UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

STEPENE STRUKTURE I MULTIALGEBRE

MASTER TEZA

Autor:
Marijana Lazić

Mentor:
dr Rozália Sz. Madarász

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

Predgovor

Pri izučavanju multialgebri, već kod definisanja vrednosti terma čiji je rang veći od jedan, javlja se potreba za tzv. stepenim strukturama tj. da se date operacije podignu na nivo partitivnog skupa. Takođe, pri izučavanju stepenih struktura algebri, prirodno je proširiti priču na stepene strukture multialgebri zbog nekih "lepih" osobina koje one poseduju. Ovaj rad će se baviti ovim i njima bliskim pojmovima, koji su po svemu sudeći u neraskidivoj vezi.

Prvo poglavlje rada je podeljeno u četiri sekcije i sadrži osnovne definicije pojmova kojima ćemo se u nastavku baviti, a to su multialgebre i multioperacije definisane na njima, termi i njihove vrednosti na multialgebrama, stepene strukture i drugo. Daćemo primere nekih specijalnih klasa multialgebri koje su analogne onima kod univerzalnih algebri, a to su hipergrupoidi, semihipergrupe, hipergrupe, hiperprsteni, kao i generičke multialgebre.

Druga, treća i četvrta glava su rezervisane za neke pojmove usko vezane za multialgebre, a to su homomorfizmi, podmultialgebre i slobodne multialgebre. Bavićemo se osnovnim osobinama po uzoru na [12] i [13], i uporediti ih sa analognim pojmovima koji se javljaju kod univerzalnih algebri.

U petoj glavi ćemo se podsetiti najvažnijih pojmova vezanih za Booleove algebre sa operatorima i pozabaviti se još jednim značajnim tvrđenjem koje govori da je stepena struktura svake multialgebre dobra Booleova algebra sa operatorima, ali i obrnuto, svaka dobra Booleova algebra sa operatorima je stepena struktura neke multialgebre, što je rezultat Jónssona i Tarskog. Literatura na koju se oslanja ova glava je [3], [23], [24].

Već iz definicije faktor-multialgebre univerzalne algebre biće jasno da je u pitanju multialgebra, ali nije tako trivijalno da važi i obrnuto, tj. da je svaka multialgebra u stvari faktor-multialgebra neke univerzalne algebre. Za ovaj rezultat iz 1962. godine zaslužan je G. Grätzer (videti [21]) i ovo tvrđenje predstavlja glavnu temu šeste glave.

Sedma glava se bavi faktor-multialgebrama i u njoj ćemo dati opis tzv. fundamentalne relacije, tj. najmanje relacije ekvivalencije na multialgebri za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra, kao i neke primere i rezultate iz radova [26], [27], [29] i [33].

Poslednja, osma glava je podeljena u tri sekcije, sadrži najvažnije rezultate radova [32] i [36], kao i opis najmanje relacije ekvivalencije multialgebre za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra koja zadovoljava dati identitet, odnosno, skup identiteta.

Na kraju, želela bih da se zahvalim dr Ivici Bošnjaku i dr Petru Đapiću na savetima i korisnim sugestijama.

Zatim, zahvalila bih se na pruženoj podršci svojim roditeljima, Biljani i Vladisavu, prijateljima i svima koji su na bilo koji način doprineli izradi ovog master rada.

Nesumnjivo, najveću zahvalnost dugujem svom mentoru dr Rozáliji Madarász Szilágyi, kako na odabiru ovako zanimljive teme, tako i na ažurnosti i svesrdnoj pomoći.

Novi Sad, septembar 2012. *Marijana Lazić*

Glava 1

Osnovni pojmovi

1.1 Uvod

Neformalno rečeno, multialgebra je skup A sa kolekcijom multioperacija $\mathcal{F}$ pri čemu pod pojmom "multioperacija" podrazumevamo preslikavanje koje svakoj n-torci elemenata iz A pridružuje neki podskup od A. Nekada ćemo dozvoliti da to bude i prazan skup, a nekada ne. Pojam multialgebre je opštiji od pojma algebre, odnosno, univerzalne algebre i parcijalne algebre su specijalni slučajevi multialgebri (videti [22]).

Primere multioperacija srećemo npr. kod mreža sa komplementiranjem jer je operacija koja elementu x dodeljuje skup svih njegovih komplemenata, u stvari, multioperacija. Kao primer binarne multioperacije na modularnoj mreži sa komplementiranjem L možemo navesti preslikavanje koje elementima $a, b \in L$ opredeljuje neprazan skup $a - b = \{x \in L \mid a \cap b \cap x = 0 \wedge (a \cap b) \cup x = a\}$. Ova multioperacija se često koristi u geometriji. Zatim, u teoriji grupa, množenje koseta $aH \cdot bH$ gde H nije normalna podgrupa. Sem toga, multialgebre srećemo u kompjuterskim naukama kao i u teoriji automata. Naime, nedeterministički automat je ništa drugo do multialgebra, pa multialgebre mogu biti matematički modeli nedeterminističkih procesa. Iako se pojam multialgebre pojavio pre više od 70 godina u radovima Dreshera i Orea (videti [16]), u zadnjih 30 godina se ova tema znatno intenzivnije izučava i povezuje sa drugim oblastima matematike i informatike (videti [10] i [39]), a najprirodnija veza je naravno sa univerzalnim algebrama. Tako na primer, možemo posmatrati u kom obliku se pojmovi poput homomorfizama, podstruktura i slobodnih struktura javljaju kod multialgebri. Naime, među prve radove na ovu temu spada Pickettov rad [34]. Zatim, u [12] nalazimo tri vrste homomorfizama koje prirodno indukuju tri vrste slobodnih objekata. Tu nalazimo neke rezultate vezane za konkretne klase multialgebri, koji će biti dokazani u ovom radu. Opis jedne vrste slobodnih objekata nad klasom regularnih multialgebri je dat u [13], kao i dokaz egzistencije određene vrste slobodnih objekata u klasi $\alpha-$ograničenih regularnih objekata, gde je α nenula kardinal. Postoji veliki broj radova vezanih za specijalne klase multialgebri i njihove osobine (videti npr. [7], [9], [16], [25] koji se bave multistrukturama analognim grupoidu, semigrupi, grupi i prstenu, kao i [35] koji se bavi generičkim multialgebrama i mogućnošću njihove aksiomatizacije).

Jedan od najznačajnijih radova na kojima se zasniva ovaj rad je svakako

Grätzerov [21] koji nam daje eksplicitan opis multialgebri, a u vezi sa faktor strukturama. Iz ovog rada jasno sledi da su multialgebre prirodno proširenje univerzalnih algebri. Iz pitanja koja se nameću iz Grätzerove teoreme proizišla je potreba za proučavanjem identiteta na multialgebrama. Kako identiteti određuju neke multistrukture i kako se ponašaju pri nekim konstrukcijama multialgebri možemo videti u brojnim primerima i napomenama iz [33], čiju teorijsku pozadinu nalazimo u [26], [28], [29], [30], [31], [32]. U ovim radovima se C. Pelea i saradnici bave raznim pojmovima i fenomenima vezanim za multialgebre i idenitete, pa kao jedan značajan pojam izdvajamo najmanju relaciju ekvivalencije za koju je faktor multialgebra univerzalna algebra koja zadovoljava dati identitet (detaljan opis ove relacije je dat u [32]). Među prvim radovima na ovu temu je [17] gde je prikazana najmanja relacija ekvivalencije na (semi)hipergrupi za koju je faktor-(semi)hipergrupa komutativna (semi)grupa. Kao značajan rezultat dobijamo da je klasa svih relacija ekvivalencije za koje je faktor-multialgebra univerzalna algebra, algebarski sistem zatvaranja. Kao uopštenje ove relacije, u [36] dobijamo opis najmanje relacije ekvivalencije multialgebre za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra koja zadovoljava skup identiteta.

Tema koja se u poslednje vreme intenzivno izučava su tzv. hiperklonovi, skupovi multioperacija sa specijalnim osobinama. Kako se u ovom radu nećemo baviti njima, upućujemo na nedavno odbranjen master rad [11]. Da su multialgebre savremena tema koja se izučava sa različitih aspekata, svedoče i radovi [1] i [2], objavljeni u poslednje dve godine, u kojima se definiše nova fazi multioperacija i daje veza između fazi multialgebri i fazi algebri.

Što se tiče stepenih struktura, postoje tri osnovna načina njihovog formiranja. Prirodno proširenje multioperacije f na skupu A, na operaciju f^+ na njegovom partitivnom skupu $\mathcal{P}(A)$ srećemo kod množenja koseta u teoriji grupa. Ovo bi bio prvi način formiranja stepenih struktura i interesantne rezultate dobijene ovom konstrukcijom možemo naći u radovima [15], [18], [37].

Drugi način konstruisanja stepenih struktura bi bio stepenovanje relacijskih struktura predstavljeno u radu [23] Jónssona i Tarskog gde nalazimo korisne rezultate sa stanovišta univerzalne algebre, na primer teorema reprezentacije za Booleove algebre sa operatorima, čiji ćemo kompletan dokaz dati u ovom radu. Za više o ovom tipu konstrukcije, pogledati i [19].

Ako prihvatimo Whitneyjevu definiciju $n-$arne stepene relacije, kao u [40] i [20], dobićemo stepenu relacijsku strukturu široko primenjenu u kompjuterskim naukama.

1.2 Multialgebre - osnovne definicije

Definicija 1.1 *Neka je A neprazan skup i $\mathcal{F}$ neprazna disjunktna unija skupova $\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$ (koji ne moraju svi biti neprazni) tzv.* **tip** *(multioperacija). Elemente od $\mathcal{F}$ ćemo zvati* **funkcijski simboli** *(operacijski simboli) i reći ćemo da su* **arnosti** *n ili $n-$***arni** *ako pripadaju $\mathcal{F}_n$. Svako preslikavanje iz A^n u familiju svih podskupova od A, u oznaci $\mathcal{P}(A)$, zvaćemo* **multioperacija** *arnosti n ($n-$arna) na A.*

Nekada ćemo kao rezultat multioperacije dozvoljavati samo neprazne skupove i tada ćemo koristiti oznaku $\mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$.

Kako bismo se intuitivno približili multialgebrama, pre definicije daćemo njihov neformalan opis. Naime, multialgebra je neprazan skup na kome su definisane neke multioperacije.

Definicija 1.2 *Kažemo da je* $\mathcal{A}$ **multialgebra** *tipa* $\mathcal{F}$ *sa nosačem* $A \neq \emptyset$ *ako je* $\mathcal{A}$ *preslikavanje iz* $\mathcal{F}$ *u familiju multioperacija na* A. *Ako* $f \in \mathcal{F}_n$ *onda je* $\mathcal{A}(f)$ $n-$*arna multioperacija za koju kažemo da je* **interpretacija** *funkcijskog simbola* f *u* $\mathcal{A}$ *i obeležavamo sa* $f^{\mathcal{A}}$.

U literaturi se, sem "multialgebre", sreću i i nazivi: polialgebre, hiperalgebre, a za zadat tip $\mathcal{F}$, poli$-\mathcal{F}-$algebre. Skup svih multialgebri tipa $\mathcal{F}$ sa nosačem A ćemo označavati sa $\mathcal{F}(A)$.

Ako ne pravimo razliku između elemena x i singltona $\{x\}$, svaka univerzalna algebra je multialgebra. Takođe, ako prihvatimo da i prazan skup može biti rezultat multioperacije, onda su i parcijalne algebre specijalne multialgebre oblika $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ kod kojih je za svako $f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n, |f^{\mathcal{A}}(x)| \leq 1$.

Svaku multialgebru možemo posmatrati kao relacijsku strukturu i obrnuto, jer možemo uspostaviti bijekciju između multioperacija na A i $n+1-$arnih relacija na A. Naime, relaciji $R \subseteq A^{n+1}$ odgovara $n-$arna multioperacija f^R data sa

$$y \in f^R(x_0, \ldots, x_{n-1}) \Leftrightarrow (x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \in R.$$

Primetimo da je nularna multioperacija podskup od A.

Definicija 1.3 *Multialgebra* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ *je* **regularna** *ako za sve* $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ *važi da je*

$$f^{\mathcal{A}}(x) \neq \emptyset.$$

Klasu svih regularnih multialgebri tipa $\mathcal{F}$ *ćemo označavati sa Reg* $(\mathcal{F})$*, a klasu onih koje su pri tom* $\alpha-$*ograničene za neki kardinalni broj* α*, tj. za sve* $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ *je* $|f^{\mathcal{A}}(x)| \leq \alpha$*, sa Reg*$[\mathcal{F}, \alpha]$.

Uvedimo još neke oznake za klase multialgebri. Klasu svih multialgebri tipa $\mathcal{F}$, tj. poli$-\mathcal{F}-$algebri ćemo označavati sa *Mult*$(\mathcal{F})$, klasu univerzalnih algebri sa *Ual*$(\mathcal{F})$, a parcijalnih sa *Parc*$(\mathcal{F})$.

Definicija 1.4 *Za multialgebru* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ *ćemo reći da je* **jedinična multialgebra na** A *i označavati je sa* $e(A)$ *ako je za sve* $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$,

$$f^{\mathcal{A}}(x) = A.$$

Skup svih jediničnih multialgebri tipa $\mathcal{F}$ *ćemo označavati sa* $\mathcal{E}(\mathcal{F})$.

Za multialgebru $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ *ćemo reći da je* **singularna multialgebra na** A *i označavati je sa* $o(A)$ *ako je za sve* $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$,

$$f^{\mathcal{A}}(x) = \emptyset.$$

Skup svih singularnih multialgebri tipa $\mathcal{F}$ *ćemo označavati sa* $\mathcal{O}(\mathcal{F})$.

Za multialgebru $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ *kažemo da je* **konstanta** *ako postoji skup* $M \subseteq A$ *takav da je za sve* $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$,

$$f^{\mathcal{A}}(x) = M.$$

Ako takvu multialgebru označimo sa (A, M)*, jasno je da je* $o(A) = (A, \emptyset)$ *i* $e(A) = (A, A)$*. Klasu svih konstanti (konstantnih multialgebri) ćemo označavati sa Con*$(\mathcal{F})$.

Ako je $\mathcal{K}$ klasa multialgebri tipa $\mathcal{F}$ i α kardinalni broj, tada ćemo sa $\mathcal{K}^+$ označavati klasu $\mathcal{K} \cap Reg(\mathcal{F})$, sa $\mathcal{K}(\alpha)$ klasu $\{\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{K} \mid |A| < \alpha\}$ i sa $\mathcal{K}[\alpha]$ klasu $\{\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A) \cap \mathcal{K} \mid |A| \leq \alpha\}$.

Kada je očigledno o kom tipu multioperacija se radi, iz pomenutih oznaka ćemo izostavljati simbol $\mathcal{F}$.

Ako na $\mathcal{F}(A)$ definišemo prirodno uređenje $\leq$ na sledeći način: za $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{F}(A)$ važi

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \iff f^{\mathcal{A}}(x) \subseteq f^{\mathcal{B}}(x) \text{ za sve } n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n,$$

dobijamo da je $(\mathcal{F}(A), \leq)$ kompletna Booleova mreža čiji je najmanji element $o(A)$, a najveći $e(A)$.

Definicija 1.5 *Neka je $\mathcal{F}$ neki tip multioperacija i X skup simbola (***promenljivih***), disjunktan sa $\mathcal{F}$.* **Termi tipa $\mathcal{F}$ nad** *X su definisani na sledeći način:*

1. *Promenljive (elementi od X) i nularni funkcijski simboli (elementi od $\mathcal{F}_0$) su termi tipa $\mathcal{F}$ nad X;*

2. *Ako su $t_0, \ldots, t_{n-1}$ termi tipa $\mathcal{F}$ nad X i $f \in \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}$, onda je to i $f(t_0, \ldots, t_{n-1})$;*

3. *Svi termi nastaju konačnim brojem primena pravila 1. i 2.*

*Skup svih termova tipa $\mathcal{F}$ nad X ćemo označavati sa $T_{\mathcal{F}}(X)$, a ako je jasno o kom tipu je reč, pisaćemo samo $T(X)$. Kažemo da je term $n-$***aran** *ako su mu sve promenljive u skupu $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ i tada pišemo $t = t(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Skup svih $n-$arnih termova tipa $\mathcal{F}$ nad X ćemo označavati sa $T^{(n)}_{\mathcal{F}}(X)$, odnosno $T^{(n)}(X)$.*

Za X ćemo najčešće uzimati neki prebrojiv skup čije ćemo elemente označavati sa $x_0, x_1, x_2 \ldots$ ili $x, y, z \ldots$ pa nećemo posebno napominjati nad kojim skupom su termi definisani.

Definicija 1.6 Rang *(ili* **kompleksnost***) terma $t \in T_{\mathcal{F}}(X)$ je preslikavanje $rang : T(X) \to \mathbb{N}$ definisano na sledeći način:*

1. *ako $t \in X \cup \mathcal{F}_0$, onda je $rang(t) = 0$;*

2. *ako je $t = f(t_0, \ldots, t_{n-1})$ gde je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, t_0, \ldots, t_{n-1} \in T_{\mathcal{F}}(X)$ onda je*
$$rang(t) = \max\{rang(t_i) \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\} + 1.$$

Termi su sintaktički objekti pa uvodimo njihovu interpretaciju u nekoj multialgebri. Međutim, već kod vrednosti terma ranga dva doći ćemo do "problema", te moramo svaku $n-$arnu multioperaciju f na A proširiti na partitivni skup $\mathcal{P}(A)$. Naime, definišimo operaciju $f^+ : \mathcal{P}(A)^n \to \mathcal{P}(A)$ na sledeći način: za $X_0, \ldots, X_{n-1} \in \mathcal{P}(A)$ je

$$f^+(X_0, \ldots, X_{n-1}) = \bigcup \{f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid (\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}) x_i \in X_i\}.$$

Ovo proširenje ćemo često označavati isto sa f.

Definicija 1.7 *Neka je* $t = t(x_0, \dots, x_{n-1})$ $n-$*aran term* ($n \in \mathbb{N}$) *tipa* $\mathcal{F}$ *nad skupom* X *i* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ *multialgebra.* **Termovsko preslikavanje indukovano sa** t **u** $\mathcal{A}$ *je preslikavanje* $t^{\mathcal{A}} : A^n \to \mathcal{P}(A)$ *definisano na sledeći način:*

1. *Ako je* $t = x_i \in X$ *za neko* $i \in \{0, \dots, n-1\}$, *onda je* $t^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \{a_i\}$ *za sve* $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$;

2. *Ako je* $t = c \in \mathcal{F}_0$, *onda je* $t^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = \{c^{\mathcal{A}}\}$ *za sve* $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$;

3. *Ako je* $t = f(t_0, \dots, t_{m-1})$ *gde je* $m \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_m, t_0, \dots, t_{m-1} \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$ *onda je za sve* $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$

$$t^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = (f^{\mathcal{A}})^{+}(t_0^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}), \dots, t_{m-1}^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})).$$

Definicija 1.8 *Multioperacija* $g : A^n \to \mathcal{P}(A)$ *je* **termovska (izvedena) multioperacija multialgebre** $\mathcal{A}$ *ako postoji term* $t \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$ *takav da je* $g = t^{\mathcal{A}}$. *Skup svih termovskih funkcija algebre* $\mathcal{A}$ *ćemo označavati sa* $Clo(\mathcal{A})$, *a skup svih* $n-$*arnih termovskih funkcija algebre* $\mathcal{A}$ *sa* $Clo_n(\mathcal{A})$.

Definicija 1.9 *Za preslikavanje* $p : A^n \to \mathcal{P}(A)$ *kažemo da je* **polinomna funkcija multialgebre** $\mathcal{A}$ *ako je* p *termovska funkcija one multialgebre koja se dobija od multialgebre* $\mathcal{A}$ *dodavanjem svakog elementa* $a \in \mathcal{A}$ *kao nove nularne multioperacije, konstante. Skup svih polinomnih funkcija multialgebre* $\mathcal{A}$ *(arnosti* n*) ćemo označavati sa* $Pol^A(\mathcal{A})$ ($Pol_n^A(\mathcal{A})$).

Identiteti na multialgebrama mogu biti zadovoljeni na dva načina. Neka su $t_1, t_2 \in T^{(n)}(X)$. Kažemo da je na $\mathcal{A}$ zadovoljen (**jak**) **identitet** $t_1 = t_2$ ako za sve $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ važi

$$t_1^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) = t_2^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Kažemo da je na $\mathcal{A}$ zadovoljen **slab identitet** $t_1 \cap t_2 \neq \emptyset$ ako za sve $a_0, \dots, a_{n-1}$ iz A važi

$$t_1^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \cap t_2^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \neq \emptyset.$$

Često ćemo za term i njegovu interpretaciju koristiti istu oznaku, zbog jednostavnosti.

1.3 Primeri multialgebri

Kako smo pri proučavanju univerzalnih algebri veliku pažnju posvetili strukturama kao što su semigrupe, grupe i prsteni, prirodno je očekivati da će se među multialgebrama naći analogni pojmovi, i to dve vrste u zavisnosti od toga da li su traženi identiteti koji ih definišu zadovoljeni u slabom ili jakom smislu.

Primer 1. **Hipergrupoid** je multialgebra $(A, \cdot)$ pri čemu je $\cdot$ binarna multioperacija na A (videti [7], II.7, p. 41). Asocijativan hipergrupoid zovemo **semihipergrupa**. Hipergrupoid na kome je zadovoljena slaba asocijativnost zovemo H_v-**semigrupa**.

Primer 2. Semihipergrupu $(A, \cdot)$ na kojoj važi uslov da za sve $a \in A$

$$a \cdot A = A \cdot a = A$$

zovemo **hipergrupa**, dok je H_v-**grupa** H_v-semigrupa na kojoj važi pomenuti uslov.

Primer 3. **Hiperprsten** je multistruktura $(R, +, \cdot)$ takva da je

1. $(R, +)$ je hipergrupa;
2. $(R, \cdot)$ je semihipergrupa;
3. za sve $x, y, z \in R$ je

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z, \\ (y + z) \cdot x &= y \cdot x + z \cdot x. \end{aligned}$$

Primer 4. H_v-**prsten** je hiperstruktura $(R, +, \cdot)$ za koju je

1. $(R, +)$ je H_v-grupa;
2. $(R, \cdot)$ je H_v-semigrupa;
3. za sve $x, y, z \in R$ je

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) \cap x \cdot y + x \cdot z &\neq \emptyset, \\ (y + z) \cdot x \cap y \cdot x + z \cdot x &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Primer 5. Ako je $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ univerzalna algebra i $X \subseteq A$, onda sa $\langle X \rangle_{\mathcal{A}}$ označavamo nosač podalgebre od $\mathcal{A}$ generisane sa X.

Ako je $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ univerzalna algebra, onda multialgebru $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = (A, \Sigma)$ gde je $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}, ar(p_n) = n \geq 1$ i za sve $n \geq 1, a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$

$$p_n^{\mathcal{G}(\mathcal{A})}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \langle \{a_0, \ldots, a_{n-1}\} \rangle_{\mathcal{A}}$$

zovemo **generička multialgebra** koja odgovara algebri $\mathcal{A}$.

Neka je *Račun I* predikatski račun tipa $\mathcal{F}$ u kom su atomarne formule oblika $t_1 \approx t_2$, gde su t_1 i t_2 termi tipa $\mathcal{F}$ a $\approx$ interpretiramo kao jednakost skupova, a *Račun II* onaj kod kog su atomarne formule oblika $t_1 \subseteq t_2$ gde su t_1 i t_2 ponovo termi tipa $\mathcal{F}$ a $\subseteq$ interpretiramo kao uobičajenu inkluziju među skupovima.

Teorema 1.10 *Klasa svih generičkih multialgebri se u Računu I ne može aksiomatizovati.*

Dokaz. Ideja dokaza se sastoji u tome da damo primere dve multialgebre istog tipa Σ, od kojih je jedna generička a druga nije, a obe zadovoljavaju iste formule prvog reda u *Računu I*. To će značiti da ne postoji skup formula prvog reda u *Računu I* koje definišu klasu generičkih multialgebri unutar klase svih multialgebri tipa Σ.

Koristićemo standardne oznake za skupove prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i celih brojeva $\mathbb{Z}$.

Neka je $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, g, h)$ algebra u kojoj su g i h unarne operacije definisane na sledeći način: za svako $a \in \mathbb{Z}$

$$g(a) = a + 1, \quad h(a) = a - 1.$$

Za odgovarajuću generičku multialgebru $\mathcal{G}(\mathcal{A}) = (A, \Sigma)$ važi da je za sve $n \geq 1, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$

$$p_n^{\mathcal{G}(\mathcal{A})}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \mathbb{Z}.$$

Neka je sada $\mathcal{A}' = (\mathbb{Z}, \Sigma)$ multialgebra takva da za sve $n \geq 1, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ važi

$$p_n^{\mathcal{A}'}(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \mathbb{N}.$$

Primetimo da $\mathcal{A}'$ nije generička multialgebra jer npr. $\{-1\} \notin p_1^{\mathcal{A}'}(-1)$, a za svaka dva terma $t_1 = t_1(x_0, \ldots, x_{n-1})$ i $t_2 = t_2(x_0, \ldots, x_{n-1})$ tipa Σ i $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$ važi da je

$$\begin{array}{rcl} t_1^{\mathcal{G}(\mathcal{A})}(a_0, \ldots, a_{n-1}) & = & t_2^{\mathcal{G}(\mathcal{A})}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \\ & \Updownarrow & \\ t_1^{\mathcal{A}'}(a_0, \ldots, a_{n-1}) & = & t_2^{\mathcal{A}'}(a_0, \ldots, a_{n-1}), \end{array}$$

te su $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ i $\mathcal{A}'$ tražene multialgebre koje potvrđuju teoremu. $\square$

Teorema 1.11 *Klasa svih generičkih multialgebri se može aksiomatizovati u Računu II. Štaviše, $\mathcal{B}$ je generička multialgebra ako i samo ako je tipa $\Sigma = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots\}, ar(p_n) = n \geq 1$ i zadovoljava sledeći sistem formula:*

(P1) $x_i \subseteq p_n(x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1})$, *za sve* $n \geq 1, i \in \{0, \ldots, n-1\}$;

(P2) $p_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) \subseteq p_k(y_0, \ldots, y_{k-1})$, *za sve* $n, k \geq 1$, *i sve* $x_0, \ldots, x_{n-1}$, $y_0, \ldots, y_{k-1}$ *takve da je* $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\} \subseteq \{y_0, \ldots, y_{k-1}\}$;

(P3) $p_n(x_0, \ldots, x_{n-2}, p_m(y_0, \ldots, y_{m-1})) = p_{n+m-1}(x_0, \ldots, x_{n-2}, y_0, \ldots, y_{m-1})$ *za sve* $n, m \geq 1$.

