) \ \ \textit{(apsorptivnost)},$$

$$r + r = r,\ r \cdot r = r \ \ \textit{(idempotentnost)}.$$

Definicija 1.12 *Mreža je* **modularna** *ako važi:*

$$(r \cdot s) + (s \cdot t) = s \cdot ((r \cdot s) + t) \ \ \textit{(modularnost)}.$$

Mreža je **distributivna** *ako zadovoljava:*

$$r \cdot (s + t) = (r \cdot s) + (r \cdot t),\ r + (s \cdot t) = (r + s) \cdot (r + t) \ \ \textit{(distributivnost)}.$$

Sledeća teorema pokazuje da su dve definicije mreže zapravo ekvivalentne.

Teorema 1.13 *Ako je* $(L, \leq)$ *mreža definisana kao uređen skup, u smislu definicije 1.1, tada su sa*

$$r + s = \sup(\{r, s\}) \ \ i \ \ r \cdot s = \inf(\{r, s\})$$

definisane operacije $+$ *i* $\cdot$ *tako da je* $(L, +, \cdot)$ *mreža definisana kao algebarska struktura, u smislu definicije 1.11 i da je zadovoljeno:*
$r \leq s$ *akko* $r + s = s$*.*

Ako je $(L, +, \cdot)$ *mreža definisana kao algebarska struktura, u smislu definicije 1.11, tada je sa*

$$r \leq s \ \ \textit{akko} \ \ r + s = s$$

definisano parcijalno uređenje na L*, tako da je* $(L, \leq)$ *mreža, u smislu definicije 1.1, i važi*

$$\sup(\{r, s\}) = r + s \ \ i \ \ \inf(\{r, s\}) = r \cdot s.$$

Dokaz. Neka je $(L, \leq)$ mreža definisana na prvi način. Dokazujemo da za definisane operacije važe komutativnost, asocijativnost, apsorpcija i idempotentnost. Komutativnost sledi neposredno iz definicije infimuma i supremuma skupa (redosled elemenata nije svojstvo skupa). Asocijativnost je tačna, jer se obe strane jednakosti odnose na isti skup $\{r, s, t\}$. Takođe važi apsorpcija, jer za sve $r, s \in L$ imamo

$$r = \sup(\{r, \inf(\{r, s\})\}), \quad \text{odnosno} \quad r = \inf(\{r, \sup(\{r, s\})\}),$$

jer je $\inf(\{r, s\}) \leq r$ odnosno $r \leq \sup(\{r, s\})$. Idempotentnost važi, jer je jasno da se infimum i supremum jednoelementnog skupa poklapaju sa tim elementom. Treba još dokazati da važi $r \leq s$ akko $r + s = s$. Ta ekvivalencija je tačna, jer za sve $r, s \in L$ važi

$$r \leq s \ \text{ akko } \ \sup(\{r, s\}) = s.$$

Neka je sada $(L, +, \cdot)$ mreža definisana na drugi način. Uočimo prvo da je uslov $r + s = s$ ekvivalentan sa uslovom $r \cdot s = r$. To sledi iz

$$r + s = s \quad \Rightarrow \quad r \cdot s = r \cdot (r + s) = r,$$

zbog apsorpcije. Isto tako

$$r \cdot s = r \quad \Rightarrow \quad r + s = r \cdot s + r = r,$$

takođe zbog apsorpcije. Relacija $\leq$, definisana sa

$$r \leq s \ \text{ akko } \ r + s = r,$$

je relacija parcijalnog uređenja: za sve $r, s, t \in L$ imamo

$$r \leq r \ \text{ jer je } \ r + r = r,$$

dakle važi refleksivnost. Antisimetričnost dobijamo iz

$$\begin{aligned}(r \leq s \text{ i } s \leq r) \quad &\Rightarrow \quad (r + s = s \text{ i } s + r = r) \\ &\Rightarrow \quad r = s,\end{aligned}$$

zbog komutativnosti. Za dokaz tranzitivnosti posmatrajmo

$$\begin{aligned}(r \leq s \text{ i } r \leq t) \quad &\Rightarrow \quad (r + s = s \text{ i } s + t = t) \\ &\Rightarrow \quad r + t = r + (s + t).\end{aligned}$$

Odatle imamo da je

$$r + (s + t) = (r + s) + t = s + t = t,$$

što znači da je $r \leq t$. Dobili smo da je $(L, \leq)$ parcijalno uređen skup. Ostaje još da se dokaže

$$\sup(\{r, s\}) = r + s \ \text{ i } \ \inf(\{r, s\}) = r \cdot s.$$

Imamo $r \leq r + s$ i $s \leq r + s$, jer je $r + (r + s) = r + s$ i $s + (r + s) = r + s$. Dalje, ako je $r \leq t$ i $s \leq t$ sledi $r + s \leq t$ jer je

$$\begin{aligned}(r \leq t \text{ i } s \leq t) \quad &\Rightarrow \quad r + t = t \text{ i } s + t = t \\ &\Rightarrow \quad r + t + s + t = t \\ &\Rightarrow \quad (r + s) + t = t \\ &\Rightarrow \quad r + s \leq t.\end{aligned}$$

Slično kao za zbir, $r \cdot s \leq r$ i $r \cdot s \leq s$. Ako uzmemo $r \leq t$ i $s \leq t$ dobijamo

$$\begin{aligned} t \cdot r = t \text{ i } t \cdot s = t \quad &\Rightarrow \quad t \cdot r \cdot t \cdot s = t \cdot t \\ &\Rightarrow \quad t \cdot (r \cdot s) = t \\ &\Rightarrow \quad t \leq r \cdot s, \end{aligned}$$

čime je dokaz kompletiran.

□

Primer 1.14 *1. Operacije supremuma i infimuma, koje se na partitivnom skupu proizvoljnog nepraznog skupa A izvode iz relacije inkluzije su redom presek i unija. Odgovarajuća algebarska struktura je $(P(A), \cup, \cap)$.*

2. Za mrežu $(\mathbb{N}, |)$ operacije infimuma i supremuma su definisane sa $\inf\{a, b\} = NZD\{a, b\}$, a $\sup\{a, b\} = NZS\{a, b\}$, pa je odgovarajuća algebarska struktura $(\mathbb{N}, NZS, NZD)$.

3. Za mrežu $(Sub(G), \subseteq)$, odgovarajuća algebarska struktura je $(Sub(G), \vee, \cap)$.

Da bismo dokazali teoremu Birkhoff-Stone o reprezentabilnosti distributivnih mreža, moramo uvesti pojam prostog ideala i izomorfizma za mreže.

Definicija 1.15 Ideal *u mreži L je njen neprazan podskup I koji ispunjava uslove*

1. iz $r, s \in I$ sledi $r + s \in I$;

2. iz $r \in I$ i $a \leq r$ sledi $a \in I$.

Ideal I u mreži L je **prost***, ako za $r, s \in L$, iz $r \cdot s \in I$ sledi $r \in I$ ili $s \in I$.*

Definicija 1.16 Homomorfizam *iz mreže $(L, +, \cdot)$ u mrežu $(M, +, \cdot)$ je funkcija φ iz L u M koja je saglasna sa operacijama $+$ i $\cdot$: ako su x i y iz L, onda je*

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \ \text{ i } \ \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y).$$

Ako je homomorfizam φ bijekcija, on se zove **izomorfizam**.

Teorema 1.17 *[Birkhoff, Stone] Svaka distributivna mreža izomorfna je sa podmrežom partitivnog skupa $P(A)$, za neki skup A.*

Dokaz. Neka je A skup prostih ideala distributivne mreže L. Ti ideali postoje (videti [17], zadatak 1.49.). Definišimo preslikavanje φ iz L u $P(A)$ sa

$$\varphi(x) = \{P \in A : x \notin P\}.$$

Pokažimo da je φ injekcija saglasna sa operacijama u L. φ je injekcija, jer za različite x i y u L postoje različiti prosti ideali koji ih sadrže. To važi jer za dva različita elementa distributivne mreže postoji prost ideal u njoj koji sadrži tačno jedan od ta dva elementa (videti [17], zadatak 1.49.). Zbog toga su različite i slike $\varphi(x)$ i $\varphi(y)$. Saglasnost sa operacijom $\cdot$ sledi iz

$$\begin{aligned} \varphi(x \cdot y) &= \{P \in A : x \cdot y \notin P\} \\ &= \{P \in A : x \notin P \ \text{ i } \ y \notin P\} \\ &= \{P \in A : x \notin P\} \cap \{P \in A : y \notin P\} \\ &= \varphi(x) \cap \varphi(y). \end{aligned}$$

Ovo važi zbog implikacije $x \cdot y \notin P$ povlači $x \notin P$ i $y \notin P$, jer je P ideal, kao i zbog obrata koji je tačan jer je P prost ideal. Saglasnost sa operacijom $+$ sledi iz

$$\begin{aligned}
\varphi(x+y) &= \{P \in A : x+y \notin P\} \\
&= \{P \in A : x \notin P \text{ ili } y \notin P\} \\
&= \{P \in A : x \notin P\} \cup \{P \in A : y \notin P\} \\
&= \varphi(x) \cup \varphi(y).
\end{aligned}$$

□

1.2 Booleove algebre i njihova reprezentabilnost

Definicija 1.18 **Booleova algebra** *je algebra* $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ *koja zadovoljava sledeće aksiome:*

$$(B, +, \cdot) \text{ je distributivna mreža,}$$

i za svako r *iz* B *važi*

$$r \cdot 0 = 0, \ r + 1 = 1,$$

$$r \cdot (-r) = 0, \ r + (-r) = 1.$$

Unarna operacija $-$ se naziva **komplement**.

Primer 1.19

1. *Za proizvoljan skup A odgovarajuća skupovna Booleova algebra je oblika:*
$$\mathcal{B}(A) = (P(A), \cap, \cup, -, \emptyset, A).$$

2. *Booleovu algebru koja ima samo jedan element zovemo* **trivijalna** *Booleova algebra. Najjednostavnija netrivijalna Booleova algebra je dvoelementni lanac* $\mathbf{2} = \{0, 1\}$.

Kako svaka Booleova algebra u sebi sadrži strukturu mreže, onda se u svakoj Booleovoj algebri indukuje odgovarajuća relacija poretka $\leq$. Tada je u indukovanom parcijalno uređenom skupu $(B, \leq)$ element 0 najmanji, a element 1 najveći.

Definicija 1.20 *Ako Booleova algebra* $\mathcal{B}$ *indukuje kompletnu mrežu* $(B, \leq)$, *kažemo da je* $\mathcal{B}$ **kompletna Booleova algebra**.

Primer 1.21 *Svaka skupovna Booleova algebra je kompletna.*

Definicija 1.22 *Booleova algebra je* **atomična** *ako je atomična odgovarajuća indukovana mreža. Ako u indukovanoj mreži ne postoje atomi, kažemo da je Booleova algebra* **bezatomska**.

Primer 1.23 *Za* $A \neq 0$, *skupovna Booleova algebra* $\mathcal{B}(A)$ *je atomična.*

Navodimo neke osobine Booleovih algebri koje će nam trebati.

Lema 1.24 *U svakoj Booleovoj algebri* $\mathcal{B}$ *važi:*

1. *$r \leq -s$ ako i samo ako $r \cdot s = 0$,*

2. *$r \leq s$ ako i samo ako $-s \leq -r$,*

3. *ako je $u \leq v$ i $s \leq t$ tada je $u \cdot s \leq v \cdot t$ i $u + s \leq v + t$,*

4. *$r \leq s$ ako i samo ako $(\forall t)(s \cdot t = 0 \Rightarrow r \cdot t = 0)$,*

5. *$r = s$ ako i samo ako $(\forall t)(s \cdot t = 0 \Leftrightarrow r \cdot t = 0)$,*

6. *ako postoji element $r \cdot \sum\{s : s \in S\}$, za $S \subseteq B$ i $r \in B$, tada postoji i element $\sum\{r \cdot s : s \in S\}$ i ta dva elementa su jednaka,*

7. *ako je $\mathcal{B}$ konačna, tada je i atomična.*

Dokaz. (1) $r \leq -s$ je ekvivalentno sa $r \cdot -s = r$ odakle sledi

$$r \cdot s = (r \cdot -s) \cdot s = 0.$$

Sa druge strane, iz $r \cdot s = 0$ sledi

$$r = r \cdot 1 = r \cdot (s + -s) = (r \cdot s) + (r \cdot -s) = 0 + (r \cdot -s) = r \cdot -s.$$

(2) $r \leq s$ je ekvivalentno sa $r \cdot s = r$, što je dalje ekvivalentno sa $-(r \cdot s) = -r$, što je ekvivalentno (na osnovu De Morganovih zakona) sa $-r + -s = -r$, što je ekvivalentno sa $-s \leq -r$.
(3) Neka je $u \leq v$ i $s \leq t$. Tada je $u \cdot -v = 0$ i $s \cdot -t = 0$, odatle

$$(u \cdot s) \cdot -(v \cdot t) = u \cdot s \cdot (-v + -t) = us(-v) + us(-t) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow u \cdot s \leq v \cdot t.$$

Isto tako,

$$(u + s) \cdot -(v + t) = (u + s)(-v)(-t) = u(-v)(-t) + s(-v)(-t) = 0 + 0 = 0$$

$$\Rightarrow u + s \leq v + t.$$

(4) Ako je $r \leq s$ i $s \cdot t = 0$, za svako t, onda je

$$r \cdot t = (r \cdot s) \cdot t = r \cdot (s \cdot t) = r \cdot 0 = 0.$$

Obratno, pošto je $-s \cdot s = 0$, iz implikacije sledi $-s \cdot r = 0$. Odatle imamo

$$r = r \cdot 1 = r \cdot (s + -s) = (r \cdot s) + (r \cdot -s) = (r \cdot s) + 0 = r \cdot s,$$

odnosno, $r \leq s$.
(5) Direktna posledica ove leme pod (4) i antisimetričnosti za relaciju $\leq$.
(6) Prvo ćemo dokazati da za proizvoljne elemente a, b, c važi

$$a \cdot b \leq c \quad \Rightarrow \quad b \leq -a + c.$$

To sledi iz slaganja $\cdot$ i $+$ sa $\leq$

$$b = 1 \cdot b = (-a + a) \cdot b = (-a \cdot b) + (a \cdot b) \leq -a + c.$$

Jednako tako

$$c \leq -a + b \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \leq b, \text{ jer}$$

$$a \cdot c \leq a \cdot (-a + b) = a \cdot -a + a \cdot b = 0 + a \cdot b \leq b.$$

Sada, neka postoji

$$x = \sum \{s : s \in S\}.$$

Ako je $a \in S$, imamo

$$a \leq x \quad \Rightarrow \quad r \cdot a \leq r \cdot x,$$

pa je $r \cdot x = r \cdot \sum \{s : s \in S\}$ jedna gornja granica za $\sum \{r \cdot s : s \in S\}$. Ako je m gornja granica tog skupa, odnosno ako je $r \cdot s \leq m$, za sve $s \in S$, tada iz prvog dela ovog dokaza sledi

$$s \leq -r + m, \text{ za sve } s \in S$$

$$\Rightarrow \quad x \leq -r + m,$$

jer je x najmanja gornja granica za S, pa ponovo iz prvog dela dokaza imamo

$$r \cdot x \leq m,$$

odakle sledi da je $r \cdot x$ najmanja donja granica skupa $\{r \cdot s : s \in S\}$.
(7) Neka je x proizvoljan element konačne Booleove algebre $\mathcal{B}$ koji je različit od nule. Treba pokazati da ispod njega (u odnosu na poredak) postoji atom. Ako je x atom, dokaz je završen. Ako nije, postoji x_1, tako da je

$$x_1 \neq 0 \text{ i } x_1 \leq x.$$

Element x_1 može biti atom, i tada je tvrđenje tačno. U suprotnom, ispod njega postoji element x_2, takav da

$$x_2 \neq 0 \text{ i } x_2 \leq x_1.$$

Na ovaj način se u konačnom broju koraka dolazi do atoma, jer bi u protivnom $\mathcal{B}$ bila beskonačna Booleova algebra. □

Sledeće leme će nam koristiti za dokaz teoreme o reprezentaciji konačnih Booleovih algebri, a druga i za dokaz Stoneove teoreme o reprezentaciji svih Booleovih algebri.

Lema 1.25 *Neka su $\mathcal{B}_1 = (B_1, +_1, \cdot_1, -_1, 0_1, 1_1)$ i $\mathcal{B}_2 = (B_2, +_2, \cdot_2, -_2, 0_2, 1_2)$ Booleove algebre i φ funkcija iz B_1 u B_2. φ je homomorfizam ako i samo ako za sve r, s iz B_1 važe jednakosti*

$$\begin{aligned} \varphi(r \cdot_1 s) &= \varphi(r) \cdot_2 \varphi(s) \\ \varphi(-_1(r)) &= -_2(\varphi(r)) \end{aligned}$$

(Slično tvrđenje važi i ako se umesto prve stavi druga binarna operacija, i dokaz je dualan.)

Dokaz. Smer ($\Leftarrow$) je trivijalan, jer je jasno da ove dve jednakosti važe za svaki homomorfizam.
($\Rightarrow$) Pretpostavimo da važe dve date jednakosti. Tada je

$$\begin{aligned}
\varphi(r +_1 s) &= \varphi(-_1(r \cdot_1 s)) \\
&= -_2(\varphi(-_1(r) \cdot_1 -_1(s))) \\
&= -_2(\varphi(-_1(r)) \cdot_2 \varphi(-_1(s))) \\
&= -_2(-_2(-_2(\varphi(r)) \cdot_2 -_2(\varphi(s)))) \\
&= \varphi(r) +_2 \varphi(s).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(0_1) &= \varphi(r \cdot_1 -_1(r)) \\
&= \varphi(r) \cdot_2 -_2(\varphi(r)) = 0_2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(1_1) &= \varphi(-_1(0_1)) \\
&= -_2(\varphi(0_1)) \\
&= -_2(0_2) = 1_2.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.26 *Ako je a atom u Booleovoj algebri $\mathcal{B}$ i $x \in B$, onda važi tačno jedna od nejednakosti*

$$a \leq x, \quad a \leq -x.$$

Dokaz. Posmatrajmo

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (x + -x) = (a \cdot x) + (a \cdot -x).$$

Kako je a atom, elementi određeni izrazima $a \cdot x$ i $a \cdot -x$ pripadaju skupu $\{0, a\}$, pa je bar jedan od njih baš a, na primer $a \cdot x = a$, odnosno $a \leq x$. Tada $a \not\leq -x$, jer bi u suprotnom bilo $a \leq x \cdot -x = 0$, što je kontradikcija. □

Za konačne Booleove algebre $\mathcal{B}$ može se pokazati da je $\mathcal{B}$ izomorfna sa Booleovom algebrom $\mathcal{P}(A)$, gde je A skup atoma u $\mathcal{B}$. Odatle se dobija da svaka konačna Booleova algebra ima 2^n elemenata, za neki prirodan broj n, i svake dve konačne Booleove algebre sa istim brojem elemenata su izomorfne.

Teorema 1.27 *Konačna Booleova algebra $\mathcal{B}$ izomorfna je sa Booleovom algebrom $P(A)$, gde je A skup atoma u B.*

Dokaz. Neka je A skup atoma u konačnoj Booleovoj algebri $\mathcal{B}$. Uočimo funkciju $\varphi : B \to P(A)$, definisanu tako da je za $x \in B$

$$\varphi(x) = \{a \in A : a \leq x\}.$$

Dokazujemo da je φ izomorfizam.
1) φ je injekcija:
Neka je $x \neq y$ i (recimo) $x \not\leq y$. Odatle je $x \cdot -y \neq 0$, pa postoji atom a takav da je

$$a \leq x \cdot -y.$$

Odatle $a \leq x$, pa $a \in \varphi(x)$. Slično, $a \leq -y$, pa $a \in \varphi(-y)$ i zato $a \nleq y$ (jer bi iz $a \leq -y$ i $a \leq y$ sledilo $a \leq y \cdot -y = 0$, što ne može). Zato je $\varphi(x) = \varphi(y)$.
2) φ je sirjekcija:
Neka je $X = \{a_1, ..., a_n\} \in P(A)$ i $x = a_1 + ... + a_n$. Dokazujemo da je $\varphi(x) = X$. Imamo da je za sve $i \in \{1, ..., n\}$, $a_i \leq x$, pa je $X \subseteq \varphi(x)$. Sa druge strane, ako je $a \in \varphi(x)$, onda je $a \leq x$, odnosno $a \leq a_1 + ... + a_n$. Tada je

$$a = a \cdot x = a \cdot (a_1 + ... + a_n) = (a \cdot a_1) + (a \cdot a_2) + ... + (a \cdot a_n).$$

Sledi da je za neko i, $a = a_i$, jer bi u suprotnom bilo $a = 0$, s obzirom da su i $a, a_1, ..., a_n$ atomi. Sledi $\varphi(x) \subseteq X$, pa važi $\varphi(x) = X$.
3) φ je saglasno sa operacijom $(\cdot)$: Ako je $a \in \varphi(x \cdot y)$, onda važi $a \leq x \cdot y$, odakle je $a \leq x$ i $a \leq y$, to jest $a \in \varphi(x)$ i $a \in \varphi(y)$. Sledi

$$\varphi(x \cdot y) \subseteq \varphi(x) \cap \varphi(y).$$

Sa druge strane, ako je $a \in \varphi(x) \cap \varphi(y)$, onda je $a \leq x$ i $a \leq y$, to jest $a \leq x \cdot y$ i $a \in \varphi(x \cdot y)$. Sledi,

$$\varphi(x) \cap \varphi(y) \subseteq \varphi(x \cdot y),$$

pa konačno dobijamo

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cap \varphi(y).$$

4) φ je saglasno sa unarnom operacijom (-):
Neka je $a \in \varphi(-x)$, odnosno $a \leq -x$. Tada je $a \nleq x$ (prema lemi 1.26) to jest $a \notin \varphi(x)$. To znači da je $a \in -(\varphi(x))$, odnosno $\varphi(-x) \subseteq -(\varphi(x))$ (sa desne strane je skupovni komplement). Ako je $a \in -(\varphi(x))$, onda je $a \notin \varphi(x)$, to jest $a \nleq x$ i zato (prema lemi 1.26) $a \leq -x$, odnosno $a \in \varphi(-x)$. Odatle je $-(\varphi(x)) \subseteq \varphi(-x)$ i najzad $\varphi(-x) = -(\varphi(x))$.
Na osnovu 1)-4) i leme 1.25. φ je izomorfizam. □

Partitivni skupovi se tako mogu smatrati glavnim predstavnicima konačnih Booleovih algebri. Kao što je poznato, skup od n elemenata ima 2^n podskupova. Zato neposredno iz poslednje teoreme slede naredna dva tvrđenja,

Posledica 1.28 *Svaka konačna Booleova algebra ima 2^n elemenata, gde je n broj njenih atoma.*

Posledica 1.29 *Ma koje dve konačne Booleove algebre sa istim brojem elemenata su izomorfne.*

Definicija 1.30 Ideal Booleove algebre *$\mathcal{B}$ je neprazan podskup $I \subseteq B$ za koji važi*

$$(r \in I \;\; i \;\; s \in I) \Rightarrow r + s \in I,$$

$$(i \in I \;\; i \;\; r \in B) \Rightarrow i \cdot r \in I.$$

Teorema 1.31 (Stoneova teorema o reprezentaciji Booleovih algebri) *Svaka Booleova algebra se može utopiti u neku Booleovu skupovnu algebru.*

Dokaz. Kao što smo videli u teoremi 1.17, svaka distributivna mreža je izomorfna podmreži partitivnog skupa. Taj izomorfizam je definisan kao potapanje φ iz distributivne mreže u $P(A)$, gde je A skup prostih ideala te mreže. Kako je

Booleova algebra i sama distributivna mreža može se iskoristiti isto to preslikavanje

$$\varphi(x) = \{P \in A, x \notin P\}.$$

Ono je injektivno i saglasno sa binarnim operacijama. Još je samo potrebno dokazati da je φ saglasno sa komplementiranjem, pa se, prema lemi 1.25 dobija homomorfizam Booleovih algebri.

$$\begin{aligned}
\varphi(-x) &= \{P \in A : -x \notin P\} \\
&= \{P \in A : x \in P\} \\
&= -\{P \in A : x \notin P\} = -\varphi(x).
\end{aligned}$$

φ je odatle injektivni homomorfizam, odnosno, potapanje date Booleove algebre u partitivni skup kolekcije svih njenih prostih ideala. $\square$

Glava 2

Relacione algebre

2.1 Pojam relacione algebre

C.S. Pierce je u nekoliko svojih radova, koje je objavio sedamdesetih godina devetnaestog veka, postavio osnove aritmetike binarnih relacija. Njegov rad na uvođenju osnovnih pojmova teorije relacija i formulisanju njenih osnovnih zakona nastavio je E. Schröder, ali njih dvojica nisu imali puno sledbenika.