Dokaz. ($\Rightarrow$) Sledi iz definicije generičke multialgebre.
($\Leftarrow$) Neka je $\mathcal{B}$ proizvoljna multialgebra sa nosačem A koja zadovoljava formule $(P1) - (P3)$. Pokažimo da postoji multialgebra $\mathcal{A}$ takva da je $\mathcal{B} = \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Za početak definišimo preslikavanje $\varphi : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ tako da za sve $X \subseteq A$

$$\varphi(X) = \bigcup \{p_n^{\mathcal{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid n \geq 1, a_0, \ldots, a_{n-1} \in X\}$$

i pokažimo da je φ algebarski operator zatvaranja, tj. da za sve $X, Y \subseteq A$ važi:

(C1) $X \subseteq \varphi(X)$;

(C2) $X \subseteq Y \Rightarrow \varphi(X) \subseteq \varphi(Y)$;

(C3) $\varphi(\varphi(X)) = \varphi(X)$;

(C4) $\varphi(X) = \bigcup \{\varphi(Z) \mid Z \subseteq X, Z \text{ konačan skup}\}$.

Kako na $\mathcal{B}$ važi $(P1)$, važi i $(C1)$, zatim zbog $(P2)$ važi $(C2)$, a iz definicije preslikavanja φ sledi da važi $(C4)$. Imajući u vidu da važi $(C1)$ i $(C2)$, jasno je da je $\varphi(X) \subseteq \varphi(\varphi(X))$. Da inkluzija važi i u suprotnom smeru, pokazujemo koristeći $(P3)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\varphi(X)) &= \bigcup\{p_n^{\mathcal{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid n \geq 1, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \varphi(X)\} \\
&= \bigcup\{p_n^{\mathcal{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1}) \mid n \geq 1, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \bigcup\{p_m^{\mathcal{B}}(b_0, \ldots, b_{m-1}) \\
&\quad \mid m \geq 1, b_0, \ldots, b_{n-1} \in X\}\} \\
&\subseteq \bigcup\{p_k^{\mathcal{B}}(c_0, \ldots, c_{k-1}) \mid k \geq 1, c_0, \ldots, c_{k-1} \in X\} \\
&= \varphi(X)
\end{aligned}$$

Sada prema teoremi Birkhoffa i Frinka postoji algebra $\mathcal{A}$ takva da je mreža zatvorenih skupova za φ, koja je izomorfna nekoj algebarskoj mreži, izomorfna mreži poduniverzuma od $\mathcal{A}$, pa za svako $X \subseteq A$ važi da je $\varphi(X) = \langle X \rangle_{\mathcal{A}}$. Kako je $\varphi(\{a_0, \ldots, a_{n-1}\}) = p_n^{\mathcal{B}}(a_0, \ldots, a_{n-1})$, dobijamo da je $\mathcal{B} = \mathcal{G}(\mathcal{A})$. $\square$

1.4 Stepene strukture

Stepene stukture predstavljaju prirodno proširenje odnosa među elementima nekog skupa na nivo podskupova istog. Prema Birkhoffu, pojam stepene strukture potiče od Frobeniusa. On je za proizvoljnu grupu $(G, \cdot)$ definisao operaciju nad podskupovima skupa G, tj. za sve $H, K \subseteq G$

$$HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}.$$

Primetimo da su koseti u teoriji grupa oblika aN gde je N normalna podgrupa od G, što je baš proizvod skupova $\{a\}$ i N. Sem u teoriji grupa, stepene strukture se javljaju i u mnogim drugim oblastima. Na primer, operacije među idealima disrtibutivnih mreža su "stepeni" odgovarajućih operacija mreže. Zatim, u teoriji formalnih jezika, proizvod dva jezika je proširenje operacije konkatenacije među rečima, dok u intervalnoj aritmetici, značajnoj za analizu greške kod numeričkih izračunavanja, kada su nam umesto tačnih numeričkih vrednosti nekih tačaka poznati intervali u kojima leže, prirodno je izvoditi računske operacije nad tim intervalima.

Znamo da svaka multioperacija f na A indukuje operaciju f^+ na $\mathcal{P}(A)$. Na taj način svakoj multialgebri $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ možemo pridružiti njenu tzv. stepenu algebru $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = (\mathcal{P}(A), \{f^+ \mid f \in \mathcal{F}\})$.

Definicija 1.12 Stepena struktura multialgebre *$\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, koju označavamo sa $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, jeste univerzalna algebra sa nosačem $\mathcal{P}(A)$, istog tipa kao $\mathcal{A}$, pri čemu su fundamentalne operacije definisane na sledeći način:*

1. *ako je $ar(f) = 0$, tj. $f : A^0 \to A$ je konstanta, onda je $f^{\mathcal{P}(\mathcal{A})} : \mathcal{P}(A)^0 \to \mathcal{P}(A)$ i*
$$f^{\mathcal{P}(\mathcal{A})}(\emptyset) = \{f^{\mathcal{A}}(\emptyset)\}$$
2. *ako je $ar(f) = n \geq 1$, onda $f^{\mathcal{P}(\mathcal{A})} : \mathcal{P}(A)^n \to \mathcal{P}(A)$ tako da za sve $X_0, \ldots, X_{n-1} \in \mathcal{P}(A)$ važi*

$$f^{\mathcal{P}(\mathcal{A})}(X_0, \ldots, X_{n-1}) = \bigcup\{f^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid (\forall i \in \{0, \ldots, n-1\}) x_i \in X_i\}.$$

Kako su univerzalne algebre specijalan slučaj multialgebri, to za $\mathcal{A} \in \mathit{Ual}(\mathcal{F})$, $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n, X_0, \ldots, X_{n-1} \in \mathcal{P}(A)$ definicija postaje:

$$f^{\mathcal{P}(\mathcal{A})}(X_0, \ldots, X_{n-1}) = \{f^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid (\forall i \in \{0, \ldots, n-1\})x_i \in X_i\}.$$

Dakle, vidimo da je $f^{\mathcal{P}(\mathcal{A})} = (f^{\mathcal{A}})^+$.

Nekad se za nosač stepene algebre uzima skup svih nepraznih podskupova od A, u oznaci $\mathcal{P}^*(A)$, pa ako je $\mathcal{A}$ regularna multialgebra, onda tu strukturu označavamo sa $\mathcal{P}^*(\mathcal{A})$. Stepene strukture zovemo još i algebre kompleksa ili global algebre, a u literaturi se sreće i oznaka $Cm(\mathcal{A})$.

Kako je $\mathcal{P}^*(A)$ univerzalna algebra, možemo konstruisati algebru $n-$arnih polinomnih funkcija

$$(Pol_n^{\mathcal{P}^*(A)}(\mathcal{P}^*(A)), \mathcal{F})$$

koju ćemo označavati isto kao i njen nosač, ili samo $Pol_n(\mathcal{P}^*(A))$. Zatim, sa $Pol_n^A(\mathcal{P}^*(A))$ ćemo označavati njen poduniverzum generisan sa

$$\{c_a^n \mid a \in A\} \cup \{e_i^n \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\},$$

gde su $c_a^n, e_i^n : \mathcal{P}^*(A)^n \to \mathcal{P}^*(A)$ preslikavanja definisana na sledeći način:

$$c_a^n(A_0, \ldots, A_{n-1}) = \{a\} \text{ i } e_i^n(A_0, \ldots, A_{n-1}) = A_i.$$

Jasno je da je skup $n-$arnih termovskih funkcija na $\mathcal{P}^*(A)$, $Clo_n(\mathcal{P}^*(A))$, poduniverzum od $Pol_n^A(\mathcal{P}^*(A))$ generisan sa $\{e_i^n \mid i \in \{0, \ldots, n-1\}\}$.

Nekada nam stepenovanje funkcija nije dovoljno da bismo dobili odgovore na neka pitanja, pa se javlja potreba da i relacije podignemo na nivo partitivnog skupa. U radu [14] je to učinjeno na sledeći način: ako je $(A, \leq)$ konačan parcijalno uređen skup i $X, Y \subseteq A$ onda je

$$X \leq Y \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{postoji injektivno preslikavanje } \varphi : X \to Y \\ \text{takvo da za sve } x \in X \text{ važi } x \leq \varphi(x). \end{array}$$

Tada je $(\mathcal{P}(A), \leq)$ ponovo parcijalno uređen skup.

Opštu definiciju $n-$arne stepene relacije daje Whitney u [40].

Definicija 1.13 *Za $n-$arnu relaciju R na A definišimo $n-1-$arnu operaciju $R_k^{\uparrow}, k \in \{0, \ldots, n-1\}$ na $\mathcal{P}(A)$ tako da je za sve $X_0, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n$*

$$R_k^{\uparrow}(X_0, \ldots, X_{k-1}, X_{k+1}, \ldots, X_n) = \{x_k \mid (\exists x_0 \in X_0) \ldots (\exists x_{k-1} \in X_{k-1}) \\ (\exists x_{k+1} \in X_{k+1}) \ldots (\exists x_n \in X_n)(x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in R\}$$

Pomoću ovih funkcija uvodimo relaciju $R^+ \subseteq \mathcal{P}(A)^n$ tako da je za sve $X_0, \ldots, X_{n-1} \subseteq A$

$$(X_0, \ldots, X_{n-1}) \in R^+ \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{l} X_0 \subseteq R_0^{\uparrow}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}), \\ X_1 \subseteq R_1^{\uparrow}(X_0, X_2, \ldots, X_{n-1}), \\ \ldots \\ X_{n-1} \subseteq R_{n-1}^{\uparrow}(X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}). \end{array}$$

Konačno, **stepena (relacijska) struktura relacijske strukture** $\mathcal{A} = (A, \mathcal{R})$ *jeste $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = (\mathcal{P}(A), \{R^+ \mid R \in \mathcal{R}\})$.*

Ako je $R \subseteq A^2$ binarna relacija, onda njoj odgovarajuća binarna relacija R^+ na $\mathcal{P}(A)$ ima sledeći oblik: za sve $X, Y \subseteq A$

$$XR^+Y \iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)xRy \wedge (\forall y \in Y)(\exists x \in X)xRy.$$

Primetimo da stepenovanje binarnih relacija odgovara stepenovanju binarnih operacija.

Tvrđenje 1.14 *Neka je $R \subseteq A^2$ binarna relacija i neka je $f : A \to A$ operacija koja odgovara R tj. za sve $x, y \in A$ važi*

$$xRy \iff f(x) = y.$$

Tada relaciji $R^+ \subseteq \mathcal{P}(A)^2$ odgovara funkcija $f^+ : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, tj. za sve $X, Y \subseteq A$ je

$$XR^+Y \iff f^+(X) = Y.$$

Dokaz. Neka su $X, Y \subseteq A$. Važi:

$$\begin{aligned}
XR^+Y &\iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)xRy \wedge (\forall y \in Y)(\exists x \in X)xRy \\
&\iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)f(x) = y \wedge (\forall y \in Y)(\exists x \in X)f(x) = y \\
&\iff f^+(X) \subseteq Y \wedge Y \subseteq f^+(X) \\
&\iff f^+(X) = Y
\end{aligned}$$

□

Definicija 1.15 *Stepena struktura operacijsko-relacijske strukture $\mathcal{A}=(A,\mathcal{F},\mathcal{R})$ je $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = (\mathcal{P}(A), \{f^+ \mid f \in \mathcal{F}\}, \{R^+ \mid R \in \mathcal{R}\})$ gde su f^+ i R^+ kao u Definicijama 1.12 i 1.13, redom.*

Postoje brojni radovi koji se bave ispitivanjem identiteta invarijantnih u odnosu na konstrukciju stepenovanja, tj. koji identiteti koji su zadovoljeni na $\mathcal{A}$ važe i na njenoj stepenoj strukturi $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ (videti npr. [3], [18], [38]).

Glava 2

Homomorfizmi multialgebri

Podsetimo se definicije homomorfizma univerzalnih algebri.

Definicija 2.1 *Neka su* $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}), \mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ *univerzalne algebre tipa* $\mathcal{F}$. *Preslikavanje* $h : A \to B$ *zovemo* **homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$** *ako za sve* $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ *važi*

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})) = f^{\mathcal{B}}(h(a_0), \dots, h(a_{n-1})).$$

Skup svih homomorfizama iz $\mathcal{A}$ *u* $\mathcal{B}$ *ćemo označavati sa* $\mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

U ovoj Glavi ćemo se najviše oslanjati na [12], pa ćemo kod multialgebri razlikovati tri vrste homomorfizama. Za univerzalne algebre, koje su specijalan slučaj multialgebri, one će se poklapati sa uobičajenim homomorfizmom.

Radi jednostavnosti, a bez opasnosti da može doći do zabune, usvojićemo dogovor da ako homomorfizam h iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{B}$ indukuje preslikavanje iz $\mathcal{P}(A)$ u $\mathcal{P}(B)$ i iz A^n u B^n, i njih ćemo označavati sa h, tj. umesto preslikavanja $\overline{h} : A^n \to B^n$, takvog da je za svako $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$

$$\overline{h}(a_0, \dots, a_{n-1}) = (h(a_0), \dots, h(a_{n-1}))$$

pisaćemo h, kao i umesto preslikavanja $h^+ : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ takvog da je za sve $A_0 \subseteq A$

$$h^+(A_0) = \{h(a) \mid a \in A_0\}.$$

Definicija 2.2 *Neka su* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B), h : A \to B$ *i* $i \in \{1, 2, 3\}$. *Kažemo da je* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $i-$**homomorfizam** *ako za svako* $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ *važi uslov* (Hi), *gde su:*

(H1) $h(f^{\mathcal{A}}(x)) = f^{\mathcal{B}}(h(x))$;

(H2) $h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x))$;

(H3) $h(f^{\mathcal{A}}(x)) \supseteq f^{\mathcal{B}}(h(x))$.

Skup svih $i-$*homomorfizama* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *ćemo označavati sa* $\mathcal{H}_i(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

U slučaju $n = 0$, kada je $f^{\mathcal{A}}(x) = f^{\mathcal{A}}$, uslovi $(H1) - (H3)$ postaju $h(f^{\mathcal{A}}) = f^{\mathcal{B}}, h(f^{\mathcal{A}}) \subseteq f^{\mathcal{B}}, h(f^{\mathcal{A}}) \supseteq f^{\mathcal{B}}$, respektivno.

Tvrđenje 2.3 *Za* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in Ual(\mathcal{F})$ *važi*

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{H}(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Dokaz. Kod univerzalnih algebri, $f \in \mathcal{F}$ je operacija, tj. slika elemente skupa u elemente skupa (odnosno jednočlane podskupove) pa se u ovom slučaju jednakost i inkluzija poklapaju. $\square$

Znamo da za homomorfizme univerzalnih algebri važi da im je kompozicija ponovo homomorfizam, i isto važi i za multialgebre.

Tvrđenje 2.4 *Za svako* $i \in \{1, 2, 3\}$*, kompozicija dva* $i-$*homomorfizma je* $i-$*homomorfizam.*

Dokaz. Pokazaćemo za $i = 2$, dok su ostali slučajevi analogni. Neka su $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B), \mathcal{C} \in \mathcal{F}(C), h : A \to B, g : B \to C, h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}), g \in \mathcal{H}_2(\mathcal{B}, \mathcal{C}), n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$. Tada $g \circ h : A \to C$ pa koristeći definiciju $2-$homomorfizma dobijamo:

$$\begin{array}{rcl} (g \circ h)(f^{\mathcal{A}}(x)) & = & g(h(f^{\mathcal{A}}(x))) \\ & \subseteq & g(f^{\mathcal{B}}(h(x))) \\ & \subseteq & f^{\mathcal{C}}(g(h(x))) = f^{\mathcal{C}}((g \circ h)(x)). \end{array}$$

$\square$

Ako posmatramo odnos između ove tri vrste homomorfizama, lako uočavamo da ako je $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $1-$homomorfizam, onda je $2-$homomorfizam i $3-$homomorfizam, a važi i obrnuto.

Tvrđenje 2.5 *Ako su* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$*, onda je*

$$\mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Dokaz.

($\subseteq$)Ako je $h \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, jasno je da $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ i $h \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

($\supseteq$)Ako $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \cap \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, i $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$, onda je

$$h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x)) \subseteq h(f^{\mathcal{A}}(x))$$

pa je $h(f^{\mathcal{A}}(x)) = f^{\mathcal{B}}(h(x))$ tj. $h \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. $\square$

Da postoje $2-$homomorfizmi koji nisu $3-$homomorfizmi, i obrnuto, pokazuje sledeći primer.

Primer. Ako je $A \neq \emptyset$, $1 : A \to A$ identičko preslikavanje, tada je $1 : e(A) \to o(A)$ $3-$homomorfizam koji nije $2-$homomorfizam jer je

$$1(f^{e(A)}(x)) = A \supsetneq \emptyset = f^{o(A)}(1(x)),$$

a $1 : o(A) \to e(A)$ je $2-$homomorfizam koji nije $3-$homomorfizam jer je

$$1(f^{o(A)}(x)) = \emptyset \subsetneq A = f^{e(A)}(1(x)).$$

$\square$

Tvrđenje 2.6 *Neka je* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B), h : A \to B$*. Za svaki term* $t \in T^{(n)}_{\mathcal{F}}(X)$ *i* $x \in A^n$ *važi:*

1. $h \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Rightarrow h(t^{\mathcal{A}}(x)) = t^{\mathcal{B}}(h(x))$;

2. $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Rightarrow h(t^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq t^{\mathcal{B}}(h(x))$;

3. $h \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \Rightarrow h(t^{\mathcal{A}}(x)) \supseteq t^{\mathcal{B}}(h(x))$.

Dokaz. Posmatraćemo samo drugi slučaj, a ostalo se dokazuje analogno. Neka $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tj. za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x = (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in A^n$ važi $h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x))$. Koristimo indukciju po složenosti terma t.

1° Ako je $t = x_i \in X, i \in \{0, \ldots, n-1\}$, onda je $h(t^{\mathcal{A}}(a_0, \ldots, a_{n-1})) = \{h(a_i)\} = t^{\mathcal{B}}(h(a_0), \ldots, h(a_{n-1}))$.

2° Ako je $t = f \in \mathcal{F}_0$, onda je $h(t^{\mathcal{A}}(x)) = h(f^{\mathcal{A}}) \subseteq f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{B}}(h(x))$.

3° Pretpostavimo da za $t_0, \ldots, t_{m-1} \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$ važi tvrđenje i neka je za $f \in \mathcal{F}_m$, $t = f(t_0, \ldots, t_{m-1})$. Tada je

$$\begin{aligned} h(t^{\mathcal{A}}(x)) &= h(f^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}, \ldots, t_{m-1}^{\mathcal{A}})(x)) \\ &= h(f^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}(x), \ldots, t_{m-1}^{\mathcal{A}}(x))) \\ &\subseteq f^{\mathcal{B}}(h({t_0}^{\mathcal{A}}(x), \ldots, h(t_{m-1}^{\mathcal{A}}(x))) \\ &\subseteq f^{\mathcal{B}}(t_0^{\mathcal{B}}(h(x)), \ldots, t_{m-1}^{\mathcal{B}}(h(x))) = t^{\mathcal{B}}(h(x)). \end{aligned}$$

□

Tvrđenje 2.7 *Ako* $\mathcal{A}, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \in \mathcal{F}(B)$ *i* $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$, *tada važi:*

1. Ako $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$, *onda* $h_{|A_1} \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}_1, \mathcal{B})$;

2. Ako $h \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}_1, \mathcal{B})$, *onda za ekstenziju* $\overline{h}$ *preslikavanja* h *na* A_2 *važi da* $\overline{h} \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$;

3. Ako $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1)$, *onda za preslikavanje* $h' : A \to B_2$, *takvo da je* $h(a) = h'(a)$, *za sve* $a \in A$, *važi da je* $h' \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2)$;

4. Ako $h \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B}_2)$, *onda za presliavanje* $h' : A \to B_1$, *takvo da je* $h(a) = h'(a)$, *za sve* $a \in A$, *važi da je* $h' \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B}_1)$.

Dokaz. 1. Neka je $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$. Tada za $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in {A_2}^n$ važi

$$h(f^{\mathcal{A}_2}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x)).$$

Kako je $\mathcal{A}_1 \leq \mathcal{A}_2$, to za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in {A_1}^n \subseteq {A_2}^n$, $f^{\mathcal{A}_1}(x) \subseteq f^{\mathcal{A}_2}(x)$ pa

$$h(f^{\mathcal{A}_1}(x)) \subseteq h(f^{\mathcal{A}_2}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x)).$$

Ostalo se analogno dokazuje. □

Tvrđenje 2.8 *Neka je* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$. *Važi sledeće:*

1. Ako je $\mathcal{A} = o(A)$ *ili* $\mathcal{B} = e(B)$, *tada je*

$$\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = B^A$$

(gde je sa B^A *označen skup svih preslikavanja iz* A *u* B*);*

2. Ako je $\mathcal{B} = o(B)$ onda je

$$\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset \text{ ako i samo ako } \mathcal{A} = o(A);$$

3. Ako je $\mathcal{B} = o(B)$ onda je

$$\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = B^A;$$

4. Ako je $\mathcal{A} = e(A)$ i $h : A \to B$ sirjekcija, onda

$$h \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B});$$

5. Ako je $\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \neq \emptyset$ i $\mathcal{B}$ regularna multialgebra, tada je i $\mathcal{A}$ regularna;

6. Ako postoji sirjekcija $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ i ako je $\mathcal{A}$ regularna multialgebra, onda je i $\mathcal{B}$ regularna.

Dokaz.
1. Neka je $\mathcal{A} = o(A)$. Tada $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ako i samo ako

$$\text{za sve } n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n, \emptyset = h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x))$$

ako i samo ako $h \in B^A$.
Slično, ako je $\mathcal{B} = e(B)$, onda $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ako i samo ako

$$\text{za sve } n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n, h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x)) = B$$

ako i samo ako $h \in B^A$.
2. Neka je $\mathcal{B} = o(B)$. Postoji $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ako i samo ako

$$\text{za sve } n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n, h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x)) = \emptyset$$

ako i samo ako za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n, f^{\mathcal{A}}(x) = \emptyset$ tj. $\mathcal{A} = o(A)$.
3. Ako je $\mathcal{B} = o(B)$ onda $h \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ako i samo ako

$$\text{za sve } n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n, h(f^{\mathcal{A}}(x)) \supseteq f^{\mathcal{B}}(h(x)) = \emptyset$$

ako i samo ako je $h \in B^A$.
4. Neka je $\mathcal{A} = e(A)$ i $h : A \to B$ sirjekcija. Tada za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$

$$f^{\mathcal{B}}(h(x)) \subseteq B = h(A) = h(f^{\mathcal{A}}(x)).$$

5. Neka postoji $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, h \in \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ i za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n, f^{\mathcal{B}}(x) \neq \emptyset$. Tada je i

$$h(f^{\mathcal{A}}(x)) \supseteq f^{\mathcal{B}}(h(x)) \neq \emptyset$$

za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ pa i $f^{\mathcal{A}}(x) \neq \emptyset$
6. Neka postoji sirjekcija $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ i neka je $\mathcal{A}$ regularna multialgebra. Tada za svako $y \in B^n$ postoji $x \in A^n$ tako da je $y = h(x)$ i za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n$ važi

$$\emptyset \neq h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x)) = f^{\mathcal{B}}(y)$$

pa je i $\mathcal{B}$ regularna. $\square$

Definicija 2.9 *Neka je* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ *i neka je* $h : A \to B$ *bijekcija. Kažemo da je* $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $i-$**izomorfizam** *ako* $h \in \mathcal{H}_i(\mathcal{A}, \mathcal{B}), h^{-1} \in \mathcal{H}_i(\mathcal{B}, \mathcal{A}), i \in \{1, 2, 3\}$.

Tvrđenje 2.10 *Kompozicija dva* $i-$*izomorfizma je ponovo* $i-$*izomorfizam,* $i \in \{1, 2, 3\}$.

Dokaz. Direktno sledi iz Tvrđenja 2.4. □

Tvrđenje 2.11 *Neka je* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ *i* $h : A \to B$ *bijekcija. Tada*

a) $h \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff h^{-1} \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathcal{A})$*;*

b) $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \iff h^{-1} \in \mathcal{H}_3(\mathcal{B}, \mathcal{A})$*.*

Dokaz.

a) $h \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ako i samo ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$,

$$h(f^{\mathcal{A}}(x)) = f^{\mathcal{B}}(h(x))$$

ako i samo ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, y \in B^n$,

$$h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(y)) = h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(h(h^{-1}(y)))) = h^{-1}(h(f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(y)))) = f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(y))$$

ako i samo ako $h^{-1} \in \mathcal{H}_1(\mathcal{B}, \mathcal{A})$.

b) $h \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ako i samo ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$,

$$h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{B}}(h(x))$$

ako i samo ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, y \in B^n$,

$$h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(y)) = h^{-1}(f^{\mathcal{B}}(h(h^{-1}(y)))) \supseteq h^{-1}(h(f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(y)))) = f^{\mathcal{A}}(h^{-1}(y))$$

ako i samo ako $h^{-1} \in \mathcal{H}_3(\mathcal{B}, \mathcal{A})$. □

Tvrđenje 2.12 *Neka je* $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ *i* $h : A \to B$ *bijekcija. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

a) $h \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$*;*

b) h *je* $1-$*izomorfizam;*

c) h *je* $2-$*izomorfizam;*

d) h *je* $3-$*izomorfizam.*

Dokaz. Da je *a*) $\iff$ *b*), sledi iz definicije $1-$izomorfizma i Tvrđenja 2.11a, a da je *c*) $\iff$ *d*) sledi iz Tvrđenja 2.11b. Jasno da *b*) $\Rightarrow$ *c*) i *b*) $\Rightarrow$ *d*). Ostaje još da se pokaže da npr. *c*) implicira *b*). Ako važi *c*), znamo da važi i *d*) pa zbog Tvrđenja 2.5 imamo da važi i *b*). □

Na osnovu Tvrđenja refhom13 zaključujemo da postoji samo jedna vrsta izomorfizma među multialgebrama, pa ćemo u nastavku umesto $i-$*izomorfizam*, $i \in \{1, 2, 3\}$ govoriti samo *izomorfizam.* Kao i u slučaju univerzalnih algebri, ako postoji izomorfizam h između $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, reći ćemo da su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ izomorfne multialgebre i to zapisujemo sa

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

Znamo da kod univerzalnih algebri važi da je jezgro svakog homomorfizma relacija kongruencije, i obrnuto, da je svaka kongruencija jezgro nekog (prirodnog) homomorfizma.