Za početak aksiomatskog razvoja relacionih algebri smatra se 1941. godina, kada je A. Tarski objavio svoj rad, vidi [18]. U ovom radu, pored postavljanja aksioma aritmetike relacija, on je postavio i neka pitanja koja su odredila pravac daljih istraživanja. Te aksiome nisu bile u obliku identiteta. Danas se koristi aksiomatski sistem u kome su sve aksiome identiteti i koji su prvi put objavili A. Tarski i L. Chin 1951. godine.

Definicija 2.1 **Relaciona algebra** *je algebra* $\mathcal{U} = (U, +, \cdot, -, 0, 1, ;, ^{\smile}, 1')$*, gde je* $(U, +, \cdot, -, 0, 1)$ *Booleova algebra, a* $-$ *i* $^{\smile}$ *su unarne operacije na* U*,* $1'$ *istaknuta konstanta u* U*, i sledeće aksiome su zadovoljene za sve elemente* r*,* s *i* t *iz* U*:*

1. *(Asocijativni zakon za kompoziciju)* $r;(s;t) = (r;s);t$,
2. *(Jedinični element za kompoziciju)* $r;1' = r$,
3. *(Prvi zakon involucije)* $r^{\smile\smile} = r$,
4. *(Drugi zakon involucije)* $(r;s)^{\smile} = s^{\smile};r^{\smile}$,
5. *(Distributivni zakon za kompoziciju)* $(r+s);t = r;t + s;t$,
6. *(Distributivni zakon za inverziju)* $(r+s)^{\smile} = r^{\smile} + s^{\smile}$,
7. *(Zakon Tarskog)* $r^{\smile};-(r;s) + -s = -s$.

Skup U naziva se **univerzum** od $\mathcal{U}$. Booleove operacije $+$ i $-$ se nazivaju **sabiranje** i **komplement**. Pirsove operacije ; i $^{\smile}$ zovu se **kompozicija** i **inverzija**. Istaknuta konstanta $1'$ zove se **jedinični element**. Konvencija o redosledu izvršavanja operacija je sledeća: unarne pre binarnih, a u binarnim kompozicija pre sabiranja. Asocijativni zakon za kompoziciju dozvoljava da se piše $r;s;t$, bez zagrada. Često ćemo koristiti ovu aksiomu bez posebnog naglašavanja.

Primer 2.2 *1. Klasičan primer relacionih algebri je* **prava relaciona algebra** $\mathcal{R}e(E)$*, za sve podrelacije relacije ekvivalencije* E *na skupu* U*. To znači da je nosač ove algebre* $\mathcal{P}(E)$*. Operacije na* $\mathcal{R}e(E)$ *su skupovna unija, skupovni presek, komplement u odnosu na* E*, kompozicija relacija i inverzija koji su respektivno definisani sa: za sve* $R, S \in \mathcal{P}(E)$ *važi*

$$R \cup S = \{(a,b) : (a,b) \in R \ \ ili \ \ (a,b) \in S\},$$

$$R \cap S = \{(a,b) : (a,b) \in R \ \ i \ \ (a,b) \in S\},$$

$$\sim R = \{(a,b) : (a,b) \in E \ \ i \ \ (a,b) \notin R\},$$

$$R \mid S = \{(a,b) : (a,c) \in R \ \ i \ \ (c,b) \in S, \ \ za\ neko\ c \in U\},$$

$$R^{-1} = \{(a,b) : (b,a) \in R\}.$$

Istaknuta konstanta je identička relacija id_U *na skupu* U*. Dakle ova relaciona algebra je oblika*

$$\mathcal{R}e(E) = (P(E), \cup, \cap, \sim, \emptyset, E, |\,, ^{-1}, id_U).$$

Ako je E *Dekartov proizvod* $U \times U$*, tada je* $\mathcal{R}e(E)$ **puna relaciona algebra na** U *i označava se sa* $\mathcal{R}e(U)$*.*

2. Drugi važan primer relacionih algebri su **algebre kompleksa grupe** $(G, \circ, ^{-1}, \iota)$*, gde je* ι *jedinični element grupe. Elementi u ovoj algebri kompleksa su podskupovi (ili kompleksi) skupa* G*, a operacije ove algebre su skupovna unija, komplement u odnosu na* G*, množenje i inverzija, poslednje dve definisane su respektivno sa:*

$$H \circ K = \{h \circ k : h \in H \ \ i \ \ k \in K\} \ \ i \ \ H^{-1} = \{h^{-1} : h \in H\}.$$

Jedinični element ove algebre je singlton $\{\iota\}$*. Ovu algebru ćemo označavati sa* $\mathcal{C}m(G)$*. U praksi, elemente iz* G *identifikujemo sa atomima u* $\mathcal{C}m(G)$*, to jest, identifikujemo elemente* h *grupe* G *sa njihovim singltonima* $\{h\}$*, i govorimo o* h *kao da je element* $\{h\}$ *u* $\mathcal{C}m(G)$*.*

Tvrđenje 2.3 *Algebra kompleksa svake grupe je relaciona algebra.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{C}m(G) = (\mathcal{P}(G), \bigcup, \bigcap, -, \emptyset, G, \circ, ^{-1}, \iota)$, za neku grupu G. Proveravamo da li su zadovoljeni uslovi iz definicije 2.1. $(\mathcal{P}(G), \bigcup, \bigcap, -, \emptyset, G)$ očigledno čini Booleovu algebru (to je skupovna Booleova algebra za skup G). Proverimo još preostalih sedam aksioma. Neka su $N, H, K \subseteq G$. Tada, koristeći definicije kompozicije i inverzije za algebre kompleksa i osobina koja važe u grupama, važi:

1) Asocijativni zakon za kompoziciju,

$$\begin{aligned} N \circ (H \circ K) &= \{n \circ (h \circ k) : n \in N \text{ i } h \in H \text{ i } k \in K\} \\ &= \{(n \circ h) \circ k : n \in N, h \in H \text{ i } k \in K\} \\ &= (N \circ H) \circ K. \end{aligned}$$

2)Jedinični element za kompoziciju,

$$H \circ \{\iota\} = \{h \circ \iota : h \in H\} = \{h : h \in H\} = H.$$

3) Prvi zakon involucije,

$$\begin{aligned}(H^{-1})^{-1} &= \{h^{-1} : h \in H^{-1}\} = \{(h^{-1})^{-1} : h \in H\}\\ &= \{h : h \in H\} = H.\end{aligned}$$

4) Drugi zakon involucije,

$$\begin{aligned}(H \circ K)^{-1} &= \{g^{-1} : g \in H \circ K\}\\ &= \{(h \circ k)^{-1} : h \in H \text{ i } k \in K\}\\ &= \{k^{-1} \circ h^{-1} : h \in H, k \in K\} = K^{-1} \circ H^{-1}.\end{aligned}$$

5) Distributivni zakon za kompoziciju,

$$\begin{aligned}(H \cup K) \circ N &= \{g \circ n : (g \in H \text{ ili } g \in K) \text{ i } n \in N\}\\ &= \{g \circ n : g \in H \text{ i } n \in N\} \;\cup\; \{g \circ n : g \in K \text{ i } n \in N\}\\ &= (H \circ N) \cup (K \circ N).\end{aligned}$$

6) Distributivni zakon za inverziju,

$$\begin{aligned}(H \cup K)^{-1} &= \{g^{-1} : g \in H \text{ ili } g \in K\}\\ &= \{g^{-1} : g \in H\} \;\cup\; \{g^{-1} : g \in K\}\\ &= H^{-1} \cup K^{-1}.\end{aligned}$$

7) Zakon Tarskog u algebri kompleksa ima oblik:

$$H^{-1} \circ -(H \circ K) \cup -K = -K.$$

Dakle, treba pokazati da je $H^{-1} \circ -(H \circ K) \subseteq -K$. Neka je $g \in H^{-1} \circ -(H \circ K)$ i pretpostavimo suprotno, da $g \in K$.

$g \in H^{-1} \circ -(H \circ K)$ je ekvivalentno sa

$$(\exists h)(\exists n)(h \in H \wedge n \in -(H \circ K) \wedge g = h^{-1} \circ n).$$

Na jednakost $g = h^{-1} \circ n$, sa leve strane, primenimo kompoziciju sa h, pa dobijamo $h \circ g = n$. Kako je $h \in H$ i $g \in K$, dobijamo da $n \in H \circ K$, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da $n \in -(H \circ K)$.

$\square$

Kako svaka relaciona algebra $\mathcal{U}$ u sebi sadrži strukturu Booleove algebre, uobičajene oznake za Booleovu algebru imaju smisla u kontekstu relacionih algebri.

Proizvod dva elementa relacione algebre je Booleov proizvod dva elementa r i s u $\mathcal{U}$ može se izraziti preko Booleovog zbira i komplementa, preko De Morganovog zakona:

$$r \cdot s = -(-r + -s),$$

i parcijalno uređenje može biti definisano na $\mathcal{U}$ sa:

$$r \leq s \text{ ako i samo ako } r + s = s.$$

Booleova nula i jedinica su elementi označeni sa 0 i 1. Dva elementa u $\mathcal{U}$ su disjunktna ako je njihov Booleov proizvod 0.

Atomi u $\mathcal{U}$ su definisani kao minimalni nenula elementi (u smislu parcijalnog uređenja koje smo upravo definisali), i relaciona algebra je **atomična** ako je svaki nenula element iznad nekog atoma. Odnosno, relaciona algebra je atomična ako je atomičan njen Booleov deo.

Primer 2.4 *1. Kako su sve konačne Booleove algebre atomične, sledi da su i sve konačne relacione algebre atomične.*

2. Algebre kompleksa $\mathcal{C}m(G)$, gde je G neka grupa, su atomične.

Supremum (ili Booleova suma) i infimum (ili Booleov proizvod) skupa X elemenata iz $\mathcal{U}$ su najmanje gornje ograničenje skupa X i najveće donje ograničenje skupa X, i ako postoje označavaju se sa $\sum X$ i $\prod X$.

Supremum i infimum proizvoljnog skupa elemenata ne mora da postoji, ali ako uvek postoji kažemo da je relaciona algebra $\mathcal{U}$ **kompletna**.

Kompletna podalgebra relacione algebre $\mathcal{U}$ je podalgebra $\mathcal{B}$ takva da je supremum (u $\mathcal{U}$) svakog podskupa od $\mathcal{B}$ pripada $\mathcal{B}$.

Iz definicije se vidi da je relaciona algebra kompletna ako je kompletan njen Booleov deo.

Primer 2.5 *Kako su sve konačne Booleove algebre kompletne, sledi da su sve konačne relacione algebre kompletne.*

Definicija 2.6 **Regularna podalgebra** *relacione algebre $\mathcal{U}$ (koja ne mora biti kompletna) je podalgebra $\mathcal{B}$ takva da za svaki podskup X u $\mathcal{B}$, ako X ima supremum r u $\mathcal{B}$, tada X ima supremum i u $\mathcal{U}$, i taj supremum je r.*

Postoji nekoliko važnih osobina relacionih algebri koje će biti potrebne u ovom radu.

Prva lema obuhvata neke od osnovnih osobina relacionih algebri. Druga i šesta osobina se nazivaju zakoni monotonosti za inverziju i kompoziciju, respektivno. Treća i sedma osobina su osobina leve distributivnosti kompozicije prema sabiranju i osobine postojanja levog jediničnog elementa.

Lema 2.7 *U svakoj relacionoj algebri važi:*

1. $1'^{\smile} = 1'$, $0^{\smile} = 0$ *i* $1^{\smile} = 1$.
2. $r \leq s$ *ako i samo ako* $r^{\smile} \leq s^{\smile}$.
3. $t; (r + s) = (t; r) + (t; s)$.
4. $r \leq r; 1$ *i* $r \leq 1; r$.
5. $1; 1 = 1$.
6. *ako je* $r \leq t$ *i* $s \leq u$, *tada je* $r; s \leq t; u$.
7. $1'; r = r$.
8. $(r \cdot s)^{\smile} = r^{\smile} \cdot s^{\smile}$.

Dokaz. (1) Stavimo $r = (1')^{\smile}$ i $s = 1'$ u identitetu $(r;s)^{\smile} = s^{\smile};r^{\smile}$. Tada

$$((1')^{\smile};1')^{\smile} = (1')^{\smile};1' \quad \Rightarrow \quad 1' = (1')^{\smile}.$$

Za drugu jednakost stavimo $r = 0^{\smile}$ i $s = 0$ u identitetu $(r+s)^{\smile} = r^{\smile} + s^{\smile}$. Dobijamo

$$\begin{aligned} (0^{\smile} + 0)^{\smile} = (0^{\smile})^{\smile} + 0^{\smile} \quad &\Rightarrow \quad 0 = 0 + 0^{\smile} \\ &\Rightarrow \quad 0 = 0^{\smile}. \end{aligned}$$

Za treću jednakost stavimo $r = 1^{\smile}$ i $s = 1$ u identitetu $(r+s)^{\smile} = r^{\smile} + s^{\smile}$. Dobijamo

$$(1^{\smile} + 1)^{\smile} = (1^{\smile})^{\smile} + 1^{\smile} \quad \Rightarrow \quad 1^{\smile} = 1 + 1^{\smile} = 1.$$

(2)

$$\begin{aligned} r \leq s \quad &\Leftrightarrow \quad r + s = s \\ &\Leftrightarrow \quad (r+s)^{\smile} = s^{\smile} \\ &\Leftrightarrow \quad r^{\smile} + s^{\smile} = s^{\smile} \\ &\Leftrightarrow \quad r^{\smile} \leq s^{\smile}. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} t;(r+s) &= ((t;(r+s))^{\smile})^{\smile} = ((r+s)^{\smile};t^{\smile})^{\smile} \\ &= ((r^{\smile} + s^{\smile});t^{\smile})^{\smile} = ((r^{\smile};t^{\smile}) + (s^{\smile};t^{\smile}))^{\smile} \\ &= (r^{\smile};t^{\smile})^{\smile} + (s^{\smile};t^{\smile})^{\smile} = (t^{\smile})^{\smile};(r^{\smile})^{\smile} + (t^{\smile})^{\smile};(s^{\smile})^{\smile} \\ &= t;r + t;s \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} r;1 = r;1 \quad &\Leftrightarrow \quad r;(1' + 1) = r;1 \\ &\Leftrightarrow \quad r;1' + r;1 = r;1 \\ &\Leftrightarrow \quad r + r;1 = r;1 \\ &\Leftrightarrow \quad r \leq r;1 \end{aligned}$$

Analogno se dobija i

$$r \leq 1;r$$

(5)

$$1;1 = 1;(1+r) = (1;1) + (1;r) \quad \Rightarrow \quad 1;r \leq 1;1,$$

za svako r. Ako je $r = 1'$, dobijamo

$$\begin{aligned} 1;1' \leq 1;1 \quad &\Rightarrow \quad 1 \leq 1;1 \\ &\Rightarrow \quad 1 = 1;1. \end{aligned}$$

(6) Neka je $r \leq t$ i $s \leq u$. Tada je $r + t = t$ i $s + u = u$, pa dobijamo

$$t;s = (r+t);s = (r;s) + (t;s) \quad \Rightarrow \quad r;s \leq t;s,$$

$$t;u = t;(s+u) = (t;s) + (t;u) \quad \Rightarrow \quad t;s \leq t;u.$$

Zbog tranzitivnosti relacije $\leq$ dobijamo $r;s \leq t;u$.

(7)

$$\begin{aligned} 1';r &= ((1';r)^{\smile})^{\smile} = (r^{\smile};1'^{\smile})^{\smile} \\ &= (r^{\smile};1')^{\smile} = (r^{\smile})^{\smile} \\ &= r. \end{aligned}$$

(8) Iz (2) ove leme imamo da

$$r \cdot s \leq r \;\;\Rightarrow\;\; (r \cdot s)^{\smile} \leq r^{\smile} \;\;\text{i}\;\; r \cdot s \leq s \;\;\Rightarrow\;\; (r \cdot s)^{\smile} \leq s^{\smile}.$$

Odatle $(r \cdot s)^{\smile}$ je donje ograničenje elemenata r i s. Ostaje još da dokažemo da je to i najveće donje ograničenje za ova dva elementa. Uzmimo $t \leq r^{\smile}$ i $t \leq s^{\smile}$. Dobijamo

$$\begin{aligned} t^{\smile} \leq r \;\;\text{i}\;\; t^{\smile} \leq s \;\;&\Rightarrow\;\; t^{\smile} \leq r \cdot s \\ &\Rightarrow\;\; t \leq (r \cdot s)^{\smile}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.8 *U svakoj relacionoj algebri, sledeće tri jednakosti su ekvivalentne*

$$(r;s) \cdot t = 0, \quad (r^{\smile};t) \cdot s = 0, \quad (t;s^{\smile}) \cdot r = 0.$$

Dokaz. Da bismo to dokazali prvo ćemo da dokažemo da je $t \leq -(r;s)$ akko $r^{\smile};t \leq -s$.
($\Rightarrow$)

$$t \leq -(r;s) \;\;\Rightarrow\;\; r^{\smile};t \leq r^{\smile};-(r;s) \leq -s,$$

što sledi iz aksiome Tarskog. Dalje, zbog tranzitivnosti relacije $\leq$ sledi

$$r^{\smile};t \leq -s.$$

($\Leftarrow$) Iz prethodnog dela, ako za r uzmemo $r^{\smile}$, imamo

$$t \leq -(r^{\smile};s) \;\;\Rightarrow\;\; r;t \leq -s, \text{ odnosno } r^{\smile};s \leq -t \;\;\Rightarrow\;\; s \leq -(r;t).$$

Sada t zamenimo sa s, a s sa t dobijamo

$$r^{\smile};t \leq -s \;\;\Rightarrow\;\; t \leq -(r;s),$$

čime smo dobili i drugi smer ekvivalencije. Iz ekvivalencije direktno sledi

$$(r;s) \cdot t = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; (r^{\smile};t) \cdot s = 0.$$

Iz leme 2.7 (8) i drugog zakona involucije sledi

$$(r;s) \cdot t = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; (s^{\smile};r^{\smile}) \cdot t^{\smile} = 0,$$

što je iz već dobijenog ekvivalentno sa $(s;t^{\smile}) \cdot r^{\smile} = 0$. Ako ponovo primenimo 2.7 (8) i drugi involutivni zakon, konačno dobijamo da je

$$(r;s) \cdot t = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; (t;s^{\smile}) \cdot r = 0.$$

□

Lema 2.9 *U svakoj relacionoj algebri važi:*

1. $r; 0 = 0 \quad i \quad 0; r = 0.$
2. $(r; s) \cdot t \leq r; (s \cdot (r^{\smile}; t)).$

Dokaz. (1) Iz leme 2.8 imamo da važi ekvivalencija

$$(g; s) \cdot t = 0 \Leftrightarrow (g^{\smile}; t) \cdot s = 0,$$

uzmemo da je $g = r^{\smile}$, $s = 1$, $t = 0$ i dobijamo

$$(r^{\smile}; 1) \cdot 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r; 0) \cdot 1 = 0.$$

Kako je leva strana ekvivalencije tačna, sledi $r; 0 = 0$. Slično, iz leme 2.8 imamo da važi ekvivalencija

$$(g; s) \cdot t = 0 \Leftrightarrow (t; s^{\smile}) \cdot g = 0,$$

odakle dobijamo da je

$$(1; r^{\smile}) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow (0; r) \cdot 1 = 0,$$

iz čega sledi $0; r = 0$.

(2) Prvo ćemo dokazati

$$(r; s) \cdot t = (r; (s \cdot (r^{\smile}; t))) \cdot t,$$

odatle direktno dobijamo

$$(r; s) \cdot t \leq r; (s \cdot (r^{\smile}; t)).$$

Za dokaz tražene jednakosti koristićemo osobinu za Booleove algebre iz leme 1.24

$$(\forall u)\ (r; s) \cdot tu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r; (s \cdot (r^{\smile}; t))) \cdot tu = 0.$$

Iz leme 2.8 imamo

$$(r; s) \cdot tu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r^{\smile}; tu) \cdot s = 0,$$

što je ponovnom primenom iste leme, leme 2.7 (6) i osobine $a \leq b \ \Rightarrow \ a \cdot b = a$ dalje

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad (r^{\smile}; tu) \cdot (r^{\smile}; t) \cdot s = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (r; (r^{\smile}; t) \cdot s) \cdot tw = 0. \end{aligned}$$

$\square$

2.2 Booleove algebre sa operatorima

U ovom delu ćemo videti da je svaka relaciona algebra Booleova algebra sa operatorima i na koji još način možemo definisati relacione algebre.

Definicija 2.10 *1. Ako je $\mathcal{B}$ Booleova algebra i $F : B^n \to B$, kažemo da je F* **operator** *Booleove algebre $\mathcal{B}$ ako je F aditivan (distributivan) po svakom svom argumentu tj.*

$$F(r_1, r_2, ..., s_1 + s_2, ..., r_n) = F(r_1, r_2, ..., s_1, ..., r_n) + F(r_1, r_2, ..., s_2, ..., r_n)$$

2. Za algebru $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1, F_j)_{j \in J}$ kažemo da je **Booleova algebra sa operatorima** *(u oznaci BAO) ako je redukt $Rd_B(\mathcal{B}) = (B, +, \cdot, -, 0, 1)$ Booleova algebra, i sve operacije $F_j (j \in J)$ su operatori Booleove algebre $Rd_B(\mathcal{B})$. (Algebru $Rd_B(\mathcal{B})$ zovemo* **Booleov redukt od** *$\mathcal{B}$).*

3. Za operator F kažemo da je **kompletno aditivan** *ako za svaki indeksni skup I za koji postoji $\sum\{s_i : i \in I\}$ u $\mathcal{B}$, važi*

$$F(r_1, \ldots, \sum\{s_i : i \in I\}, \ldots, r_n) = \sum\{F(r_1, \ldots, s_i, \ldots, r_n) : i \in I\}.$$

Sledeća teorema pokazuje da su relacione algebre zapravo Booleove algebre sa operatorima.

Teorema 2.11 *Svaka relaciona algebra je Booleova algebra sa operatorima.*

Dokaz. Pokazećemo da su operacije ; i $\smile$ aditivne, tj. distributivne:

$$\begin{aligned} r; (s + t) &= (r; s) + (r; t) \\ (r + s); t &= (r; t) + (s; t) \\ (r + s)^{\smile} &= r^{\smile} + s^{\smile}. \end{aligned}$$

Prva jednakost važi, dokazali smo u 2.7 3), druga je distributivni zakon za kompoziciju, a treća distributivni zakon za inverziju. □

Definicija 2.12 *Neka su F i G dve unarne operacije Booleove algebre $\mathcal{B}$.*

1. Za F i G kažemo da su **konjugovane** *ako za sve $r, s \in B$ važi*

$$F(r) \cdot s = 0 \text{ ako i samo ako } r \cdot G(s) = 0.$$

2. Za F kažemo da **čuva poredak** *(ili da je* **izotona***) ako se slaže sa relacijom $\leq$, tj. ako iz $r \leq s$ sledi $F(r) \leq F(s)$.*

Tvrđenje 2.13 *U svakoj relacionoj algebri operacija $\smile$ ima konjugovanu (to je ona sama).*

Dokaz. Iz leme 2.8 imamo

$$(r^{\smile}; 1')s = 0 \;\Leftrightarrow\; (1'; s^{\smile})r = 0,$$

odakle dobijamo

$$r^{\smile}s = 0 \;\Leftrightarrow\; s^{\smile}r = 0,$$

odnosno, operacija $\smile$ je samokonjugovana. □

Tvrđenje 2.14 *Operacija* $^{\smile}$ *je izotona u svakoj relacionoj algebri.*

Dokaz. Lema 2.7 2). □

O odnosu konjugovanosti i izotonosti govori nam sledeća teorema.

Teorema 2.15 *Unarna operacija* F *Booleove algebre* $\mathcal{B}$ *ima konjugovanu ako i samo ako je* F *izotona i za sve* $s \in B$ *skup* $K(s) = \{r \in B : F(r)s = 0\}$ *ima najveći element. Ako to važi, onda je konjugat* G *od* F *jedinstven i* $-G(s)$ *jeste najveći element u* $K(s)$.

Dokaz. ($\leftarrow$). Neka je operacija F izotona i skup $K(s) = \{r \in B : F(r)s = 0\}$ ima najveći element $N(s)$. Dokažimo da je tada funkcija G definisana sa $G(s) = -N(s)$ konjugovana sa F.

$$\begin{aligned} F(r)s = 0 \quad &\Rightarrow \quad r \in K(s) \quad \Rightarrow \quad r \leq N(s) \\ &\Rightarrow \quad r \cdot -N(s) = 0 \\ &\Rightarrow \quad r \cdot G(s) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \cdot G(s) = 0 \quad &\Rightarrow \quad r \cdot -N(s) = 0 \\ &\Rightarrow \quad r \leq N(s) \quad \Rightarrow \quad F(r) \leq F(N(s)) \\ &\Rightarrow \quad F(r)s \leq F(N(s))s = 0 \\ &\Rightarrow \quad F(r)s \leq 0 \quad \Rightarrow \quad F(r)s = 0. \end{aligned}$$

Dokažimo jedinstvenost konjugovane operacije. Neka je H funkcija sa osobinom

$$F(r)s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r \cdot H(s) = 0.$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned} F(N(s)) \cdot s = 0 \quad &\Rightarrow \quad N(s) \cdot H(s) = 0 \\ &\Rightarrow \quad H(s) \leq -N(s) \quad \Rightarrow \quad H(s) \leq G(s). \end{aligned}$$

Sa druge strane,

$$\begin{aligned} -H(s) \cdot H(s) = 0 \quad &\Rightarrow \quad F(-H(s)) \cdot s = 0 \\ &\Rightarrow \quad -H(s) \leq N(s) \\ &\Rightarrow \quad -N(s) \leq H(s) \quad \Rightarrow \quad G(s) \leq H(s). \end{aligned}$$

Dakle, $H(s) = G(s)$.

($\rightarrow$). Pretpostavimo sada da F ima konjugovanu operaciju G. Dokažimo da skup $K(s) = \{r \in B : F(r)s = 0\}$ ima najveći element i to je $-G(s)$. Prvo,

$$-G(s) \in K(s)$$

jer

$$F(-G(s))s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -G(s)G(s) = 0.$$

Da je najveći sledi iz:

$$F(r)s = 0 \quad \Rightarrow \quad r \cdot G(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad r \leq -G(s).$$

Dokažimo da je F izotona. Neka je $r \leq s$. Znamo da

$$\begin{aligned} F(s) \cdot -F(s) = 0 \quad &\Rightarrow \quad s \in K(-F(s)) \quad \Rightarrow \quad s \leq -G(-F(s)) \\ &\Rightarrow \quad r \leq s \leq -G(-F(s)) \\ &\Rightarrow \quad r \leq -G(-F(s)) \\ &\Rightarrow \quad r \cdot G(-F(s)) = 0 \\ &\Rightarrow \quad F(r) \cdot -F(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(r) \leq F(s). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.16 *Ako unarna operacija F Booleove algebre $\mathcal{B}$ ima konjugat, onda je F kompletno aditivna i $F(0) = 0$.*

Dokaz. Neka je G konjugovana za F. Dokažimo prvo $F(0) = 0$:

$$0 \cdot G(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F(0) \cdot r = 0,$$

za sve r. Za $r = 1$ dobijamo $F(0) = 0$. Dalje, neka je $r = \sum\{r_i : i \in I\}$, $(r, r_i \in B)$. Treba dokazati

$$F(r) = \sum\{F(r_i) : i \in I\}.$$

Pošto za sve $i \in I$ važi $r_i \leq r$, a operacija F je izotona, onda $F(r_i) \leq F(r)$, pa je $F(r)$ jedno gornje ograničenje za sve $F(r_i)$. Dokažimo da je to i najmanje gornje ograničenje. Neka je t jedna gornja granica, tj. za sve $i \in I$ važi $F(r_i) \leq t$. Tada imamo

$$\begin{aligned} F(r_i) \leq t \quad &\Rightarrow \quad F(r_i) \cdot -t = 0 \\ &\Rightarrow \quad r_i \cdot G(-t) = 0 \\ &\Rightarrow \quad G(-t) \cdot r_i = 0, \end{aligned}$$

za sve $i \in I$. Sada se setimo jedne činjenice koja važi za sve Booleove algebre: Ako u Booleovoj algebri $\mathcal{B}$ postoji element $r \cdot \sum\{u : u \in A\}$, za neki $A \subseteq B$, onda postoji i element $\sum\{r \cdot u : u \in A\}$, i ta dva elementa su jednaka. U našem slučaju

$$G(-t) \cdot \sum\{r_i : i \in I\} = \sum\{G(-t) \cdot r_i : i \in I\} = 0$$

$$\Rightarrow -t \cdot F(\sum\{r_i : i \in I\}) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(r) \leq t,$$

što je i trebalo dokazati. □

Tvrđenje 2.17 *Operacije inverzije i kompozicije u relacionoj algebri su kompletno distributivne u odnosu na sabiranje, u smislu da ako supremum skupa X postoji u algebri, tada supremum skupa $\{r^{\smile} : r \in X\}$ postoji i*

$$\sum\{r^{\smile} : r \in X\} = (\sum X)^{\smile},$$

i supremum skupa $\{s; r : r \in X\}$ postoji i

$$\sum\{s; r : r \in X\} = s; (\sum X).$$

Dokaz. Prvi deo je direktna posledica teoreme 2.16, jer je operacija $\smile$ u svakoj relacionoj algebri samokonjugovana.

Drugi deo je takođe direktna posledica teoreme 2.16. Ako je $\mathcal{R}$ relaciona algebra i $s \in A$ onda operacija $F(r) = s; r$ ima konjugovanu, $G(r) = s^{\smile}; r$. Ovo dobijamo kao posledicu leme 2.8, jer važi

$$\begin{aligned} F(r)t = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (s; r)t = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (s^{\smile}; t)r = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad rG(t) = 0. \end{aligned}$$

□

Posledica 2.18 *Ako supremumi skupova X i Y postoje u relacionoj algebri $\mathcal{R}$, tada supremum skupa $\{r; s : r \in X \;\; i \;\; s \in Y\}$ postoji i*

$$\sum \{r; s : r \in X \;\; i \;\; s \in Y\} = (\sum X); (\sum Y).$$

Teorema 2.19 *Pretpostavimo da su F i F', G i G' parovi konjugovanih operatora na Booleovoj algebri $\mathcal{B}$. Tada važe sledeća tvrđenja:*

1. *$F(r)s \leq F(rF'(s))$ za sve $r \in B$.*
2. *$F(r)s \leq FF'(s)$ za sve $r, s \in B$.*
3. *$F(r) \leq FF'F(r)$ za sve $r \in B$.*
4. *Za sve $r, s \in B$, ako je $F(r) \leq r$ i $F'(s) \leq s$, tada $F(r)s = F(rs)$.*
5. *Ako je $F(r) \leq r$ i $G(r) \leq r$ za sve $r \in B$, tada $FG(r) = F(r)G(r)$.*
6. *Ako je $F(r) \leq r$ za sve $r \in B$, tada $F = F' = FF$.*

Dokaz. Vidi [8]. □

Posledica 2.20 *U svakoj relacionoj algebri važi:*

1. *$(r; s)t \leq r; (s(r^{\smile}; t))$.*
2. *$(r; s)t \leq r; r^{\smile}; t$.*
3. *$r \leq r; r^{\smile}; r$.*
4. *Ako je $r; t \leq r$ i $r; t^{\smile} \leq r$, tada $r(s; t) = (rs)t$.*
5. *Ako je $r \leq 1'$ i $s \leq 1'$, tada $(r; t)(s; t) = (rs); t$.*
6. *Ako je $r \leq 1'$, tada $r = r^{\smile} = r; r$.*
7. *Ako je $r \leq 1'$ i $s \leq 1'$, tada $r; s = rs$.*
8. *Ako je $r \leq 1'$, tada $(r; s)t = r; (st)$.*

Dokaz. Za dokaze tvrđenja 1)-6) koristimo odgovarajuća tvrđenja iz teoreme 2.19 1)-6). Za dokaze tvrđenja 1)-3) uzimamo $F(r) = a; r$. Za dokaz tvrđenja 4) uzimamo $F(r) = r; c$. Za dokaz 5) uzimamo $F(r) = a; r$, i $G(r) = b; r$, i za 6) uzimamo $F(r) = a; r$.

Ako primenimo teoremu 2.19 5) sa $F(r) = a; r$ i $G(r) = r; b$, gde su $a \leq 1'$ i $b \leq 1'$, dobijamo $a; r; b = (a; r)(r; b)$. Za $r = 1'$ dobijamo 7). Konačno, 8) sledi iz teoreme 2.19 5) sa $F(r) = a; r$ i $G(r) = rc$.

□

Ekvivalencija iz leme 2.8, zajedno sa aksiomama da je $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ Booleova algebra i da je $(R, ;, 1')$ monoid, definiše relacionu algebru. O tome govore sledeće dve teoreme.

Teorema 2.21 *Neka je* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1, ;, 1', ^{\smile})$ *algebra tipa* $(2, 2, 1, 0, 0, 2, 0, 1)$ *koja zadovoljava*

1. $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ *je Booleova algebra;*
2. $(R, ;, ^{\smile})$ *je monoid;*
3. *Za sve* $r, s, t \in R$ *važi:*

$$(r; s) \cdot t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r^{\smile}; t) \cdot s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t; s^{\smile}) \cdot r = 0.$$

Tada je $\mathcal{R}$ *relaciona algebra.*

Dokaz. Prva i druga aksioma iz definicije relacione algebre slede iz pretpostavke da je $(R, ;, ^{\smile})$ monoid.

Na osnovu (3) možemo dokazati da operacija $^{\smile}$ ima konjugovanu i da je to ona sama:

$$r^{\smile}s = 0 \;\Leftrightarrow\; (r^{\smile}; 1')s = 0 \;\Leftrightarrow\; (1'; s^{\smile})r = 0 \;\Leftrightarrow\; s^{\smile}r = 0.$$

Takođe, na osnovu (3) možemo dokazati da u našoj algebri i sve operacije $F(x) = r; x$ imaju konjugovane:

$$(r; x)y = 0 \;\Leftrightarrow\; (r^{\smile}; y)x = 0.$$

Odatle, na osnovu teoreme 2.16, zaključujemo da su sve te operacije kompletno aditivne, pa algebra zadovoljava distributivne zakone za kompoziciju i inverziju. Dokažimo da važi i Zakon Tarskog:

$$(r; s)(-(r; s)) = 0 \;\Leftrightarrow\; (r^{\smile}; (-(r; s)))s = 0,$$

zbog (3).

Ostalo je da dokažemo da važe prvi i drugi zakoni za involuciju. Koristićemo činjenicu (koju smo dokazali u delu o Booleovim alegebrama, lema 1.24) da u svakoj Booleovoj algebri važi:

$r \leq s$ ako i samo ako $(\forall t)(s \cdot t = 0 \Rightarrow r \cdot t = 0)$ i

$r = s$ ako i samo ako $(\forall t)(s \cdot t = 0 \Leftrightarrow r \cdot t = 0)$.

Neka je $t \in R$. Tada:

$$tr = 0 \;\Leftrightarrow\; (r; 1')t = 0 \;\Leftrightarrow\; (r^{\smile}; t)1' = 0 \;\Leftrightarrow\; ((r^{\smile})^{\smile}; 1')t = 0 \;\Leftrightarrow\; t(r^{\smile})^{\smile} = 0,$$

što prema prethodnom znači da je $(r^{\smile})^{\smile} = r$.

Da dokažemo i drugi zakon involucije pretpostavimo da je $t \in R$. Tada:

$$\begin{aligned}
(r;s)^{\smile} t = 0 &\Leftrightarrow ((r;s)^{\smile};1')t = 0 \\
&\Leftrightarrow (1';t^{\smile})(r;s) = 0 \\
&\Leftrightarrow (r;s)t^{\smile} = 0 \\
&\Leftrightarrow (r^{\smile};t^{\smile})s = 0 \\
&\Leftrightarrow (s^{\smile};r^{\smile})t = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, $s^{\smile};r^{\smile} = (r;s)^{\smile}$. Time smo dokazali da je $\mathcal{R}$ relaciona algebra. □

Teorema 2.22 *Algebra* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, -, 0, 1, ;, 1', ^{\smile})$ *tipa* $(2, 2, 1, 0, 0, 2, 0, 1)$ *je relaciona algebra akko zadovoljava sledeće uslove:*

1. $(R, +, \cdot, -, 0, 1)$ *je Booleova algebra;*
2. $(R, ;, ^{\smile})$ *je monoid;*
3. *Za sve* $r, s, t \in R$ *važi:*

$$(r;s) \cdot t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (r^{\smile};t) \cdot s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t;s^{\smile}) \cdot r = 0.$$

Dokaz. Sledi direktno iz leme 2.8 i teoreme 2.21. □

Iz tog razloga uslove (1),(2),(3) teoreme 2.21 možemo uzeti za **drugu, ekvivalentnu definiciju relacione algebre**.

2.3 Neki specijalni elementi relacionih algebri

Nekoliko specijalnih vrsta elemenata će biti značajni za dalju diskusiju.

Definicija 2.23 **Ekvivalencijski element** *u relacionoj algebri* $\mathcal{U}$ *je element* e *koji zadovoljava nejednakosti*

$$e^{\smile} \leq e \;\; i \;\; e;e \leq e.$$

Primer 2.24 *U skupovnim relacionim algebrama, relacija zadovoljava prvu (drugu) nejednakost samo ako je simetrična (tranzitivna).*

Definicija 2.25 *Neka su* r *i* s *elementi relacione algebre* $\mathcal{U}$*. Kažemo da je* r **ispod** s *ako važi* $r \leq s$.

Tvrđenje 2.26 *Ako su* r *i* s *proizvoljni elementi relacione algebre* $\mathcal{U}$*, koji su ispod ekvivalencijskog elementa* e*, imamo*

$$r + s \leq e, \; e \cdot -e \leq e, \; r;s \leq e, \; r^{\smile} \leq e, \; e \cdot 1' \leq e.$$

Dokaz. Iz leme 1.24 pod 5), imamo

$$r \leq e \text{ i } s \leq e \quad \Rightarrow \quad r + s \leq e + e \leq e.$$

Druga nejednakost važi po definiciji infimuma.

Iz leme 2.7. pod 6) i definicije ekvivalencijskog elementa imamo

$$r \leq e \text{ i } s \leq e \quad \Rightarrow \quad r;s \leq e;e \leq e.$$

Za dokaz četvrte nejednakosti ponovo koristimo definiciju ekvivalencijskog elementa i lemu 2.7, ali sada pod 2), i dobijamo

$$r \leq e \quad \Rightarrow \quad r^{\smile} \leq e^{\smile} \leq e.$$

Peta nejednakost važi kao i druga po definiciji infimuma. □

Dakle, skup svih elemenata koji su ispod e je zatvoren za operacije Booleove algebre. Takođe vidimo da je taj skup zatvoren i za kompoziciju i inverziju, i sadrži relativizovani jedinični element $e \cdot 1'$. Odatle važi sledeća definicija.

Definicija 2.27 Relativizacija $\mathcal{U}$ u odnosu na *e, je restrikcija relacione algebre $\mathcal{U}$ na elemente koji su ispod ekvivalencijskog elementa e.*

Tvrđenje 2.28 *Relativizacija algebre $\mathcal{U}$ u odnosu na ekvivalencijski element e je relaciona algebra, i "skoro" da je podalgebra od $\mathcal{U}$, jedina razlika između relativizacije i podalgebre je to što je u relativizaciji jedinica e, a ne 1, jedinični element $e \cdot 1'$, a ne $1'$.*

Dokaz. Vidi [3]. □

Primer 2.29 *Ako je E relacija ekvivalencije na U, tada je $\mathcal{R}e(E)$ relativizacija od $\mathcal{R}e(U)$ u odnosu na E.*

Relativizacija relacione algebre u odnosu na ekvivalencijski element može naslediti brojne osobine od početne relacione algebre.

Tvrđenje 2.30 *Ako je početna relaciona algebra kompletna, tada je to i relativizacija. Element r u $\mathcal{U}$ je atom u relativizaciji ako i samo ako je atom i u $\mathcal{U}$ i $r \leq e$. Specijalno, ako je $\mathcal{U}$ atomična, tada je i relativizacija atomična.*

Dokaz. Sledi direktno iz definicije relativizacije. □

Definicija 2.31 Podjedinični element *u relacionoj algebri je element $x \leq 1'$.*

Definicija 2.32 Desno idealni element *je element r koji ima osobinu da je $r = r;1$.*

Dakle, za desno idealni element r možemo pretpostaviti da postoji neki element s tako da važi $r = s;1$ (u tom slučaju kažemo da s **generiše desno idealni element** r).

Ispostavlja se da uvek postoji element s, koji generiše desno idealni element r, tako da je s podjedinični, vidi [3].

Slično tome definišemo levo idealni element.

Definicija 2.33 *r je* **levo idealni element** *ako je $r = 1;r$.*

Gornja definicija ekvivalentna je sa činjenicom da postoji s takav da je $r = 1;s$ (isto kao gore možemo pretpostaviti da je s podjedinični element).

Imena potiču iz činjenice da ovi elementi igraju specijalnu ulogu u određivanju onoga što zovemo (relaciono algebarskim) desnim i levim idealima.

Primer 2.34 *U punoj skupovnoj relacionoj algebri na skupu U, desni idealni elementi, respektivno levi idealni elementi, su relacije R koje se mogu napisati u obliku $R = X \times U$, respektivno $R = U \times X$, za neki podskup X skupa U. Ove relacije mogu se zamisliti kao vertikalne, respektivno horizontalne, trake u Dekartovom koordinatnom sistemu određenom sa $U \times U$.*

U daljem razmatranju trebaće nam sledeće osobine koje važe za desno idealne elemente.

Lema 2.35 *Neka su r i s desno idealni elementi, odnosno $r = x;1$ i $s = y;1$ za neke podjedinične elemente x i y. Tada važi:*

1. *$-r$ je desno idealni element i $-r = -(x;1) = (1' \cdot (-x));1$.*
2. *Ako supremum proizvoljnog skupa desno idealnih elemenata postoji, onda je taj supremum desno idealni element. Specijalno, $r + s$ je desno idealni element i*
$$r + s = x;1 + y;1 = (x + y);1.$$
3. *$r \cdot (s;t) = (r \cdot s);t$, za sve elemente s i t.*

Dokaz. Vidi [3]. □

Prema (1) i (2) prethodne leme skup svih desno idealnih elemenata formira regularnu Booleovu podalgebru $\mathcal{B}$ u Booleovom delu relacione algebre $\mathcal{U}$. Zove se **Booleova algebra desno idealnih elemenata** u $\mathcal{U}$. Osobina (3) sa zove **strogi modularni zakon za desno idealne elemente**, i ona karakteriše desno idealne elemente:

Tvrđenje 2.36 *r je desno idealni element u $\mathcal{U}$ ako i samo ako zadovoljava jednakost $r \cdot (s;t) = (r \cdot s);t$, za sve s i t iz $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Vidi [3]. □

Definicija 2.37 **Pravougaonik** *u relacionoj algebri je element oblika $x;1;y$, gde su x i y podjedinični elementi.*

Elementi x i y zovu se **stranice pravougaonika**.