Definicija 2.13 *Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$, onda za relaciju ekvivalencije $\approx$ na A kažemo da je $i-$***kongruencija** *ako postoji $h \in \mathcal{H}_i(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ tako da je $\approx$ jezgro od h, tj. za sve $x, y \in A$ je*

$$x \approx y \iff h(x) = h(y).$$

Tvrđenje 2.14 *Za $i = 2$ i $i = 3$, svaka ekvivalencija na A je $i-$kongruencija na $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ i $\approx$ relacija ekvivalencije na A. Označimo sa

$$\overline{x} = \{y \in A \mid x \approx y\},$$

klasu ekvivalencije kojoj pripada x i sa $\overline{A} = \{\overline{x} \mid x \in A\}$ količnički skup, a sa $\overline{h} : x \to \overline{x}$ odgovarajuće prirodno preslikavanje iz A u $\overline{A}$. Tada

$$\overline{h} \in \mathcal{H}_2(\mathcal{A}, e(\overline{A})) \cap \mathcal{H}_3(\mathcal{A}, o(\overline{A}))$$

i $\approx$ je jezgro preslikavanja $\overline{h}$, što je trebalo pokazati. □

Iz Tvrđenja 2.14 vidimo da nam samo $1-$kongruencija može biti od značaja. Stoga ćemo u nastavku umesto $1-$*kongruencija* govoriti *kongruencija* i slično, *homomorfizam* umesto $1-$*homomorfizam*.

Definicija 2.15 *Ako je $\approx$ relacija ekvivalencije na A, definišimo binarnu relaciju na $\mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}(A)/\{\emptyset\}$ koju ćemo isto označavati sa $\approx$, na sledeći način: za sve $X, Y \subseteq A$*

$$X \approx Y \iff (\forall x \in X)(\forall y \in Y)(\exists u \in Y)(\exists v \in X)(x \approx u \wedge y \approx v).$$

Tvrđenje 2.16 *Relacija ekvivalencije $\approx$ na A je kongruencija na $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ ako i samo ako za sve $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ važi*

$$x \approx y \quad \Rightarrow \quad f^{\mathcal{A}}(x) \approx f^{\mathcal{A}}(y).$$

Dokaz.

($\Rightarrow$) Neka je $\approx \subseteq A^2$ kongruencija na $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$. To znači da postoji $h \in \mathcal{H}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B}), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ i da je $\approx$ jezgro od h. Neka su $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x, y \in A^n$. Ako je $x \approx y$, onda je $h(x) = h(y)$, pa i

$$h(f^{\mathcal{A}}(x)) = f^{\mathcal{B}}(h(x)) = f^{\mathcal{B}}(h(y)) = h(f^{\mathcal{A}}(y))$$

iz čega sledi da je $f^{\mathcal{A}}(x) \approx f^{\mathcal{A}}(y)$.

($\Leftarrow$) Neka je sada $\approx \subseteq A^2$ relacija ekvivalencije za koju važi $x \approx y \Rightarrow f^{\mathcal{A}}(x) \approx f^{\mathcal{A}}(y)$ za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x, y \in A^n$. Definišimo algebru $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{F}(\overline{A})$ tako da za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$

$$f^{\overline{\mathcal{A}}}(\overline{x}) = \{\overline{u} \mid u \in f^{\mathcal{A}}(x)\}.$$

Sada se lako vidi da je $\overline{\mathcal{A}}$ dobro definisano i da je relacija $\approx$ kongruencija jer je jezgro $1-$homomorfizma $h : \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$, $h(a) = \overline{a}$, za sve $a \in A$. □

Tvrđenje 2.17 *Presek dve kongruencije ne mora biti kongruencija.*

Dokaz. Neka je $A = \{b, c, b_1, b_2, c_1, c_2\}, \mathcal{F} = \mathcal{F}_1 = \{f\}$ i $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$. Neka je još $f^{\mathcal{A}}(b) = \{b_1, b_2\}, f^{\mathcal{A}}(c) = \{c_1, c_2\}, f^{\mathcal{A}}(b_1) = f^{\mathcal{A}}(b_2) = f^{\mathcal{A}}(c_1) = f^{\mathcal{A}}(c_2) = \emptyset$. Ako je

$$A/{\approx_1} = \{\{b, c\}, \{b_1, c_2\}, \{b_2, c_1\}\}, A/{\approx_2} = \{\{b, c\}, \{b_1, c_1\}, \{b_2, c_2\}\},$$

tada su $\approx_1$ i $\approx_2$ kongruencije na $\mathcal{A}$, ali njihov presek $\approx$ nije kongruencija. Naime, $b \approx c$ ali $f^{\mathcal{A}}(b) = \{b_1, b_2\} \not\approx \{c_1, c_2\} = f^{\mathcal{A}}(c)$. $\square$

U radu [27] definisan je pojam idealne ekvivalencije.

Definicija 2.18 *Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, za relaciju ekvivalencije θ na A kažemo da je* **idealna ekvivalencija** *na $\mathcal{A}$ ako za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \in A$ važi da*

$$\textit{ako } a \in f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \textit{ i } a_i \,\theta\, b_i, i \in \{0, \dots, n-1\}$$

$$\textit{onda postoji } b \in f^{\mathcal{A}}(b_0, \dots, b_{n-1}), \textit{ tako da } a \,\theta\, b.$$

Tvrđenje 2.19 *Za proizvoljnu relaciju ekvivalencije na nekom skupu A važi da je idealna na $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ ako i samo ako je kongruencija na $\mathcal{A}$.*

Dokaz.

($\Rightarrow$) Neka je θ idealna ekvivalencija na $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, i neka su $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n, x_0, \dots, x_{n-1}, y_0, \dots, y_{n-1} \in A$ tako da je $x_i \,\theta\, y_i, i \in \{0, \dots, n-1\}$, tj.

$$(x_0, \dots, x_{n-1}) \,\theta\, (y_0, \dots, y_{n-1}).$$

Tada za svako $x \in f^{\mathcal{A}}(x_0, \dots, x_{n-1})$ i za svako $y \in f^{\mathcal{A}}(y_0, \dots, y_{n-1})$, prema definiciji idealne relacije ekvivalencije, postoj $u \in f^{\mathcal{A}}(y_0, \dots, y_{n-1})$ i postoji $v \in f^{\mathcal{A}}(x_0, \dots, x_{n-1})$ tako da je

$$x \,\theta\, u \text{ i } y \,\theta\, v$$

pa je po Definiciji 2.15

$$f^{\mathcal{A}}(x_0, \dots, x_{n-1}) \,\theta\, f^{\mathcal{A}}(y_0, \dots, y_{n-1})$$

što prema Tvrđenju 2.16 znači da je θ kongruencija.

($\Leftarrow$) Neka je $\approx$ kongruencija na $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, odnosno, prema Tvrđenju 2.16 za sve $n \geq 1, f \in \mathcal{F}_n, a_0, \dots, a_{n-1}, b_0, \dots, b_{n-1} \in A$ važi

$$(a_0, \dots, a_{n-1}) \approx (b_0, \dots, b_{n-1}) \quad \Rightarrow \quad f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \approx f^{\mathcal{A}}(b_0, \dots, b_{n-1}).$$

Tada ako $a \in f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1})$ i $a_i \approx b_i, i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\text{postoji } b \in f^{\mathcal{A}}(b_0, \dots, b_{n-1}), \text{ tako da } a \approx b,$$

što znači da je $\approx$ idealna ekvivalencija na $\mathcal{A}$. $\square$

Definicija 2.20 *Ako je A skup, $\mathcal{P}^*(A)$ familija nepraznih podskupova od A i θ relacija ekvivalencije na A, onda sa $\overline{\theta}$ označavamo relaciju na $\mathcal{P}^*(A)$ definisanu na sledeći način:*

$$X \,\overline{\theta}\, Y \iff (\forall x \in X)(\exists y \in Y)\, x \,\theta\, y \ \wedge\ (\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, x \,\theta\, y.$$

Kako je θ ekvivalencija na A, lako se vidi da je $\overline{\theta}$ relacija ekvivalencije na $\mathcal{P}^*(A)$.

Tvrđenje 2.21 *Relacija ekvivalencije θ na multialgebri $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ je idealna ako i samo ako je $\overline{\theta}$ kongruencija na $\mathcal{P}^*(\mathcal{A}) = \mathcal{F}(\mathcal{P}^*(A))$.*

Dokaz.
($\Rightarrow$) Neka je θ idealna ekvivalencija na $\mathcal{A}$, neka su $X_i, Y_i \subseteq A$ neprazni i $X_i \,\overline{\theta}\, Y_i$ za sve $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Treba pokazati da je za $f \in \mathcal{F}_n$

$$f^{\mathcal{A}}(X_0, \ldots, X_{n-1}) \,\overline{\theta}\, f^{\mathcal{A}}(Y_0, \ldots, Y_{n-1}),$$

pa neka $a \in f^{\mathcal{A}}(X_0, \ldots, X_{n-1})$. To znači da postoje $x_0 \in X_0, \ldots, x_{n-1} \in X_{n-1}$ da $a \in f^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Kako je $X_i \,\overline{\theta}\, Y_i$ za svako $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, postoje $y_0 \in Y_0, \ldots, y_{n-1} \in Y_{n-1}$ tako da je

$$x_0 \,\theta\, y_0, \ldots, x_{n-1} \,\theta\, y_{n-1},$$

pa po definiciji idealne ekvivalencije imamo da postoji $b \in f^{\mathcal{A}}(y_0, \ldots, y_{n-1}) \subseteq f^{\mathcal{A}}(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ takvo da je $a \,\theta\, b$.

Analogno se dokazuje da za svako $b \in f^{\mathcal{A}}(Y_0, \ldots, Y_{n-1})$ postoji element $a \in f^{\mathcal{A}}(X_0, \ldots, X_{n-1})$ tako da je $a \,\theta\, b$.

($\Leftarrow$) Nek je sada $\overline{\theta}$ kongruencija na $\mathcal{P}^*(\mathcal{A})$, i neka su $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{F}_n, a, x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1} \in A$ takvi da je

$$a \in f^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) \ \text{ i } \ x_i \,\theta\, y_i, i \in \{0, \ldots, n-1\}.$$

Tada je $\{x_i\} \,\overline{\theta}\, \{y_i\}, i \in \{0, \ldots, n-1\}$ pa kako je $\overline{\theta}$ kongruencija na $\mathcal{P}^*(\mathcal{A})$, onda je

$$f^{\mathcal{A}}(\{x_0\}, \ldots, \{x_{n-1}\}) \,\overline{\theta}\, f^{\mathcal{A}}(\{y_0\}, \ldots, \{y_{n-1}\}),$$

što znači da za dato $a \in f^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1})$ postoji $b \in f^{\mathcal{A}}(y_0, \ldots, y_{n-1})$ za koje je $a \,\theta\, b$. □

Primetimo da se definicije 2.15 i 2.20 poklapaju, pa imajući u vidu Tvrđenje 2.19, prethodno Tvrđenje možemo posmatrati na sledeći način:

Posledica 2.22 *Relacija ekvivalencije $\approx$ na A je kongruencija na $\mathcal{A}$ ako i samo ako je $\approx$ kongruencija na $\mathcal{P}^*(\mathcal{A})$.*

Posledica 2.23 *a) Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra, θ idealna ekvivalencija na $\mathcal{A}$ i $t \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), n \in \mathbb{N}$, tada za svako $f \in \mathcal{F}_n$, i $X_i, Y_i \in \mathcal{P}(A)$ za koje važi $X_i \,\overline{\theta}\, Y_i, i \in \{0, \ldots, n-1\}$ imamo*

$$t(X_0, \ldots, X_{n-1}) \,\overline{\theta}\, t(Y_0, \ldots, Y_{n-1}).$$

b) Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra, θ idealna ekvivalencija na $\mathcal{A}$ i $t \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), n \in \mathbb{N}$, tada za svako $f \in \mathcal{F}_n$, i $x_i, y_i \in A, x_i \,\theta\, y_i, i \in \{0, \ldots, n-1\}$ imamo

$$t(x_0, \ldots, x_{n-1}) \,\overline{\theta}\, t(y_0, \ldots, y_{n-1}).$$

Dokaz. *a*) Tvrđenje pokazujemo indukcijom po složenosti termovske funkcije $t \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$.

1° Neka je $t = e_i^n$ za neko $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Tada je

$$t(X_0, \dots, X_{n-1}) = X_i \,\overline{\theta}\, Y_i = t(Y_0, \dots, Y_{n-1}).$$

2° Neka tvrđenje važi za funkcije $t_0, \dots, t_{m-1} \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), m \in \mathbb{N}$ i neka je $t = f(t_0, \dots, t_{m-1})$ za neko $f \in \mathcal{F}_m$. Uzmimo $a \in t(X_0, \dots, X_{n-1})$ i nađimo $b \in t(Y_0, \dots, Y_{n-1})$ takvo da je $a \,\theta\, b$, a analogno se za dato $b \in t(Y_0, \dots, Y_{n-1})$ traži $a \in t(X_0, \dots, X_{n-1})$ da je $a \,\theta\, b$. Iz

$$\begin{aligned} a \in t(X_0, \dots, X_{n-1}) &= f(t_0, \dots, t_{m-1})(X_0, \dots, X_{n-1}) = \\ &= f(t_0(X_0, \dots, X_{n-1}), \dots, t_{m-1}(X_0, \dots, X_{n-1})) \end{aligned}$$

sledi da postoje

$$x_0 \in t_0(X_0, \dots, X_{n-1}), \dots, x_{m-1} \in t_{m-1}(X_0, \dots, X_{n-1})$$

takvi da $a \in f(x_0, \dots, x_{m-1})$. Prema indukcijskoj hipotezi, postoje

$$y_0 \in t_0(Y_0, \dots, Y_{n-1}), \dots, y_{m-1} \in t_{m-1}(Y_0, \dots, Y_{n-1})$$

tako da $x_i \,\theta\, y_i, i \in \{0, \dots, n-1\}$, a kako je θ idealna ekvivalencija, postoji

$$\begin{aligned} b \in f(y_0, \dots, y_{n-1}) &\subseteq f(t_0(Y_0, \dots, Y_{n-1}), \dots, t_{m-1}(Y_0, \dots, Y_{n-1})) \\ &= f(t_0, \dots, t_{m-1})(Y_0, \dots, Y_{n-1}) = t(Y_0, \dots, Y_{n-1}) \end{aligned}$$

tako da je $a \,\theta\, b$.

b) Analogno. □

Glava 3

Podmultialgebre

Podsetimo se nekih pojmova iz univerzalne algebre.

Definicija 3.1 *Ako je $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ algebra tipa $\mathcal{F}$, onda za skup $B \subseteq A$ kažemo da je* **poduniverzum** *od $\mathcal{A}$ ako je B zatvoren u odnosu na sve fundamentalne operacije algebre $\mathcal{A}$ tj. za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x_0, \ldots, x_{n-1} \in B$ važi da*

$$f^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) \in B.$$

Ako su $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ i $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ algebre istog tipa $\mathcal{F}$, kažemo da je $\mathcal{B}$ **podalgebra od** *$\mathcal{A}$ ako su sve fundamentalne operacije od $\mathcal{B}$ restrikcije fundamentalnih operacija od $\mathcal{A}$ tj. za sve $f \in \mathcal{F}$,*

$$f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}}_{|B}.$$

Analogni pojmovi javljaju se i kod multialgebri.

Definicija 3.2 *Neka su $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ multialgebre tipa $\mathcal{F}$ i neka je $B \subseteq A$. Kažemo da je $\mathcal{B}$* **podmultialgebra** *od $\mathcal{A}$ ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$ važi*

$$f^{\mathcal{B}}(x) = f^{\mathcal{A}}(x).$$

Kažemo da je B **podobjekat** *od $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ ako je zatvoren u odnosu na sve fundamentalne operacije multialgebre $\mathcal{A}$, tj. za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$,*

$$f^{\mathcal{A}}(x) \subseteq B.$$

Skup svih podmultialgebri od $\mathcal{A}$ ćemo označavati sa $\mathcal{S}(\mathcal{A})$.

Primetimo da je prazan skup podobjekat svake multialgebre.

Sem ove, u literaturi srećemo još neke vrste podmultialgebri. Naime, neka su $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ multialgebre tipa $\mathcal{F}$ i $B \subseteq A$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ **slaba podmultialgebra** od $\mathcal{A}$ ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$ važi

$$f^{\mathcal{A}}(x) \neq \emptyset \;\Rightarrow\; f^{\mathcal{A}}(x) \cap f^{\mathcal{B}}(x) \neq \emptyset.$$

Kažemo da je $\mathcal{B}$ **relativna podmultialgebra** od $\mathcal{A}$ ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n$ važi

$$x \in B^n \;\Rightarrow\; f^{\mathcal{B}}(x) = f^{\mathcal{A}}(x) \cap B,$$

i $\mathcal{B}$ je **slaba relativna podmultialgebra** od $\mathcal{A}$ ako za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n$ važi

$$x \in B^n \;\Rightarrow\; f^{\mathcal{B}}(x) \subseteq f^{\mathcal{A}}(x) \cap B.$$

U ovom radu ćemo se baviti samo podmultialgebrama iz Definicije 3.2, kao u [12].

Tvrđenje 3.3 *Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ i $t \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$, onda je za sve $x \in A^n$*

$$t^{\mathcal{B}}(x) = t^{\mathcal{A}}(x).$$

Dokaz. Indukcijom po složenosti terma $t \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$ za proizvoljno $x = (b_0, \dots, b_{n-1}) \in B^n$ dobijamo:

1° Ako je $t = x_i \in X, i \in \{0, \dots, n-1\}, t^{\mathcal{B}}(b_0, \dots, b_{n-1}) = \{b_i\} \subseteq B \subseteq A$, onda je $t^{\mathcal{B}}(b_0, \dots, b_{n-1}) = \{b_i\} = t^{\mathcal{A}}(b_0, \dots, b_{n-1})$.

2° Ako je $t = f \in \mathcal{F}_0$, onda je $t^{\mathcal{B}}(x) = f^{\mathcal{B}}(x) = f^{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{A}} = f^{\mathcal{A}}(x) = t^{\mathcal{A}}(x)$.

3° Ako za terme $t_0, \dots, t_{m-1} \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X), n \in \mathbb{N}$ važi tvrđenje i za $f \in \mathcal{F}_m, t = f(t_0, \dots, t_{m-1}) \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$, onda je

$$\begin{aligned} t^{\mathcal{B}}(x) &= f^{\mathcal{B}}({t_0}^{\mathcal{B}}, \dots, {t_{m-1}}^{\mathcal{B}})(x) \\ &= f^{\mathcal{B}}({t_0}^{\mathcal{B}}(x), \dots, {t_{m-1}}^{\mathcal{B}}(x)) \\ &= f^{\mathcal{A}}({t_0}^{\mathcal{B}}(x), \dots, {t_{m-1}}^{\mathcal{B}}(x)) \\ &= f^{\mathcal{A}}({t_0}^{\mathcal{A}}(x), \dots, {t_{m-1}}^{\mathcal{A}}(x)) \;=\; t^{\mathcal{A}}(x). \end{aligned}$$

□

Tvrđenje 3.4 *Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ važi:*

a) iz $\mathcal{A} = o(A)$ sledi da $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ako i samo ako $\mathcal{B} = o(B)$;

b) iz $\mathcal{A} = e(A)$ sledi da $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ako i samo ako $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.

Dokaz.

a) Neka je $\mathcal{A} = o(A)$. Tada $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ako i samo ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$ važi

$$f^{\mathcal{B}}(x) = f^{\mathcal{A}}(x) = \emptyset$$

ako i samo ako $\mathcal{B} = o(B)$.

b) Neka je $\mathcal{A} = e(A)$. Tada je $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ ako i samo ako za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$ važi

$$f^{\mathcal{B}}(x) = f^{\mathcal{A}}(x) = A$$

ako i samo ako $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. □

Tvrđenje 3.5 *Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ i $\emptyset \neq B \subseteq A$ postoji najviše jedna podmultialgebra $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ od $\mathcal{A}$, i to, postoji ako i samo ako je B podobjekat od $\mathcal{A}$ tj. važi*

$$f^{\mathcal{A}}(x) \subseteq B, \;\text{ za svako } n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n. \tag{3.1}$$

Dokaz. Ako bi postojale dve podmultialgebre $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1 \in \mathcal{F}(B)$ od $\mathcal{A}$, onda bismo za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$ imali

$$f^{\mathcal{B}}(x) = f^{\mathcal{A}}(x) = f^{\mathcal{B}_1}(x)$$

pa je $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$.

Ako postoji $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(B) \cap \mathcal{S}(\mathcal{A})$, onda je za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$

$$f^{\mathcal{A}}(x) = f^{\mathcal{B}}(x) \subseteq B.$$

I obrnuto, ako važi (3.1) onda je tražena podmultialgebra $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$, ona za koju važi da je za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$

$$f^{\mathcal{B}}(x) = f^{\mathcal{A}}(x).$$

□

Dakle, svaki neprazan podobjekat B od $\mathcal{A}$ je nosač jedinstvene podmultialgebre $\mathcal{B}$ od $\mathcal{A}$, i obrnuto, nosač svake podmultialgebre je podobjekat. Prazan skup je podobjekat svake multialgebre.

Tvrđenje 3.6 *Ako je B podobjekat od $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, onda je $t^{\mathcal{A}}(x) \subseteq B$, za sve terme $t \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$ i elemente $x \in B^n$.*

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 3.3 i uslova (3.1). □

Tvrđenje 3.7 *Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, skup $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ je algebarski sistem zatvaranja na A.*

Dokaz. Neka je $\{\mathcal{B}_i \mid i \in I\}$ proizvoljna familija podmultialgebri od $\mathcal{A}$. Pokažimo da je njihov presek podmultialgebra od $\mathcal{A}$. Ako je $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$, onda je taj presek neprazan. U suprotnom, znamo da je prazan skup podobjekat svake multialgebre, pa tvrđenje trivijalno važi.

Ako je $\mathcal{B}_i = (B_i, \mathcal{F})$ za sve $i \in I$, onda je $\{B_i \mid i \in I\}$ familija podobjekata od $\mathcal{A}$, pa je za svako $i \in I, n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in {B_i}^n$,

$$f^{\mathcal{A}}(x) \subseteq B_i,$$

a za $x \in \bigcap_{i \in I} {B_i}^n$

$$f^{\mathcal{A}}(x) \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i,$$

te je $\bigcap_{i \in I} B_i$ takođe podobjekat od $\mathcal{A}$, i

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{B}_i = (\bigcap_{i \in I} B_i, \mathcal{F}) \in \mathcal{S}(\mathcal{A}).$$

Na sličan način nalazimo da je i $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i = (\bigcup_{i \in I} B_i, \mathcal{F}) \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$. □

Na isti način kao što smo kod univerzalnih algebri formirali poduniverzum generisan nekim skupom, ovde formiramo tzv. **podobjekat generisan** datim **skupom**. Naime, ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra i $\emptyset \neq X \subseteq A$, prema Tvrđenju 3.7 vidimo da postoji najmanji podobjekat B od $\mathcal{A}$ koji sadrži skup X. Pišemo $B = \langle X \rangle_{\mathcal{A}}$ i kažemo da je podobjekat $\langle X \rangle_{\mathcal{A}}$ generisan sa X. Jasno,

$$\langle X \rangle_{\mathcal{A}} = \bigcap \{B \subseteq A \mid B \text{ podobjekat od } \mathcal{A}, X \subseteq B\}.$$

Ako postoji, najmanji podobjekat od $\mathcal{A}$ je $\langle\emptyset\rangle_{\mathcal{A}}$. Važi da je $\langle\emptyset\rangle_{\mathcal{A}} = \emptyset$ ako i samo ako $\mathcal{A}$ nema nularnih multioperacija. Ako $\mathcal{A}$ ima nularne multioperacije i uniju skupova njihovih slika označimo sa A_0, onda je

$$\emptyset \neq \langle\emptyset\rangle_{\mathcal{A}} = \langle A_0\rangle_{\mathcal{A}}.$$

Primetimo da za podobjekat B od $\mathcal{A}$ važi da je $\langle B\rangle_{\mathcal{A}} = B$. Kada je jasno koja multialgebra je u pitanju, umesto $\langle X\rangle_{\mathcal{A}}$ pisaćemo $\langle X\rangle$.

Setimo se da smo za svaku univerzalnu algebru $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ i $X \subseteq A$ imali da je $\langle X\rangle = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$, pri čemu je

$$X_0 = X,$$

$$X_{k+1} = X_k \cup \{f^{\mathcal{A}}(a_0, \dots, a_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a_0, \dots, a_{n-1} \in X_k\}, k \in \mathbb{N}.$$

Slično važi i za multialgebre.

Tvrđenje 3.8 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialebra i $X \subseteq A$. Tada je $\langle X\rangle = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ pri čemu je*

$$X_0 = X,$$

$$X_{k+1} = X_k \cup (\bigcup \{f^{\mathcal{A}}(x_0, \dots, x_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x_0, \dots, x_{n-1} \in X_k\}), k \in \mathbb{N}.$$

Dokaz. Označimo $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ i pokažimo da je $\langle X\rangle = M$.

($\subseteq$)Kako je $X = X_0 \subseteq M$, to je $\langle X\rangle \subseteq \langle M\rangle$. Pokažimo da je $\langle M\rangle = M$ tj. da je $\mathcal{M} \in \mathcal{F}(M)$ podmultialgebra multialgebre $\mathcal{A}$.

Neka je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x_0, \dots, x_{n-1} \in M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$. Tada, kako je

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_k \subseteq \dots,$$

sledi da postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da $x_0, \dots, x_{n-1} \in X_m$, što daje da

$$f^{\mathcal{A}}(x_0, \dots, x_{n-1}) \subseteq X_{m+1} \subseteq M$$

što je i trebalo dokazati.

($\supseteq$)Da je $M \subseteq \langle X\rangle$, pokazaćemo indukcijom po $k \in \mathbb{N}$.