Tvrđenje 2.38 *Za sve x i y iz $\mathcal{U}$ važi jednakost $x;1;y = (x;1) \cdot (1;y)$.*

Dokaz. Vidi [10]. □

Posledica 2.39 *Pravougaonik je zapravo Booleov proizvod desno idealnog elementa sa levo idealnim elementom.*

Primer 2.40 *U punoj skupovnoj relacionoj algebri na skupu U, pravougaonici su skupovi oblika $X \times Y$, gde su X i Y podskupovi skupa U.*

Definicija 2.41 *Za relacionu algebru $\mathcal{U}$ kažemo da je* **prosta** *ako je netrivijalna (to jest, ako ima bar dva elementa) i ako ima samo trivijalne ideale $\{0\}$ i U.*

Tvrđenje 2.42 *Klasa prostih relacionih algebri ima vrlo prostu aritmetičku karakterizaciju: relaciona algebra $\mathcal{U}$ je prosta ako i samo ako ima tačno dva idealna elementa, koje ćemo označavati sa 0 i 1. Ekvivalentno, $\mathcal{U}$ je prosta ako i samo ako je $0 \neq 1$, i za sve elemente r u $\mathcal{U}$, ako je $r \neq 0$, tada je $1; r; 1 = 1$. Iz ove karakterizacije sledi da je svaka podalgebra proste relacione algebre prosta.*

Dokaz. Vidi [10]. □

Koristićemo sledeće osobine pravougaonika.

Lema 2.43 *Neka su x, y, u, v podjedinični elementi u relacionoj algebri $\mathcal{U}$. Tada:*

1. $(x; 1; y) \cdot (u; 1; v) = (x \cdot u); 1; (y \cdot v)$.
2. $(x; 1; y)^{\smile} = (y; 1; x)$.
3. $x; 1; y \neq 0$ *uvek kada je $\mathcal{U}$ prosta relaciona algebra i stranice x i y su različite od nule.*
4. $(x; 1; y); (u; 1; v) \leq x; 1; v$ *i jednakost važi uvek kada je $\mathcal{U}$ prosta i $y \cdot v$ je različito od nule.*
5. $x; 1; y = u; 1; v$ *ako i samo ako je $x = u$ i $y = v$, kada god je $\mathcal{U}$ prosta i stranice pravougaonika su različite od nule.*

Dokaz. Vidi [10]. □

Definicija 2.44 Kvadrat *u relacionoj algebri je pravougaonik sa jednakim stranicama.*

Tvrđenje 2.45 *Kvadrat je uvek ekvivalencijski element.*

Dokaz. Neka je r kvadrat, to jest element oblika $r = x; 1; x$, gde je $x \leq 1'$. Za dokaz da je r ekvivalencijski element po definiciji potrebno je da pokažemo da važi $r^{\smile} \leq r$ i $r; r \leq r$.

Na osnovu leme 2.43 pod 2) imamo

$$r^{\smile} = (x; 1; x)^{\smile} = x; 1; x.$$

Na osnovu iste leme, sada pod 3), dobijamo

$$r; r = (x; 1; x); (x; 1; x) \leq (x; 1x),$$

što je i trebalo pokazati. □

Odatle sledi da ima smisla govoriti o relativizaciji relacione algebre u odnosu na kvadrat.

Definicija 2.46 *Domen i rang elementa r u relacionoj algebri su podjedinični elementi oblika:*

$$\textit{domen}\ r = (r; 1) \cdot 1' \ \ i\ \ \textit{rang}\ r = (1; r) \cdot 1'.$$

Primer 2.47 *U skupovnoj relacionoj algebri, domen (rang) relacije R je skup parova (α, α) takvih da je α domen (rang) relacije R u standardnom značenju.*

Tvrđenje 2.48 *Domen i rang pravougaonika $x;1;y$ su, respektivno, stranice x i y. Domen desno idealnog elementa $r = x;1$ je x, a rang levo idealnog elementa $r = 1;y$ je y. Ako je x domen, a y rang elementa r, tada je*

$$x;r = r;y = r.$$

Prema tome, domen (rang) elementa r se ponaša kao levi (desni) jedinični element za r.

Dokaz. Vidi [10]. □

Definicija 2.49 **Funkcionalni element**, *u relacionoj algebri, je element f sa osobinom $f^{\smile};f \leq 1'$.*

Bijektivni element *je funkcija f sa osobinom da je i $f^{\smile}$ takođe funkcija.*

Primer 2.50 *U skupovoj relacionoj algebri, funkcionalni element je zapravo funkcija, a bijekcija injekcija, u skupovnom smislu.*

Navešćemo neke osobine funkcionalnih elemenata koji će nam trebati u kasnijim razmatranjima. Osobina (3) kaže da je funkcija levo distributivna prema Booleovom množenju. Odatle imamo da je i bijekcija levo distributivna prema Booleovom množenju.

Lema 2.51 *Neka je $\mathcal{U}$ relaciona algebra i f, g, r, s elementi iz $\mathcal{U}$. Tada važe sledeća tvrđenja.*

1. *Ako je f funkcionalni element sa domenom x i rangom y, i ako je g funkcionalni element sa domenom y i rangom z, tada je $f;g$ funkcionalni element sa domenom x i rangom z.*
2. *Ako je f funkcionalni element i $g \leq f$, tada je i g funkcionalni element i $(g;1) \cdot f = g$.*
3. *Ako je f funkcionalni element, tada je $f;(r \cdot s) = (f;r) \cdot (f;s)$, za sve sve elemente r i s.*
4. *Supremum skupa funkcionalnih elemenata koje generišu uzajamno disjunktne desno idealne elemente, ako postoji, je takođe funkcija. Specijalno, ako su f i g funkcionalni elementi takvi da $(f;1) \cdot (g;1) = 0$, tada je $f + g$ funkcionalni element.*

Dokaz. Vidi [10]. □

Sada ćemo videti neke osobine atoma koje će nam trebati u daljem razmatranju.

Lema 2.52 *Neka je $\mathcal{U}$ i r, s, f elementi iz $\mathcal{U}$. Tada važe sledeća trvđenja.*

1. *Ako je r atom, tada su to i njegov domen i rang.*
2. *Ako je r atom, tada je $r;1$ atom u Booleovoj algebri desno idealnih elemenata. Specijalno, ako je r atom i $0 \leq s \leq r;1$, tada je $s;1 = r;1$.*

3. *Ako je r atom u Booleovoj algebri desno idealnih elemenata i ako je f funkcionalni element takav da je $r \cdot f \neq 0$, tada je $r \cdot f$ atom. Specijalno, ako je r atom (u relacionoj algebri) i ako je f funkcionalni element, i ako zadovoljavaju $0 \leq f \leq r;1$, tada je i f atom.*

4. *Funkcionalni element je atom ako i samo ako mu je domen atom.*

5. *Ako je r atom i f funkcionalni element čiji domen sadrži rang od r, tada je $r;f$ atom.*

6. *Ako je r atom, tada je i $r^{\smile}$ atom.*

Dokaz. Vidi [3] i [10]. □

Definicija 2.53 *Element koji je i levo idealni i desno idealni element zove se* **idealni element***.*

Tvrđenje 2.54 *Idealni element r karakteriše činjenica da je $r = 1;s;1$, za neki element s (i kaže se da s generiše idealni element r), kao i kod desno idealnih elemenata, može se uzeti da je s podjedinični element.*

Dokaz. Vidi [10]. □

Primer 2.55 *U pravoj relacionoj algebri na relaciji ekvivalencije E, idealni elementi su relacije R koje se mogu zapisati u obliku*

$$R = \bigcup \{V \times V : V \in X\}$$

za neki skup X, koji je klasa ekvivalencije u E. Ako je V klasa ekvivalencije E, tada je $V \times V$ idealni element.

Tvrđenje 2.56 *Skup idealnih elemenata u relacionoj algebri $\mathcal{U}$ sadrži 0 i 1 i zatvoren je za Booleove operacije u $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Sledi iz leme 2.35 (1) i (2) i analogonu ove leme za levo idealne elemente, zajedno sa lemom 2.9 (1) i lemom 2.7 (5). □

Posledica 2.57 *Skup idealnih elemenata je Booleova algebra sa Booleovim operacijama iz $\mathcal{U}$, u stvari to je regularna podalgebra Booleovog dela od $\mathcal{U}$, u smislu da supremum skupa idealnih elemenata postoji u Booleovoj algebri idealnih elemenata ako i samo ako postoji u $\mathcal{U}$, i kada ovi supremumi postoje, jednaki su. (Vidi [2] i [10]).*

Postoji bliska veza između idealnih elemenata i ideala u relacionim algebrama.

Tvrđenje 2.58 *Neka je $\mathcal{U}$ relaciona algebra i $\mathcal{B}$ Booleova algebra idealnih elemenata u $\mathcal{U}$. Ako je M relaciono-algebarski ideal u $\mathcal{U}$, tada je $K_M = B \bigcap M$ Booleov ideal u B, i ako je K Booleov ideal u B, tada je skup*

$$M_K = \{r \in A : 1;r;1 \in K\}$$

relaciono-algebarski ideal u $\mathcal{U}$. Funkcija koja slika svaki relaciono-algebarski ideal M iz $\mathcal{U}$ u Booleov ideal K_M iz $\mathcal{B}$ je mrežni izomorfizam iz mreže relaciono-algebarskih ideala u $\mathcal{U}$ u mrežu Booleovih ideala u $\mathcal{B}$, a inverzni izomorfizam slika svaki Booleov ideal K iz $\mathcal{B}$ u relaciono-algebarski ideal M_K u $\mathcal{U}$. Specijalno, M je glavni ideal u $\mathcal{U}$ samo ako je K_M glavni ideal u B, to jest samo ako je M skup svih elemenata u $\mathcal{U}$ koji su ispod nekog datog idealnog elementa.

Dokaz. Vidi [2] i [10]. □

Tvrđenje 2.59 *Idealni elementi su uvek ekvivalencijski elementi, pa ima smisla posmatrati relativizaciju relacione algebre prema idealnom elementu.*

Dokaz. Vidi [10]. □

Suprotno proizvoljnim elementima ekvivalencije, idealni elementi determinišu ideale (pa i relacije kongruencije) na relacionim algebrama.

Posledica 2.60 *Skupovi idealnih elemenata mogu se koristiti da bi se dobile dekompozicije relacionih algebri. Ako skup* $(r_i : i \in I)$ *idealnih elemenata u relacionoj algebri* $\mathcal{U}$ *vrši particiju jedinice, u smislu da su elementi uzajamno disjunktni i zbir im je* 1*, tada je* $\mathcal{U}$ *izomorfno direktnom proizvodu skupa relacionih algebri* $(\mathcal{U}_i : i \in I)$*, gde je* $\mathcal{U}_i$ *relativizacija* $\mathcal{U}$ *prema idealnom elementu* r_i*.*

Ovaj rezultat ćemo koristiti kao **Jónsson-Tarski teoremu** (vidi [10]).

Posledica 2.61 *Ako je* r *idealni element u* $\mathcal{U}$*, tada je* $\mathcal{U}$ *izomorfno direktnom proizvodu relacionih algebri* $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{C}$ *koje su relativizacije* $\mathcal{U}$ *u odnosu na* r *i* $-r$*, respektivno.*

Posledica 2.62 *Ako je* r *atom u Booleovoj algebri idealnih elemenata u* $\mathcal{U}$*-idealni atom, tada je relativizacija* $\mathcal{U}$ *u odnosu na* r *prosta relaciona algebra.*

Trebaće nam sledeća posledica (po Givant-u) Jónsson-Tarski teoreme o dekompoziciji.

Teorema 2.63 *Svaka kompletna relaciona algebra* $\mathcal{U}$ *je izomorfna direktnom proizvodu dve kompletne relacione algebre* $\mathcal{B}$ *i* $\mathcal{C}$ *sa sledećim osobinama:* $\mathcal{B}$ *je direktan proizvod relativizacija* $\mathcal{U}$ *u odnosu na idealne atome, specijalno, svaka od ovih relacionih algebri je prosta i* $\mathcal{C}$ *je relativizacija* $\mathcal{U}$ *koja ima Booleovu algebru idealnih elemenata bez atoma.*

Dokaz. Neka je $(r_i : i \in I)$ numeracija različitih idealnih atoma u $\mathcal{U}$. Zbir

$$r = \sum_i r_i$$

ovih elemenata postoji u $\mathcal{U}$ jer smo pretpostavili da je $\mathcal{U}$ kompletna i ovaj zbir je idealni element prema lemi 2.35 (2) i njenom analogonu za levo idealne elemente.

Neka su $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ relativizacije $\mathcal{U}$ u odnosu na r i $-r$, respektivno. Tada je $\mathcal{U}$ izomorfno direktnom proizvodu $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$, prema Jónsson-Tarski teoremi o dekompoziciji. Svaki od elemenata r_i ostaje idealni u $\mathcal{B}$ i skup ovih idealnih elemenata vrši particiju jedinice na $\mathcal{B}$. Odatle sledi da je $\mathcal{B}$ izomorfno direktnom proizvodu skupa

$$(\mathcal{B}_i : i \in I),$$

gde su $\mathcal{B}_i$ relativizacije $\mathcal{B}$ u odnosu na r_i, ponovo po Jónsson-Tarski teoremi o dekompoziciji. Relativizacija $\mathcal{B}_i$ poklapa se sa relativizacijom $\mathcal{U}$ prema r_i, pa je $\mathcal{B}$ izomorfno direktnom proizvodu relativizacija $\mathcal{U}$ prema idealnim elementima i svaka od ovih relativizacija je prosta. Ne može biti idealnih elemenata ispod $-r$ jer je svaki idealni element, po definiciji, ispod r. Pa je zbog toga Booleova algebra idealnih elemenata u $\mathcal{C}$ bez atoma. □

Posledica 2.64 *Činjenica da je Booleova algebra idealnih elemenata u relacionoj algebri* $\mathcal{C}$ *(iz prethodne teoreme) bez atoma ekvivalentna je sa činjenicom da* $\mathcal{C}$ *nema prostih faktora (vidi [10]). Zbog toga,* $\mathcal{C}$ *se ne može dalje rastavljati na direktne proizvode koji sadrže bar jedan prost faktor.*

Definicija 2.65 *Relaciona algebra* $\mathcal{U}$ *zove se* **integralna** *ako je netrivijalna i ako je kompozicija dva nenula elementa uvek nenula element, to jest ako su* $r \neq 0$ *i* $s \neq 0$ *tada je* $r; s \neq 0$.

Tvrđenje 2.66 *Relaciona algebra je integralna ako i samo ako je* $1'$ *atom.*

Dokaz. Vidi [10]. □

Na osnovu ove karakterizacije imamo sledeću posledicu.

Posledica 2.67 *Algebra kompleksa grupe je integralna, a puna skupovna relaciona algebra na skupovima koji imaju bar dva elementa nikad nije integralna.*

Takođe iz te karakterizacije i leme 2.52 (2) i njenog analogona za levo idealne elemente važi sledeća posledica.

Posledica 2.68 *U integralnoj relacionoj algebri, jedinica je atom u Booleovoj algebri idealnih elemenata, pa integralna relaciona algebra mora biti prosta.*

Svaka relaciona algebra ima dve važne ekstenzije koje će nam trebati u daljem radu. Prva je kanonička ekstenzija.

Definicija 2.69 Kanonička ekstenzija *je kompletna atomična relaciona algebra* $\mathcal{B}$ *koja sadrži* $\mathcal{U}$ *kao podalgebru i zadovoljava sledeća dva uslova:*

1. *za svaka dva atoma* a *i* b *iz* $\mathcal{B}$ *postoji element* r *iz* $\mathcal{U}$ *koji iznad* a*, a nije iznad* b *(to se zove* **osobina atomske separacije***);*
2. *ako je* 1 *supremum u* $\mathcal{B}$ *nekog podskupa* X *elemenata iz* $\mathcal{U}$*, tada je* 1 *supremum nekog konačnog podskupa od* X *(ovo se zove* **osobina kompaktnosti***).*

Tvrđenje 2.70 *Kanonička ekstenzija od* $\mathcal{U}$ *postoji i jedinstvena je do na izomorfizam koji je identička funkcija na* $\mathcal{U}$.

Dokaz. Vidi [9]. □

Posledica 2.71 *Ako je* $\mathcal{U}$ *prosta, tada je i kanonička ekstenzija od* $\mathcal{U}$ *prosta.*

Druga ekstenzija od $\mathcal{U}$ je kompletiranje $\mathcal{U}$.

Definicija 2.72 Kompletiranje $\mathcal{U}$ *je kompletna relaciona algebra* $\mathcal{B}$ *koja sadrži* $\mathcal{U}$ *kao regularnu i gustu podalgebru.*

Reći da je $\mathcal{U}$ **gusta u** $\mathcal{B}$ *znači da je svaki nenula element u* $\mathcal{B}$ *iznad nenula elementa iz* $\mathcal{U}$ *ili, što je ekvivalentno, svaki element* r *iz* $\mathcal{B}$ *je supremum skupa elemenata iz* $\mathcal{U}$ *koji su ispod* r.

Tvrđenje 2.73 *Kompletiranje* $\mathcal{U}$ *postoji i jedinstveno je do na izomorfizam koji je identička funkcija na* $\mathcal{U}$.

Dokaz. Vidi [15]. □

Tvrđenje 2.74 *Ako je $\mathcal{U}$ prosta, tada je i kompletiranje od $\mathcal{U}$ prosto. Generalno, $\mathcal{B}$ nije atomično, u stvari, $\mathcal{B}$ je atomično ako i samo ako je $\mathcal{U}$ atomično, jer je element r u $\mathcal{B}$ atom ako i samo ako je r atom u $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Vidi [15]. □

Glava 3

Reprezentacija relacionih algebri

3.1 Definicija reprezentacije relacionih algebri

Definicija 3.1 **Reprezentacija relacione algebre** *$\mathcal{U}$ je utapanje (homomorfizam i "1-1") φ koja slika $\mathcal{U}$ u pravu skupovnu relacionu algebru $\mathcal{R}e(E)$, za neku relaciju ekvivalencije E. Podalgebra od $\mathcal{R}e(E)$ u koju φ slika $\mathcal{U}$ takođe se zove reprezentacija $\mathcal{U}$.*

Definicija 3.2 *Reprezentacija (funkcija) φ od $\mathcal{U}$ je* **kompletna** *ako čuva sve supremume kao unije. Ovo znači da ako je r supremum u $\mathcal{U}$ skupa elemenata X, tada je relacija $\varphi(r)$ u $\mathcal{R}e(E)$ unija skupa relacija $\{\varphi(s) : s \in X\}$.*

Relaciona algebra se zove **reprezentabilna** *ili* **kompletno reprezentabilna** *shodno tome da li ima reprezentaciju ili kompletnu reprezentaciju.*

Primer 3.3 *Algebre kompleksa $\mathcal{C}m(G)$, grupe $(G, \circ, ^{-1}, \iota)$ su reprezentabilne relacione algebre. Cayleyeva reprezentacija elementa f iz G je permutacija G*

$$R_f = \{(g, g \circ f) : g \in G\},$$

a Cayleyeva reprezentacija podskupa H u G je unija Cayleyevih reprezentacija elemenata iz H:

$$\begin{aligned} R_H &= \bigcup\{R_f : f \in H\} \\ &= \{(g, g \circ f) : g \in G \ \ i \ \ f \in H\} \\ &= \{(g, h) : g, h \in G \ \ i \ \ h \in g \circ H\}, \end{aligned}$$

gde je $g \circ H = \{g \circ f : f \in H\}$. Može se lako dokazati da sledeće jednakosti važe za sve H,K i L podskupove od G:

$$R_H \bigcup R_K = R_L, \ \ za\ L = H \bigcup K,$$

$$\sim R_H = R_L, \ \ za\ L = \sim H,$$

$$R_H | R_K = R_L, \ \ za\ L = H \circ K,$$

$$R_H^{-1} = R_L, \quad za\ L = H^{-1},$$

i $id_G = R_\iota$. *(Operacije levo se izvode u* $\mathcal{R}e(G)$*, dok se operacije desno izvode u* $\mathcal{C}m(G)$*.)*

Iz gornjih jednakosti sledi da je skup svih relacija oblika R_H za podskupove H od G poduniverzum od $\mathcal{R}e(G)$, i to je kompletan poduniverzum. Odgovarajuća kompletna podalgebra obeležava se sa $\mathcal{C}a(G)$.

Jednačine takođe impliciraju da je funkcija φ iz $\mathcal{C}m(G)$ u $\mathcal{C}a(G)$ definisana sa

$$\varphi(H) = R_H = \{(g, h) : g, h \in G \text{ i } h \leq g \circ H\}$$

izomorfizam, pa čak i kompletna reprezentacija $\mathcal{C}m(G)$.

Definicija 3.4 *φ se zove* **Cayleyeva reprezentacija** *$\mathcal{C}m(G)$, i $\mathcal{C}a(G)$ se takođe naziva* **Cayleyeva reprezentacija** *$\mathcal{C}m(G)$.*

1950. godine, R. Lyndon pronašao je algebru koja zadovoljava sve aksiome relacione algebre, a nije izomorfna ni jednoj konkretnoj algebri relacija. Lyndon je pronašao *nereprezentabilnu relacionu algebru.* U sledećem primeru data je konstrukcija te algebre.

Primer 3.5 *Neka je S neprazan skup, i neka je $I \in S$. Za svaka dva elementa $r, s \in S \backslash \{I\}$ definišimo*

$$\{r\};\{s\} = \begin{cases} S\backslash\{r,s\}, & r \neq s \\ \{r, I\}, & r = s \end{cases}$$

Neka je $\{r\};\{I\} = \{I\};\{r\} = \{r, I\}$, za sve $r \in S$. Ako su $X, Y \subseteq S$, definišimo $X;Y$ i $X^{\smile}$ sa:

$$X;Y = \bigcup\{\{r\};\{s\} : r \in X, s \in Y\}, \quad X^{\smile} = X.$$

Označimo sa $\mathcal{L}[S, I]$ algebru $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, -, \emptyset, S, ;, \{I\}, ^{\smile})$.

Lyndon je dokazao da gore definisana algebra zadovoljava sve aksiome relacione algebre ako i samo ako je $|S| \neq 3$ i $|S| \neq 4$. Takođe je dokazao da za $|S| = 8$, algebra $\mathcal{L}[S, I]$ nije reprezentabilna. (Vidi [12]).

Atomična relaciona algebra $\mathcal{U}$ ne mora biti i kompletna, jer mogu postojati beskonačni podskupovi univerzuma za koje supremum i infimum ne postoje.

Ovo može predstavljati problem kada pokušavamo da predstavimo $\mathcal{U}$ kao izomorfnu kopiju algebre u nekoj datoj konkretnoj klasi skupovnih relacionih algebri; jer reprezentabilne algebre u klasi mogu biti kompletne, kao u slučaju Cayleyevih reprezetacija algebri kompleksa grupa. Nekompletnost je relativno mali nedostatak, jer se može popraviti "popunjavanjem" svih beskonačnih suma, bez drugog modifikovanja esencijalne strukture $\mathcal{U}$.

Tehnički način da se ovo uradi je da se pređe na kompletizaciju od $\mathcal{U}$. Atomi u kompletizaciji su atomi iz $\mathcal{U}$, a operacije na kompletizaciji restrikovane na $\mathcal{U}$, slažu se sa operacijama u $\mathcal{U}$; ovo važi u nekom smislu čak i za operacije formiranja supremuma i infimuma: ako supremum i infimum beskonačnog podskupa od $\mathcal{U}$ postoji u $\mathcal{U}$, tada podskup ima isti supremum i infimum i u kompletizaciji.

Definicija 3.6 *Dve relacione algebre su* **esencijalno izomorfne** *ako su njihove kompletizacije izomorfne.*

Treba istaći da nije uvek moguće uspostaviti ovakav esencijalni izomorfizam kada radimo sa reprezentabilnošću, jer postoje atomične relacione algebre $\mathcal{U}$ sa osobinom da je $\mathcal{U}$ reprezentabilna algebra ali kompletizacija od $\mathcal{U}$ nije (videti [6]).

Sledeća teorema je samo specijalni slučaj rezultata o atomičnim Booleovim algebrama sa operatorima. Ona daje dovoljan uslov da skup W međusobno disjunktnih nenula elemenata u relacionoj algebri $\mathcal{U}$ generiše atomičnu podalgebru u $\mathcal{U}$ u kojoj su elementi iz W atomi.

Teorema 3.7 *Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ relaciona algebra i W skup nenula elemenata u $\mathcal{U}$ sa sledećim osobinama:*

1. *Elementi u W su međusobno disjunktni i suma im je (u $\mathcal{U}$) 1.*
2. *Identični element $1'$ je suma (u $\mathcal{U}$) elemenata u W koji su ispod $1'$.*
3. *Ako je p u W, tada je i $p^{\smile}$ u W.*
4. *Ako su p i q u W, tada je $p;q$ zbir (u $\mathcal{U}$) elemenata iz W koji su ispod $p;q$.*

Skup suma $\sum X$ takvih da je X podskup od W i $\sum X$ postoji u $\mathcal{U}$ je tada univerzum atomične relacione algebre $\mathcal{B}$ u $\mathcal{U}$, i atomi u $\mathcal{B}$ su samo elementi iz W. Ako je $\mathcal{U}$ kompletna, tada je $\mathcal{B}$ kompletna podalgebra od $\mathcal{U}$.

Dokaz. Vidi [8]. □

3.2 Reprezentacija atomičnih relacionih algebri sa funkcionalnim atomima

Reprezentacija koju ćemo videti u ovom delu rada bliska je sa Cayleyevom reprezentacijom za algebru kompleksa grupe. To je jača verzija teoreme Jónsson-Tarskog o reprezentaciji atomičnih relacionih algebri sa funkcionalnim atomima i malo drugačijom verzijom njihovog dokaza. Najveću pažnju ćemo posvetiti delovima dokaza koji se razlikuju od dokaza teoreme Maddux-Tarski o reprezentabilnosti za funkcionalno guste relacione algebre.

Najpre uočimo da ako je svaki atom u relacionoj algebri funkcionalan, tada je inverzni element svakog atoma takođe funkcionalan (kako je inverzni element svakog atoma takođe atom- vidi lemu 2.52 (6)), pa je odatle svaki atom zapravo bijekcija.

Teorema 3.8 *Svaka atomična relaciona algebra sa funkcionalnim atomima je kompletno reprezentabilna.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ atomična relaciona algebra sa funkcionalnim atomima, i U skup atoma iz $\mathcal{U}$. Definišimo funkciju φ iz univerzuma $\mathcal{U}$ u $\mathcal{R}e(U)$ sa

$$\varphi(r) = \{(a,b) : a, b \in U \text{ i } b < a;r\}$$

Dokazi da φ slika 0, 1 i $1'$ u praznu relaciju, identičku relaciju i u relaciju ekvivalencije E na U, respektivno, i da φ čuva Booleove zbirove kao unije, Booleove proizvode kao preseke, komplemente kao skupovne komplemente u odnosu na E, inverzije kao relacione inverzije, identični su argumentima u dokazu teoreme 4.5, koji ćemo videti u sledećem poglavlju. Iz tog razloga, preskačemo te argumente ovde i fokusiramo se na pokazivanje da φ očuvava sve postojeće supremume kao unije, očuvava kompozicije kao relacione kompozicije i injekcija je.
Da bismo pokazali da φ očuvava sve postojeće supremume kao unije, pretpostavimo da je r supremum nekog skupa X elemenata iz $\mathcal{U}$. Kompletna distributivnost kompozicije prema sabiranju implicira da:

$$a; r = \sum(a; X) = \sum\{a; s : s \in X\}.$$

Za atome a i b, odatle sledi da je

$$b \leq a; r \text{ ako i samo ako je } b \leq a; s,$$

za neko $s \in X$, pa je

$$\begin{aligned}
(a, b) \in \varphi(r) \quad & \text{akko} \quad b \leq a; r \\
& \text{akko} \quad b \leq a; s \text{ za neko } s \in X \\
& \text{akko} \quad (a, b) \in \varphi(s) \text{ za neko } s \in X \\
& \text{akko} \quad (a, b) \in \bigcup_{s \in X} \varphi(s),
\end{aligned}$$

po definiciji za φ, definiciji unije skupa elemenata. Odatle,

$$\varphi(r) = \bigcup_{s \in X} \varphi(s).$$

Da bismo dokazali da φ očuvava kompoziciju, neka su a i b atomi i r i s proizvoljni elementi iz $\mathcal{U}$. Neka je X skup atoma ispod $a; r$ i uočimo da je $a; r = \sum X$ jer je $\mathcal{U}$ atomična. Kompletna distributivnost kompozicije prema sabiranju implicira

$$a; r; s = (\sum X); s = \sum\{c; s : c \in X\} = \sum\{c; s : c \in U \text{ i } c \leq a; r\}.$$

Odatle imamo:

$$b \leq a; r; s \text{ ako i samo ako } c \leq a; r \text{ i } b \leq c; s,$$

za neko $c \in U$. Iz toga sledi

$$\begin{aligned}
(a, b) \in \varphi(r; s) \quad & \text{akko} \quad b \leq a; r; s \\
& \text{akko} \quad c \leq a; r \text{ i } b \leq c; s, \text{ za neko } c \in U \\
& \text{akko} \quad (a, c) \in \varphi(r) \text{ i } (c, b) \in \varphi(s), \text{ za neko } c \in U \\
& \text{akko} \quad (a, b) \in \varphi(r) | \varphi(s),
\end{aligned}$$

po definiciji φ, prema prethodnim oznakama i definiciji relacione kompozicije. Dakle, $\varphi(r; s) = \varphi(r) | \varphi(s)$, za sve elemente $r, s \in \mathcal{U}$.
Da bismo proverili da li je φ injekcija, posmatrajmo elemente $r, s \in \mathcal{U}$. Uzmimo

da je X skup atoma ispod $1'$, i uočimo da je $1'$ supremum za X, što sledi iz pretpostavke da je $\mathcal{U}$ atomična. Odatle,

$$r = 1' ; r = (\sum X) ; r = \sum\{a ; r : a \in X\} = \sum\{a ; r : a \in U \text{ i } a \leq 1'\}.$$

Za svaki atom b imamo $b \leq r$ ako i samo ako $b \leq a ; r$, za neki atom $a \leq 1'$. Sličnim razmatranjem dolazimo do zaključka da je $b \leq s$ ako i samo ako $b \leq a ; s$, za neki atom $a \leq 1'$. Pretpostavimo da je $\varphi(r) = \varphi(s)$. Iz ove pretpostavke i definicije φ sledi da za bilo koja dva atoma a i b imamo $b \leq a ; r$ ako i samo ako $b \leq a ; s$. Kombinujući ova razmatranja izvodimo zaključak da je atom ispod r ako i samo ako je ispod s. Elementi r i s su sume atoma koji su ispod njih, pa iz pretpostavke da je $\mathcal{U}$ atomična izvlačimo zaključak da je $r = s$. □

Definicija reprezentacije u dokazu naredne teoreme može se smatrati prirodnom ekstenzijom atomične relacione algebre sa funkcionalnim atomima, po definiciji Cayleyeve reprezentacije algebre kompleksa grupe. Jónsson-Tarski [10] izveli su sledeći zaključak iz njihove verzije teoreme 3.8.

Posledica 3.9 *Ako je jedinica relacione algebre $\mathcal{U}$ suma konačnog skupa funkcionalnih elemenata, tada je $\mathcal{U}$ reprezentabilna.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B}$ kanonička ekstenzija od $\mathcal{U}$. Konačne sume ostaju iste, pa i 1 u $\mathcal{B}$ takođe mora biti suma konačnog skupa funkcija. Algebra $\mathcal{B}$ je atomična, svaki atom u $\mathcal{B}$ je ispod 1, pa i ispod sume funkcija, pa svaki atom mora biti ispod neke funkcije. Elementi ispod funkcija su funkcije po lemi 2.51 (2), pa je $\mathcal{B}$ atomična relaciona algebra sa funkcionalnim atomima. Odatle sledi da je $\mathcal{B}$ kompletno reprezentabilna, po teoremi 3.8. Iz toga izvodimo zaključak da je $\mathcal{U}$ reprezentabilna. □

Glava 4

Funkcionalno guste relacione algebre

4.1 Reprezentabilnost funkcionalno gustih relacionih algebri

Definicija 4.1 *Relaciona algebra je* **funkcionalno gusta** *ako ispod svakog nenula elementa postoji nenula funkcija.*

Tvrđenje 4.2 *Sledećih pet uslova su ekvivalentni u svakoj relacionoj algebri $\mathcal{U}$:*

1. *$\mathcal{U}$ je funkcionalno gusta;*
2. *jedinica u $\mathcal{U}$ je supremum skupa svih funkcija;*
3. *jedinica u $\mathcal{U}$ je supremum skupa nekih funkcija;*
4. *svaki elemet u $\mathcal{U}$ je supremum skupa svih funkcija koje su ispod njega;*
5. *svaki elemet u $\mathcal{U}$ je supremum skupa nekih funkcija.*

Dokaz. Vidi [8]. □

U poslednjim poglavljima ovog rada biće dati opisi funkcionalno gustih relacionih algebri, kako atomičnih, tako i onih bez atoma. Iz teoreme koju ćemo videti kasnije (teorema 4.5) sledi da svaka relaciona algebra koja nije reprezentabilna nije ni funkcionalno gusta. Dakle, Lyndonov primer nereprezentabilne relacione algebre je ujedno i primer relacione algebre koja nije funkcionalno gusta.

Cilj ovog poglavlja je drugačiji dokaz Maddux-Tarski teoreme da je svaka funkcionalno gusta relaciona algebra reprezentabilna (vidi [13]). Njihova teorema je bolja od teoreme 3.8 jer ne zahteva da relaciona algebra bude atomična i bolja je od posledice 3.9 jer ne zahteva da skup funkcija, koje su ispod jedinice, bude konačan.

Za razliku od reprezentacije u teoremi 3.8, reprezentacija u Maddux-Tarski teoremi ne mora biti kompletna. Ideja dokaza njihove teoreme u ovom radu je da prvo pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta relaciona algebra koja je kompletna, pa da pređemo na kanoničku ekstenziju od $\mathcal{U}$. Ova ekstenzija generalno nije funkcionalno gusta ali ima dovoljno funkcionalnih atoma da se napravi reprezentacija $\mathcal{U}$ kao u teoremi 3.8. Opšti slučaj kada $\mathcal{U}$ nije kompletna rešavamo tako što se prebacimo na kompletizaciju od $\mathcal{U}$, koja ostaje funkcionalno gusta.

Lema 4.3 *Ako je funkcionalno gusta relaciona algebra kompletna, tada ispod svakog nenula elementa r postoji nenula funkcija f takva da važi $f;1 = r;1$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta relaciona algebra koja je kompletna. Posmatrajmo neki nenula element r iz $\mathcal{U}$. Transfinitnom indukcijom po ordinalnom broju i, konstruišemo skup nenula funkcija f_i koje su ispod r i generišu uzajamno disjunktne desno idealne elemente.

Za bazu indukcije $i = 0$, koristimo da je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta i biramo nenula funkciju f_0 koja je ispod r. Pretpostavimo da smo izabrali f_i za sve ordinale i manje od ordinala j. Suma:

$$g_j = \sum_{i<j} f_i \tag{4.1}$$

postoji zato što je $\mathcal{U}$ kompletna. Dalje, g_j je funkcija po lemi 2.51 (4) i indukcijskoj hipotezi da funkcije f_i generišu uzajamno disjunktne desno idealne elemente; i g_j je ispod r jer je svaka od funkcija f_i ispod r po indukcijskoj hipotezi. Ako su generisani desno idealni elementi $g;1$ i $r;1$ jednaki, funkcija $f = g_j$ ima tražene osobine.
Ako generisani desno idealni elementi nisu jednaki, tada $0 < g_j < r;1$ jer $0 < g_j \leq r$, pa je

$$-(g_j;1) \cdot (r;1) \neq 0.$$

Komplement $-(g_j;1)$ je desno idealni element, po lemi 2.35 (1). Koristeći zakon stroge modularnosti za desno idealne elemente (lema 2.35 (3), za r, s i t zamenjenim sa $-(g_j;1)$, r i 1, respektivno) na identitet dobijamo

$$[-(g_j;1) \cdot r];1 \neq 0.$$

Sledi da je $-(g_j;1) \cdot r \neq 0$, po lemi 2.9 (1). Pozivajući se na činjenicu da je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta, dobijamo nenula funkciju f_j koja je ispod $-(g_j;1) \cdot r$. Odatle, f_j je ispod r. Kako je f_j takođe ispod $-(g_j;1)$, zbog zakona monotonosti kompoziciju i činjenice da je $-(g_j;1)$ desno idealni element sledi

$$f_j;1 \leq [-(g_j;1)];1 = -(g_j;1).$$

Dakle, desno idealni elementi $g_j;1$ i $f_j;1$ su disjunktni. Kako je

$$g_j;1 = (\sum_{i<j} f_i);1 = \sum_{i<j}(f_i;1),$$

sledi da je $f_j;1$ disjunktan sa $f_i;1$ za svaki $i < j$. Ovo kompletira indukcijski korak u konstrukciji. Ovaj proces mora stati za neki ordinalni broj jer je nemoguće da postoji više nenula, uzajmno disjunktnih funkcija u $\mathcal{U}$ nego što je elemenata u $\mathcal{U}$. Ako konstrukcija stane za ordinalni broj j, tada je zbir g_j u (4.1) funkcija ispod r koja generiše isti desno idealni element kao r. (Ako ne generiše desno idealni element induktivna konstrukcija bi se nastavila za još jedan korak.) Funkcija $f = g_j$ ima tražene osobine. □

Nastavljamo sa pretpostavkom da je $\mathcal{U}$ kompletna, funkcionalno gusta relaciona algebra. Neka je $\mathcal{B}$ kanonička ekstenzija od $\mathcal{U}$, i neka je U skup svih atoma iz $\mathcal{B}$ koji su ispod funkcija u $\mathcal{U}$. Drugim rečima, element a pripada U ako i samo ako je a atom u $\mathcal{B}$ i $a \leq f$, za neku funkciju f iz $\mathcal{U}$. Skup U će biti bazni skup za reprezentabilnost $\mathcal{U}$.

Sledeća lema daje ključnu osobinu koja će nam trebati za konstrukciju reprezentabilnosti.

Lema 4.4 *Pretpostavimo da je $(a_i : i \in I)$ konačan, neprazan skup elemenata u U, i $(r_i : i \in I)$ odgovarajući skup elemenata u $\mathcal{U}$. Ako Booleov proizvod $\prod_i (a_i; r_i)$ nije nula, tada ovaj proizvod mora biti iznad atoma u $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Pisaćemo
$$t = \prod_i (a_i; r_i), \tag{4.2}$$
i pretpostavićemo da je $t \neq 0$. Pokazaćemo da je t iznad nekog atoma u $\mathcal{U}$. Primenimo lemu 2.7 (4), definiciju t, monotonost i asocijativni zakon za kompoziciju, pa dobijamo
$$0 < t \leq t;1 \leq (a_i; r_i); 1 \leq a_i; (r_i; 1) \leq a_i; 1 \tag{4.3}$$
za svaki indeks i. Element a_i je atom u $\mathcal{B}$, pa je generisani desno idealni element $a_i; 1$ atom u Booleovoj algebri desno idealnih elemenata iz $\mathcal{B}$ i
$$t; 1 = a_i; 1 \tag{4.4}$$
po (4.3) i lemi 2.52 (2). Sledi da je $t; 1$ atom u Booleovoj algebri desno idealnih elemenata iz $\mathcal{B}$. Pretpostavka da a_i pripada U i definicija U impliciraju da je a_i iznad neke funkcije f_i iz $\mathcal{U}$. Koristeći lemu 2.51 (2) dobijamo
$$(a_i; 1) \cdot f_i = a_i. \tag{4.5}$$
Koristeći strogi modularni zakon za desno idealne elemente, lemu 2.35 (3), za r, s i t zamenjenim sa $t; 1$, f_i i r_i, respektivno), (4.4), (4.5), vidimo da
$$(t; 1) \cdot (f_i; r_i) = [(t; 1) \cdot f_i]; r_i = [(a_i; 1) \cdot f_i]; r_i = a_i; r_i. \tag{4.6}$$
Zaključujemo da
$$(t;1) \cdot \prod_i (f_i; r_i) = \prod_i [(t_i; 1) \cdot (f_i; r_i)] = \prod_i (a_i; r_i) = t > 0. \tag{4.7}$$
po zakonima koji važe za Booleovu algebru, (4.6) i (4.2). Kao Booleov proizvod kompozicija konačno mnogo elemenata u $\mathcal{U}$, element $\prod_i (f_i; r_i)$ takođe mora pripadati $\mathcal{U}$. Koristeći (4.7), (4.3) i pretpostavku da je $\mathcal{U}$ kompletna dobijamo nenula funkciju g u $\mathcal{U}$ takvu da
$$g \leq \prod_i (f_i; r_i) \ \text{ i } \ g; 1 = (\prod_i (f_i; r_i); 1). \tag{4.8}$$

Kratkim računom, datim ispod, dobijamo da

$$(t_i;1)\cdot(g;1)\neq 0. \tag{4.9}$$

Zaista,

$$\begin{aligned}(t;1)\cdot(g;1) &= (t;1)\cdot[(\prod_i(f_i;r_i));1]\\ &= [(t;1)\cdot\prod_i(f_i;r_i)];1\\ &= t;1\neq 0,\end{aligned}$$

po drugom delu (4.8), zakonu stroge modularnosti za desno idealne elemente (za r, s i t zamenjene sa $t;1$, $\prod_i()f_i;r_i)$ i 1, respektivno), (4.7) i (4.3). Koristeći (4.9), lemu 2.8 i lemu 2.7 (1) dobijamo da

$$(t;1;1)\cdot g\neq 0. \tag{4.10}$$

Element $c=(t;1;1)\cdot g=(t;1)\cdot g$ je nenula, po (4.10). Kako je g funkcija i $t;1$ atom u Booleovoj algebri desno idealnih elemenata iz $\mathcal{B}$, sledi iz leme 2.52 (3) da je c zapravo atom u $\mathcal{B}$. Takođe, c je ispod funkcije g, koja je u $\mathcal{U}$, pa c mora pripadati skupu U, po definiciji U. Konačno,

$$\begin{aligned}c &= (t;1)\cdot g\\ &\leq (t;1)\cdot\prod_i(f_i;r_i)=t,\end{aligned}$$

po definciji c, prvom delu (4.8), zakonu monotonosti za kompoziciju i (4.7). Dakle, c je atom u U koji je ispod t, kao što je traženo. □

Sledi teorema Maddux-Tarskog o reprezentabilnosti funkcionalno gustih relacionih algebri.

Teorema 4.5 *Svaka funkcionalno gusta relaciona algebra je reprezentabilna.*

Dokaz Neka je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta relaciona algebra i pretpostavimo prvo da je $\mathcal{U}$ kompletna. Neka je $\mathcal{B}$ kanonička ekstenzija od $\mathcal{U}$ i U skup atoma u $\mathcal{B}$ koji su ispod funkcija iz $\mathcal{U}$. Definišemo funkciju φ iz univerzuma $\mathcal{U}$ u $\mathcal{R}e(U)$ sa

$$\varphi(r)=\{(a,b):a,b\in U\ \text{ i }\ b\leq a;r\}$$

za r iz $\mathcal{U}$. Jasno, $\varphi(0)=\emptyset$ i $\varphi(1')=id_U$. Zaista, $a;0=0$, po lemi 2.9 (1), pa ne postoje dva elementa a i b za koje bi važilo $b\leq a;0$. Takođe, $a;1'=a$, po zakonu za jedinični element za kompoziciju, pa za atome a i b imamo $b\leq a;1'$ ako i samo ako $a=b$. Za dokaz da φ očuvava operacije na $\mathcal{U}$, fiksirajmo atome a i b iz U i elemente r i s iz $\mathcal{U}$. Posmatrajmo prvo operaciju Booleovog zbira. Zakon leve distributuvnosti za kompoziciju prema zbiru implicira

$$a;(r+s)=(a;r)+(a;s).$$

Kako je b atom imamo

$$b\leq a;(r+s)\ \text{ ako i samo ako }\ b\leq a;r \text{ ili } b\leq a;s.$$

Sledi da

$$\begin{aligned}(a,b)\in\varphi(r+s) \quad &\text{akko} \quad b\le a;(r+s)\\ &\text{akko} \quad b\le a;r \ \text{ ili } \ b\le a;s\\ &\text{akko} \quad (a,b)\in\varphi(r) \ \text{ ili } \ (a,b)\in\varphi(s)\\ &\text{akko} \quad (a,b)\in\varphi(r)\bigcup\varphi(s)\end{aligned}$$

po definiciji φ, prethodnim oznakama i definiciji unije. Dakle, $\varphi(r+s) = \varphi(r)\bigcup\varphi(s)$. Posmatrajmo sada Booleov proizvod. Svaki element u U je ispod funkcije iz $\mathcal{U}$, po definiciji U, pa je i funkcija, po lemi 2.51 (2). Zakon distributivnosti za funkcije (lema 2.51 (3)) implicira $a;(r\cdot s) = (a;r)\cdot(a;s)$, pa imamo

$$\begin{aligned}b\le a;(r\cdot s) \quad &\text{akko} \quad b\le (a;r)\cdot(a;s)\\ &\text{akko} \quad b\le a;r \ \text{ i } \ b\le a;s.\end{aligned}$$

Sledi,

$$\begin{aligned}(a,b)\in\varphi(r\cdot s) \quad &\text{akko} \quad b\le a;(r\cdot s)\\ &\text{akko} \quad b\le a;r \ \text{ i } \ b\le a;s\\ &\text{akko} \quad (a,b)\in\varphi(r) \ \text{ i } \ (a,b)\in\varphi(s)\\ &\text{akko} \quad (a,b)\in\varphi(r)\bigcap\varphi(s)\end{aligned}$$

po definiciji φ, prethodnim oznakama i definiciji preseka. Dakle, $\varphi(r\cdot s) = \varphi(r)\bigcap\varphi(s)$.