1° Jasno da $X_0 = X \subseteq \langle X\rangle$.

2° Pretpostavimo da $X_k \subseteq \langle X\rangle$ i pokažimo da onda $X_{k+1} \subseteq \langle X\rangle$. Ako $x \in X_{k+1}$ imamo dve mogućnosti. Prva je da $x \in X_k$ pa po indukcijskoj pretpostavci $x \in \langle X\rangle$, a druga da postoje $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x_0, \dots, x_{n-1} \in X_k \subseteq \langle X\rangle$ takvi da $x \in f^{\mathcal{A}}(x_0, \dots, x_{n-1})$, pa kako je $\langle X\rangle$ podmultialgebra od $\mathcal{A}$, onda važi da $x \in \langle X\rangle$. □

Teorema 3.9 *([34]) $\mathcal{P}^*(\mathcal{B})$ je podmultialgebra od $\mathcal{P}^*(\mathcal{A})$ ako i samo ako je $\mathcal{B}$ podmultialgebra $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Sledi iz definicije podmultialgebre. □

Tvrđenje 3.10 *a) Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra, $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ i termovska funkcija $t \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), n \in \mathbb{N}$. Ako su $B_0, \dots, B_{n-1} \in \mathcal{P}^*(B)$, onda*

$$t(B_0, \dots, B_{n-1}) \subseteq B.$$

b) Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra, $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ i $t \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), n \in \mathbb{N}$. Ako su $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$, onda

$$t(b_0, \dots, b_{n-1}) \subseteq B.$$

Dokaz.

a) Indukcijom po složenosti $n-$arne termovske funkcije t dobijamo:

1° Neka je $t = e_i^n$ za neko $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Tada je

$$t(B_0, \dots, B_{n-1}) = B_i \subseteq B$$

2° Neka za $t_0, \dots, t_{m-1} \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ važi tvrđenje i neka je $f \in \mathcal{F}_m, m \in \mathbb{N}$ i $t = f(t_0, \dots, t_{m-1})$. Tada je

$$\begin{aligned} t(B_0, \dots, B_{n-1}) &= f(t_0, \dots, t_{m-1})(B_0, \dots, B_{n-1}) \\ &= f(t_0(B_0, \dots, B_{n-1}), \dots, t_{m-1}(B_0, \dots, B_{n-1})). \end{aligned}$$

pa iz indukcijske pretpostavke, činjenice da $\mathcal{B} \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ i Teoreme 3.9 sledi tvrđenje.

b) Analogno. $\square$

Teorema 3.11 *Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra i $\emptyset \neq X \subseteq A$, onda je*

$$\langle X \rangle_{\mathcal{A}} = \bigcup \{t(x_0, \dots, x_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}, t \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), x_0, \dots, x_{n-1} \in X\}.$$

Dokaz. Uvedimo oznaku

$$M = \bigcup \{t(x_0, \dots, x_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}, t \in Clo_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), x_0, \dots, x_{n-1} \in X\}$$

i dokažimo da je $\langle X \rangle = M$.

($\supseteq$) Iz Tvrđenja 3.10b sledi da je $M \subseteq \langle X \rangle$.

($\subseteq$) Kako za svako $x \in X$ možemo uzeti $t = e_0^1$ pa

$$x = t(x) \in M,$$

to je $X \subseteq M$ pa $\langle X \rangle \subseteq \langle M \rangle$. Pokažimo da je $\langle M \rangle = M$ tj. da je M podobjekat od $\mathcal{A}$.

Neka je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, c_0, \dots, c_{n-1} \in M$. Za sve $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tada postoji $m_i \in \mathbb{N}, t_i \in Clo_{m_i}(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), x_0^i, \dots, x_{m_i-1}^i \in X$ tako da je

$$c_i \in t_i(x_0^i, \dots, x_{m_i-1}^i).$$

Prema Grätzeru, za svaku $n-$arnu termovsku funkciju t nad $\mathcal{P}^*(\mathcal{A})$ i za svako $m \geq n$ postoji $m-$arna termovska funkcija l nad $\mathcal{P}^*(\mathcal{A})$ tako da je

$$t(A_0, \dots, A_{n-1}) = l(A_0, \dots, A_{m-1}).$$

Stoga postoje $l_0, \dots, l_{n-1} \in Clo_m(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), m = m_0 + \dots m_{n-1}$ i $y_0, \dots, y_{m-1} \in X$ takvi da

$$c_i \in l_i(y_0, \dots, y_{m-1}),$$

$i \in \{0, \dots, n-1\}$. Tada je

$$\begin{aligned} f(c_0, \dots, c_{n-1}) &\subseteq f(l_0(y_0, \dots, y_{m-1}) \dots l_{n-1}(y_0, \dots, y_{m-1})) \\ &= f(l_0, \dots, l_{n-1})(y_0, \dots, y_{m-1}), \end{aligned}$$

a kako $f(l_0, \dots, l_{n-1}) \in Clo_m(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), m \in \mathbb{N}$, i $y_0, \dots, y_{m-1} \in X$, to je

$$f(c_0, \dots, c_{n-1}) \subseteq M.$$

$\square$

Tvrđenje 3.12 *Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{A}' \in \mathcal{F}(A')$ i $h : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ injektivni $1-$homomorfizam, tada je $B = h(A)$ podobjekat od $\mathcal{A}'$ takav da je odgovarajuća podalgebra $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ izomorfna sa $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, y \in B^n$. Tada postoji $x \in A^n$ takvo da je $y = h(x)$ pa je

$$f^{\mathcal{A}'}(y) = f^{\mathcal{A}'}(h(x)) = h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq h(A) = B,$$

pa je B podobjekat od $\mathcal{A}'$. Kako je $h : A \to h(A)$ bijektivni homomorfizam, sledi da je

$$\mathcal{A} \cong \mathcal{B}.$$

□

Tvrđenje 3.13 *Neka su $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ i $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ univerzalne algebre istog tipa i $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfizam. Tada važi:*

1. *Homomorfna slika poduniverzuma od $\mathcal{A}$ je poduniverzum od $\mathcal{B}$.*
2. *Inverzna slika poduniverzuma od $\mathcal{B}$ je poduniverzum od $\mathcal{A}$.*

Slično važi i za multialgebre.

Tvrđenje 3.14 *1. $1-$homomorfna slika podobjekta je podobjekat i neprazna inverzna $1-$homomorfna slika podobjekta je podobjekat;*

2. $3-$homomorfna slika podobjekta je podobjekat;

3. Neprazna inverzna $2-$homomorfna slika podobjekta je podobjekat.

Dokaz.

a) Neka su $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ multialgebre takve da postoji $1-$homomorfizam $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Ako je A_1 podobjekat od $\mathcal{A}$, onda je za $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in {A_1}^n$

$$f^{\mathcal{B}}(h(x)) = h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq h(A_1)$$

pa je $h(A_1)$ podobjekat od $\mathcal{B}$.

Ako je B_1 podobjekat od $\mathcal{B}$, onda za $a \in h^{-1}(B_1)^n$ imamo da je

$$h(f^{\mathcal{A}}(a)) = f^{\mathcal{B}}(h(a)) \subseteq B_1,$$

pa je

$$f^{\mathcal{A}}(a) \subseteq h^{-1}(B_1).$$

b) Ako je $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ $3-$homomorfizam i A_1 podobjekat od $\mathcal{A}$, onda je za $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in {A_1}^n$ zadovoljeno

$$f^{\mathcal{B}}(h(x)) \subseteq h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq h(A_1)$$

tj. $h(A_1)$ je podobjekat od $\mathcal{B}$.

c) Slično. □

Primer. Neka je $|A| \geq 2$ i $\emptyset \neq B \subsetneq A$.

Tada je $1 : o(A) \to e(A)$ $2-$homomorfizam, a B podobjekat od $o(A)$ ali $1(B) = B$ nije podobjekat od $e(A)$ jer za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in B^n$

$$f^{e(A)}(x) = A \supsetneq B.$$

Takođe, $1 : e(A) \to o(A)$ je $3-$homomorfizam, $B = 1^{-1}(B)$ inverzna $3-$homomorfna slika podobjekta B od $o(A)$, ali nije podobjekat od $e(A)$ iz istog razloga. □

Glava 4

Slobodne multialgebre

U ovoj Glavi ćemo prezentovati rezultate radova [12] i [13].

Definicija 4.1 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{C} \in \mathcal{F}(C)$ i $B \subseteq A$. Kažemo da je B $i-$***baza od** $\mathcal{A}$ **nad** $\mathcal{C}$ *ako B generiše A tj. $\langle B \rangle_{\mathcal{A}} = A$ i za svako preslikavanje $h : B \to C$ postoji ekstenzija $g : A \to C$ koja je $i-$homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{C}$.*

Primetimo da se u slučaju univerzalnih algebri, kako se svi $i-$homomorfizmi, $i \in \{1, 2, 3\}$ poklapaju sa uobičajenim homomorfizmom, i $i-$baze, $i \in \{1, 2, 3\}$ poklapaju sa uobičajenom bazom od $\mathcal{A}$ nad $\mathcal{C}$.

Definicija 4.2 *Ako je $\mathcal{K}$ klasa multialgebri tipa $\mathcal{F}$, kažemo da je B $i-$***baza od** $\mathcal{A}$ **nad** $\mathcal{K}$ *ako je B $i-$baza od $\mathcal{A}$ nad svakom multialgebrom iz $\mathcal{K}, i \in \{1, 2, 3\}$.*

*Ako je $\mathcal{A}$ element klase $\mathcal{K}$ i B $i-$baza od $\mathcal{A}$ nad $\mathcal{K}$, kažemo da je B $i-$***baza od** $\mathcal{A}$ **u** $\mathcal{K}$*, $i \in \{1, 2, 3\}$.*

*Kažemo da je $\mathcal{A}$ $i-$***slobodna multialgebra nad** $\mathcal{C}$ *ako postoji $i-$baza B od $\mathcal{A}$ nad $\mathcal{C}$, odnosno, $\mathcal{A}$ je $i-$***slobodna nad** $\mathcal{K}$ *ako je $i-$slobodna nad svakom multialgebrom iz $\mathcal{K}$, specijalno, ako $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, kažemo da je $\mathcal{A}$ $i-$***slobodna u** $\mathcal{K}$*, $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Podsetimo se nekih osobina slobodnih univerzalnih algebri.

Tvrđenje 4.3 *Neka je $\mathcal{U}$ univerzalna algebra i $\mathcal{K}$ klasa univerzalnih algebri, pri čemu je $\mathcal{U}$ slobodna algebra nad $\mathcal{K}$ sa bazom X. Tada za sve algebre $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ i sve $\varphi : X \to A$ postoji jedinstvena ekstenzija $\overline{\varphi} : U \to A$ koja je homomorfizam iz $\mathcal{U}$ u $\mathcal{A}$.*

Tvrđenje 4.4 *Neka je $\mathcal{K}$ klasa univerzalnih algebri i $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ slobodne algebre u $\mathcal{K}$ nad X_1, X_2 respektivno. Ako važi $|X_1| = |X_2|$ onda važi i $\mathcal{U}_1 \cong \mathcal{U}_2$.*

U slučaju multialgebri, tvrđenja analogna Tvrđenju 4.3 i Tvrđenju 4.4 ne važe. Naime, što se tiče Tvrđenja 4.3, najčešće umesto jedinstvenog proširenja dobijamo beskonačno mnogo, a za Tvrđenje 4.4 postoji dosta primera $i-$slobodnih multialgebri sa ekvipotentnim $i-$bazama koje nisu izomorfne.

Tvrđenje 4.5 *Neka su $\mathcal{K}$ i $\mathcal{L}$ klase multialgebri takve da je $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{L}$ i ako je $\mathcal{A}$ $i-$slobodna multialgebra nad $\mathcal{L}$, onda je $i-$slobodna i nad $\mathcal{K}$, $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Dokaz. Sledi iz definicije $i-$slobodnih multialgebri nad klasom multialgebri, $i \in \{1,2,3\}$. $\square$

Tvrđenje 4.6 *Neka su $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \mathcal{C} \in \mathcal{F}(C), \mathcal{D} \in \mathcal{F}(D)$ multialgebre tipa $\mathcal{F}$ i $B \subseteq A$. Ako je B $2-$baza od $\mathcal{A}$ nad $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ podmultialgebra od $\mathcal{C}$, onda je B i $2-$baza od $\mathcal{A}$ nad $\mathcal{D}$.*

Dokaz. Ako $h : B \to D \subseteq C$ onda postoji $2-$homomorfizam g iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{C}$ koji proširuje h, pa kako je $\mathcal{D}$ podmultialgebra od $\mathcal{C}$, dobijamo da je inverzna slika od $\mathcal{D}$, podobjekat od $\mathcal{A}$ koji sadrži B, pa je to baš $\langle B \rangle = A$, tj. za sve $x \in A^n, g(x) \in D^n$ pa je za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$

$$g(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{C}}(g(x)) = f^{\mathcal{D}}(g(x)),$$

odnosno, $g : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ je traženo $2-$homomorfno proširenje. $\square$

Tvrđenje 4.7 *Ako je B $1-$baza od $\mathcal{A}$ nad $\mathcal{C}$, onda je B i $i-$baza od $\mathcal{A}$ nad $\mathcal{C}$, $i \in \{2,3\}$.*

Dokaz. Sledi iz definicije i činjenice da je svaki $1-$homomorfizam i $i-$homomorfizam, $i \in \{2,3\}$. $\square$

Tvrđenje 4.8 *Singularna multialgebra $o(A)$ je $2-$slobodna nad svakom multialgebrom $\mathcal{B}$ (a time i nad svakom klasom multialgebri). Ako je $|A| \geq 2$, tada je A jedinstvena $2-$baza od $o(A)$ nad $\mathcal{B}$, dok u slučaju kada je A jednoelementni skup, imamo dve $2-$baze od $o(A)$ nad $\mathcal{B}$, a to su $\emptyset$ i A.*

Dokaz. Ako je $|A| \geq 1$, znamo da je $\mathcal{H}_2(o(A), \mathcal{B}) = B^A$ pa je svako preslikavanje iz A u B $2-$homomorfizam, i jasno, A generiše A, međutim, ako je $|A| = 1$ i $\emptyset$ generiše A. $\square$

Tvrđenje 4.9 *Neka je $\mathcal{K}$ klasa multialgebri, $\mathcal{D} \in \mathcal{K}$ neregularna multialgebra tipa $\mathcal{F}$ i $\mathcal{A}$ $2-$slobodna multialgebra nad $\mathcal{K}$ sa $2-$bazom $B \subseteq A$. Ako je*

$$|B| \geq |D| \text{ ili ako je } B \text{ beskonačan skup,}$$

onda je i $\mathcal{A}$ neregularna multialgebra.

Dokaz. Kako $\mathcal{D}$ nije regularna, postoje $n_0 \in \mathbb{N}, f_0 \in \mathcal{F}_{n_0}, d \in D^{n_0}$ tako da je

$${f_0}^{\mathcal{D}}(d) = \emptyset.$$

Neka je $h : B \to D$. Bez obzira da li ispunjen uslov da je $|B| \geq |D|$ ili je B beskonačan skup, uvek možemo naći $b \in B^{n_0}$ takvo da je $h(b) = d$. Takođe znamo da postoji $g : A \to D$ koje proširuje h i koje je $2-$homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{D}$, te je za $n_0 \in \mathbb{N}, f_0 \in \mathcal{F}_{n_0}, b \in B^{n_0}$ zadovoljeno

$$g({f_0}^{\mathcal{A}}(b)) \subseteq {f_0}^{\mathcal{D}}(g(b)) = {f_0}^{\mathcal{D}}(d) = \emptyset$$

pa je ${f_0}^{\mathcal{A}}(b) = \emptyset$ tj. ni $\mathcal{A}$ nije regularna multialgebra. $\square$

Tvrđenje 4.10 *Neka je $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ multialgebra koja ima singularnu podmultialgebru. Tada je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ $2-$slobodna nad $\mathcal{B}$ ako i samo ako je $\mathcal{A} = o(A)$.*

Dokaz. Neka je $D \subseteq B$ i $o(D) \in \mathcal{S}(\mathcal{B})$. Ako je $\mathcal{A}$ 2−slobodna nad $\mathcal{B}$ onda je, na osnovu Tvrđenja 4.6, $\mathcal{A}$ 2−slobodna i nad $o(D)$, pa tada postoji 2−homomorfizam h iz $\mathcal{A}$ u $o(D)$ što prema Tvrđenju 2.8 (slučaj 2.) znači da je $\mathcal{A} = o(A)$, i obrnuto. □

Tvrđenje 4.11 *Ako je $\mathcal{K} \in \{Mult, Con, Mult(\alpha), Con(\alpha), Mult[\beta], Con[\beta]\}, \alpha$ i β kardinali, $\alpha > 0$, onda je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ 2−slobodna nad (ili u) $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $\mathcal{A} = o(A)$.*

Dokaz. Sledi iz prethodnog tvrđenja jer za svako $\mathcal{K}$ iz datog skupa i svako $\mathcal{B} \in \mathcal{K}$ postoji singularni podobjekat. □

Tvrđenje 4.12 *Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, svaki skup $B \subseteq A$ koji generiše A je 2−baza od $\mathcal{A}$ nad klasom jediničnih multialgebri $\mathcal{E}$.*

Specijalno, za $\mathcal{A} = e(A)$, svaki skup $B \subseteq A$ je 2−baza od $\mathcal{A}$ u $\mathcal{E}$.

Dokaz. Sledi na osnovu ranije dokazanog Tvrđenja 2.8, koje govori da je

$$\mathcal{H}_2(\mathcal{A}, e(C)) = C^A,$$

a ako je pri tom $\mathcal{A} = e(A)$, svaki podskup od A generiše A na osnovu Tvrđenja 3.8. □

Tvrđenje 4.13 *Svaka konstantna multialgebra (A, M) je 2−slobodna u klasi konstantnih multialgebri Con^+, pri čemu je $B \subseteq A$ 2−baza od (A, M) u Con^+ ako i samo ako je $B = A \setminus M$.*

Dokaz.

($\Leftarrow$) Neka je $(C, N) \in Con^+$ i $B = A \setminus M$. Kako je

$$\langle B \rangle = \bigcup \{t(x_0, \ldots, x_{n-1}) \mid n \in \mathbb{N}, t \in Clo_n(\mathcal{P}^*(A, M)), x_0, \ldots, x_{n-1} \in B\},$$

to je $\langle X \rangle = B \cup M = A$. Ako je $h : B \to C$ proizvoljno, tada preslikavanje $g : A \to C$ koje elementima iz B opredeljuje iste elemente koje im dodeljuje preslikavanje h a elemente iz M slika u elemente iz N, jeste 2−homomorfizam jer je za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$

$$g(f^{\mathcal{A}}(x)) = g(M) \subseteq N = f^{\mathcal{C}}(g(x)).$$

($\Rightarrow$) Neka je $(C, N) \in Con^+$ i $B \subseteq A$ 2−baza od (A, M) nad (C, N). Tada B generiše A pa mora sadržati $A \setminus M$, ali i ne može sadržati ni jedan element iz M jer u suprotnom za preslikavanje $h_0 : B \to C$ koje bi taj element slikalo van N ne bi bilo zadovoljeno

$$g(M) = g(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq f^{\mathcal{C}}(g(x)) = N, \text{ za svako } n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n,$$

gde je g odgovarajuće 2−homomorfno proširenje od h_0. □

Tvrđenje 4.14 *Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, svaki skup $B \subseteq A$ koji generiše A je 3−baza od $\mathcal{A}$ nad klasom singularnih multialgebri $\mathcal{O}$. Specijalno, $\mathcal{A} = o(A)$ je slobodna u $\mathcal{O}$.*

Dokaz. Sledi na osnovu ranije dokazanog Tvrđenja 2.8 koje kaže da je

$$\mathcal{H}_3(\mathcal{A}, o(B)) = B^A,$$

i za slučaj $\mathcal{A} = o(A)$, da je tada

$$\mathcal{H}_2(o(A), o(B)) \neq \emptyset.$$

□

Tvrđenje 4.15 *Ako postoji multialgebra $\mathcal{A}$ koja nije regularna, a koja je 3−slobodna nad klasom multialgebri $\mathcal{K}$, onda ni jedna multialgebra $\mathcal{C} \in \mathcal{K}$ nije regularna.*

Dokaz. Kako $\mathcal{A}$ nije regularna, postoji $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ tako da je

$$f^{\mathcal{A}}(x) = \emptyset.$$

Tada za svako $\mathcal{C} \in \mathcal{K}$ i g 3−homomorfizam iz $\mathcal{A}$ u $\mathcal{C}$ važi da je

$$\emptyset = g(f^{\mathcal{A}}(x)) \supseteq f^{\mathcal{C}}(g(x))$$

pa $\mathcal{C}$ nije regularna multialgebra. □

Tvrđenje 4.16 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ slobodna multialgebra nad klasom $\mathcal{K}$, sa bazom $\emptyset \neq B \subseteq A$, i neka u $\mathcal{K}$ postoji regularna multialgebra. Za svako $\mathcal{D} \in \mathcal{F}(D) \cap \mathcal{K}$ važi: ako je B beskonačan skup ili ako je konačan ali $|B| \geq |D|$, onda je $\mathcal{D}$ regularna multialgebra.*

Dokaz. Kako u $\mathcal{K}$ postoji regularna multialgebra, prema Tvrđenju 4.15 i $\mathcal{A}$ je regularna. Ako je $\mathcal{D} \in \mathcal{F}(D) \cap \mathcal{K}$, i preslikavanje $h : B \to D$ proizvoljno, onda iz uslova da je B beskonačno, kao i iz uslova da je konačno i $|B| \geq |D|$, sledi da za svako $n \in \mathbb{N}, d \in D^n$ postoji $b \in B^n$ takvo da je $h(b) = d$. Tada za svako $f \in \mathcal{F}_n$ i homomorfno proširenje $g : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$ od h važi

$$f^{\mathcal{D}}(d) = f^{\mathcal{D}}(g(b)) = g(f^{\mathcal{A}}(b)) \neq \emptyset.$$

□

Tvrđenje 4.17 *Neka je α beskonačan kardinal, $\mathcal{K} = \{e(A) \mid |A| \leq \alpha\}$ i $\mathcal{L} = \mathcal{O} \cup \mathcal{K}$. Tada važi:*

1. *$e(D)$ je slobodna multialgebra u $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $|D| = \alpha$ i $B \subseteq D$ je baza od $e(D)$ u $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $|D \setminus B| = \alpha$.*
2. *Svaka $e(A) \in \mathcal{K}$ je 2−slobodna u $\mathcal{K}$ i svaki skup $B \subseteq A$ je 2−baza od $e(A)$ u $\mathcal{K}$.*
3. *Multialgebra $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$ je 3−slobodna u $\mathcal{L}$ ako i samo ako je slobodna u $\mathcal{K}$.*
4. *Ne postoji slobodna multialgebra u $\mathcal{L}$.*

Dokaz.

1.

($\Rightarrow$) Neka je $e(D)$ slobodna u $\mathcal{K}$ sa bazom $B \subseteq D$. Tada je $e(D)$ slobodna multialgebra i za $e(C) \in \mathcal{K}$, gde je $|C| = \alpha$, pa za proizvoljno $h : B \to C$ postoji homomorfna ekstenzija $g : e(D) \to e(C)$ tj. za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in D^n$

$$g(D) = g(f^{e(D)}(x)) = f^{e(C)}(g(x)) = C$$

što nam daje $\alpha = |C| \leq |D|$ tj. $|D| = \alpha$.

($\Leftarrow$) Neka je $|D| = \alpha, e(D), e(C) \in \mathcal{K}$ i $D_1 \subseteq D$ konačan skup. Tada D_1 generiše D i za svako preslikavanje $h : D_1 \to C$, postoji proširenje $g : D \to C$ takvo da je $g(D) = C$ pa važi i homomorfnost: za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in D^n$

$$g(f^{e(D)}(x)) = g(D) = C = f^{e(D)}(g(x)).$$

Drugi deo tvrđenja sledi iz ovoga, jer je $B \subseteq D$ baza od $e(D)$ u $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $e(D)$ slobodna u $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $|D| = \alpha$ i u dokazu smera ($\Leftarrow$) vidimo da mora biti $|D \setminus B| = \alpha$ da bi postojalo homomorfno proširenje.

2. Posledica Tvrđenja 4.12.

3.

($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{L}$ 3$-$slobodna u $\mathcal{L}$ sa 3$-$bazom $B \subseteq A$. Postoje dve mogućnosti: 1° $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ i 2° $\mathcal{A} \in \mathcal{O}$.

1° Ako $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ i $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(C) \cap \mathcal{K}$ proizvoljno, kao i $h : B \to C$, tada postoji 3$-$homomorfizam $g : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ koji proširuje h. Za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ važi

$$g(A) = g(f^{\mathcal{A}}(x)) \supseteq f^{\mathcal{C}}(g(x)) = C$$

pa kako je i $g(A) \subseteq C$, to je g 1$-$homomorfizam.

2° Ako bi bilo $\mathcal{A} \in \mathcal{O}$, onda bi za svako $\mathcal{C} \in \mathcal{K}$ i svaki homomorfizam $g : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ važilo

$$\emptyset = g(f^{\mathcal{A}}(x)) \supseteq f^{\mathcal{C}}(g(x)) = C$$

tj. $C = \emptyset$, pa ovaj slučaj odbacujemo.

($\Leftarrow$) Ako je $\mathcal{A}$ slobodna u $\mathcal{K}$ onda je i 3$-$slobodna u $\mathcal{K}$, pa ostaje da se pokaže da je i 3$-$slobodna nad $\mathcal{O}$, a to nam govori Tvrđenje 4.14.

4. Ako bismo pretpostavili da postoji slobodna multialgebra $\mathcal{A}$ u $\mathcal{L}$ imali bismo dve mogućnosti: $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ ili $\mathcal{A} \in \mathcal{O}$.

Ako je $\mathcal{A} = e(A) \in \mathcal{K}$ onda na osnovu *1.* i Tvrđenja 4.16 dobijamo da su elementi iz $\mathcal{O}$ regularne multialgebre, a ako je $\mathcal{A} = o(A) \in \mathcal{O}$, na osnovu Tvrđenja 4.15 dobijamo da multialgebre iz $\mathcal{K}$ nisu regularne, pa u oba slučaja odbacijemo polaznu pretpostavku. □

Tvrđenje 4.18 *Ako $\mathcal{K} \in \{\mathcal{E}, Con, Mult, Reg, Con^+\}$, onda ne postoje* 3$-$*slobodne multialgebre nad $\mathcal{K}$.*

Dokaz. Pokažimo da ne postoje 3$-$slobodne multialgebre nad $\mathcal{E}$, pa kako sve druge navedene klase sadrže $\mathcal{E}$, tvrđenje će važiti i za njih.