Da bismo dokazali da φ očuvava inverziju, uočimo da je $a\le b;r$ ako i samo ako $b\le a;r^{\smile}$, po kontrapoziciji leme 2.8 (sa b, r i a umesto r, s i t, respektivno) i pretpostavci da su a i b atomi. Odatle,

$$\begin{aligned}(a,b)\in\varphi(r^{\smile}) \quad &\text{akko} \quad b\le a;r^{\smile}\\ &\text{akko} \quad a\le b;r\\ &\text{akko} \quad (b,a)\in\varphi(r)\\ &\text{akko} \quad (a,b)\in\varphi(r)^{-1},\end{aligned}$$

po definiciji φ, prethodnim oznakama i definiciji relacione inverzije. Dakle, $\varphi(r^{\smile}) = \varphi(r)^{-1}$.

Kao što smo već rekli, dokaz da φ očuvava kompoziciju je različit od dokaza iz teoreme 3.8. Pretpostavimo prvo da uređeni par (a,b) pripada relacionoj kompoziciji $\varphi(r)|\varphi(s)$. Po definiciji relacione kompozicije to znači da mora postojati atom c iz U takav da $(a,c)\in\varphi(r)$ i $(c,b)\in\varphi(s)$. Iz definicije φ sledi da $c\le a;r$ i $b\le c;s$. Odatle sledi $b\le c;s\le a;r;s$ po zakonu monotonosti za kompoziciju, pa uređeni par $(a,b)\in\varphi(r;s)$. Ovo pokazuje da je $\varphi(r)|\varphi(s)$ sadržano u $\varphi(r;s)$.

Da bismo pokazali obrnutu inkluziju pretpostavimo da je $(a,b)\in\varphi(r;s)$. Iz definicije φ sledi da je b ispod $a;r;s$, pa je $(a;r;s)\cdot b\ne 0$. Primenom leme 2.8 (za r i t zamenjene sa $a;r$ i b, respektivno) dobijamo $(a;r)\cdot(b;s^{\smile})\ne 0$. Koristimo lemu 4.4 (sa I dvoelementnim indeksnim skupom) i dobijamo atom c iz U za koji važi

$$c\le (a;r)\cdot(b;s^{\smile}).$$

Kako je c ispod $b; s^{\smile}$, par (a, c) pripada $\varphi(s)$, po definiciji φ. Kako je c takođe ispod $b; s^{\smile}$, par (b, c) pripada $\varphi(s^{\smile})$. Sledi, par (c, b) pripada $\varphi(s)$- jer smo već dokazali da φ očuvava inverziju. Odatle je par (a, b) u relacionoj kompoziciji $\varphi(r)|\varphi(s)$, po definiciji kompozicije. Zaključak: $\varphi(r; s) = \varphi(r)|\varphi(s)$.

Činjenica da φ očuvava jedinični element i operacije zbira, inverzije i kompozicije implicira da je relacija $E = \varphi(1)$ relacija ekvivalencije na baznom skupu U. Detaljnije,

$$id_U = \varphi(1') \leq \varphi(1) = E,$$

$$E^{-1} = \varphi(1)^{-1} = \varphi(1^{\smile}) = \varphi(1) = E,$$

$$E|E = \varphi(1)|\varphi(1) = \varphi(1; 1) = \varphi(1) = E.$$

Preslikavanje relacione algebre koje očuvava zbir, Booleov proizvod, nulu i jedinicu mora da očuvava i komplement, u smislu da je $\varphi(-r) =\sim \varphi(r)$, gde se komplement sa desne strane pravi u odnosu na $\mathcal{R}e(E)$. Do sada je dokazano da je φ homomorfizam iz $\mathcal{U}$ u $\mathcal{R}e(E)$.

Ostaje da proverimo da je φ injekcija. Pretpostavimo da je $r \neq 0$. Element $1; r^{\smile}$ nije nula, po lemi 2.7 (1), lemi 2.9 (1) i drugom zakonu involucije, pa mora postojati nenula funkcija f iz $\mathcal{U}$ koja je ispod $1; r^{\smile}$, jer smo pretpostavili da je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta. Specijalno, $f \cdot (1; r^{\smile}) \neq 0$. Primenom leme 2.8 dobijamo da je $(f; r) \cdot 1 \neq 0$. Dakle, $f; r$ nije nula.

Neka je X skup atoma u kanoničkoj ekstenziji $\mathcal{B}$ koji su ispod f. Svaki atom u X je ispod funkcije iz $\mathcal{U}$, odnosno f, pa svaki atom iz X pripada skupu U, po definiciji skupa U. Kako je $\mathcal{B}$ atomična, f mora biti supremum skupa X atoma iznad kojih se nalazi, pa je

$$0 < f; r = (\sum X); r = \sum\{a; r : a \in X\},$$

zbog kompletne distributivnosti kompozicije u odnosu na zbir. Sledi da je

$$a; r \neq 0,$$

za neki atom a ispod f. Koristeći lemu 4.4 (sa I jednoelementnim indeksnim skupom) uočavamo atom b iz U koji je ispod $a; r$. Par (a, b) pripada $\varphi(r)$, po definiciji φ.

Zaključak: preslikavanjem φ svaki nenula element iz $\mathcal{U}$ se slika u neku nepraznu relaciju na skupu U, pa jezgro φ sadrži samo nulu. Dakle, φ je injekcija, pa je i utapanje $\mathcal{U}$ u $\mathcal{R}e(E)$. Drugim rečima, φ je reprezentacija od $\mathcal{U}$.

Posmatrajmo sada slučaj kada je $\mathcal{U}$ proizvoljna funkcionalno gusta relaciona algebra. Kompletizacija od $\mathcal{U}$ je takođe funkcionalno gusta. Zaista, svaki nenula element u kompletizaciji je iznad nekog nenula elemenata iz $\mathcal{U}$, po definiciji kompletizacije, a svaki nenula element iz $\mathcal{U}$ je iznad funkcije, zbog pretpostavke da je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta. Iz toga sledi da je svaki nenula element iz kompletizacije iznad neke nenula funkcije. Sledi da je kompletizacija reprezentabilna nekom funkcijom φ, po prvom delu dokaza. Restrikcija φ na $\mathcal{U}$ je reprezentacija $\mathcal{U}$. $\square$

Postavlja se pitanje da li argument u dokazu teoreme 3.8, koji kaže da je reprezentacija kompletna, može biti primenjen i u dokazu teoreme 4.5, da pokaže da je kompletna, funkcionalno gusta relaciona algebra kompletno reprezentabilna.

Dokaz u teoremi 4.5 koristi kanoničku ekstenziju od $\mathcal{U}$, čak i kada je $\mathcal{U}$ kompletna; ali supremum i infimum podskupova od $\mathcal{U}$ su generalno različiti u $\mathcal{U}$ od onih u kanoničkoj ekstenziji. Zapravo, ako $\mathcal{U}$ ima kompletnu reprezentaciju, tada bi $\mathcal{U}$ morala da bude atomična, po teoremi Hirsch-Hodkinson [4], i tada bi za nju važila teorema 3.8. Sledeća teorema može biti od značaja.

Teorema 4.6 *Kanonička ekstenzija reprezentabilne relacione algebre je uvek kompletno reprezentabilna.*

Dokaz. Vidi [5]. □

Ovaj rezultat- po Hirsch-Hodkinson [5]- poboljšava prethodni rezultat koji je dao Monk, prema kome je kanonička ekstenzija reprezentabilne relacione algebre reprezentabilna.

Posledica 4.7 *Kanonička ekstenzija funkcionalno guste relacione algebre je kompletno reprezentabilna.*

4.2 Teorema o dekompoziciji funkcionalno gustih relacionih algebri

Teorema 4.5, odnosno reprezentabilnost koju ona potvrđuje, otvara pitanje kompletnog strukturnog opisa za sve funkcionalno guste relacione algebre. Iako ovo pitanje još nije rešeno, neke zanimljive osobine mogu se uočiti.

Prosta, funkcionalno gusta relaciona algebra nije uvek atomična, kao što ćemo kasnije i videti. Međutim, postojanje samo jednog atoma u takvoj relacionoj algebri implicira atomičnost.

Teorema 4.8 *Svaka prosta, funkcionalno gusta relaciona algebra je ili atomična ili bez atoma.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta relaciona algebra koja je prosta. Uočimo pre svega da, ako je leva stranica pravougaonika u $\mathcal{U}$ atom, tada pravougaonik mora biti suma funkcionalnih atoma iz $\mathcal{U}$.

Zaista, posmatrajmo proizvoljni atom x iz $\mathcal{U}$ i neka je y proizvoljni podjedinični element. Pravougaonik $x;1;y$ je suma (moguće praznog) skupa X nenula funkcija, zbog pretpostavke da je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta. Svaka funkcija f iz X je ispod $x;1$, po zakonu monotonosti za kompoziciju, a $x;1$ je atom u Booleovoj algebri levo idealnih elemenata, po lemi 2.52 (2), pa je f atom u $\mathcal{U}$, po lemi 2.52 (3). Sledi, svaki pravougaonik sa atomima kao stranicama u $\mathcal{U}$ je suma funkcionalnih atoma.

Pretpostavimo sada da je $\mathcal{U}$ algebra koja nije bez atoma i neka je r atom u $\mathcal{U}$. Domen r- nazovimo ga x- je podjedinični atom, po lemi 2.52 (1). Pravougaonik $x;1;1'$ je zbir skupa X funkcionalnih atoma, po razmatranju iz prethodnog pasusa. Rang svakog atoma je ponovo atom, po lemi 2.52 (1), pa je $(1;f)\cdot 1'$ atom, za svaki f iz X. Iz pretpostavke da je $\mathcal{U}$ prosta imamo da je $1;x;1 = 1$. Koristeći zakon identičnosti za kompoziciju i kompletnu distributivnost Booleovog proizvoda i kompozicije prema zbiru, dobijamo da

$$
\begin{aligned}
1' &= (1;1')\cdot 1' \\
&= [(1;x;1);1']\cdot 1' \\
&= [1;(x;1;1')]\cdot 1' \\
&= (1;\sum X)\cdot 1' \\
&= \sum\{(1;f)\cdot 1' : f\in X\}.
\end{aligned}
$$

Ovo razmatranje pokazuje da je $1'$ suma skupa W svih podjediničnih atoma. Sada lako sledi da je jedinica u $\mathcal{U}$ suma skupa svih pravougaonika sa atomima kao stranicama, jer

$$
\begin{aligned}
1 &= 1';1;1' \\
&= (\sum W);1;(\sum W) \\
&= \sum\{y;1;z : y;z\in W\}.
\end{aligned}
$$

U prvom delu dokaza smo videli da je svaki pravougaonik sa atomima kao stranicama suma skupa funkcionalnih atoma. Kombinujući ova dva razmatranja zaključujemo da je jedinica suma skupa svih funkcionalnih atoma. Sledi, $\mathcal{U}$ je atomična. $\Box$

Sledi teorema o direktnoj dekompoziciji za funkcionalno guste relacione algebre.

Teorema 4.9 *Svaka funkcionalno gusta relaciona algebra je esencijalno izomorfna direktnom proizvodu prostih, funkcionalno gustih relacionih algebri -od kojih je svaka ili atomična ili bez atoma- i jedne funkcionalno guste relacione algebre koja je bez atoma i ima Booleovu algebru idealnih elemenata koja je bez atoma.*

Dokaz. Sa date funkcionalno guste relacione algebre prelazimo na njenu kompletizaciju $\mathcal{U}$. Prema teoremi 2.63, algebra $\mathcal{U}$ je izomorfna direktnom proizvodu dve (moguće trivijalne) kompletne relacione algebre $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}$ sa osobinama da je $\mathcal{B}$ direktan prozivod (kompletnih) prostih relacionih algebri, a $\mathcal{C}$ je bez atoma i ima Booleovu algebru idealnih elemenata bez atoma. Algebre $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ i proste algebre u direktnoj dekompoziciji $\mathcal{B}$, su sve relativizacije od $\mathcal{U}$. Relativizacija funkcionalno guste relacione algebre ostaje funkcionalno gusta (vidi [3]). Sledi, faktor $\mathcal{B}$ je direktan proizvod prostih, kompletnih, funkcionalno gustih relacionih algebri, od kojih je svaka ili atomična ili bez atoma, po teoremi 4.8; takođe, faktor $\mathcal{C}$ je kompletna, bez atoma, funkcionalno gusta relaciona algebra sa Booleovom algebrom idealnih elemenata bez atoma. $\Box$

Može se desiti da jedan ili više faktora dekompozicije iz prethodne teoreme bude trivijalno. Na primer, ako je $\mathcal{U}$ atomična, onda nema netrivijalnih faktora koji su bez atoma, pa faktor $\mathcal{C}$, koji je bez atoma, iz prethodnog dokaza, je trivijalan i skup prostih faktora u direktnoj dekompoziciji faktora $\mathcal{B}$ ne sadrži faktore koji su bez atoma. Sa druge strane, ako $\mathcal{U}$ ima Booleovu algebru idealnih elemenata bez atoma, tada je faktor $\mathcal{B}$, iz dokaza prethodne teoreme, trivijalan.

Atomična relaciona algebra je funkcionalno gusta ako i samo ako je svaki atom funkcija. Atomična relaciona algebra sa funkcionalnim atomima je očigledno funkcionalno gusta jer je svaki element iznad atoma, pa samim tim i iznad nenula funkcije. Sa druge strane, u atomičnoj, funkcionalno gustoj relacionoj algebri svaki atom mora biti iznad nenula funkcije, pa svaki atom mora biti funkcija.

Posledica 4.10 *Svaka atomična relaciona algebra sa funkcionalnim atomima je esencijalno izomorfna direktnom proizvodu prostih, atomičnih relacionih algebri sa funkcionalnim atomima.*

4.3 Opis atomičnih relacionih algebri sa funkcionalnim atomima

Za sve atomične relacione algebre sa funkcionalnim atomima, Jónnson i Tarski [10] su dali opis, u terminima (aksiomatski zasnovane) algebre kompleksa generalizovanog Brandtovog grupoida.

U prostim relacionim algebrama, teorema koju su Jónnson i Tarski dokazali kaže da je prosta relaciona algebra kompletna i atomična sa funkcionalnim atomima ako i samo ako je izomorfna algebri kompleksa Brandtovog grupoida, a svaka prosta (ne mora biti kompletna) relaciona algebra koja je atomična sa funkcionalnim atomima može se utopiti u algebru kompleksa Brandtovog grupoida. (Uočimo da, po posledici 4.10, problem da se opišu atomične relacione algebre sa funkcionalnim atomima svodi na problem da se opišu sve takve algebre koje su proste.)

Kao posledicu njihovog opisa, Jónnson i Tarski su zaključili da je relaciona algebra reprezentabilna ako i samo ako se može utopiti u algebru kompleksa generalizovanog Brandtovog grupoida.

Definicija 4.11 *Relaciona algebra R se naziva* **bijektivno gusta** *ako ispod svakog nenula elementa postoji nenula bijekcija.*

Lema 4.12 *Svaka funkcionalno gusta relaciona algebra je bijektivno gusta. Specijalno, svaki atom je bijekcija.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta relaciona algebra i neka je r nenula element iz U. Inverzni element $r^{\smile}$ je takođe nenula, po lemi 2.7. 1) i prvom involutivnom zakonu, pa postoji nenula funkcija f koja je ispod $r^{\smile}$, jer je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta. Dalje je $f^{\smile}$ nenula, pa postoji nenula funkcija g koja je ispod $f^{\smile\smile}$. Lako se proverava da je g bijekcija ispod r. Zaista, $g^{\smile}$ mora biti ispod $f^{\smile\smile}$, po zakonu monotonosti za inverziju i $f^{\smile\smile} = f$, po prvom zakonu involucije, pa je $g^{\smile}$ ispod f, odakle je i funkcija, po lemi 2.51, 2). Kako je g funkcija po pretpostavci, sledi da je g bijekcija. Takođe, $f^{\smile}$ je ispod $r^{\smile}$ i $r^{\smile\smile} = r$, pa je $g \leq f^{\smile} \leq r$. □

Teorema 4.13 *Svaka integralna relaciona algebra je kompletna i atomična sa funkcionalnim atomima ako i samo ako je izomorfna algebri kompleksa grupe.*

Dokaz. Očigledno, algebra kompleksa grupe je integralna relaciona algebra koja je kompletna i atomična sa funkcionalnim atomima (vidi posledicu 2.67.). Posmatrajmo sada proizvoljnu relacionu algebru $\mathcal{U}$ koja je kompletna i atomična sa funkcionalnim atomima. Skup G atoma iz $\mathcal{U}$ sadrži bijekciju, po prethodnoj lemi, a domen i rang svake bijekcije je jedinični element $1'$, po lemi 2.52. 1). Elementi u G formiraju grupu sa restrikovanim operacijama kompozicije i inverzije iz $\mathcal{U}$, po lemi 2.51. 1) i definiciji bijekcije, takođe, jedinični element grupe koincidentan je sa jediničnim elementom u $\mathcal{U}$. Funkcija ε koja slika f u $\{f\}$, za svako $f \in G$, je bijekcija iz skupa atoma iz $\mathcal{U}$ u skup atoma u $\mathcal{C}m(G)$ i očuvava operacije inverzije i kompozicije na atomima. Na primer,

$$\varepsilon(f;g) = \{f;g\} = \{f\};\{g\} = \varepsilon(f);\varepsilon(g),$$

po definiciji ε i kompozicije na $\mathcal{C}m(G)$. Prirodna ekstenzija ε na $\mathcal{U}$, funkcija φ definisana za svaki element $r \in \mathcal{U}$ sa

$$\varphi(r) = \{f \in G : f \leq r\},$$

je dobro definisan izomorfizam iz $\mathcal{U}$ u $\mathcal{C}m(G)$. □

Posledica 4.14 *Integralna relaciona algebra je atomična sa funkcionalnim atomima ako i samo ako je esencijalno izomorfna algebri kompleksa grupe.*

Da bismo opisali sve proste (ne nužno i integralne) atomične relacione algebre sa funkcionalnim atomima, neophodno je da konstruišemo širu klasu primera nego što su algebre kompleksa.

Fiksirajmo kompletnu relacionu algebru $\mathcal{C}$ i kardinalni broj $\kappa > 0$ (za koji smatramo da je skup svih manjih ordinala, kao što je i uobičajeno u teoriji skupova). $\kappa \times \kappa$ matrica sa elementima iz $\mathcal{C}$ je funkcija r koja slika Dekartov proizvod $\kappa \times \kappa$ u univerzum od $\mathcal{C}$. Pišemo $r = [r_{ij}]$. Neka je B skup takvih matrica i definišimo Booleove operacije $+$ i $-$, kao i Peirceove operacije $;$ i $^{\smile}$ sa

$$r + s = t, \quad \text{gde je} \quad t_{ij} = r_{ij} + s_{ij}, \tag{4.11}$$

$$-r = t, \quad \text{gde je} \quad t_{ij} = -r_{ij}, \tag{4.12}$$

$$r;s = t, \quad \text{gde je} \quad t_{ij} = \sum_{k<\kappa} r_{ik};s_{kj}, \tag{4.13}$$

$$r^{\smile} = t, \quad \text{gde je} \quad t_{ij} = r_{ji}^{\smile}. \tag{4.14}$$

Ovde, operacijski simboli na levoj strani označavaju operacije definisane na B, dok operacijski simboli na desnoj strani označavaju operacije na relacionoj algebri $\mathcal{C}$. Pretpostavka da je $\mathcal{C}$ kompletna je neophodna da bi suma na desnoj strani u (4.13) postojala.

Lako se vidi da je algebra

$$\mathcal{B} = (B, +, \cdot, -, 0, 1, ;, ^{\smile}, 1')$$

relaciona algebra (vidi [7] i [16]). Zaista, aksiome relacionih algebri na $\mathcal{B}$ važe kao direktna posledica činjenice da one važe na $\mathcal{C}$ i uobičajenih zakona koji važe za množenje i transpoziciju matrica. $\mathcal{B}$ ćemo zvati **κ-ta matrična relaciona algebra nad** $\mathcal{C}$ i smatraćemo $\mathcal{C}$ **bazom** $\mathcal{B}$.

Primer 4.15 *Kada je $\mathcal{C}$ algebra kompleksa grupe G, svaka matrična algebra nad $\mathcal{C}$ je primer proste relacione algebre koja je kompletna i atomična sa funkcionalnim atomima.*

Naime, atomi su matrice koje imaju tačno jednu nenula komponentu i ta komponenta je atom iz $\mathcal{C}$ (to jest, to je neki element grupe G).

Da bismo dobili drugačiji pogled na matrične relacione algebre, pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ κ-ta matrična relaciona algebra nad bazom $\mathcal{C}$ koja je kompletna skupovna relaciona algebra na nekom baznom skupu G. Drugim rečima, pretpostavimo da je $\mathcal{C}$ kompletna podalgebra od $\mathcal{R}e(G)$. Namera je da $\mathcal{C}$ bude Cayleyeva reprezentacija algebre kompleksa neke grupe G, ali glavni cilj je da konstruišemo kompletnu reprezentaciju od $\mathcal{B}$ tako što ćemo svakoj matrici $[R_{ij}]$ iz $\mathcal{B}$ dodeliti binarnu relaciju koja je disjunktna unija kopija relacija R_{ij} koje su komponente date matrice. Sledi detaljniji opis.