Naime, ako pretpostavimo da je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ tražena slobodna multialgebra nad $\mathcal{E}$ i $e(M) \in \mathcal{E}$ takvo da je $|A| < |M|$, onda za $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ i 3$-$homomorfizam $h : \mathcal{A} \to e(M)$ važi da je

$$M = f^{e(M)}(h(x)) \subseteq h(f^{\mathcal{A}}(x)) \subseteq h(A)$$

što povlači $|A| \geq |M|$, pa odbacujemo polaznu pretpostavku. □

Tvrđenje 4.19 *Ako su α i β kardinali, $\alpha > 0$, onda ne postoji slobodna multialgebra nad klasom*

$$\mathcal{K} \in \{\mathcal{E}, Con, Mult, Reg, Mult(\alpha), Mult[\beta], Con[\beta], Con^{+}\}.$$

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 4.17 i 4.18. □

Tvrđenje 4.20 *Neka je α beskonačan kardinal i $\mathcal{K}$ klasa svih nesingularnih multialgebri $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ takvih da je $|A| \leq \alpha$. Tada je $\mathcal{A}$ 3−slobodna multialgebra u $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $\mathcal{A} = e(A)$ i $|A| = \alpha$.*

U tom slučaju je B 3−baza od $e(A)$ u $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $|A \setminus B| = \alpha$.

Klasa $\mathcal{K}$ nema 2−slobodnu multialgebru u $\mathcal{K}$.

Dokaz.

($\Rightarrow$) Neka je $\mathcal{A}$ 3−slobodna u $\mathcal{K}$. Kako i $e(A) \in \mathcal{K}$, postoji 3−homomorfizam $g : \mathcal{A} \to e(A)$, takav da je za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$

$$g(f^{\mathcal{A}}(x)) \supseteq f^{e(A)}(g(x)) = A$$

što znači da je $f^{\mathcal{A}}(x) = A$, odnosno, $\mathcal{A} = e(A)$. Na osnovu Tvrđenja 4.14 sledi da je $\mathcal{A}$ 3−slobodna i nad $\mathcal{O}$ pa sada možemo primeniti Tvrđenje 4.17 (slučaj *3.* i slučaj *1.*) pa je $|A| = \alpha$.

($\Leftarrow$) Ako je $\mathcal{A} = e(A)$ i $|A| = \alpha$, onda $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ i svaki skup $B \subseteq A$ generiše A. Posmatrajmo $B \subseteq A$ za koji je $|A \setminus B| = \alpha$. Za svako $h : B \to C$, gde je $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(C) \cap \mathcal{K}$ postoji proširenje $g : A \to C$ takvo da je $g(A) = C$ pa za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x \in A^n$ važi

$$g(f^{\mathcal{A}}(x)) = g(A) = C \supseteq f^{\mathcal{C}}(g(x))$$

pa je $\mathcal{A}$ 3−slobodna u $\mathcal{K}$.

Iz dokaza je jasno da je B 3−baza od $e(A)$ u $\mathcal{K}$ ako i samo ako je $|A \setminus B| = \alpha$, a iz Tvrđenja 4.10 da $\mathcal{K}$ nema 2−slobodnu multialgebru u $\mathcal{K}$. □

U nastavku ćemo se baviti 2−slobodnim multialgebrama nad klasom regularnih multialgebri tipa $\mathcal{F}$ ($Reg(\mathcal{F})$).

Definicija 4.21 *Neka je $\mathcal{F}$ neki tip algebri i X skup promenljivih tako da je $T_{\mathcal{F}}(X)$ neprazan skup. Tada algebru istog tipa $\mathcal{F}$ čiji je nosač $T_{\mathcal{F}}(X)$ zovemo* **termovska algebra tipa $\mathcal{F}$ nad** X *(i označavamo isto kao nosač, $T_{\mathcal{F}}(X)$) ako je za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, t_0, \ldots, t_{n-1} \in T_{\mathcal{F}}(X)$*

$$f^{T_{\mathcal{F}}(X)}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = f(t_0, \ldots, t_{n-1}).$$

Jasno je da algebra $T_{\mathcal{F}}(\emptyset)$ postoji ako i samo ako je $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$, kao i da je $T_{\mathcal{F}}(X)$ skup generisan sa X.

Ako uvedemo oznaku

$$B_n = \{t \in T_{\mathcal{F}}(B) \mid rang(t) \leq n\}, n \in \mathbb{N}$$

tada je

$$B_0 = B \cup \mathcal{F}_0, \text{ i za } n \in \mathbb{N}$$

$$B_{n+1} = B_n \cup \{f(t_0, \ldots, t_{k-1}) \mid k \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_k, t_i \in B_n \text{ za sve } i \in \{0, \ldots, k-1\}\}$$

i

$$T_{\mathcal{F}}(B) = \bigcup \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Tvrđenje 4.22 *B je $2-$baza od $T_{\mathcal{F}}(B)$ u Reg($\mathcal{F}$).*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ regularna multialgebra i $h : B \to A$ proizvoljno. Definišimo preslikavanja h_n za $n \in \mathbb{N}$:

$$h_0 = h$$

i za $n \geq 1$

$$h_{n+1|B_n} = h_n,$$

a za sve $f(t_0, \ldots, t_{k-1}) \in B_{n+1} \setminus B_n$

$$h_{n+1}(f(t_0, \ldots, t_{k-1})) \in f^{\mathcal{A}}(h_n(t_0), \ldots, h_n(t_{k-1})).$$

Tada je

$$g = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} h_n : T_{\mathcal{F}}(B) \to A$$

$2-$homomorfna ekstenzija od h iz $T_{\mathcal{F}}(B)$ u $\mathcal{A}$. $\square$

Primetimo da je $2-$homomorfizam g iz dokaza Tvrđenja 4.22 jedinstven samo ako je $\mathcal{A}$ univerzalna algebra.

Tvrđenje 4.23 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, skup B generiše A i neka postoji $2-$homomorfizam $h : \mathcal{A} \to T_{\mathcal{F}}(B)$ koji je proširenje identičkog preslikavanja $1 : B \to B$. Tada je B $2-$baza od $\mathcal{A}$ nad Reg($\mathcal{F}$).*

Dokaz. Ako je $\mathcal{C} \in \mathcal{F}(C) \cap$ *Reg*$(\mathcal{F})$ i $g : B \to C$ proizvoljno, prema Tvrđenju 4.22 znamo da postoji $\overline{g} : T_{\mathcal{F}}(B) \to \mathcal{C}$ proširenje preslikavanja g koje je $2-$homomorfizam pa je i $\overline{g} \circ h : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ proširenje od g koje je $2-$homomorfizam kao kompozicija dva $2-$homomorfizma. $\square$

Tvrđenje 4.24 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \emptyset \neq B \subseteq A$ i neka postoji $2-$homomorfizam $h : \mathcal{A} \to T_{\mathcal{F}}(B)$ koji proširuje identičko preslikavanje $1 : B \to B$. Tada za svako $t \in T_{\mathcal{F}}(B)$ važi da je*

$$h(t^{\mathcal{A}}) \subseteq \{t\}.$$

Dokaz. Kako $t \in T_{\mathcal{F}}(B) = \bigcup\{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da $t \in B_n$ pa tvrđenje dokazujemo indukcijom po n.

1° Za $n = 0$ imamo $t \in B_0 = B \cup \mathcal{F}_0$ pa je $h(t^{\mathcal{A}}) \subseteq \{t\}$.

2° Pretpostavimo da za terme iz B_n važi tvrđenje i pokažimo da važi i za terme iz B_{n+1}. Neka je $t \in B_{n+1} \setminus B_n$. Tada postoje termi $t_0, \ldots, t_{m-1} \in B_n$ takvi da je $t = f(t_0, \ldots, t_{m-1})$ za neko $f \in \mathcal{F}_m$. Tada je

$$h(t^{\mathcal{A}}) = h(f^{\mathcal{A}}(t_0{}^{\mathcal{A}}, \ldots, t_{m-1}{}^{\mathcal{A}})) \subseteq f^{T_{\mathcal{F}}(B)}(h(t_0{}^{\mathcal{A}}), \ldots, h(t_{m-1}{}^{\mathcal{A}})),$$

a po indukcijskoj pretpostavci imamo da je za sve $i \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$h(t_i{}^{\mathcal{A}}) \subseteq \{t_i\},$$

odakle sledi da je $h(t^{\mathcal{A}}) \subseteq \{t\}$. $\square$

Primetimo da ako bismo Tvrđenju 4.24 dodali uslov $\mathcal{A} \in$ *Reg*$(\mathcal{F})$, onda bi važilo da je za svako $t \in T_{\mathcal{F}}(B)$

$$h(t^{\mathcal{A}}) = t$$

i h bi bio $1-$homomorfizam.

Tvrđenje 4.25 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ i B generiše A. Ako za svaka dva terma $u, v \in T_{\mathcal{F}}(B)$ važi*

$$u^{\mathcal{A}} \cap v^{\mathcal{A}} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad u = v, \tag{4.1}$$

onda je B $2-$baza od $\mathcal{A}$ nad $Reg(\mathcal{F})$.

Dokaz. Pokažimo da postoji $2-$homomorfizam $h : \mathcal{A} \to T_{\mathcal{F}}(B)$ koji proširuje identičko preslikavanje $1 : B \to B$. Za svako $a \in A$, kako B generiše A, postoji term $t \in T_{\mathcal{F}}(B)$ takav da $a \in t^{\mathcal{A}}$, koji je jedinstven na osnovu uslova (4.1), pa ako definišemo $h(a) = t$, dobićemo traženi $2-$homomorfizam. Primenom Tvrđenja 4.23 dobijamo da je B $2-$baza od $\mathcal{A}$ nad $Reg(\mathcal{F})$. U slučaju da je $\mathcal{A} \in Reg(\mathcal{F})$, h je $1-$homomorfizam. □

Teorema 4.26 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ i $\emptyset \neq B \subseteq A$. Tada je B $2-$baza od $\mathcal{A}$ nad $Reg(\mathcal{F})$ ako i samo ako za svako $a \in A$ postoji jedinstven term $t \in T_{\mathcal{F}}(B)$ takav da je $a \in t^{\mathcal{A}}$.*

Dokaz. Sledi iz Tvrđenja 4.24 i 4.25. □

Posledica 4.27 *Svaka $2-$slobodna multialgebra nad $Reg(\mathcal{F})$ ima jedinstvenu $2-$bazu.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ $2-$slobodna multialgebra nad $Reg(\mathcal{F})$ sa $2-$bazama B_1 i B_2, gde je B_1 najmanji skup koji generiše A. Pretpostavimo da je $B_1 \subsetneq B_2$, tj. postoji $b \in B_2 \setminus B_1$. Tada

$$\text{za } t_2 = b \in T_{\mathcal{F}}(B_2) \text{ važi da } b \in {t_2}^{\mathcal{A}},$$

ali kako B_1 generiše A, znamo da postoji

$$t_1 \in T_{\mathcal{F}}(B_1) \subseteq T_{\mathcal{F}}(B_2), b \neq t_1 \text{ tako da je } b \in {t_1}^{\mathcal{A}}.$$

Dolazimo u kontradikciju sa Teoremom 4.26 jer $b \in {t_1}^{\mathcal{A}} \cap {t_2}^{\mathcal{A}}$ pa odbacujemo polaznu pretpostavku i dobijamo $B_1 = B_2$. □

Glava 5

Stepene strukture multialgebri i Booleove algebre sa operatorima

Da bismo izučavali stepene strukture multialgebri, možemo svaku multialgebru posmatrati kao relacijsku strukturu. Pojam stepenih struktura relacijskih struktura prvi put srećemo u radu [23] Jónssona i Tarskog. Pokazaćemo da ako stepenoj strukturi relacijske strukture dodamo skupovno-teoretske operacije $\cup, \cap, ^-$ dobićemo Booleovu algebru sa operatorima.

Definicija 5.1 **Stepena struktura relacijske strukture** $\mathcal{A} = (A, \mathcal{R})$ *je algebra čiji je nosač* $\mathcal{P}(A)$ *i skup fundamentalnih operacija* $\{R^{\uparrow} \mid R \in \mathcal{R}\}$ *definisanih na sledeći način: za* $R \in \mathcal{R}_{n+1}$ *imamo da je* $R^{\uparrow} : \mathcal{P}(A)^n \to \mathcal{P}(A)$ *tako da za* $X_0, \dots, X_{n-1} \in \mathcal{P}(A)$ *važi*

$$R^{\uparrow}(X_0, \dots, X_{n-1}) =$$

$$= \{y \in A \mid (\forall i \in \{0, \dots, n-1\})(\exists x_i \in X_i)(x_0, \dots, x_{n-1}, y) \in R\}.$$

Primetimo da je za $R \in \mathcal{R}_1 (n = 0), R \subseteq A$, pa je $R^{\uparrow}$ nularna operacija čija je vrednost $R \in \mathcal{P}(A)$.

Svaku univerzalnu algebru $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ možemo posmatrati kao relacijsku strukturu tako što ćemo za svaku operaciju $f \in \mathcal{F}_n$ definisati relaciju $R(f)$ na A arnosti $n+1$ tako da je za sve $a_0, \dots, a_{n-1}, a \in A$

$$(a_0, \dots, a_{n-1}, a) \in R(f) \iff f(a_0, \dots, a_{n-1}) = a.$$

Tada na stepenoj strukturi važi da za sve $X_0, \dots, X_{n-1} \in \mathcal{P}(A)$,

$$R(f)^{\uparrow}(X_0, \dots, X_{n-1}) = \{x \in A \mid (\forall i \in \{0, \dots, n-1\})(\exists x_i \in X_i)$$

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}) = x\} = f^{+}(X_0, \dots, X_{n-1}).$$

Kod multialgebri je slična situacija. Naime, razlika je u tome što relaciju $R(f)$ na A arnosti $n+1$, koja odgovara multioperaciji $f \in \mathcal{F}_n$ definišemo tako da za sve $a_0, \dots, a_{n-1}, a \in A$

$$(a_0, \dots, a_{n-1}, a) \in R(f) \iff a \in f(a_0, \dots, a_{n-1}),$$

pa Definiciju 5.1 možemo posmatrati kao definiciju stepene strukture multialgebre (videti Definiciju 1.12).

U nastavku ćemo pod stepenom strukturom relacijske strukture $\mathcal{A} = (A, \mathcal{R})$ podrazumevati $\mathcal{A}^+ = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \{R^\uparrow \mid R \in \mathcal{R}\})$.

Podsetimo se nekih definicija i tvrđenja vezanih za Booleove algebre.

Definicija 5.2 *Struktura* $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *je* **Booleova algebra** *ako su* $+$ *i* $\cdot$ *binarne operacije,* $'$ *unarna i* $0, 1$ *nularne i važe uslovi:*

1. $(B, +, \cdot)$ *je distributivna mreža;*
2. $x \cdot 0 = 0$ *i* $x + 1 = 1$*, za sve* $x \in B$*;*
3. $x \cdot x' = 0$ *i* $x + x' = 1$*, za sve* $x \in B$*.*

Ako za $x, y \in B$ važi da je $x + y = y$, pišemo $x \leq y$.

Ako za skup elemenata $\{x_i \mid i \in I\}$ iz B postoje supremum i infimum, označavamo ih redom sa $\sum\{x_i \mid i \in I\}$ i $\prod\{x_i \mid i \in I\}$.

Za proizvoljan skup X, algebra $\mathcal{B}(X) = (\mathcal{P}(X), \cup, \cap, ^-, \emptyset, X)$ je Booleova algebra i zovemo je **Booleova skupovna algebra**. Ako smatramo da je **podalgebra** Booleove algebre B svaki neprazan podskup od B koji je zatvoren za sve operacije iz B, lako je videti da je svaka podalgebra Booleove algebre ponovo Booleova algebra. Podalgebre Booleovih skupovnih algebri ćemo zvati **algebre skupova**.

Tvrđenje 5.3 *Svaka Booleova algebra je izomorfna nekoj algebri skupova.*

Dokaz ovog Tvrđenja se može naći u radu [8].

Definicija 5.4 *U Booleovoj algebri* $\mathcal{B}$*, element* $a \in B, a \neq 0$ *je* **atom** *ako za svako* $x \in B$ *važi* $x \cdot a = 0$ *ili* $x \cdot a = a$*. Skup svih atoma Booleove algebre ćemo označavati sa* $At_{\mathcal{B}}$*.*

Booleova algebra je **atomarna** *ako za svaki element* $x \in B, x \neq 0$ *postoji atom* a *tako da važi* $a \leq x$*.*

Booleova algebra je **kompletna** *ako svaki podskup od* B *ima infimum i supremum u* B*.*

Ako je $\mathcal{B}$ kompletna atomarna Boleova algebra, onda za svako $x \in B$ važi da je $x = \sum\{a \in At_{\mathcal{B}} \mid a \leq x\}$.

Tvrđenje 5.5 *Svaka Booleova algebra se može potopiti u kompletnu atomarnu Booleovu algebru.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Booleova algebra, tada je tražena kompletna atomarna Booleova algebra $\mathcal{B}(B) = (\mathcal{P}(B), \cup, \cap, ^-, \emptyset, B)$, a odgovarajuće potapanje je $id : \mathcal{B} \to \mathcal{B}(B), id(b) = \{b\}$ za $b \in B$. Svaka Booleova skupovna algebra je kompletna jer je supremum, odnosno infimum proizvoljne familije elemenata baš njihova unija, odnosno presek, i atomarna je, pri čemu skup atoma čini skup svih jednoelementnih podskupova od B ($At_{\mathcal{B}} = \{\{b\} \mid b \in B\}$). $\square$

Definicija 5.6 *Neka je $\mathcal{B}$ Booleova algebra i $f : B^n \to B$. Za f kažemo da je* **operator** *ako je aditivan po svakom svom argumentu tj.*

$$f(x_0, \ldots, \sum\{y_i \mid i \in \{0, \ldots, k-1\}\}, \ldots, x_{n-1}) =$$
$$= \sum\{f(x_0, \ldots, y_i, \ldots, x_{n-1}) \mid i \in \{0, \ldots, k-1\}\}$$

Ako je f operator i za svaki indeksni skup I za koji postoji $\sum\{y_i \mid i \in I\}$ u $\mathcal{B}$, važi

$$f(x_0, \ldots, \sum\{y_i \mid i \in I\}, \ldots, x_{n-1}) = \sum\{f(x_0, \ldots, y_i, \ldots, x_{n-1}) \mid i \in I\},$$

onda kažemo da je f **kompletno aditivan operator**.

Ako je f operator i za sve $a_0, \ldots, a_{n-1} \in B$ važi da ako je $a_i = 0$ za neko $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ onda $f(a_0, \ldots, a_{n-1}) = 0$, kažemo da je f **normalan operator**.

Konačno dolazimo do pojma Booleovih algebri sa operatorima. U nastavku ćemo koristiti skraćenicu BAO, a za Booleove algebre, BA.

Definicija 5.7 **Booleova algebra sa operatorima** *je struktura*

$$\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1, \{f_i \mid i \in I\})$$

čiji je redukt $\mathcal{B}l(\mathcal{B}) = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ Booleova algebra, a operacije $f_i, i \in I$ operatori od $\mathcal{B}l(\mathcal{B})$.

Ako je pri tom $\mathcal{B}l(\mathcal{B})$ atomarna BA, reći ćemo da je $\mathcal{B}$ **atomarna BAO** *i skup atoma algebre $\mathcal{B}l(\mathcal{B})$ označiti sa $At_{\mathcal{B}}$; Ako je $\mathcal{B}l(\mathcal{B})$ kompletna BA i za svako $i \in I$, f_i je kompletno aditivan operator, kažemo da je $\mathcal{B}$* **kompletna BAO**; *Ako je za svako $i \in I$, f_i normalan operator, kažemo da je $\mathcal{B}$* **normalna BAO**. *BAO koja je kompletna, normalna i atomarna zovemo* **dobra BAO**.

Tvrđenje 5.8 *Svaka BAO se može potopiti u kompletnu atomarnu BAO.*

Dokaz. Slično kao u Teoremi 5.5, za $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1, \{f_i \mid i \in I\})$ tražena BAO je $\mathcal{B}(B) = (\mathcal{P}(B), \cup, \cap, ^-, \emptyset, B, \{{f_i}^+ \mid i \in I\})$. □

Tvrđenje 5.9 *Svaka normalna BAO se može potopiti u dobru BAO.*

Dokaz. Sledi direktno iz prethodnog tvrđenja i definicije dobre BAO (Definicija 5.7). □

Konačno, dolazimo do tvrđenja pomenutog na početku.

Teorema 5.10 *Stepena struktura svake multialgebre je dobra BAO.*

Dokaz. Neka stepenoj strukturi multialgebre $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ odgovara stepena struktura relacijske strukture $(A, \mathcal{R})$,

$$\mathcal{A}^+ = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A, \{R^{\uparrow} \mid R \in \mathcal{R}\}).$$

Jasno je da je redukt $\mathcal{B}l(\mathcal{A}^+) = (\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^-, \emptyset, A)$ kompletna atomarna BA, a $R^{\uparrow}$ je za svako $R \in \mathcal{R}$ po definiciji kompletno aditivan i normalan operator. □

Jónsson i Tarski su u [23] dokazali da važi i obrnuto, tj. da je svaka dobra BAO stepena struktura neke multialgebre.

Definicija 5.11 Atomična struktura *kompletne atomarne BAO $\mathcal{B}$ sa skupom operatora $\mathcal{F}$, jeste multialgebra*

$$\mathcal{A}t_{\mathcal{B}} = (At_{\mathcal{B}}, \{\hat{f} \mid f \in \mathcal{F}\})$$

gde je za $f \in \mathcal{F}_n$ operacija $\hat{f}$ definisana tako da za sve $b_0, \dots, b_{n-1} \in At_{\mathcal{B}}$ važi

$$\hat{f}(b_0, \dots, b_{n-1}) = \{a \in At_{\mathcal{B}} \mid a \leq f(b_0, \dots, b_{n-1})\}.$$

Teorema 5.12 *Svaka dobra BAO je stepena struktura neke multialgebre.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1, \mathcal{F})$ dobra BAO sa atomičnom strukturom $\mathcal{A}t_{\mathcal{B}}$ i neka je preslikavanje $\varphi : B \to \mathcal{P}(At_{\mathcal{B}})$ definisano na sledeći način: za $b \in B$

$$\varphi(b) = \{a \in At_{\mathcal{B}} \mid a \leq b\}.$$

Pokažimo da je φ izomorfizam iz $\mathcal{B}$ u $\mathcal{A}t_{\mathcal{B}}{}^{+}$. Već smo pomenuli da je za svako x iz kompletne atomarne BA,

$$x = \sum \{a \in At_{\mathcal{B}} \mid a \leq x\}$$

pa to važi i u našem slučaju te odatle vidimo da je φ bijekcija. Treba još pokazati homomorfnost, tj. da za svako $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ važi

$$\varphi(f(b_0, \dots, b_{n-1})) = \hat{f}^{+}(\varphi(b_0), \dots, \varphi(b_{n-1}))$$

Jednakost je trivijalno zadovoljena u slučaju kada je $b_i = 0$ za neko $i \in \{0, \dots, n-1\}$, na osnovu definicije normalnog operatora i $\hat{f}^{+}$, pa možemo sada pretpostaviti da je $b_i \neq 0$ za svako $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

($\subseteq$) Neka je $a \in \varphi(f(b_0, \dots, b_{n-1}))$. Prema definiciji preslikavanja φ, to znači da

$$a \in At_{\mathcal{B}} \text{ i } a \leq f(b_0, \dots, b_{n-1}).$$

Pokažimo da $a \in \hat{f}^{+}(\varphi(b_0), \dots, \varphi(b_{n-1}))$ tj. da za svako $i \in \{0, \dots, n-1\}$ postoji $x_i \in \varphi(b_i)$ tako da je $a \in \hat{f}(x_0, \dots, x_{n-1})$, odnosno, $a \leq f(x_0, \dots, x_{n-1})$.

Kako je $a \leq f(b_0, \dots, b_{n-1})$ i $b_i \in B$ za sve $i \in \{0, \dots, n-1\}$ pa je $b_i = \sum \varphi(b_i)$, to je

$$a \leq f(\varphi(b_0), \dots, \varphi(b_{n-1})),$$

pri čemu je $\varphi(b_i)$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$ neprazan skup jer je $b_i \neq 0$. Neka je $\varphi(b_j) = \{x_{jk} \mid k \in I_j\}$. Znamo da je f kompletno aditivan operator, pa važi da je

$$f(\sum \varphi(b_0), \dots, \sum \varphi(b_{n-1})) = \sum \{f(x_{0k_0}, \dots, x_{(n-1)k_{n-1}}) \mid {}^{k_j \in I_j}_{j \in \{0, \dots, n-1\}}\}.$$

Po definiciji atoma mora važiti

$$a \cdot f(x_{0k_0}, \dots, x_{(n-1)k_{n-1}}) = a \text{ ili } a \cdot f(x_{0k_0}, \dots, x_{(n-1)k_{n-1}}) = 0.$$

Želimo da pokažemo da postoje $x_i \in \varphi(b_i), i \in \{0, \dots, n-1\}$ takvi da je $a \leq f(x_0, \dots, x_{n-1})$ tj. $a \cdot f(x_0, \dots, x_{n-1}) = a$. Pretpostavimo suprotno, da je za sve $x_i \in \varphi(b_i), i \in \{0, \dots, n-1\}$, $a \cdot f(x_0, \dots, x_{n-1}) = 0$. Tada bismo dobili da je

$$a \cdot f(b_0, \dots, b_{n-1}) = a \cdot \sum \{f(x_{0k_0}, \dots, x_{(n-1)k_{n-1}}) \mid k_j \in I_j, j \in \{0, \dots, n-1\}\}$$

$$= \sum a \cdot \{f(x_{0k_0}, \ldots, x_{(n-1)k_{n-1}}) \mid k_j \in I_j, j \in \{0, \ldots, n-1\}\} = 0$$

što je u kontradikciji sa polaznim uslovom da je $a \leq f(b_0, \ldots, b_{n-1})$.

($\supseteq$) Neka je

$$a \in \hat{f}^{+}(\varphi(b_0), \ldots, \varphi(b_{n-1})).$$

To znači da $a \in At_{\mathcal{B}}$ i postoje $x_i \in \varphi(b_i)$ za sve $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tako da je $a \leq f(x_0, \ldots, x_{n-1})$. Iz aditivnosti operatora f sledi njegova monotonost, a iz $x_i \in \varphi(b_i)$ sledi da je $x_i \leq b_i$ za sve $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, pa je

$$a \leq f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leq f(b_0, \ldots, b_{n-1})$$

tj. $a \in \varphi(f(b_0, \ldots, b_{n-1}))$. $\square$

Glava 6

Reprezentacija multialgebri kao uopštenih faktor algebri

Definicija 6.1 *Neka je A neprazan skup i θ relacija ekvivalencije na A. Ako klasu ekvivalencije kojoj pripada x označimo sa x/θ (ili $\theta\langle x\rangle$), onda je $A/\theta = \{x/\theta \mid x \in A\}$.* **Faktor-multialgebra univerzalne algebre** $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ **po modulu** *θ, u oznaci $\mathcal{A}/\theta$, jeste multialgebra tipa $\mathcal{F}$ sa nosačem A/θ pri čemu $f \in \mathcal{F}_n$ interpretiramo na sledeći način:*

$$f^{\mathcal{A}/\theta}(a_0/\theta, \ldots, a_{n-1}/\theta) = \{f^{\mathcal{A}}(b_0, \ldots, b_{n-1})/\theta \mid a_i \theta b_i, i \in \{0, \ldots, n-1\}\} \quad (6.1)$$

Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra, interpretacija funkcijskog simbola $f \in \mathcal{F}_n$ u $\mathcal{A}/\theta$ ima formu:

$$f^{\mathcal{A}/\theta}(a_0/\theta, \ldots, a_{n-1}/\theta) = \{b/\theta \mid b \in f^{\mathcal{A}}(b_0, \ldots, b_{n-1}), a_i \theta b_i, i \in \{0, \ldots, n-1\}\}.$$

Ako je $f^{\mathcal{A}}$ operacija i θ kongruencija, nije teško videti da je tada i $f^{\mathcal{A}/\theta}$ operacija.

Vidimo da je faktor-multialgebra svake univerzalne algebre multialgebra, a G. Grätzer je 1962. godine dokazao da važi i obrnuto.

Teorema 6.2 *([21]) Svaka multialgebra je faktor-multialgebra neke univerzalne algebre po modulu odgovarajuće relacije ekvivalencije, tj. za svaku multialgebru $\mathcal{A}$ postoji univerzalna algebra $\mathcal{B}$ i relacija ekvivalencije θ na A tako da je $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}/\theta$.*

Ovo tvrđenje ćemo dokazati pomoću dve leme, od kojih će jedna dati objašnjenje za slučaj kada imamo konačno mnogo multioperacija, a druga ako ih ima beskonačno mnogo.

Ideja dokaza se sastoji u tome da, ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra i f unarna multioperacija, za $a \in A, f(a)$ iskoristimo kao indeksni skup kako bismo napravili kopije elementa a. Na tom uvećanom skupu definišemo operaciju f tako da je za $x \in f(a), f(a_x) = x$. Slična konstrukcija se koristi i ako f nije unarna multioperacija.

Lema 6.3 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra i g multioperacija na A. Tada postoji multialgebra $\mathcal{A}_g \in \mathcal{F}(A_g)$ i relacija ekvivalencije θ na A_g tako da je $\mathcal{A}_g/\theta \cong \mathcal{A}$ i g je operacija na A_g. Takođe, sve operacije f na A su operacije i na A_g.*

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja: kada je g unarna multioperacija i kada je $n-$arna za $n > 1$.
I slučaj: Neka $g : A \to \mathcal{P}(A)$. Definišimo skup

$$A_g = \{(a, b) \mid a \in A, b \in g(a)\}$$

i, koristeći Aksiomu izbora, unarnu operaciju $g_1 : A \to A$ tako da je $g_1(a) \in g(a)$ za svako $a \in A$, i pomoću nje operaciju g na A_g ($g : A_g \to A_g$) tako da je za sve $(a, b) \in A_g$

$$g((a, b)) = (b, g_1(b)). \tag{6.2}$$

Kako $b \in g(a) \subseteq A$ i $g_1(b) \in g(b)$, to je $(b, g_1(b)) \in A_g$ pa g na Ag jeste operacija. Ako je $f : A^n \to A$ multioperacija na A onda definišemo multioperaciju f na Ag sa

$$f((a_0, b_0), \dots (a_{n-1}, b_{n-1})) = \{(c, g_1(c)) \mid c \in f(a_0, \dots, a_{n-1})\}, \tag{6.3}$$

za sve $(a_0, b_0), \dots (a_{n-1}, b_{n-1}) \in A_g$. Jasno, ako je f operacija na A, onda je operacija i na A_g.

Traženu relaciju ekvivalencije θ na A_g ćemo definisati tako da je

$$(a, b)\theta(c, d) \Leftrightarrow a = c. \tag{6.4}$$

Pokažimo da je preslikavanje $\varphi : A_g/\theta \to A$, definisano sa

$$\varphi((a, b)/\theta) = a \tag{6.5}$$

izomorfizam struktura $\mathcal{A}_g/\theta$ i $\mathcal{A}$.

Iz (6.4) sledi da je φ injektivno preslikavanje, dok je sirjektivnost očigledna. Ostaje da se pokaže da je za svaku $n-$arnu funkciju f i $a_0, \dots, a_{n-1} \in A_g$

$$\varphi(f((a_0, b_0)/\theta, \dots (a_{n-1}, b_{n-1})/\theta)) = f(\varphi((a_0, b_0)/\theta), \dots, \varphi((a_{n-1}, b_{n-1})/\theta)) =$$

$$= f(a_0, \dots, a_{n-1}).$$

Za g je ovo ispunjeno jer je

$$\varphi(g((a, b)/\theta)) \overset{(6.1)}{=} \varphi(\{g(c, d)/\theta \mid (c, d)\theta(a, b)\}) \overset{(6.2),(6.4)}{=}$$

$$= \varphi(\{g(d, g_1(d))/\theta \mid d \in g(a)\}) \overset{(6.5)}{=} \{d \mid d \in g(a)\} = g(a),$$

a i za proizvoljno f dokaz ide slično.
II slučaj: Radi jednostavnosti, pretpostavićemo da je g binarna multioperacija na A ($g : A^2 \to \mathcal{P}(A)$). Neka su elementi od A dobro uređeni $a_0, a_1, \dots, a_\varkappa, \dots$, $\varkappa \in \omega_\alpha$, i $g_1 : A^2 \to A$ operacija takva da je $g_1(a, b) \in g(a, b)$ (kao u Slučaju I koristimo Aksiomu izbora). Definišimo skup

$$A_g = \{(b, b_1, b_2, \dots, b_\varkappa \dots) \mid b \in A, b_\varkappa \in g(b, a_\varkappa) \text{ za sve } \varkappa < \omega_\alpha\}$$

i binarnu operaciju $g : {A_g}^2 \to A_g$ tako da za $\mathrm{b} = (b, b_1, b_2, \dots, b_\varkappa \dots), \mathrm{c} = (c, c_1, c_2, \dots, c_\varkappa \dots) \in A_g$, ako je $\mathrm{c} = a_\varkappa$, važi

$$g(\mathrm{b}, \mathrm{c}) = (b_\varkappa, g_1(b_\varkappa, a_1), g_1(b_\varkappa, a_2), \dots).$$

Iz $b_\varkappa \in A$ i $g_1(b_\varkappa, a_i) \in g(b_\varkappa, a_i), i = 1, 2, \ldots$ sledi da je $g(b, c) \in A_g$. Jasno je da je g operacija jer je za $c = a_\varkappa$, prva koordinata od $g(\mathrm{b}, \mathrm{c})$, a to je $b_\varkappa$, jedinstveni element iz A.

Ako je $f : A^n \to A$ multioperacija na A, onda na A_g definišemo multioperaciju f tako da je za sve $\mathrm{b}^1, \ldots, \mathrm{b}^\mathrm{n} \in A_g$

$$f(\mathrm{b}^1, \ldots, \mathrm{b}^\mathrm{n}) = \{(b, g_1(b, a_1), g_1(b, a_2), \ldots) \mid b \in f(b^1, \ldots, b^n)\},$$

pa ako je f operacija na A, onda je f operacija i na A_g.

Relaciju θ na A_g definišemo na sledeći način:

$$(b, b_1, b_2, \ldots,)\theta(c, c_1, c_2, \ldots) \iff b = c$$

i to je relacija ekvivalencije.

Konačno, definišimo preslikavanje $\varphi : A_g/\theta \to A$ tako da je

$$\varphi((b, b_1, b_2, \ldots)/\theta) = b$$

i pokažimo da je to izomorfizam iz $\mathcal{A}_g/\theta$ u $\mathcal{A}$. Injektivnost sledi iz definicije relacije θ, sirjektivnost je očigledna a homomorfnost se dokazuje slično kao u Slučaju I.

Za slučaj kada je g $n-$arna operacija na $A, n > 2$, i elementi od A^{n-1} su dobro uređeni $a_0, a_1, \ldots, a_\varkappa, \ldots,\ \varkappa < \omega_\alpha$ pri čemu je $a_\varkappa = (a^1_\varkappa, \ldots, a^{n-1}_\varkappa)$, elementi od A_g su ponovo nizovi $\mathrm{b} = (b, b_1, b_2, \ldots, b_\varkappa \ldots)$, $\varkappa < \omega_\alpha$ za koje važi da je za svako $\varkappa < \omega_\alpha$, $b_\varkappa \in g(b, a^1_\varkappa, \ldots, a^{n-1}_\varkappa)$. Ostatak ide analogno slučaju $n = 2$. □

Lema 6.4 *Neka su date multialgebre $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots \mathcal{A}_\varkappa, \ldots,\ \varkappa < \lambda$ i neka je na svakoj $\mathcal{A}_\varkappa$ za svako $\varkappa_1 < \varkappa$ definisana relacija ekvivalencije $\theta^{\varkappa_1}_\varkappa$ takva da je*

$$\mathcal{A}_\varkappa/\theta^{\varkappa_1}_\varkappa \cong \mathcal{A}_{\varkappa_1} \text{ i za } \varkappa_2 < \varkappa_1 < \varkappa \text{ važi } \theta^{\varkappa_1}_\varkappa \cdot \theta^{\varkappa_2}_{\varkappa_1} = \theta^{\varkappa_2}_\varkappa$$

Tada postoji multialtialgebra $\mathcal{A}_\lambda$ i na njoj relacije ekvivalencije $\Phi_\varkappa$, $\varkappa < \lambda$ tako da je

$$\mathcal{A}_\lambda/\Phi_\varkappa \cong \mathcal{A}_\varkappa \text{ za svako } \varkappa < \lambda.$$

Dokaz. Definišimo A_λ kao skup

$$A_\lambda = \{(a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa, \ldots) \mid a_\varkappa \in A_\varkappa, a_{\varkappa_1} = a_\varkappa/\theta^{\varkappa_1}_\varkappa, \varkappa_1 < \varkappa, \varkappa < \lambda\}.$$

Ako su $\mathrm{a}^i = (a^i_1, a^i_2 \ldots) \in A_\lambda, i = 1, 2, \ldots, n$ i f $n-$arna multioperacija na $A_\varkappa, \varkappa < \lambda$, onda je f na A_λ defnisana na sledeći način: za $\mathrm{a}^1, \ldots \mathrm{a}^n$

$$f(\mathrm{a}^1, \ldots, \mathrm{a}^n) = \{(b_1, b_2, \ldots, b_\varkappa, \ldots) \mid b_\varkappa \in f(a^1_\varkappa, \ldots, a^n_\varkappa), \varkappa < \lambda\}.$$

Transfinitnom indukcijom se može pokazati da je $f(\mathrm{a}^1, \ldots, \mathrm{a}^n) \neq \emptyset$.
Relaciju ekvivalencije $\Phi_\varkappa$ na A_λ definišemo tako da je

$$\mathrm{a}^1 \Phi_\varkappa \mathrm{a}^2 \iff a^1_\varkappa = a^2_\varkappa$$

Tada je preslikavanje $\varphi : A_\lambda/\Phi_\varkappa \to A_\varkappa$ definisano sa

$$\varphi((a_1, a_2, \ldots, a_\varkappa, \ldots)/\Phi_\varkappa) = a_\varkappa$$

traženi izomorfizam između struktura $\mathcal{A}_\lambda/\Phi_\varkappa$ i $\mathcal{A}_\varkappa$. □

Posledica 6.5 *Ako je multioperacija f operacija od nekog $A_\varkappa$ pa na dalje, onda je f operacija i na A_λ.*

Dokaz. Sledi iz definicije multioperacije f na A_λ. $\square$

Dokaz Teoreme 6.2. Za multialgebru $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ pokazaćemo konstrukciju tražene univerzalne algebre $\mathcal{B}$ gde ćemo primeniti rezultate Leme 6.3 i Leme 6.4.
Naime, neka je skup svih multioperacija na A dobro uređen

$$f_1, f_2, \ldots, f_\varkappa, \ldots, \quad \varkappa < \omega_\alpha.$$

Za svako $\lambda \leq \omega_\alpha$ ćemo definisati skup A_λ, algebru $\mathcal{A}_\lambda$ sa nosačem A_λ i relaciju ekvivalencije θ_λ na A_λ tako da je

$$\mathcal{A}_\lambda / \theta_\lambda \cong \mathcal{A}$$

i svako $f_\varkappa, \varkappa < \lambda$ je operacija na A_λ. Prvo ćemo uzeti $A_1 = A_{f_1}$ i θ kao u Lemi 6.3, zatim $A_2 = (A_1)_{f_2}$ i θ_2^1 ekvivalencija za koju je $\mathcal{A}_2/\theta_2^1 \cong \mathcal{A}_1$. Relaciju θ_2 definišemo kao kompletnu inverznu sliku od θ_1 po modulu θ_2^1 tj.

$$a\, \theta_2\, b \iff a/\theta_2^1 \ \theta_1 \ b/\theta_2^1.$$

Tako nastavljamo postupak dok ne dođemo do graničnog kardinala ω i tada primenjujemo Lemu 6.4. Dobijamo algebru $\mathcal{B}_\omega$ i nastavljamo $A_\omega = (B_\omega)_{f_\omega}$. Na kraju dolazimo do algebre $\mathcal{A}_{\omega_\alpha}$ i relacije ekvivalencije θ_{ω_α} na A_{ω_α} tako da je $\mathcal{A}_{\omega_\alpha}/\theta_{\omega_\alpha} \cong \mathcal{A}$. $\square$

Posledica 6.6 *Ako je multialgebra $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ konačna (skupovi A i $\mathcal{F}$ su konačni), tada postoji konačna algebra $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ i relacija ekvivalencije $\theta \subseteq B^2$ tako da je $\mathcal{B}/\theta \cong \mathcal{A}$.*

Glava 7

Faktor-multialgebre i fundamentalna relacija multialgebre

U radovima C. Pelea i saradnika najviše pažnje je posvećeno faktor-multialgebrama, pa ćemo se u ovoj i sledećoj Glavi baviti ovom temom. Naime, u Glavi 7 ćemo predstaviti najinteresantnije i najznačajnije rezultate iz [26], [27], [29], [33], a u Glavi 8 iz radova [32] i [36].

Videli smo (Definicija 6.1) da je faktor-multialgebra multialgebre $\mathcal{A} = (A, \mathcal{F})$ po modulu relacije ekvivalencije $\rho \subseteq A^2$, multialgebra

$$\mathcal{A}/\rho = (A/\rho, \mathcal{F})$$

takva da je za $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$

$$f^{\mathcal{A}/\rho}(a_0/\rho, \ldots, a_{n-1}/\rho) = \{b/\rho \mid b \in f^{\mathcal{A}}(b_0, \ldots, b_{n-1}), a_i \rho b_i, 0 \leq i \leq n-1\},$$

odnosno, ako je $\mathcal{A}$ univerzalna algebra

$$f^{\mathcal{A}/\rho}(a_0/\rho, \ldots, a_{n-1}/\rho) = \{b/\rho \mid b = f^{\mathcal{A}}(b_0, \ldots, b_{n-1}), a_i \rho b_i, 0 \leq i \leq n-1\}$$

Takođe smo zaključili (Teorema 6.2) da ne samo da je faktor-multialgebra svake univerzalne algebre multialgebra, nego važi i obrnuto, tj. svaka multialgebra je faktor-algebra neke univerzalne algebre.

U sekciji 1.2. smo napomenuli da identitet na multialgebri može biti zadovoljen u slabom i jakom smislu. Primetimo da ako je na univerzalnoj algebri $\mathcal{B} \in \mathcal{F}(B)$ zadovoljen identitet $t_1 = t_2$, gde su t_1 i t_2 termi tipa $\mathcal{F}$, tada je na multialgebri $\mathcal{B}/\rho$ zadovoljen slab identitet $t_1 \cap t_2 \neq \emptyset$. Naime, ako su t_1 i t_2 $n-$arni termi i $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$, tada je

$$t_1{}^{\mathcal{A}}(b_0, \ldots, b_{n-1}) = t_2{}^{\mathcal{A}}(b_0, \ldots, b_{n-1}) = b \in B,$$

pa

$$b/\rho \in t_1{}^{\mathcal{A}/\rho}(b_0/\rho, \ldots, b_{n-1}/\rho) \cap t_2{}^{\mathcal{A}/\rho}(b_0/\rho, \ldots, b_{n-1}/\rho).$$

Neki identiteti imaju osobinu da ako su zadovoljeni na univerzalnoj algebri, zadovoljeni su u jakom smislu i na njenoj faktor multialgebri. Takvi su npr. identiteti koji opisuju komutativnost.

U nastavku ćemo zbog jednostavnosti istu oznaku koristiti za term i njegovu interpretaciju u multialgebri, kao i za funkcijski simbol i njegovu interpretaciju, a iz konteksta će biti jasno na šta se data oznaka odnosi.

Primer. Neka je $\mathcal{B}$ univerzalna algebra iz $\mathcal{F}(B), n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n$ i $\sigma \in S_n$ (permutacija skupa $\{0, \ldots, n-1\}$), i neka na $\mathcal{B}$ važi identitet

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) = f(x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}).$$

Pokazaćemo da identitet važi i na $\mathcal{B}/\rho$, tj. da je za sve $b_0, \ldots, b_{n-1} \in B$

$$f(b_0/\rho, \ldots, b_{n-1}/\rho) = f(b_{\sigma(0)}/\rho, \ldots, b_{\sigma(n-1)}/\rho).$$

($\subseteq$) Neka je $c/\rho \in f(b_0/\rho, \ldots, b_{n-1}/\rho)$. Po definiciji multioperacije f na $\mathcal{B}/\rho$ sledi da postoje $c_0, \ldots, c_{n-1} \in B$ takvi da

$$b_i \,\rho\, c_i \,, i \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ i } c = f(c_0, \ldots, c_{n-1}).$$

Po pretpostavci

$$c = f(c_0, \ldots, c_{n-1}) = f(c_{\sigma(0)}, \ldots, c_{\sigma(n-1)}),$$

a kako je $b_{\sigma(0)} \,\rho\, c_{\sigma(0)}, \ldots, b_{\sigma(n-1)} \,\rho\, c_{\sigma(n-1)}$, opet po definiciji multioperacije f imamo da

$$c/\rho \in f(b_{\sigma(0)}/\rho, \ldots, b_{\sigma(n-1)}/\rho).$$

($\supseteq$) Na $\mathcal{B}$ takođe važi i

$$f(x_{\sigma^{-1}(0)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n-1)}) = f(x_0, \ldots, x_{n-1}),$$

pa analognim razmatranjem dobijamo i obrnutu inkluziju. □

Pogledajmo sada kako izgledaju faktor-multialgebre nekih poznatih struktura.

1) Faktor-multialgebra semigrupe

Neka je $(S, \cdot)$ semigrupa i ρ relacija ekvivalencije na S. Kako na $(S, \cdot)$ važi asocijativnost, na $(S/\rho, \cdot)$ će ona važiti u slabom smislu. Strukturu $(S/\rho, \cdot)$ na kojoj važi slaba asocijaivnost smo već predstavili u Primeru 1 i to je H_v-semigrupa.

2) Faktor-multialgebra grupe

Neka je $(G, \cdot)$ grupa i ρ relacija ekvivalencije na G. Definišimo na G operacije $/$ i $\backslash$ na sledeći način:

$$b/a = \{y \in G \mid b = y \cdot a\} \text{ i } a\backslash b = \{x \in G \mid b = a \cdot x\}.$$

Operacije su dobro definisane jer u grupi $(G, \cdot)$ jednačine $b = y \cdot a$ i $b = a \cdot x$ uvek imaju rešenje koje je jedinstveno.

Stoga grupu $(G, \cdot)$ možemo posmatrati kao univerzalnu algebru $(G, \cdot, /, \backslash)$ na kojoj važe sledeći identiteti:

$$(x_0 \cdot x_1) \cdot x_2 = x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2),$$

$$x_1 = x_0 \cdot (x_0 \backslash x_1), \quad x_1 = (x_1/x_0) \cdot x_0,$$

$$x_1 = x_0 \backslash (x_0 \cdot x_1), \quad x_1 = (x_1 \cdot x_0)/x_0.$$

Na multialgebri $(G/\rho, \cdot, /, \backslash)$, gornji identiteti će biti zadovoljeni u slabom smislu.

Znamo da je $(G/\rho, \cdot)$ H_v-semigrupa, kao i da je za svako $a \in G$

$$a/\rho \cdot G/\rho = G/\rho = G/\rho \cdot a/\rho,$$

pa je ova hiperstruktura H_v-grupa.

U opštem slučaju H_v-grupa nema jedinični element, ali u našem slučaju, ako je $1 \in G$ jedinica u G, tada za svako $a \in G$ važi

$$a/\rho \,\in\, a/\rho \cdot 1/\rho \,\cap\, 1/\rho \cdot a/\rho,$$

tj. na G/ρ važe slabi identiteti

$$x_0 \cdot 1 \cap x_0 \neq \emptyset \text{ i } 1 \cdot x_0 \cap x_0 \neq \emptyset.$$

Takođe, svaka klasa ekvivalencije $a/\rho \in G/\rho$ ima inverzni element u G/ρ. Naime, ako sa a^{-1} označimo inverzni element od a u G, onda važi

$$1/\rho \,\in\, a/\rho \cdot a^{-1}/\rho \,\cap\, a^{-1}/\rho \cdot a/\rho.$$

Jasno, ako je G Abelova grupa, onda i na H_v-gupi G/ρ važi komutativnost.

3) Faktor-multialgebra prstena

Neka je $(R, +, \cdot)$ prsten i ρ relacija ekvivalencije na R. Kako je $(R, +)$ Abelova grupa, struktura $(R/\rho, +)$ će biti H_v-grupa, kako je $(R, \cdot)$ semigrupa, $(R/\rho, \cdot)$ je H_v-semigrupa i kako na $(R, +, \cdot)$ važi jaka distributivnost, na R/ρ je zadovoljen slab oblik, tj. za sve $a, b, c \in R/\rho$ je

$$a \cdot (b + c) \cap (a \cdot b + a \cdot c) \neq \emptyset,$$

$$(b + c) \cdot a \cap (b \cdot a + c \cdot a) \neq \emptyset$$

što znači da je $(R/\rho, +, \cdot)$ H_v-prsten.

Kako je $(R, +)$ Abelova grupa, multioperacija $+$ će u H_v-prstenu biti komutativna.

4) Faktor-multialgebra mreže

Faktor-multialgebra mreže ne mora biti hipermreža jer na njoj svojstvo apsorpcije nije zadovoljeno u jakom smislu.

Definicija 7.1 *Neka je A neprazan skup i $\mathcal{P}^*(A)$ familija nepraznih podskupova od A. Za relaciju ekvivalencije ρ na A definišimo relaciju $\overline{\overline{\rho}}$ na $\mathcal{P}^*(A)$ tako da je za $X, Y \in \mathcal{P}^*(A)$*

$$X \,\overline{\overline{\rho}}\, Y \iff (\forall x \in X)(\forall y \in Y)\ x \,\rho\, y.$$

Drugim rečima, za $X, Y \in \mathcal{P}^*(A)$ je

$$(X, Y) \in \overline{\overline{\rho}} \iff X \times Y \subseteq \rho.$$

Kako je relacija ρ simetrična i tranzitivna, ove osobine će važiti i za relaciju $\overline{\overline{\rho}}$, međutim, u opštem slučaju $\overline{\overline{\rho}}$ neće biti refleksivna. Na primer, ako posmatramo relaciju $\delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ na A, lako se vidi da je $\overline{\overline{\delta_A}}$ refleksivna samo u slučaju $|A| = 1$.

Teorema 7.2 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ i ρ relacija ekvivalencije na A. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

a) $\mathcal{A}/\rho$ *je univerzalna algebra;*

b) Ako je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a, b, x_0, \ldots, x_{n-1} \in A, a\rho b$, *tada za svako* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ *važi*

$$f(x_0 \ldots x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) \,\overline{\overline{\rho}}\, f(x_0 \ldots x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1});$$

c) Ako je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x_i, y_i \in A, x_i \,\rho\, y_i$ *za sve* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, *tada važi*

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \,\overline{\overline{\rho}}\, f(y_0, \ldots, y_{n-1});$$

d) Ako je $n \in \mathbb{N}, p \in Pol_n^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), x_i, y_i \in A, x_i \,\rho\, y_i$ *za sve* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, *tada važi*

$$p(x_0, \ldots, x_{n-1}) \,\overline{\overline{\rho}}\, p(y_0, \ldots, y_{n-1}).$$

Dokaz.