Neka je $(G_i : i < \kappa)$ skup po parovima disjunktinih kopija skupa G, odabranih tako da je $G_0 = G$. Neka je F_{00} identička funkcija na G i za svaki indeks i iz $0 < i < \kappa$, neka je F_{0i} proizvoljna bijekcija iz G u G_i. Za svaki element $g \in G$, pišemo g_i za element u koji se g slika pomoću F_{0i}. Neka je $F_{ij} = F_{oi}^{-1} \mid F_{0j}$ i uočimo da je F_{ij} bijekcija iz G_i u G_j (otuda i podrelacija od $G_i \times G_j$), zapravo

$$F_{ij} = \{(g_i, g_j) : g \in G\}.$$

Sledeće osobine ovih bijekcija lako se proveravaju:

$$F_i i = id_{G_i}, \quad F_{ij}^{-1} = F_{ji}, \quad F_{ik} \mid F_{kj} = F_{ij}, \quad F_{ik} \mid F_{lj} = \emptyset, \tag{4.15}$$

kada je $k \neq l$.

Pišemo $U = \bigcup_{i<\kappa} G_i$ i uočimo da pravougaonici $G_i \times G_j$, za $i, j < \kappa$, formiraju particiju na $U \times U$, u smislu da su neprazni, uzajamno disjunktni i imaju $U \times U$ za uniju.

Izomorfna kopija $\mathcal{B}$ koju ćemo da definišemo je podalgebra od $\mathcal{R}e(G)$. Ako je R_{ij} element iz $\mathcal{C}$ (a time i podrelacija od $G \times G$) pišemo

$$R_{ij}^* = F_{i0} \mid R_{ij} \mid F_{0j} = \{(f_i, g_j) : (f, g) \in R_{ij}\} \tag{4.16}$$

i uočimo da je R_{ij}^* kopija R_{ij} koja je podrelacija od $G_i \times G_j$. Koristeći (4.15) nije teško proveriti da sledeće jednakosti važe:

$$\begin{aligned} R_{ij}^* \cup S_{ij}^* &= T_{ij}^*, \quad \text{gde je} \quad T_{ij} = R_{ij} \cap S_{ij}, && (4.17)\\ (G_i \times G_j) \sim R_{ij}^* &= T_{ij}^*, \quad \text{gde je} \quad T_{ij} = \sim R_{ij}, && (4.18)\\ R_{ik}^* \mid S_{kj}^* &= T_{ij}^*, \quad \text{gde je} \quad T_{ij} = R_{ik} \mid S_{kj}, && (4.19)\\ (R_{ji}^*)^{-1} &= T_{ij}^*, \quad \text{gde je} \quad T_{ij} = R_{ij}^{-1} && (4.20)\\ R_{ij}^* \mid S_{ij}^* &= \emptyset, \quad \text{kada je} \quad k \neq l. && (4.21) \end{aligned}$$

Operacije sa leve strane izvode se u $\mathcal{R}e(U)$, dok se operacije sa desne strane izvode u $\mathcal{C}$, jer su elementi sa desne strane iz $\mathcal{C}$. Kao primer, proverićemo jednakost (4.19):

$$\begin{aligned}
R^*_{ik} \mid S^*_{kj} &= (F_{i0} \mid R_{ik} \mid F_{0k}) \mid (F_{k0} \mid S_{kj} \mid F_{0j}) \\
&= F_{i0} \mid R_{ik} \mid (F_{0k} \mid F_{k0}) \mid S_{kj} \mid F_{0j} \\
&= F_{i0} \mid R_{ik} \mid F_{00} \mid S_{kj} \mid F_{0j} \\
&= F_{i0} \mid R_{ik} \mid id_G \mid S_{kj} \mid F_{0j} \\
&= F_{i0} \mid R_{ik} \mid S_{kj} \mid F_{0j} \\
&= F_{i0} \mid T_{ij} \mid F_{0j} = T^*_{ij}
\end{aligned}$$

Primetimo da ovo izvođenje zavisi samo od definicije (4.16) i osobine za bijekcije, date u (4.15).

Svakoj matrici $R = [R_{ij}]$ iz $\mathcal{B}$ dodeljujemo relaciju R^* na skupu U koju definišemo sa

$$R^*_{ij} = \bigcup\{R^*_{ij} : i, j < \kappa\}. \tag{4.22}$$

Moramo imati u vidu da je R_{ij} relacija iz $\mathcal{C}$, a R^*_{ij} njena kopija koja je podrelacija u pravougaoniku $G_i \times G_j$. Dakle, za svake i i j pravimo kopiju koja je ispod $G_i \times G_j$ u ij-toj komponenti u matrici R, i uzimamo da je R^* disjunktna unija ovih kopija komponenata iz R.

Kako su pravougaonici $G_i \times G_j$ uzajamno disjunktni, funkcija koja slika svaku matricu R u relaciju R^* je injekcija iz $\mathcal{B}$ u $\mathcal{R}e(U)$. Pomoću jednakosti (4.17)-(4.21) vidimo da su sledeće jednakosti tačne za sve matrice $R = [R_{ij}]$, $S = [S_{ij}]$ i $T = [T_{ij}]$ iz $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}
R^* \bigcup S^* = T^*, &\quad \text{gde je} \quad T_{ij} = R_{ij} \bigcup S_{ij}, && (4.23)\\
\sim R^* = T^*, &\quad \text{gde je} \quad T_{ij} = \sim R_{ij}, && (4.24)\\
R^* \mid S^* = T^*, &\quad \text{gde je} \quad T_{ij} = \cup_k (R_{ik} \mid S_{kj}), && (4.25)\\
(R^*)^{-1} = T^*, &\quad \text{gde je} \quad T_{ij} = R^{-1}_{ij}, && (4.26)\\
id_U = T^*, &\quad \text{gde je} \quad T_{ij} = T_{ij} = id_G \;\text{ ili }\; T_{ij} = \emptyset, && (4.27)
\end{aligned}$$

Poslednja sa obzirom da li je $i = j$ ili je $i \neq j$.

Proverićemo jednakost (4.25), dok se ostale proveravaju analogno:

$$\begin{aligned}
R^* \mid S^* &= (\bigcup_{ij} R^*_{ij}) \mid (\bigcup_{ij} S^*_{ij}) = \bigcup_{ijkl} (R^*_{ik} \mid S^*_{lj}) \\
&= \bigcup_{ijk} (R^*_{ik} \mid S^*_{kj}) = \bigcup_{ij} \bigcup_{k} (R^*_{ik} \mid S^*_{kj}) \\
&= \bigcup_{ij} T^*_{ij} = T^*.
\end{aligned}$$

Poređenjem jednakosti (4.11)-(4.14) sa (4.23)-(4.26) i definicijom jedinične matrice u $\mathcal{B}$ sa (4.27) vidimo da funkcija koja slika R u R^*, za svaku matricu $R \in \mathcal{B}$, očuvava operacije iz $\mathcal{B}$ i očuvava proizvoljne sume iz $\mathcal{B}$ kao unije, pa je preslikavanje kompletno utapanje $\mathcal{B}$ u $\mathcal{R}e(U)$. Sliku ovog utapanja, koje je kompletna podalgebra od $\mathcal{R}e(U)$ i sadrži sve relacije oblika R^*, za R iz $\mathcal{B}$, zvaćemo κ-ta **"subpower"** od $\mathcal{C}$. Argument koji smo upravo naveli pokazuje da je k-ta matrična relaciona algebra nad $\mathcal{C}$ izomorfna sa κ-tom "subpower" od $\mathcal{C}$. Uočimo da je ova "subpower" prosta, jer je kompletna podalgebra proste skupovne relacione algebre $\mathcal{R}e(U)$, i atomična, uvek kada je $\mathcal{C}$ atomična i njeni atomi su kopije ispod $G_i \times G_j$, za svaki par $i, j < \kappa$, atoma iz $\mathcal{C}$.

Specijalno, ako je $\mathcal{C}$ Cayleyeva reprezentacija grupe G, takva da je $\mathcal{C} = \mathcal{C}a(G)$, tada je k-ta "subpower" od $\mathcal{C}$ prosta, kompletna i atomična relaciona algebra sa funkcionalnim atomima. Algebra kompleksa $\mathcal{C}m(G)$ je kanonički izomorfna sa $\mathcal{C}a(G)$, po Cayleyevoj reprezentaciji, pa je odatle k-ta matrična relaciona algebra nad $\mathcal{C}m(G)$ kanonički izomorfna sa k-tom matričnom relacionom algebrom nad $\mathcal{C}a(G)$. Poslednja je izomorfna sa k-tom "subpower" od $\mathcal{C}a(G)$, po oznakama iz prethodnog pasusa. Sumirajmo šta smo do sada uradili.

Teorema 4.16 *Za svaku grupu G i svaki kardinalni broj $\kappa > 0$, κ-ta matrična relaciona algebra nad $\mathcal{C}m(G)$ je prosta, kompletna i atomična relaciona algebra sa funkcionalnim atomima. Izomorfna je sa k-tom "subpower" od $\mathcal{C}a(G)$, pa je i kompletno reprezentabilna.*

Sledeća teorema i njena posledica kažu da su, do na esencijalni izomorfizam, algebre iz prethodne teoreme jedine proste relacione algebre koje su atomične sa funkcionalnim atomima.

Teorema 4.17 *Prosta relaciona algebra je kompletna i atomična sa funkcionalnim atomima ako i samo ako je izomorfna sa κ-tom matričnom relacionom algebrom nad $\mathcal{C}m(G)$ ili, što je ekvivalentno, sa κ-tom "subpower" od $\mathcal{C}a(G)$, za neki kardinalni broj $\kappa > 0$ i neku grupu G.*

Dokaz. Vidi [1]. □

Posledica 4.18 *Prosta relaciona algebra je atomična sa funkcionalnim atomima ako i samo ako je esencijalno izomorfna sa matričnom relacionom algebrom, nad algebrom kompleksa neke grupe G, ili, ekvivalentno, sa "subpower" od $\mathcal{C}a(G)$.*

4.4 Alternativni opis atomičnih relacionih algebri sa funkcionalnim atomima

U ovom delu daćemo drugačiji opis za proste relacione algebre koje su atomične sa funkcionalnim atomima. Taj opis će nas u sledećem poglavlju dovesti do konstrukcije klase primera prostih relacionih algebri koje su funkcionalno guste i koje su bez atoma.

Posmatrajmo grupu $(G, \circ, ^{-1}, \iota)$ i njenu proizvoljnu podgrupu H. Desni koseti od H su skupovi oblika $H \circ g = \{h \circ g : h \in H\}$, za $g \in G$, i oni formiraju particiju na G. Broj ovakvih desnih koseta nazivamo indeks podgrupe H. $R_f = \{(g, g \circ f) : g \in G\}$, za svako $f \in G$, je Cayleyeva reprezentacija, koja je permutacija skupa G. Cayleyeva reprezentacija elementa iz G formira particiju na $G \times G$. Svaka Cayleyeva reprezentacija preslikava svaki desni koset od H bijektivno u drugi koset od H. Preciznije, R_f slika koset $H \circ g$, bijektivno, u koset $H \circ g \circ f$, jer $R_f(h \circ g) = h \circ g \circ f$, za svaki element $h \in H$. Različite restrikcije R_f na desne kosete od H su, odatle, bijekcije između ovih koseta. Ako je K takav koset, pišemo $R_f \restriction K$, za restrikciju R_f na K.

Lema 4.19 *Neka je G grupa i H podgrupa grupe G. Skup svih restrikcija Cayleyeve reprezentacije R_f (za $f \in G$) na desne kosete od H je skup atoma (proste) podalgebre algebre $\mathcal{R}e(G)$, koja je kompletna i atomična sa funkcionalnim atomima.*

Dokaz. Neka je W skup restrikcija Cayleyevih reprezentacija elemenata iz G na desne kosete od H. Proverom potvrđujemo da važe uslovi teoreme 3.7 (za detalje vidi [1]). Koristeći teoremu 3.7 zaključujemo da je skup svih unija podskupova iz W kompletan poduniverzum od $\mathcal{R}e(G)$ i atomi ovog poduniverzuma su relacije u W. Svaka od ovih relacija je bijekcija, pa je odgovarajuća kompletna podalgebra od $\mathcal{R}e(G)$ atomična sa funkcionalnim atomima. Podalgebra je prosta, jer je $\mathcal{R}e(G)$ prosta, a podalgebra proste relacione algebre je prosta (vidi tvrđenje 2.42). □

Označimo podalgebru iz prethodne leme sa $\mathcal{F}(G, H)$. Kada je H cela grupa, to jest $G = H$, ova podalgebra je zapravo Cayleyeva reprezentacija $\mathcal{C}a(G)$ grupe algebre kompleksa $\mathcal{C}m(G)$. Drugi ekstrem, kada je $H = \{\iota\}$, podalgebra se poklapa sa skupovnom relacionom algebrom $\mathcal{R}e(G)$. Iz teoreme 4.17 i prethodne leme sledi da je $\mathcal{F}(G, H)$ izomorfno sa matričnom relacionom algebrom nad algebrom kompleksa neke grupe.

Teorema 4.20 *Ako je G grupa i H njena podgrupa indeksa κ, tada je $\mathcal{F}(G, H)$ izomorfno κ-toj matričnoj relacionoj algebri nad $\mathcal{C}m(H)$ ili, ekvivalentno, κ-toj "subpower" od $\mathcal{C}a(H)$.*

Dokaz. Vidi [1]. □

Sada se lako proverava da su relacione algebre $\mathcal{F}(G, H)$ dovoljne da reprezentuju sve proste relacione algebre koje su kompletne i atomične sa funkcionalnim atomima.

Teorema 4.21 *Prosta relaciona algebra je kompletna i atomična sa funkcionalnim atomima ako i samo ako je izomorfna sa relacionom algebrom oblika $\mathcal{F}(G, H)$, za neku grupu G i neku njenu podgrupu H.*

Dokaz. Vidi [1]. □

Posledica 4.22 *Prosta relaciona algebra je atomična sa funkcionalnim atomima ako i samo ako je esencijalno izomorfna sa $\mathcal{F}(G, H)$, za neki grupu G i neku njenu podgrupu H.*

Konstrukcija algebri $\mathcal{F}(G, H)$ daje nam uvid u konstrukciju prostih, neintegralnih relacionih algebri koje su atomične sa funkcionalnim atomima. Krenemo od algebre kompleksa grupe G, koja je integralna relaciona algebra. Kao što smo već pokazali, $\mathcal{C}m(G)$ je izomorfno Cayleyevoj reprezentaciji $\mathcal{C}a(G)$, koje se poklapa sa $\mathcal{F}(G, G)$. Tada delimo svaki atom- i posebno svaki podjedinični atom- u $\mathcal{C}a(G)$ u nekoliko delova uvodeći odgovarajuću podgrupu H da formiramo $\mathcal{F}(G, H)$. Tačan broj delova u koje se svaki atom deli zavisi od indeksa H u G. Ekstremni slučaj, kada je $H = \{\iota\}$, završava se skupovnom relacionom algebrom $\mathcal{R}e(G)$ ali, generalno, dobijamo prostu, neintegralnu atomičnu relacionu algebru sa funkcionalnim atomima koja leži između $\mathcal{C}a(G)$ i $\mathcal{R}e(G)$.

4.5 Funkcionalno guste relacione algebre bez atoma

Problem opisa svih prostih, funkcionalno gustih relacionih algebri je i dalje otvoren. Ovde će biti izložena konstrukcija jedne zanimljive klase primera i zatim razmatran jedan konkretan primer konstrukcije. Vraćamo se relacionim algebrama $\mathcal{F}(G, H)$ konstruisanim u prethodnom poglavlju. Algebra $\mathcal{F}(G, H)$ je atomična po lemi 4.19. Da bismo konstruisali algebru bez atoma neophodno je da uspostavimo vezu između $\mathcal{F}(G, H)$ i $\mathcal{F}(G, K)$, za različite podgrupe H i K grupe G.

Lema 4.23 *Ako je H podgrupa grupa grupe G i K podgrupa grupe H, tada je $\mathcal{F}(G, H)$ odgovarajuća podalgebra algebre $\mathcal{F}(G, K)$ i svaki atom iz $\mathcal{F}(G, H)$ je podeljen u $\mathcal{F}(G, K)$ u uniju onoliko atoma koliki je indeks K u H.*

Dokaz. Pretpostavimo da je K indeksa κ u H, to jest, pretpostavimo da K ima κ desnih koseta u H (gde je κ kardinalni broj). Za svaki desni koset H' pogrupe H u G postoji κ različitih desnih koseta K u G, koji su sadržani u H', i H' je unija ovih desnih koseta. Odatle:

$$R_f \restriction H' = \bigcup \{R_f \restriction K' : K' \text{ je deni koset od } K \text{ i } K' \subset H'\}.$$

Sledi da je svaki atom u $\mathcal{F}(G, H)$ unija κ atoma iz $\mathcal{F}(G, K)$. Kako je $\mathcal{F}(G, K)$ zatvorena za unije, svaki atom- pa i svaki element- u $\mathcal{F}(G, H)$ pripada $\mathcal{F}(G, K)$. Obe algebre su kompletne podalgebre algebre $\mathcal{R}e(G)$, pa su operacije u $\mathcal{F}(G, H)$ i $\mathcal{F}(G, K)$ restrikcije odgovarajućih operacija u $\mathcal{R}e(G)$. Zaključak: $\mathcal{F}(G, H)$ je kompletna podalgebra algebre $\mathcal{F}(G, K)$. To je odgovarajuća podalgebra jer ni jedan atom u $\mathcal{F}(G, K)$ ne pripada $\mathcal{F}(G, H)$. □

Nazovimo (beskonačan) skup $(H_i : i \in I)$ podgrupa grupe G **strogo na dole usmeren sistem** ako za svaki par indeksa i i j postoji indeks k takav da je H_k prava podgrupa od H_i i od H_j. Uzimajući da je $i = j$ pokazuje se da svaka podgrupa u skupu ima odgovarajuću podgrupu u sistemu.

Teorema 4.24 *Ako je* $(H_i : i \in I)$ *strogo na dole usmeren sistem podgrupa grupe* G*, tada je* $(\mathcal{F}(G, H_i) : i \in I)$ *(strogo na gore) usmeren sistem kompletnih podalgebri algebre* $\mathcal{R}e(G)$*. Unija ovog sistema je (prosta) podalgebra od* $\mathcal{R}e(G)$ *koja je funkcionalno gusta i bez atoma.*

Dokaz. Lema 4.19, prethodna lema i hipoteza da je $(H_i : i \in I)$ strogo na dole usmeren sistem podalgebri algebre G, implicira da je

$$(\mathcal{F}(G, H_i) : i \in I) \tag{4.28}$$

sistem kompletnih podalgebri algebre $\mathcal{R}e(G)$ koji je strogo (na gore) usmeren sistem, u smislu da za svaki par indeksa i i j postoji indeks k takav da su $(\mathcal{F}(G, H_i)$ i $(\mathcal{F}(G, H_j)$ odgovarajuće podalgebre algebre $(\mathcal{F}(G, H_k)$. Unija sistema u (4.28)- zvaćemo je $\mathcal{U}$- je podalgebra algebre $\mathcal{R}e(G)$ (jer je unija usmerenog sistema podalgebri uvek podalgebra). Specijalno, $\mathcal{U}$ mora biti prosta jer je $\mathcal{R}e(G)$ prosta.

Da bismo pokazali da je $\mathcal{U}$ bez atoma posmatrajmo proizvoljnu, nenula relaciju R iz $\mathcal{U}$. Kako je $\mathcal{U}$ unija sistema iz (4.28), relacija R mora pripadati $\mathcal{F}(G, H_i)$, za neki indeks i. Odatle, R mora biti iznad nekog atoma S u atomičnoj algebri $\mathcal{F}(G, H_i)$. Neka je k indeks iz I takav da je H_k odgovarajuća podgrupa grupe H_i, koja ima κ koseta u H_i $(2 \leq \kappa)$. Relacije R i S pripadaju $\mathcal{F}(G, H_k)$ i S je podeljeno u uniju κ atoma iz $(\mathcal{F}(G, H_k)$, po prethodnoj lemi. Odatle, R ne može biti atom u $(\mathcal{F}(G, H_k)$, pa ne može biti ni atom u $\mathcal{R}$.

Konačno, $\mathcal{U}$ je funkcionalno gusta jer unija proizvoljnog usmerenog sistema funkcionalno gustih relacionih algebri je funkcionalno gusta. Detaljnije, nenula relacija R iz $\mathcal{U}$ pripada $\mathcal{F}(G, H_i)$ za neki indeks i, pa je iznad nenula funkcije T iz $\mathcal{F}(G, H_i)$, zbog funkcionalne gustine $\mathcal{F}(G, H_i)$. Relacija T pripada $\mathcal{U}$, pa je R iznad nenula funkcije T u $\mathcal{U}$. □

Kao konkretan primer konstrukcije iz prethodne teoreme uzmimo da je G grupa $\mathbb{Z}$ celih brojeva sa sabiranjem i $H_0 = \mathbb{Z}$. U ovom slučaju $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_0)$ je upravo Cayleyeva reprezentacija grupe algebre kompleksa $\mathcal{C}m(G)$. Atomi u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_0)$ su Cayleyeve reprezentacije celih brojeva k, to jest, to su funkcije R_k, definisane sa $R_k(m) = m + k$, za svaki ceo broj m. Operacije relacione inverzije i relacione kompozicije na atomima iz $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_0)$ definisane su formulama $R_k^{-1} = R_{-k}$ i $R_k \mid R_l = R_{k+l}$, za cele brojeve k i l.

Neka je H_1 podgrupa grupe $\mathbb{Z}$ koja sadrži parne brojeve. Koseti od H_1 su skupovi oblika $K_i = \{m \in \mathbb{Z} : m \equiv i (mod\, 2)\}$, za $i = 0, 1$, to jest, to su skupovi parnih i neparnih brojeva. Atomi u algebri $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_1)$ su restrikcije $R_k \restriction K_0$ i $R_k \restriction K_1$, za cele brojeve k. Za $i = 0, 1$, funkcija R_k preslikava koset K_i bijektivno u koset K_i, kada je i parno, a K_i bijektivno preslikava u K_{1-i}, kada je i neparno.

Svaki atom R_k u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_0)$ je podeljen u uniju dva atoma $R_k \restriction K_0$ i $R_k \restriction K_1$, u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_1)$. Inverzni elementi od atoma u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_1)$ dati su formulama $(R_k \restriction K_i)^{-1} = R_{-k} \restriction K_i$ i $(R_k \restriction K_i)^{-1} = R_{-k} \restriction K_{1-i}$, u zavisnosti od toga da li je k paran ili neparan. Na primer, $(R_4 \restriction K_1)^{-1} = R_{-4} \restriction K_1$ i $(R_3 \restriction K_1)^{-1} = R_{-3} \restriction K_0$.