($a \Rightarrow b$) Neka je $\mathcal{A}/\rho$ univerzalna algebra, $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a, b, x_0, \ldots, x_{n-1} \in A, a\rho b$, i

$$x \in f(x_0 \ldots x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) \text{ i } y \in f(x_0 \ldots x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}).$$

Tada je

$$\begin{aligned} x/\rho &\overset{a)}{=} f(x_0/\rho \ldots x_{i-1}/\rho, a/\rho, x_{i+1}/\rho, \ldots, x_{n-1}/\rho) \\ &\overset{a\rho b}{=} f(x_0/\rho \ldots x_{i-1}/\rho, b/\rho, x_{i+1}/\rho, \ldots, x_{n-1}/\rho) \overset{a)}{=} y/\rho \end{aligned}$$

tj. $x\rho y$, što daje

$$f(x_0 \ldots x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}) \,\overline{\overline{\rho}}\, f(x_0 \ldots x_{i-1}, b, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1}).$$

($b \Rightarrow c$) Neka je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x_i, y_i \in A, x_i \,\rho\, y_i$ za sve $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Tada, koristeći tranzitivnost relacije $\overline{\overline{\rho}}$ dobijamo

$$\begin{array}{rclcl} f(x_0, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}) & \overline{\overline{\rho}} & f(y_0, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}) & \overline{\overline{\rho}} & \\ & \overline{\overline{\rho}} & f(y_0, y_1, x_2 \ldots x_{n-1}) & \overline{\overline{\rho}} & \ldots \\ \ldots & \overline{\overline{\rho}} & f(y_0, y_1, y_2 \ldots x_{n-1}) & \overline{\overline{\rho}} & f(y_0, y_1, y_2 \ldots y_{n-1}). \end{array}$$

($c \Rightarrow a$) Pretpostavimo da je za neke $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a, b, x_0, \ldots, x_{n-1} \in A$

$$a/\rho, b/\rho \in f(x_0/\rho \ldots x_{n-1}/\rho)$$

i pokažimo da je $a/\rho = b/\rho$. Po definiciji multioperacije f važi da postoje $a_0, \ldots, a_{n-1}, b_0, \ldots, b_{n-1} \in A$ tako da je $a_i \,\rho\, x_i \,\rho\, b_i, i \in \{0, \ldots, n-1\}$ i

$$a \in f(a_0, \ldots, a_{n-1}), \; b \in f(b_0, \ldots, b_{n-1}).$$

Kako prema c) važi

$$f(a_0, \ldots, a_{n-1}) \,\overline{\overline{\rho}}\, f(b_0, \ldots, b_{n-1})$$

to po definiciji relacije $\overline{\overline{\rho}}$ znači da je $a\,\rho\,b$.

$(d \Rightarrow c)$ Jasno, jer se interpretacije svih funkcijskih simbola iz $\mathcal{F}$ nalaze u $Pol^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$.

$(c \Rightarrow d)$ Neka važi $c)$ i neka je $n \in \mathbb{N}, p \in Pol_n^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), x_i, y_i \in A, x_i\,\rho\,y_i$ za sve $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Tvrđenje pokazujemo indukcijom po složenosti $n-$arne polinomne funkcije p.

1° Ako je $p = c_a^n, a \in A$, onda je

$$c_a^n(x_0 \ldots x_{n-1}) = a\,\overline{\overline{\rho}}\,a = c_a^n(y_0 \ldots y_{n-1}).$$

2° Ako je $p = e_i^n, i \in \{0, \ldots, n-1\}$, onda je

$$e_i^n(x_0 \ldots x_{n-1}) = x_i\,\overline{\overline{\rho}}\,y_i = c_a^n(y_0 \ldots y_{n-1}).$$

3° Neka tvrđenje važi za $p_0, \ldots, p_{m-1} \in Pol_n^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ i neka je za neko $f \in \mathcal{F}_m$, $p = f(p_0, \ldots, p_{m-1})$. Iz

$$\begin{aligned} x &\in p(x_0 \ldots x_{n-1}) = f(p_0, \ldots, p_{m-1})(x_0 \ldots x_{n-1}) = \\ &= f(p_0(x_0 \ldots x_{n-1}), \ldots, p_{m-1}(x_0 \ldots x_{n-1})) \end{aligned}$$

i analogno,

$$\begin{aligned} y &\in p(y_0 \ldots y_{n-1}) = f(p_0, \ldots, p_{m-1})(y_0 \ldots y_{n-1}) = \\ &= f(p_0(y_0 \ldots y_{n-1}), \ldots, p_{m-1}(y_0 \ldots y_{n-1})), \end{aligned}$$

sledi da postoje $x'_0 \ldots x'_{m-1}, y'_0 \ldots y'_{m-1}$, takvi da

$$x'_i \in p_i(x_0 \ldots x_{n-1}), y_i \in p_i(y_0 \ldots y_{n-1}), i \in \{0, \ldots, m-1\}$$

i

$$x \in f(x'_0 \ldots x'_{m-1}),\ y \in f(y'_0 \ldots y'_{m-1}),$$

a po indukcijskoj pretpostavci je $x'_i\,\rho\,y'_i$, pa koristeći uslov $c)$ dobijamo da je

$$f(x'_0 \ldots x'_{m-1})\,\overline{\overline{\rho}}\,f(y'_0 \ldots y'_{m-1})$$

iz čega direktno sledi da je $x\,\rho\,y$ što je i trebalo pokazati. $\square$

Za relaciju ekvivalencije ρ na semihipergrupi $(S, \cdot)$ kažemo da je **jako regularna** ako za sve $a, b, x \in S$ gde je $a\,\rho\,b$ važi

$$a \cdot x\,\overline{\overline{\rho}}\,b \cdot x \ \text{ i } \ x \cdot a\,\overline{\overline{\rho}}\,x \cdot b.$$

Primenjujući Teoremu 7.2 i to $(b \Rightarrow a)$ u slučaju $n = 2, f(x_0, x_1) = x_0 \cdot x_1$, dobijamo da za sve jako regularne relacije ekvivalencije semihipergrupa važi da je $(S/\rho, \cdot)$ grupoid, a kako se i svojstvo asocijativnosti prenosi, to je semigrupa.

Definicija 7.3 *Skup svih relacija ekvivalencije multialgebre $\mathcal{A}$ za koje je faktor-multialgebra $\mathcal{A}/\rho$ univerzalna algebra označavamo sa $E_{ua}(\mathcal{A})$.*

Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ i $\rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$ operacije na $\mathcal{A}/\rho$ su definisane na sledeći način: ako je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, i $b \in f(a_0, \ldots, a_{n-1})$, tada je

$$f(a_0/\rho, \ldots, a_{n-1}/\rho) = b/\rho.$$

Lema 7.4 *Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, skup $E_{ua}(\mathcal{A})$ je algebarski sistem zatvaranja na A^2.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je presek proizvoljne familije relacija $\{\rho_i \mid i \in I\}$ iz $E_{ua}(\mathcal{A})$ ponovo u $E_{ua}(\mathcal{A})$, koristeći Teoremu 7.2c. Neka je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x_j, y_j \in A, j \in \{0, \ldots, n-1\}$ i

$$(x_j, y_j) \in \bigcap_{i \in I} \rho_i,$$

što znači da za svako $i \in I, j \in \{0, \ldots, n-1\}, (x_j, y_j) \in \rho_i$, pa kako $\rho_i \in E_{ua}(\mathcal{A})$ za sve $i \in I$, to je

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \,\overline{\overline{\rho_i}}\, f(y_0, \ldots, y_{n-1}).$$

Za proizvoljno $x \in f(x_0, \ldots, x_{n-1})$ i $y \in f(y_0, \ldots, y_{n-1})$ važi $x \,\rho_i\, y$ za sve $i \in I$, tj.

$$(x, y) \in \bigcap_{i \in I} \rho_i,$$

što znači da

$$\Big(f(x_0, \ldots, x_{n-1}), f(y_0, \ldots, y_{n-1})\Big) \in \overline{\overline{\bigcap_{i \in I} \rho_i}}.$$

Dakle, $\bigcap_{i \in I} \rho_i \in E_{ua}(\mathcal{A})$.

Pokažimo zatim da je i unija proizvoljne usmerene familije relacija $\{\rho_i \mid i \in I\}$ iz $E_{ua}(\mathcal{A})$ u $E_{ua}(\mathcal{A})$, ponovo koristeći Teoremu 7.2c. Neka je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x_j, y_j \in A, j \in \{0, \ldots n-1\}$ i

$$(x_j, y_j) \in \bigcup_{i \in I} \rho_i, \text{ za sve } j \in \{0, \ldots, n-1\},$$

što znači da za svako $j \in \{0, \ldots, n-1\}$ postoji $i_j \in I$ tako da je

$$(x_j, y_j) \in \rho_{i_j}.$$

Kako je uređeni skup $(\{\rho_i \mid i \in I\}, \subseteq)$ usmeren i $I \neq \emptyset$, postoji $m \in I$ tako da je za sve $j \in \{0, \ldots, n-1\}, \rho_{i_j} \subseteq \rho_m$ tj.

$$(x_j, y_j) \in \rho_m.$$

Kako $\rho_m \in E_{ua}(\mathcal{A})$, važi

$$f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \,\overline{\overline{\rho_m}}\, f(y_0, \ldots, y_{n-1}),$$

što po definiciji relacije $\overline{\overline{\rho_m}}$ znači da za proizvoljne $x \in f(x_0, \ldots, x_{n-1})$ i $y \in f(y_0, \ldots, y_{n-1})$ važi

$$(x, y) \in \rho_m \subseteq \bigcup_{i \in I} \rho_i.$$

Dakle,

$$\Big(f(x_0, \ldots, x_{n-1}), f(y_0, \ldots, y_{n-1})\Big) \in \overline{\overline{\bigcup_{i \in I} \rho_i}},$$

tj. $\bigcup_{i \in I} \rho_i \in E_{ua}(\mathcal{A})$. $\square$

Posledica 7.5 *Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), R \subseteq A^2$, najmanja relacija ekvivalencije na A koja sadrži relaciju R i za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra je*

$$\alpha(R) = \bigcap\{\rho \in E_{ua}(\mathcal{A}) \mid R \subseteq \rho\}.$$

Već smo konstatovali da relacija $\overline{\overline{\delta_A}}$ nije refleksivna ako skup A ima više od jednog elementa, pa u tom slučaju ako $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ nije univerzalna algebra, ni δ_A nije najmanji element u $E_{ua}(\mathcal{A})$.

Definicija 7.6 Fundamentalna relacija *na multialgebri $\mathcal{A}$ je najmanji element familije $E_{ua}(\mathcal{A})$, i označavaćemo je sa α^* (ili $\alpha^*_{\mathcal{A}}$).*

Reprezentacija fundamentalne relacije multialgebre

Definicija 7.7 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$. Relacija α' na nepraznom skupu A je tranzitivno zatvaranje relacije $\alpha \subseteq A^2$ definisane na sledeći način: za $x, y \in A$,*

$$x\alpha y \iff \begin{array}{l} \textit{postoje } n \in \mathbb{N}, p \in Pol_n^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), a_0, \ldots, a_{n-1} \in A \\ \textit{tako da } x, y \in p(a_0, \ldots, a_{n-1}). \end{array}$$

Primetimo da je relacija α refleksivna (za $p = e_0^1, a \in p(a)$ za svako $a \in A$) i refleksivna, te je njeno tranzitivno zatvaranje relacija ekvivalencije na A.

Lema 7.8 *Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), a, b \in A, f \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$, onda*

$$\textit{iz} \quad a\,\alpha'\,b \quad \textit{sledi} \quad f(a)\,\overline{\overline{\alpha'}}\,f(b).$$

Dokaz. Neka je $a\,\alpha'\,b$. To znači da postoje $m \in \mathbb{N}, z_0, \ldots, z_{m-1}$ tako da je

$$a = z_0\ \alpha\ z_1\ \alpha\ \ldots\ \alpha\ z_{m-1} = b.$$

Za proizvoljno $j \in \{0, \ldots, m-2\}$ imamo da je $z_j\ \alpha\ z_{j+1}$ tj. postoje $n_j \in \mathbb{N}, p_j \in Pol_{n_j}^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), a_0, \ldots, a_{n_j-1} \in A$ tako da

$$z_j, z_{j+1} \in p_j(a_0, \ldots, a_{n_j-1}).$$

Tada

$$f(z_j), f(z_{j+1}) \subseteq f(p_j(a_0, \ldots, a_{n_j-1})),$$

pa za proizvoljne $u_j \in f(z_j), u_{j+1} \in f(z_{j+1})$ važi

$$u_j, u_{j+1} \in f(p_j(a_0, \ldots, a_{n_j-1}))$$

a kako je $f \circ p_j \in Pol_{n_j}^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$, to je $u_j\ \alpha\ u_{j+1}$. Sada je

$$u_0\ \alpha\ u_1\ \alpha\ \ldots\ \alpha\ u_{m-1},$$

odnosno $u_0 \ \alpha' \ u_{m-1}$, i $u_0 \in f(z_0) = f(a)$, $u_{m-1} \in f(z_{m-1}) = f(b)$ proizvoljni, pa dobijamo

$$f(a) \ \overline{\overline{\alpha'}} \ f(b).$$

□

Lema 7.9 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ i ρ relacija ekvivalencije na A takva da je $\mathcal{A}/\rho$ univerzalna algebra. Tada za svako $n \in \mathbb{N}, p \in Pol_n^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ važi da*

$$\textit{ako} \quad x, y \in p(a_0, \ldots, a_{n-1}) \quad \textit{onda} \quad x \ \rho \ y.$$

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati indukcijom po složenosti $n-$arne polinomne funkcije p, $n \in \mathbb{N}$.

1° Ako je $p = c_a^n, a \in A$, onda $x, y \in c_a^n(a_0, \ldots a_{n-1}) = a$ daje $x = a = y$, pa $x \, \rho \, y$.

2° Ako je $p = e_i^n, i \in \{0, \ldots, n-1\}$, onda $x, y \in e_i^n(a_0, \ldots, a_{n-1}) = a_i$ daje $x = a_i = y$ što opet znači $x \, \rho \, y$.

3° Neka za $p_0, \ldots, p_{m-1} \in Pol_n^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ važi trvđenje i neka je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_m$. Pokažimo da tvrđenje važi i za $f(p_0, \ldots, p_{m-1}) \in Pol_n^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$. Ako

$$\begin{aligned} x, y \ &\in \ f(p_0, \ldots p_{m-1})(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \\ &= \ f(p_0(a_0, \ldots, a_{n-1}), \ldots, p_{m-1}(a_0, \ldots, a_{n-1})) \end{aligned}$$

za neke $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, to znači da postoje $x_0, \ldots, x_{m-1}, y_0, \ldots, y_{m-1} \in A$ takvi da je $x_i, y_i \in p_i(a_0, \ldots, a_{n-1}), i \in \{0, \ldots, m-1\}$ i

$$x \in f(x_0, \ldots, x_{m-1}), \quad y \in f(y_0, \ldots, y_{m-1}).$$

Po indukcijskoj pretpostavci, za sve $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ važi $x_i \ \rho \ y_i$, i kako je $\mathcal{A}/\rho$ univerzalna algebra pa je

$$f(x_0/\rho, \ldots, x_{m-1}/\rho) = x/\rho \quad \text{i} \quad f(y_0/\rho, \ldots, y_{m-1}/\rho) = y/\rho,$$

to je $x/\rho = y/\rho$ tj. $x \, \rho \, y$. □

Teorema 7.10 *Za $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, relacija α' iz Definicije 7.7 je najmanja relacija ekvivalencije na A za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra, tj. α' je fundamentalna relacija na multialgebri $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Već smo zaključili da je α' relacija ekvivalencije na A. Pokažimo da je $\mathcal{A}/\alpha'$ univerzalna algebra. Neka su $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, x, y, a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ i

$$x/\alpha', y/\alpha' \in f(a_0/\alpha', \ldots, a_{n-1}/\alpha').$$

Tada postoje $x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1} \in A$ takvi da

$$x \in f(x_0, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{i} \quad y \in f(y_0, \ldots, y_{n-1}) \tag{7.1}$$

pri čemu je

$$x_0 \ \alpha' \ a_0 \ \alpha' \ y_0, \ \ldots \ x_{n-1} \ \alpha' \ a_{n-1} \ \alpha' \ y_{n-1}$$

Kako je $x_i \; \alpha' \; y_i$ i $f(c^1_{y_0}, \dots, c^1_{y_{i-1}}, e^1_0, c^1_{x_{i+1}}, \dots, c^1_{x_{n-1}}) \in Pol^A_1(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ za svako $i \in \{0, \dots, n-1\}$, to primenom Leme 7.8 dobijamo

$$\begin{array}{rcl} f(x_0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}) & \overline{\overline{\alpha'}} & f(y_0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}) \\ f(y_0, x_1, x_2 \dots x_{n-1}) & \overline{\overline{\alpha'}} & f(y_0, y_1, x_2 \dots x_{n-1}) \\ & \dots & \\ f(y_0, y_1, \dots, y_{n-2}, x_{n-1}) & \overline{\overline{\alpha'}} & f(y_0, y_1, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}). \end{array}$$

Imajući u vidu tranzitivnost relacije $\overline{\overline{\alpha'}}$ i (7.1), dobijamo da je $x\alpha' y$ tj.

$$x/\alpha' = y/\alpha',$$

što znači da je f operacija na A/α' a $\mathcal{A}/\alpha'$ univerzalna algebra.

Pokažimo još da je α' najmanja relacija na A sa traženim osobinama. Naime, neka je ρ relacija ekvivalencije na A i neka je $\mathcal{A}/\rho$ univerzalna algebra. Tada je $\alpha \subseteq \rho$ jer ako $x\alpha y, x, y \in A$, po definiciji

$$\text{postoji } n \in \mathbb{N}, p \in Pol^A_n(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), a_0, \dots, a_{n-1} \in A \text{ da } x, y \in p(a_0, \dots, a_{n-1}),$$

a prema Lemi 7.9 tada je $x \, \rho \, y$. Kako je α' najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži α, to je $\alpha' \subseteq \rho$. $\square$

Glava 8

Faktor-multialgebre i identiteti

8.1 Faktor-multialgebre i jedan identitet

Ako na multialgebri $\mathcal{A}$ važi slab identitet $q \cap r \neq \emptyset$, $q, r \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X), n \in \mathbb{N}$, tada α^* sadrži relaciju

$$R_{qr} = \{(x, y) \in A^2 \mid x \in q(a_0, \dots, a_{n-1}), y \in r(a_0, \dots, a_{n-1}), a_0, \dots, a_{n\text{-}1} \in A\}.$$

Naime, ako $(x, y) \in R_{qr}$, onda postoje $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ tako da je

$$x \in q(a_0, \dots, a_{n-1}), \quad y \in r(a_0, \dots, a_{n-1}),$$

a kako znamo da postoji $b \in A$ takvo da je

$$b \in q(a_0, \dots, a_{n-1}) \cap r(a_0, \dots, a_{n-1}),$$

onda je $x \; \alpha \; b \; \alpha \; y$, tj. $x \; \alpha^* \; y$.

Tada na $\mathcal{A}/\alpha^*$ (koja je univerzalna algebra) važi jak identitet $q = r$ jer za $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ važi da je

$$q(a_0/\alpha^*, \dots, a_{n-1}/\alpha^*) = b_q/\alpha^*, \quad b_q \in q(a_0, \dots, a_{n-1}),$$
$$r(a_0/\alpha^*, \dots, a_{n-1}/\alpha^*) = b_r/\alpha^*, \quad b_q \in r(a_0, \dots, a_{n-1}),$$

pa je $b_q/\alpha^* = b_r/\alpha^*$ jer

$$(b_q, b_r) \in R_{qr} \subseteq \alpha^*.$$

U slučaju da na multialgebri $\mathcal{A}$ nije zadovoljen slab identitet $q \cap r \neq \emptyset$, a želimo da faktor-multialgebra od $\mathcal{A}$ bude univerzalna algebra na kojoj će važiti identitet $q = r$, koristićemo odgovarajuću relaciju iz $E_{ua}(\mathcal{A})$ koja sadrži R_{qr}. I obrnuto, svaka relacija $\rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$ za koju je na $\mathcal{A}/\rho$ zadovoljen identitet $q = r$, sadrži relaciju R_{qr}. Stoga je

$$\alpha(R_{qr}) = \bigcap \{\rho \in E_{ua}(\mathcal{A}) \mid R_{qr} \subseteq \rho\}$$

najmanja relacija ekvivalencije za koju je $\mathcal{A}/\alpha(R_{qr})$ univerzalna algebra na kojoj važi identitet $q = r$. Ovu relaciju ćemo još označavati sa α^*_{qr}.

Primetimo da je $\alpha^* = \alpha(\emptyset) = \alpha(\delta_A) = \alpha^*_{x_0 x_0}$ (x_0 je promenljiva iz X) i $\alpha^* \subseteq \alpha^*_{qr}$ za sve $q, r \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$.

Lema 8.1 *Kompozicija dve polinomne funkcije iz $Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ je polinomna funkcija iz $Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$.*

Dokaz. Neka $f, p \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$. Tada $f \circ p : \mathcal{P}^*(A) \to \mathcal{P}^*(A)$. Tvrđenje ćemo pokazati indukcijom po složenosti polinomne funkcije.

1° Ako je $f = c_a^1, a \in A$ i $X \in \mathcal{P}^*(A)$, tada je

$$f \circ p(X) = c_a^1(p(X)) = a = c_a^1(X),$$

pa je $f \circ p = c_a^1 \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$.

2° Ako je $f = e_0^1$ i $X \in \mathcal{P}^*(A)$, tada je

$$f \circ p(X) = e_0^1(p(X)) = p(X),$$

pa je $f \circ p = p \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$.

3° Neka je $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n$ i pretpostavimo da za $f^0, \ldots, f^{n-1} \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ važi da je

$$f^0 \circ p = p_0 \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), \ldots f^{n-1} \circ p = p_{n-1} \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})).$$

Neka je $f = f_n(f^0, \ldots, f^{n-1})$. Važi:

$$\begin{aligned}(f \circ p)(X) &= f_n(f^0, \ldots, f^{n-1})(p(X)) = f_n(f^0(p(X)), \ldots, f^{n-1}(p(X))) = \\ &= f_n(p_0(X), \ldots, p_{n-1}(X)) = f_n(p_0, \ldots, p_{n-1})(X),\end{aligned}$$

pa je $f \circ p = f_n(p_0, \ldots, p_{n-1}) \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ □

Teorema 8.2 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), n \in \mathbb{N}, q, r \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$. Relacija α_{qr}^* je tranzitivno zatvaranje relacije $\alpha_{qr} \subseteq A^2$ definisane na sledeći način: za $x, y \in A$*

$$\begin{aligned} x\alpha_{qr}y \iff & \textit{ postoje } p \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), a_0, \ldots a_{n-1} \in A \textit{ tako da} \\ & x \in p(q(a_0, \ldots, a_{n-1})), y \in p(r(a_0, \ldots, a_{n-1})) \textit{ ili} \\ & x \in p(r(a_0, \ldots, a_{n-1})), y \in p(q(a_0, \ldots, a_{n-1})). \end{aligned}$$

Dokaz. Označimo tranzitivno zatvaranje relacije α_{qr} sa α'_{qr} i pokažimo da je $\alpha'_{qr} = \alpha^*_{qr}$. Dokaz ćemo sprovesti u nekoliko koraka.

(1. korak) Pokazujemo da je α'_{qr} relacija ekvivalencije koja sadrži R_{qr}. Refleksivnost relacije α_{qr} je zadovoljena jer za svako $a \in A$, $a\, \alpha_{qr}\, a$ zbog polinomne funkcije $p = c_0^1$. Simetričnost relacije α_{qr} je očigledna, pa je α'_{qr} najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži α_{qr}. Ako $x\ R_{qr}\ y$, onda za $p = e_0^1$ dobijamo $x\alpha_{qr}y$ pa je $R_{qr} \subseteq \alpha_{qr} \subseteq \alpha'_{qr}$.

(2. korak) Neka je $f \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), a, b \in A$ i $a\, \alpha'_{qr}\, b$. Pokazaćemo da je $f(a)\overline{\overline{\alpha'_{qr}}}f(b)$. Naime, iz $a\, \alpha'_{qr}\, b$ sledi da postoje $z_0, \ldots, z_{m-1} \in A$ takvi da je

$$a = z_0\, \alpha_{qr}\, z_1\, \alpha_{qr} \ldots \alpha_{qr}\, z_{m-1} = b.$$

Za proizvoljno $j \in \{0, \ldots, m-2\}$ važi $z_j\, \alpha_{qr}\, z_{j+1}$ što znači da postoji $p \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ i $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ tako da

$$\begin{aligned} & z_j \in p(q(a_0, \ldots, a_{n-1})) \quad , \quad z_{j+1} \in p(r(a_0, \ldots, a_{n-1})) \quad \text{ili} \\ & z_j \in p(r(a_0, \ldots, a_{n-1})) \quad , \quad z_{j+1} \in p(q(a_0, \ldots, a_{n-1})). \end{aligned}$$

Prema Lemi 8.1 $p' = f \circ p \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ pa je

$$\begin{array}{lll} f(z_j) \subseteq p'(q(a_0,\ldots,a_{n-1})) & , & f(z_{j+1}) \subseteq p'(r(a_0,\ldots,a_{n-1})) \quad \text{ili} \\ f(z_j) \subseteq p'(r(a_0,\ldots,a_{n-1})) & , & f(z_{j+1}) \subseteq p'(q(a_0,\ldots,a_{n-1})) \end{array}$$

što znači da za svako $u_j \in f(z_j)$ i $u_{j+1} \in f(z_{j+1})$ važi $u_j \, \alpha_{qr} \, u_{j+1}$. Kako ovo važi za sve $j \in \{0,\ldots,m-2\}$, to je

$$u_0 \; \alpha'_{qr} \; u_{m-1},$$

pri čemu je $u_0 \in f(z_0) = f(a)$ i $u_{m-1} \in f(z_{m-1}) = f(b)$, tj.

$$f(a)\overline{\overline{\alpha'_{qr}}}f(b).$$

(3. korak) Dalje pokazujemo da je faktor-multialgebra $\mathcal{A}/\alpha'_{qr}$ univerzalna algebra koja zadovoljava identitet $q = r$. Koristićemo Teoremu 7.2b. Neka je $n \in \mathcal{F}_n, a, b, x_0, \ldots, x_{n-1} \in A$ i $a \, \alpha'_{qr} \, b$. Za svako $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ možemo uzeti

$$f(c^1_{x_0},\ldots,c^1_{x_{i-1}},e^1_0,c^1_{x_{i+1}},\ldots c^1_{x_{n-1}}) \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$$

i primeniti *2. korak*. Dobijamo da je

$$f(x_0,\ldots,x_{i-1},a,x_{i+1},\ldots,x_{n-1}) \; \overline{\overline{\alpha'_{qr}}} \; f(x_0,\ldots,x_{i-1},b,x_{i+1},\ldots,x_{n-1}).$$

Znamo da $R_{qr} \subseteq \alpha'_{qr}$, pa $\mathcal{A}/\alpha'_{qr}$ zadovoljava identitet $q = r$.

(4. korak) Ostalo je još da se pokaže da je α'_{qr} najmanja među relacijama iz $E_{ua}(\mathcal{A})$ za koje faktor-multialgebra zadovoljava identitet $q = r$. Neka je ρ jedna takva relacija. Pokažimo da je $\alpha'_{qr} \subseteq \rho$, i to tako što ćemo dokazati da je $\alpha_{qr} \subseteq \rho$, a znamo da je α'_{qr} najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži α_{qr}.

Neka je $x \, \alpha_{qr} \, y$ i $p \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$ takvi da je, bez umanjenja opštosti,

$$x \in p(q(a_0,\ldots,a_{n-1})), \; y \in p(r(a_0,\ldots,a_{n-1})).$$

Da je $x \, \rho \, y$, dokazaćemo indukcijom po složenosti polinomne funkcije p.

1° Ako je $p = c^1_a, a \in A$, onda je $x = a = y$ pa zbog refleksivnosti relacije ρ važi $x \, \rho \, y$.

2° Ako je $p = e^1_0$ onda je $x \in q(a_0,\ldots,a_{n-1}), \; y \in r(a_0,\ldots,a_{n-1})$ pa $(x,y) \in R_{qr} \subseteq \rho$.

3° Pretpostavimo da tvrđenje važi za $p_0,\ldots,p_{m-1}$ $(m \in \mathbb{N})$ i neka je $p = f(p_0,\ldots,p_{m-1})$ za neko $f \in \mathcal{F}_m$. Tada je

$$\begin{array}{rcl} x & \in & p(q(a_0,\ldots,a_{n-1})) = f(p_0,\ldots,p_{m-1})(q(a_0,\ldots,a_{n-1})) = \\ & = & f(p_0(q(a_0,\ldots,a_{n-1})),\ldots,p_{m-1}(q(a_0,\ldots,a_{n-1}))), \quad \text{i} \\ y & \in & p(r(a_0,\ldots,a_{n-1})) = f(p_0,\ldots,p_{m-1})(r(a_0,\ldots,a_{n-1})) = \\ & = & f(p_0(r(a_0,\ldots,a_{n-1})),\ldots,p_{m-1}(r(a_0,\ldots,a_{n-1}))). \end{array}$$

pa postoje $x_i \in p_i(q(a_0,\ldots,a_{n-1})), \; y_i \in p_i(r(a_0,\ldots,a_{n-1})), \; i \in \{0,\ldots,n-1\}$ takvi da je

$$x \in f(x_0,\ldots,x_{n-1}) \text{ i } y \in f(y_0,\ldots,y_{n-1}).$$

Po indukcijskoj pretpostavci, $x_i\,\rho\,y_i$ za sve $i \in \{0,\dots,n-1\}$, a kako $\rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$, možemo iskoristiti ekvivalentan uslov iz Teoreme 7.2 i dobijamo da je

$$f(x_0,\dots,x_{n-1})\;\overline{\overline{\rho}}\;f(y_0,\dots,y_{n-1})$$

pa je $x\,\rho\,y$. □

Posledica 8.3 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ i neka je na A definisana binarna relacija α' na sledeći način: za $x, y \in A$*

$$x\;\alpha'\;y \iff \exists p \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), \exists a \in A, \quad x, y \in p(a).$$

Tada je fundamentlna relacija α^* multialgebre $\mathcal{A}$ tranzitivno zatvaranje relacije α'.

Dokaz. Direktno sledi iz Teoreme 8.2 i činjenice da je $\alpha^* = \alpha^*_{x_0x_0}$. □

8.2 Faktor-multialgebre po modulu relacije kongruencije i identitet

Neka je $\mathcal{B} \in (B, \mathcal{F})$ univerzalna algebra tipa $\mathcal{F}$ i $\rho \subseteq B^2$ relacija ekvivalencije. Sa ρ_{qr}, gde su $q, r \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$, označavaćemo najmanju relaciju ekvivalencije na B koja sadrži ρ i sve parove

$$\Big(q(b_0,\dots,b_{n-1}), r(b_0,\dots,b_{n-1})\Big),$$

$b_0,\dots,b_{n-1} \in B$, a sa $\theta(\rho_{qr})$ najmanju relaciju kongruencije na $\mathcal{B}$ sa istom osobinom. Za $x, y \in B$

$$\begin{array}{lcl} x\,\theta(\rho_{qr})\,y & \iff & \text{postoje } m \in \mathbb{N}\setminus\{0\},\ \text{niz } x = t_0, t_1, \dots, t_m = y, \\ & & \text{parovi } (x_i, y_i) \in \rho \cup \{(q(b_0,\dots,b_{n-1}), r(b_0,\dots,b_{n-1})) \mid \\ & & b_0,\dots,b_{n-1} \in B\} \\ & & \text{i unarne polinomne funkcije } p_i,\ i \in \{1,\dots,m\} \\ & & \text{takve da } \{p_i(x_i), p_i(y_i)\} = \{t_{i-1}, t_i\},\ i \in \{1,\dots,m\}. \end{array}$$

Ako je $q = r = x_0$, tada je $\theta(\rho_{qr})$ najmanja relacija kongruencije koja sadrži ρ, i obeležavamo je sa $\theta(\rho)$.

Lema 8.4 *Ako je $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ univerzalna algebra, ρ relacija ekvivalencije na B, $n \in \mathbb{N}, p \in Pol_n^{B/\rho}(\mathcal{P}^*(\mathcal{B}/\rho)), x, y, z_0, \dots, z_{n-1} \in B$ takvi da važi*

$$x/\rho,\ y/\rho\ \in\ p(z_0/\rho,\dots,z_{n-1}/\rho),$$

onda je $x\,\theta(\rho)\,y$.

Dokaz. Tvrđenje ćemo dokazati indukcijom po složenosti $n-$arne polinomne funkcije p.

1° Ako je $p = c^n_{b/\rho}, b \in B$, onda je $x/\rho = b/\rho = y/\rho$, pa kako je $\rho \subseteq \theta(\rho)$, onda $x\,\theta(\rho)\,y$.

2° Ako je $p = e_i^n$, za neko $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Tada je $x/\rho = z_i/\rho = y/\rho$, pa na isti način dobijamo da je $x\,\theta(\rho)\,y$.

3° Pretpostavimo da tvrđenje važi za $p_0, \ldots, p_{m-1}, m \in \mathbb{N}$ i neka je $p = f(p_0, \ldots, p_{m-1})$ za neko $f \in \mathcal{F}_n$, i

$$\begin{aligned} x/\rho\,, y/\rho \;&\in\; p(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho) \;=\; f(p_0, \ldots, p_{m-1})(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho) \;= \\ &=\; f(p_0(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho), \ldots, p_{m-1}(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho)). \end{aligned}$$

U tom slučaju postoje $x_0, \ldots, x_{m-1}, y_0, \ldots, y_{m-1} \in B$ takvi da je

$$x_i/\rho,\; y_i/\rho \;\in\; p_i(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho), \quad i \in \{0, \ldots, m-1\} \tag{8.1}$$

pa

$$x/\rho \in f(x_0/\rho, \ldots, x_{m-1}/\rho), \quad y/\rho \in f(y_0/\rho, \ldots, y_{m-1}/\rho),$$

što znači da postoje elementi $x'_0, \ldots, x'_{m-1}, y'_0, \ldots, y'_{m-1} \in B$ takvi da je za sve $i \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$x_i\,\rho\,x'_i,\; y_i\,\rho\,y'_i \quad \text{i} \quad x = f(x'_0, \ldots, x'_{m-1}), y = f(y'_0, \ldots, y'_{m-1}).$$

Prema indukcijskoj hipotezi, iz uslova (8.1) sledi da je $x_i\,\theta(\rho)\,y_i$ za sve $i \in \{0, \ldots, m-1\}$, a kako je $\rho \subseteq \theta(\rho)$ i $\theta(\rho)$ je tranzitivna relacija, važi i $x'_i\,\theta(\rho)\,y'_i$. Imajući u vidu još da je $\theta(\rho)$ kongruencija na $\mathcal{B}$, važi da je

$$f(x'_0, \ldots, x'_{m-1})\,\theta(\rho)\,f(y'_0, \ldots, y'_{m-1})$$

tj. $x\,\theta(\rho)\,y$. □

Lema 8.5 *Ako je $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ univerzalna algebra, ρ relacija ekvivalencije na B, $n \in \mathbb{N}, q, r \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X), p \in Pol_1^{B/\rho}(\mathcal{P}^*(\mathcal{B}/\rho))$ i $x, y, z_0, \ldots, z_{n-1} \in B$ takvi da*

$$x/\rho \in p(q(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho)) \quad i \quad y/\rho \in p(r(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho)),$$

onda je $x\,\theta(\rho_{qr})\,y$.

Dokaz. Tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti unarne polinomne funkcije p.

1° Ako je $p = c^1_{b/\rho}, b \in B$, onda je $x/\rho = b/\rho = y/\rho$ pa $(x, y) \in \rho \subseteq \theta(\rho_{qr})$.

2° Ako je $p = e^1_0$, onda je

$$x/\rho \in q(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho) \quad \text{i} \quad y/\rho \in r(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho).$$

Znamo da

$$\begin{aligned} &q(z_0, \ldots, z_{n-1})/\rho \in q(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho) \;\text{ i} \\ &r(z_0, \ldots, z_{n-1})/\rho \in r(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho) \end{aligned}$$

pa koristeći Lemu 8.4 dobijamo da je

$$x\,\theta(\rho)\,q(z_0, \ldots, z_{n-1}) \quad \text{i} \quad y\,\theta(\rho)\,r(z_0, \ldots, z_{n-1}).$$

Imajući u vidu da je $\theta(\rho) \subseteq \theta(\rho_{qr})$, da je

$$q(z_0, \ldots, z_{n-1})\,\theta(\rho_{qr})\,r(z_0, \ldots, z_{n-1}),$$

i da je $\theta(\rho_{qr})$ tranzitivna relacija, dobijamo da je $x\,\theta(\rho_{qr})\,y$.

3° Pretpostavimo da je tvrđenje zadovoljeno za $p_0, \ldots, p_{m-1}, m \in \mathbb{N}$, i $p = f(p_0, \ldots, p_{m-1})$ za $f \in \mathcal{F}_m$. Znamo da

$$\begin{aligned} x/\rho \;\in\; & p(q(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho)) = f(p_0, \ldots, p_{m-1})(q(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho)) = \\ = \; & f(p_0(q(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho)), \ldots, p_{m-1}(q(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho))) \end{aligned}$$

pa postoje $x_0, \ldots, x_{m-1} \in B$, takvi da je za sve $i \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$x_i/\rho \in p_i(q(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho)) \tag{8.2}$$

$$\text{i} \quad x/\rho \in f(x_0/\rho, \ldots, x_{m-1}/\rho).$$

Analogno, postoje $y_0, \ldots, y_{m-1} \in B$, da je za sve $i \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$y_i/\rho \in p_i(r(z_0/\rho, \ldots, z_{n-1}/\rho)) \tag{8.3}$$

$$\text{i} \quad y/\rho \in f(y_0/\rho, \ldots, y_{m-1}/\rho).$$

Po definiciji multioperacije f na $\mathcal{B}/\rho$, postoje $x'_0, \ldots x'_{m-1}, y'_0, \ldots y'_{m-1} \in B$, da je $x_i\,\rho\,x'_i,\;\; y_i\,\rho\,y'_i,\; i \in \{0, \ldots, m-1\}$ i

$$x = f(x'_0, \ldots, x'_{m-1}), \quad y = f(y'_0, \ldots, y'_{m-1}),$$

a po indukcijskoj pretpostavci, iz uslova (8.2) i (8.3) sledi da je za svako $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ $x_i\,\theta(\rho_{qr})\,y_i$. Kako je $\rho \subseteq \theta(\rho_{qr})$ i kako je $\theta(\rho_{qr})$ tranzitivna relacija, dobijamo da je za svako $i \in \{0, \ldots, m-1\}$

$$x'_i\,\theta(\rho_{qr})\,y'_i$$

pa primenjujući osobine relacije kongruencije $\theta(\rho_{qr})$ dobijamo

$$f(x'_0, \ldots, x'_{m-1})\,\theta(\rho_{qr})\,f(y'_0, \ldots, y'_{m-1})$$

tj. $x\,\theta(\rho_{qr})\,y$. □

Teorema 8.6 *Ako je $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ univerzalna algebra, ρ relacija ekvivalencije na B, $n \in \mathbb{N}, q, r \in T_{\mathcal{F}}^{(n)}(X)$, onda važi*

$$(\mathcal{B}/\rho)/\alpha^*_{qr} \cong \mathcal{B}/\,\theta(\rho_{qr})\,.$$

Dokaz. Definišimo preslikavanje $h : (B/\rho)/\alpha^*_{qr} \to B/\,\theta(\rho_{qr})$ tako da je za svako $a \in B$,

$$h((a/\rho)/\alpha^*_{qr}) = a/\,\theta(\rho_{qr})\,.$$

Da je h izomorfizam, pokazaćemo postepeno.

(1.korak) Pokažimo prvo da je h dobro definisano. Neka za $a, b \in B$ važi da je $a/\rho\,\alpha^*_{qr}\,b/\rho$. Tada postoje $m \in \mathbb{N}, z_0, \ldots z_m \in B$ takvi da je

$$a/\rho = z_0/\rho\,\alpha_{qr}\,z_1/\rho\,\alpha_{qr} \ldots \alpha_{qr}\,z_m/\rho = b/\rho,$$

tj. za svako $i \in \{1, \ldots, m\}$ postoje $p_i \in Pol_1^{B/\rho}(\mathcal{P}^*(\mathcal{B}/\rho))$ i $z^i_0, \ldots, z^i_{n-1} \in B$ da

$$\begin{aligned} & z_{i-1}/\rho \in p_i(q(z^i_0/\rho, \ldots, z^i_{n-1}/\rho)), \qquad z_i/\rho \in p_i(r(z^i_0/\rho, \ldots, z^i_{n-1}/\rho)) \\ \text{ili} \quad & z_{i-1}/\rho \in p_i(r(z^i_0/\rho, \ldots, z^i_{n-1}/\rho)), \qquad z_i/\rho \in p_i(q(z^i_0/\rho, \ldots, z^i_{n-1}/\rho)). \end{aligned}$$

U oba slučaja, primenjujući Lemu 8.5 dobijamo da za svako $i \in \{1, \dots, m\}$ $z_{i-1}\,\theta(\rho_{qr})\,z_i$ pa je zbog tranzitivnosti relacije $\theta(\rho_{qr})$, $z_0\,\theta(\rho_{qr})\,z_m$. Kako je

$$(a, z_0) \in \rho \subseteq \theta(\rho_{qr}) \quad \text{i} \quad (z_m, b) \in \rho \subseteq \theta(\rho_{qr}),$$

dobijamo da je $a\,\theta(\rho_{qr})\,b$.

(2.korak) Dalje pokazujemo da je h injektivno preslikavanje. Neka je sada $a\,\theta(\rho_{qr})\,b$, za neke $a, b \in B$. To znači da postoje $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, niz $a = t_0, t_1, \dots, t_m = b$, parovi elemenata

$$(x_i, y_i) \in \rho \cup \{(q(b_0, \dots, b_{n-1}), r(b_0, \dots, b_{n-1})) \mid b_0, \dots, b_{n-1} \in B\}$$

i unarne polinomne funkcije $p_i, i \in \{1, \dots, m\}$ tako da je

$$\{t_{i-1}, t_i\} = \{p_i(x_i), p_i(y_i)\}, \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Tada je i

$$\{t_{i-1}/\rho, t_i/\rho\} = \{(p_i(x_i))/\rho, (p_i(y_i))/\rho\}. \tag{8.4}$$

Cilj nam je da pokažemo da je $t_{i-1}/\rho\ \alpha^*_{qr}\ t_i/\rho$ za sve $i \in \{1, \dots, m\}$ jer će tada važiti

$$a/\rho = t_0/\rho\,\alpha^*_{qr}\,t_m/\rho = b/\rho.$$

U tom smislu, za proizvoljno $i \in \{1, \dots, m\}$ posmatrajmo (x_i, y_i). Razlikujemo dva slučaja:

a) $(x_i, y_i) \in \rho$, tj. $x_i/\rho = y_i/\rho$. Kako važi

$$(p_i(x_i))/\rho \ \in\ p_i(x_i/\rho) \ =\ p_i(y_i/\rho) \ \ni\ (p_i(y_i))/\rho,$$

zaključujemo da je $(p_i(x_i))/\rho\ \ \alpha^*\ \ (p_i(y_i))/\rho$, pa zbog činjenice da je $\alpha^* \subseteq \alpha^*_{qr}$ i uslova (8.4) važi $t_{i-1}/\rho\ \ \alpha^*_{qr}\ \ t_i/\rho$.

b) $(x_i, y_i) = (q(b_0, \dots b_{n-1}), r(b_0, \dots, b_{n-1}))$ za neke $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$. U ovom slučaju imamo

$$\begin{aligned}
(p_i(x_i))/\rho &= \Big(p_i(q(b_0, \dots, b_{n-1}))\Big)/\rho \in p_i\Big(q(b_0, \dots, b_{n-1})/\rho\Big) \subseteq \\
&\subseteq p_i\Big(q(b_0/\rho, \dots, b_{n-1}/\rho)\Big) \quad \text{i slično} \\
(p_i(y_i))/\rho &= \Big(p_i(r(b_0, \dots, b_{n-1}))\Big)/\rho \in p_i\Big(r(b_0, \dots, b_{n-1})/\rho\Big) \subseteq \\
&\subseteq p_i\Big(r(b_0/\rho, \dots, b_{n-1}/\rho)\Big)
\end{aligned}$$

pa je $(p_i(x_i))/\rho\ \alpha_{qr}\ (p_i(y_i))/\rho$, a zbog uslova (8.4) i $\alpha_{qr} \subseteq \alpha^*_{qr}$ važi traženo, $t_{i-1}/\rho\ \ \alpha^*_{qr}\ \ t_i/\rho$.

(3.korak) Jasno je da je h sirjektivno preslikavanje jer za svako $a/\theta(\rho_{qr}) \in B/\theta(\rho_{qr})$, postoji $(a/\rho)/\,\alpha^*_{qr} \in (B/\rho)/\,\alpha^*_{qr}$ tako da je $h((a/\rho)/\,\alpha^*_{qr}) = a/\theta(\rho_{qr})$.

(4.korak) Da bi preslikavanje h bilo izomorfizam, ostalo je da se pokaže da za sve $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ važi

$$
\begin{aligned}
&h\Big(f\big((b_0/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,,\dots,(b_{n-1}/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,\big)\Big) = \\
&\qquad = f\Big(h\big((b_0/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,\big),\dots,h\big((b_{n-1}/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,\big)\Big).
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

Znamo da je

$$f\big((b_0/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,,\dots,(b_{n-1}/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,\big) = (b/\rho)/\,\alpha^*_{qr}$$

za sve $b/\rho \in f(b_0/\rho,\dots,b_{n-1}/\rho)$, pa i za $f(b_0,\dots,b_{n-1})/\rho$, te stoga važi

$$f\big((b_0/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,,\dots,(b_{n-1}/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,\big) = \big(f(b_0,\dots,b_{n-1})/\rho\big)/\,\alpha^*_{qr}\,,$$

odnosno, leva strana jednakosti (8.5) je $\big(f(b_0,\dots,b_{n-1})\big)/\,\theta(\rho_{qr})\,$, a i za desnu stranu imamo

$$
\begin{aligned}
& f\Big(h\big((b_0/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,\big),\dots,h\big((b_{n-1}/\rho)/\,\alpha^*_{qr}\,\big)\Big) = \\
= \;& f\Big(b_0/\,\theta(\rho_{qr})\,,\dots,b_{n-1}/\,\theta(\rho_{qr})\,\Big) = \\
= \;& \Big(f(b_0,\dots,b_{n-1})\Big)/\,\theta(\rho_{qr})\,,
\end{aligned}
$$

pa je h izomorfizam. □

Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra i α^* fundamentalna relacija na $\mathcal{A}$, onda univerzalnu algebru $\mathcal{A}/\alpha^*$ označavamo sa $\overline{\mathcal{A}}$ i zovemo **fundamentalna algebra multialgebre** $\mathcal{A}$.

Posledica 8.7 *Neka je $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ univerzalna algebra i ρ relacija ekvivalencije na B. Tada je*

$$\overline{\mathcal{B}/\rho} \cong \mathcal{B}/\,\theta(\rho)\,.$$

Dokaz. Kako je $\alpha^* = \alpha^*_{x_0x_0}$ i $\rho = \rho_{x_0x_0}$, tvrđenje sledi direktno iz Teoreme 8.6 za slučaj $q = r = x_0$. □

Posledica 8.8 *Neka je $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ univerzalna algebra, ρ relacija ekvivalencije na B i $q, r \in T^{(n)}_{\mathcal{F}}(X), n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$\overline{\mathcal{B}/\rho_{qr}} \cong \mathcal{B}/\,\theta(\rho_{qr})\,.$$

Posledica 8.9 *Neka je $\mathcal{B} = (B, \mathcal{F})$ univerzalna algebra, ρ relacija ekvivalencije na B i $q, r \in T^{(n)}_{\mathcal{F}}(X), n \in \mathbb{N}$. Tada je*

$$(\mathcal{B}/\rho)\,\alpha^*_{qr}\, \cong \overline{\mathcal{B}/\rho_{qr}}.$$

Dokaz. Direktno sledi iz Teoreme 8.6 i Posledice 8.8. □

8.3 Faktor-multialgebre i skup identiteta

Kako smo već odredili najmanju relaciju ekvivalencije multialgebre za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra koja zadovoljava dati identitet, dalje ćemo se baviti uopštenjem ovog rezultata, tj. posmatraćemo situaciju kada nam je umesto jednog, dat skup identiteta.

Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra, I indeksni skup i za svako $i \in I$, q_i, r_i su m_i-arni termi tipa $\mathcal{F}, m_i \in \mathbb{N}$. Uvedimo oznake:

$$\mathcal{I} = \{q_i = r_i \mid i \in I\},$$

$$R_{\mathcal{I}} = \bigcup \{q_i(a_0, \ldots, a_{m_i-1}) \times r_i(a_0, \ldots, a_{m_i-1}) \mid a_0, \ldots, a_{m_i-1} \in A, i \in I\}.$$

Specijalno, za $|I| = 1$, gde je $\mathcal{I} = \{q = r\}$, umesto $R_{\mathcal{I}}$ pišemo R_{qr}.

Lema 8.10 *Za multialgebru $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$, najmanja relacija ekvivalencije na A za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra na kojoj važe identiteti iz $\mathcal{I}$, je relacija $\alpha(R_{\mathcal{I}})$.*

Dokaz. Kako je

$$\alpha(R_{\mathcal{I}}) = \bigcap \{\rho \in E_{ua}(\mathcal{A}) \mid R_{\mathcal{I}} \subseteq \rho\},$$

treba pokazati da za svaku relaciju $\rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$ važi da su na $\mathcal{A}/\rho$ zadovoljeni identiteti iz $\mathcal{I}$ ako i samo ako ρ sadrži $R_{\mathcal{I}}$.

($\Rightarrow$) Neka $\rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$, neka su na $\mathcal{A}/\rho$ zadovoljeni identiteti iz $\mathcal{I}$ i $(x, y) \in R_{\mathcal{I}}$. To znači da postoje $i \in I, m_i \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_{m_i-1} \in A$ da je $(x, y) \in (q_i(a_0, \ldots, a_{m_i-1}), r_i(a_0, \ldots, a_{m_i-1}))$, a kako je

$$x/\rho = q_i(a_0/\rho, \ldots, a_{m_i-1}/\rho) = r_i(a_0/\rho, \ldots, a_{m_i-1}/\rho) = y/\rho,$$

sledi da je $x \rho y$.

($\Leftarrow$) Neka $\rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$, $R_{\mathcal{I}} \subseteq \rho$ i $q_i = r_i$ proizvoljan identitet iz $\mathcal{I}$. Ako je $m_i \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_{m_i-1} \in A$ i

$$q_i(a_0/\rho, \ldots, a_{m_i-1}/\rho) = x/\rho, \qquad r_i(a_0/\rho, \ldots, a_{m_i-1}/\rho) = y/\rho,$$

to znači da $x \in q_i(a_0, \ldots, a_{m_i-1})$ i $y \in r_i(a_0, \ldots, a_{m_i-1})$, pa $(x, y) \in R_{\mathcal{I}} \subseteq \rho$ tj.

$$q_i(a_0/\rho, \ldots, a_{m_i-1}/\rho) = x/\rho = y/\rho = r_i(a_0/\rho, \ldots, a_{m_i-1}/\rho).$$

□

Primetimo da za slučaj $|I| = 1$, Lema 8.10 tvrdi da je $\alpha^*_{qr} = \alpha(R_{qr})$.

Posledica 8.11 *Ako je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A), \rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$ i na $\mathcal{A}/\rho$ važe identiteti iz $\mathcal{I}$, tada je $\alpha(R_{\mathcal{I}}) \subseteq \rho$.*

Dokaz. Pokazali smo da je $E_{ua}(\mathcal{A})$ algebarski sistem zatvaranja sa operatorom zatvaranja α, pa tvrđenje važi zbog $R_{\mathcal{I}} \subseteq \rho$, što je zadovoljeno jer na $\mathcal{A}/\rho$ važe identiteti iz $\mathcal{I}$. □

Napomena. Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra na kojoj važe identiteti iz $\mathcal{I}$, bar u slabom smislu. Tada za svako $\rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$, algebra $\mathcal{A}/\rho$ zadovoljava identitete iz $\mathcal{I}$. Naime, ako identitet $q_i \cap r_i \neq \emptyset$ važi na $\mathcal{A}$, onda za sve $a_0, \dots, a_{m_i-1}$ postoji $b \in A$ da

$$b \in q_i(a_0, \dots, a_{m_i-1}) \cap r_i(a_0, \dots, a_{m_i-1})$$

pa je

$$q_i(a_0/\rho, \dots, a_{m_i-1}/\rho) = b/\rho = r_i(a_0/\rho, \dots, a_{m_i-1