Kompozicija dva atoma u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_1)$ data je formulama $(R_k \restriction K_i) \mid (R_l \restriction K_i) = R_{k+l} \restriction K_i$ i $(R_k \restriction K_i) \mid (R_l \restriction K_{1-i}) = \emptyset$, kada je i paran, a sa $(R_k \restriction K_i) \mid (R_l \restriction K_i) = \emptyset$ i $(R_k \restriction K_i) \mid (R_l \restriction K_{1-i}) = R_{k+l} \restriction K_i$, kada je i neparan. Na primer, $(R_5 \restriction K_0) \mid (R_4 \restriction K_0) = \emptyset$ i $(R_5 \restriction K_1) \mid (R_4 \restriction K_0) = R_9 \restriction K_1$.

Neka je sada H_2 podgrupa grupe $\mathbb{Z}$ koja sadrži brojeve deljive sa 4. Koseti od H_2 su skupovi $K_{ij} = \{m \in \mathbb{Z} : m \equiv ij(mod\, 4)\}$, gde je svaki od i i j ili 0 ili 1, to jest, ij je binarni zapis brojeva između 0 i 3. Na primer, ako je $i = j = 1$, tada je ij binarni zapis broja 3 i $K_{11} = \{m \in \mathbb{Z} : m \equiv 3(mod\, 4)\}$.

Atomi relacione algebre $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_2)$ su restrikcije $R_k \restriction K_{ij}$. Ako su ij, $i'j'$ i $i", j"$, respektivno, binarni zapisi ostataka pri deljenju sa 4 brojeva k, l, m i ako je $ij + i'j' = i"j"$ u binarnoj aritmetici po modulu 4 (tako da je $k + l \equiv m(mod\, 4)$), tada funkcija R_k preslikava koset $K_{i'j'}$, bijektivno, u koset $K_{i"j"}$. Na primer, kada je k kongruentno sa 3 po modulu 4, funkcija R_k bijektivno preslikava K_{00} u K_{11}, K_{01} u K_{00}, K_{10} u K_{01} i K_{11} u K_{10} jer, binarni zapis broja 3 je 11, pa imamo 00+11=11, 01+11=00, 10+11=01 i 11+11=10, u binarnoj aritmetici, po modulu 4.

Atom $(R_k \restriction K_i)$ iz $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_1)$ deli se na uniju dva atoma $(R_k \restriction K_{0i})$ i $(R_k \restriction K_{1i})$ u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_2)$. Na primer, skup K_1 neparnih brojeva je disjunktna unija skupa K_{01} brojeva kongruentnih sa 1 po modulu 4 i skupa K_{11} brojeva kongruentni sa 3 po modulu 4, pa je atom $(R_7 \restriction K_1)$ iz $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_1)$ podeljen u uniju dva atoma $(R_7 \restriction K_{01})$ i $(R_7 \restriction K_{11})$ u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_2)$. Formule za izračunavanje inverznih elemenata i relacionih kompozicija atoma iz $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_2)$ su slične kao formule za $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_1)$, ali su komplikovanije da se izraze uopšteno. Par primera trebalo bi da bude dovoljno da ilustruju glavnu ideju. Funkcija R_7 slika K_{10} u K_{01}, a funkcija R_6 slika K_{10} u K_{00}, pa je $(R_7 \restriction K_{10})^{-1} = R_{-7} \restriction K_{01}$ i $(R_6 \restriction K_{10})^{-1} = R_{-6} \restriction K_{00}$. Takođe, $(R_7 \restriction K_{10}) \mid (R_6 \restriction K_{01}) = R_{13} \restriction K_{10}$ i $(R_7 \restriction K_{10}) \mid (R_6 \restriction K_{ij}) = \emptyset$, ako je $i \neq 0$ ili $j \neq 1$.

Generalno, neka je H_n podgrupa grupe $\mathbb{Z}$ koja sadrži brojeve deljive sa 2^n. Koseti od H_n su skupovi $K_a = \{m \in \mathbb{Z} : m \equiv a(mod\, 2^n)\}$, gde je a niz od n nula i jedinica koji je binarni zapis za brojeve između o i $2^n - 1$. Na primer, 101 je binarni zapis broja 5, pa je K_{101} koset podgrupe H_3 koji sadrži brojeve koji su kongruentni sa 5 po modulu 8. (U ovom primeru $n = 3$, pa je $2^n = 8$). Ako je broj k kongruentan sa 6 po modulu 8, tada funkcija R_k preslikava koset K_{101} bijektivno u koset K_{011}. Atom $R_k \restriction K_a$ iz $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_n)$ deli se u uniju dva atoma $R_k \restriction K_{0a}$ i $R_k \restriction K_{1a}$ u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_{n+1})$. Na primer, atom $R_k \restriction K_{101}$ iz $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_3)$ deli se u uniju dva atoma $R_k \restriction K_{0101}$ i $R_k \restriction K_{1101}$ u $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_4)$.

Niz $H_0, H_1, H_2, \ldots$ formira strogo na dole usmeren lanac podgrupa grupe $\mathbb{Z}$, pa niz $\mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_0), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_1), \mathcal{F}(\mathbb{Z}, H_2), \ldots$ formira strogo na gore usmeren lanac kompletnih podalgebri algebre $\mathcal{R}e(\mathbb{Z})$. Unija ovog rastućeg lanca je primer proste, funkcionalno guste, bezatomne podalgebre algebre $\mathcal{R}e(\mathbb{Z})$.

4.6 Funkcionalno guste relacione algebre sa Booleovom algebrom idealnih elemenata bez atoma

U prethodnom poglavlju videli smo neke primere funkcionalno gustih relacionih algebri bez atoma. Dati primeri su proste algebre, pa odatle sledi da su njihove Booleove algebre idealnih elemenata dvoelementne. Znamo iz teoreme 4.9 da proizvoljna funkcionalno gusta relaciona algebra može imati jedan faktor bez atoma koji je funkcionalno gust i ima Booleovu algebru idealnih elemenata bez atoma. Problem opisivanja svih funkcionalno gustih relacionih algebri sa Booleovom algebrom idealnih elemenata bez atoma je, takođe, još uvek otvoren.

Ponovo se zadovoljavamo predstavljanjem klase primera i zatim prelazimo na konkretan primer.

Počinjemo sa proizvoljnom relacionom algebrom $\mathcal{U}$ i prozvoljnim beskonačnim skupom I. Za konkretizaciju uzećemo da je I skup prirodnih brojeva, samo zato što to pojednostavljuje zapis. Posmatrajmo Iti direktan proizvod $\mathcal{U}^I$. Definišemo strogo rastući niz $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$ podalgebri algebre $\mathcal{U}^I$, sa osobinom da se svaki element iz $\mathcal{B}_n$ u $\mathcal{B}_{n+1}$ deli na sumu bar dva disjunktna nenula elementa.

Fiksirajmo prirodan broj n. Za svaki element r, iz konačnog proizvoda $\mathcal{U}^{2^n}$, definišemo element $\widehat{r}$ u beskonačnom proizvodu $\mathcal{U}^I$, sa $\widehat{r}(i) = r_j$, gde je $0 \leq j \leq 2^n$ i $i \equiv j(mod\ 2^n)$. Na primer, ako je $n = 0$, tada je r funkcija sa domenom $\{0\}$ i $r_0 = p$ je element iz $\mathcal{U}$, tako da važi $\widehat{r} = (p, p, p, \ldots)$. Ako je $n = 1$, r je funkcija sa domenom $\{0, 1\}$, a $r_0 = p$ i $r_1 = q$ su elementi iz $\mathcal{U}$, pa u ovom slučaju je $\widehat{r} = (p, q, p, q, \ldots)$. Generalno, $\widehat{r}$ je element u $\mathcal{U}^I$ dobijen nastavljanjem r na samog sebe beskonačno mnogo puta.

Skup B_n elemenata oblika $\widehat{r}$, za r iz $\mathcal{U}^{2^n}$, je poduniverzum od $\mathcal{U}^I$. Zaista, B_n sadrži identički element $\widehat{1'} = (1', 1', 1', \ldots)$, u $\mathcal{U}^I$, i B_n je zatvoren za operacije iz $\mathcal{U}^I$ jer su ove operacije definisane po koordinatama sa:

$$
\begin{aligned}
\widehat{r} + \widehat{s} = \widehat{t}, &\quad \text{za} \quad t = r + s, \\
-\widehat{r} = \widehat{t}, &\quad \text{za} \quad t = -r, \\
\widehat{r}; \widehat{t} = \widehat{s}, &\quad \text{za} \quad t = r; s, \\
\widehat{r}^{\smile} = \widehat{t}, &\quad \text{za} \quad t = r^{\smile}.
\end{aligned}
$$

(Operacije levo izvode se u $\mathcal{U}^I$, a one desno u $\mathcal{U}^{2^n}$.) Podalgebra algebre $\mathcal{U}^I$, čiji je univerzum B_n- obeležavaćemo je sa $\mathcal{B}_n$- je izomorfna sa $\mathcal{U}^{2^n}$, i to izomorfizmom koji $\widehat{r}$ preslikava u r, za svaki element r iz $\mathcal{U}^{2^n}$. Odatle imamo da $\mathcal{B}_n$ nasleđuje sve osobine od $\mathcal{U}^{2^n}$. Na primer, ako je r idealni element u $\mathcal{U}^{2^n}$, tada je $\widehat{r}$ idealni element u $\mathcal{B}_n$. Takođe, ako $\mathcal{U}$ ima osobinu neke gustoće, kao što je funkcionalna, tada je ima i $\mathcal{U}^{2^n}$, pa i $\mathcal{B}_n$.

Svaki element iz $\mathcal{B}_n$ pripada $\mathcal{B}_{n+1}$. Zaista, ako je r element iz $\mathcal{U}^{2^n}$ i ako je s element iz $\mathcal{U}^{2^{n+1}}$, definisan sa $s_i = r_j$, za $0 \leq j \leq 2^n$ i $i \equiv j(mod\ 2^n)$ (pa je s element nastao nadovezivanjem r na samog sebe), tada se element $\widehat{r}$ iz $\mathcal{B}_n$ poklapa sa elementom $\widehat{s}$ iz $\mathcal{B}_{n+1}$. Operacije u $\mathcal{B}_n$ i $\mathcal{B}_{n+1}$ su, po definiciji, restrikcije odgovarajućijh operacija iz $\mathcal{U}^I$. Sledi da $\mathcal{B}_n$ mora biti podalgebra algebre $\mathcal{B}_{n+1}$. Svaki nenula element $\widehat{r}$ iz $\mathcal{B}_n$ je podeljen u $\mathcal{B}_{n+1}$ na zbir dva disjunktna nenula elementa. Zaista, ako je s element iz $\mathcal{U}^{2^{n+1}}$, koji je upravo definisan (tako da je $\widehat{r} = \widehat{s}$), i ako su t i u elementi iz $\mathcal{U}^{2^{n+1}}$ definisani sa:

$$
t_i = \begin{cases} s_i, & \text{ako je } 0 \leq i < 2^n, \\ 0, & \text{ako je } 2^n \leq i < 2^{n+1}, \end{cases} \quad \text{i}
$$

$$
u_i = \begin{cases} 0, & \text{ako je } 0 \leq i < 2^n, \\ s_i, & \text{ako je } 2^n \leq i < 2^{n+1}, \end{cases}
$$

tada su t i u nenula elementi iz $\mathcal{U}^{2^{n+1}}$, koji su disjunktni i imaju s za njihov zbir. Sledi da su $\widehat{t}$ i $\widehat{u}$ nenula elementi iz $\mathcal{B}_{n+1}$, koji su disjunktni i imaju $\widehat{s}$ za njihov zbir. Kako je $\widehat{s}$ koincidentno sa $\widehat{r}$, $\widehat{r}$ možemo zapisati kao disjunktan zbir nenula elemenata $\widehat{t}$ i $\widehat{u}$. Primetimo da ako je r nenula idealni element iz $\mathcal{U}^{2^n}$, tada su t i u idealni elementi u $\mathcal{U}^{2^{n+1}}$, i zato je nenula idealni element $\widehat{r}$ iz $\mathcal{B}_n$ podeljen u $\mathcal{B}_{n+1}$ na zbir dva disjunktna nenula idealna elementa $\widehat{t}$ i $\widehat{u}$.

Niz $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ formira strogo rastući lanac podalgebri algebre $\mathcal{U}^I$ sa osobinom da je svaki nenula element u $\mathcal{B}_n$ podeljen u zbir dva disjunktna nenula elementa iz $\mathcal{B}_{n+1}$, a svaki nenula idealni element u $\mathcal{B}_n$ je podeljen u zbir dva disjunktna nenula idealna elementa iz $\mathcal{B}_{n+1}$. Dalje sledi da ako $\mathcal{U}$ ima osobinu neke gustine, kao što je funkcionalna, tada je ima i svaka $\mathcal{B}_n$ algebra u lancu, i unija lanca nasleđuje ovu osobinu gustine.

Teorema 4.25 *Ako je $\mathcal{U}$ netrivijalna relaciona algebra i I skup prirodnih brojeva, tada je unija lanca $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots,$ podalgebri algebre $\mathcal{U}^I$ (konstruisanih u prethodnom razmatranju), podalgebra algebre $\mathcal{U}^I$, koja je bez atoma i nema idealnih atoma. Ako je $\mathcal{U}$ funkcionalno gusta, tada je i unija lanca funkcionalno gusta.*

Da bismo dobili konkretan primer fukncionalno guste relacione algebre koja nema idealnih atoma uzmimo da je $\mathcal{U}$ bilo koja prosta, funkcionalno gusta relaciona algebra (atomična ili bez atoma) ili neprazan proizvod takvih algebri. Na primer, $\mathcal{U}$ može biti algebra kompleksa neke fiksne grupe.

Glava 5

Zaključak

Videli smo da pitanje reprezentabilnosti relacionih algebri uopšte nije trivijalno. U uvodnom delu o mrežama data je teorema sa dokazom da je svaka distributivna mreža izomorfna sa podmrežom partitivnog skupa $P(A)$, za neki skup A. Isto tako za Booleove algebre dat je dokaz da se svaka Booleova algebra može utopiti u neku Booleovu skupovnu algebru. A poznata je i Cayleyeva teorema o reprezentabilnosti grupa, koja kaže da je svaka grupa izomorfna sa nekom grupom permutacija.

Zašto se za relacione algebre ne može dokazati slična teorema o reprezentabilnosti? Američki matematičar Lyndon uspeo je 1950. godine da konstruiše algebru koja je zadvoljavala sve aksiome Tarskog, ali nije izomorfna ni jednoj algebri binarnih relacija. Lyndon je pronašao nereprezentabilnu relacionu algebru.

Da li na operacije unije, preseka, komplementa, proizvoda i inverzije možemo dodati još neke operacije na skupu binarnih relacija? B. Bíró i R. Maddux su dokazali da ne postoji ni jedno konačno "lepo" proširenje jezika relacionih algebri tako da klasa reprezentabilnih algebri ima konačnu bazu identiteta.

S obzirom na ovakvo stanje stvari napravljen je drugačiji pristup reprezentabilnosti relacionih algebri, preko algebri kompleksa i atomičnih struktura. U skladu sa tim pristupom u radu je navedena teorema o reprezentabilnosti atomičnih relacionih algebri, kod kojih je svaki atom funkcionalni element.

Još jedna klasa relacionih algebri koje su reprezentabilne su funkcionalno guste relacione algebre. Pored teoreme koja to dokazuje, u radu je naveden i jedan strukturni opis za proste, funkcionalno guste relacione algebre koji dokazuje da su one ili atomične ili bez atoma. Takođe, data je i teorema o dekompoziciji funkcionalno gustih relacionih algebri.

U poslednjim poglavljima ovaj rad se bavi opisivanjem, kako funkcionalno gustih relacionih algebri (atomičnih sa funkcionalnim atomima ili bez atoma), tako i funkcionalno gustih relacionih algebri sa Booleovom algebrom idealnih elemenata bez atoma.

Relacione algebre su nezgodne pa se postavlja pitanje šta se dobija za uzvrat. Chin i Tarski su 1951. godine uočili da relacione algebre mogu zauzeti značajno mesto u matematičkim istraživanjima. U njihovom radu navedeno je: "Izvodljivost matematičkog tvrđenja iz datog skupa aksioma može se svesti na pokazivanje da neka jednakost važi u svakoj relacionoj algebri identički."

Tu ideju su Taski i Givant i realizovali u svojoj knjizi "A Formalization of Set Theory Without Variables". Tu je dat jedan nov formalizam koji ne sadrži promenljive, kvantifikatore, iskazne veznike, a usko je povezan sa jednakosnom teorijom relacionih algebri. Pokazalo se da se teorija skupova i aritmetika mogu formulisati na ovom formalizmu, što samo govori o tome koliko je on zapravo jak.

Literatura

[1] Andreka, H., Givant, S.: Functionally dense relation algebras, Algebra Universalis, Vol 68, No 1-2, pp 151-191 (2012)

[2] Chin, L.H., Tarski, A.: Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras. Univ. California Publ. Math. (N.S) 1, 341-384 (1951)

[3] Givant, S.: The Structure of Relation Algebras Generated by Relativizations. Contrremporary Mathematic, vol. 156. American Mathematical Society, Providense (1994)

[4] Hirish, R., Hodkinson, I.: Complete reprezentations in algebraic logic. J. Symbolic Logic 62, 816-847 (1997)

[5] Hirsch, R., Hodkinson, I.: Relation Algebars by Games. Studies in Logic and the Fundations of Mathematic, vol. 147. North-Holland, Amsterdam (2002)

[6] Hodkinson, I.: Atom structures of cylindric algebras and relation algebras. Ann. Pure Appl. Logic 89, 117-146 (1997)

[7] Jónsson, B.: Relation algebras and Schroder categories. Discrete Math. 70, 27-45 (1988)

[8] Jónsson, B.: The Theory of Binary Relations, u Andreka, H., Monk, J.D., and Nemeti, I.(eds): Algebraic logic (Proc. Conf. Budapest 1988), Vol 54 of Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, North-Holland, 246-290 (1991)

[9] Jónsson, B., Tarski, A.: Boolean algebras with operators. Part I. Amer. J. Math. 73, 891-939 (1951)

[10] Jónsson, B., Tarski, A.: Boolean algebras with operators. Part II. Amer. J. Math. 74, 127-162 (1952)

[11] Madarasz, Sz., R.: Od skupova do univerzalnih algebri. Prorodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad (2006)

[12] Madarasz, Sz., R., Crvenković, S.: Relacione algebre. Matematički institut, Beograd (1992)

[13] Maddux, R.D.: Some sufficient conditions for the representability of relation algebras. Algebra Universialis 8, 162-172 (1978)

[14] Maddux, R.D., Tarski, A.: A sufficient condition for the representability of relation algebras. Notices Amer. Math. Soc. 23, A-447 (1976)

[15] Monk, J.D.: Completions of Boolean algebras with operators. Math. Nachr. 46, 47-55 (1970)

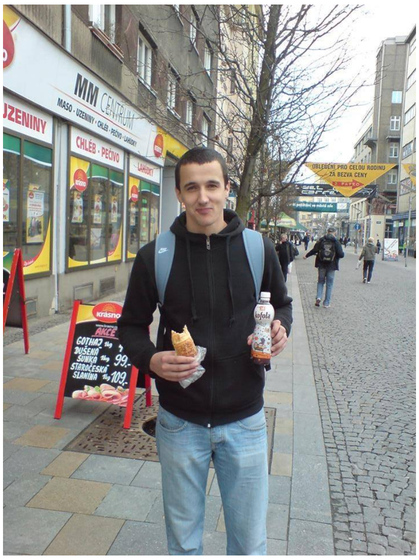
[16] Schmidt, G., Strohlein, T.: Relations and Graphs. Discrete Mathematics for Computer Scientists. Springer, Heidelberg (1993)

[17] Šešelja, B., Tepavčević, A.: Bulove algebre i funkcije. Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku, Novi Sad (2005)

[18] Tarski, A., On the calculus of relations, J. Symbolic Logic 6 (1941), 73-89.

Biografija

Ivan Prokić rođen je 7. septembra 1990. godine u Šapcu. Osnovnu školu "Nikola Tesla", u Dublju, završio je 2005. godine. Godine 2009. završava "Mačvansku srednju školu", u Bogatiću, i iste godine upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika (M1). Godine 2012. upisao je master studije na istom fakultetu, smer matematika (MA). Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i time stekao pravo na odbranu ovog rada.



u Novom Sadu, oktobra 2014. Ivan Prokić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Ivan Prokić
AU
Mentor: dr Rozalija Madaras-Silađi
MN
Naslov rada: Funkcionalno guste relacione algebre
MR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski i engleski
JI
Zemlja publikovanja: Srbija
ZP Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2014.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Novi sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovia 3
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/ 63 strana /18 literatura /1 fotografija
FO
Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Relacione algebre
ND
Ključne reči: reprezentabilnost, funkcionalno guste relacione algebre
PO
UDK:
Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod:

U ovom radu posmatramo jednu klasu relacionih algebri koje su reprezentabilne-funkcionalno guste relacione algebre. Pored teoreme koja to dokazuje, naveden je i jedan strukturni opis za proste, funkcionalno guste relacione algebre koji dokazuje da su one ili atomične ili bez atoma. Takođe, data je i teorema o dekompoziciji funkcionalno gustih relacionih algebri. U poslednjem poglavlju ovaj rad se bavi opisivanjem, kako funkcionalno gustih relacionih algebri (atomičnih sa funkcionalnim atomima ili bez atoma), tako i funkcionalno gustih relacionih algebri sa Booleovom algebrom idealnih elemenata bez atoma.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 11.2.2014.

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Siniša Crvenković, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr Ivica Bošnjak, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr Rozalia Madaras Silađi, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

UNIVERSITY OF NOVI SAD FACULTY OF SCIENCE DEPARTAMENT OF MATHEMATICS AND INFORMATICS KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contents Code:
CC
Author: Ivan Prokić
AU
Mentor: dr Rozalia Madaras Silađi
MN
Title: Functionally dense relation algebras
XI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: Serbian and English
LA
Country of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2014.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Novi Sad, Department of mathematics and informatics, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 3
PP
Physical description: 4 chapters/ 63 pages /18 references /1 photograph
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Relation algebra
SD
Key words: representability, functionally dense relation algebras
SKW UC:
Holding data: Library of the Department of Mathematics and Informatics
HD
Note:

Abstract: In this paper, we cosider a class of relation algebras that are representable- funcionally dense relation algebras. Beside the proof for that thorem, this paper contains structural description of simple, functionally dense relation algebra, which proves that they are either atomic or atomless. Also, it was given a decomposition theorem for functionally dense relation alebras. The final chapter of this paper is concerned with describing functionally dense relational algebra (atomic with functional atoms or atomless) and functionally dense relation algebra with Boolean algebra ideal elements that is atomless.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 11.2.2014.

ASB

Defended:

DE

Thesis defense board:

DB

President: dr Siniša Crvenković, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Ivica Bošnjak, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: dr Rozalia Madaras Silađi, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad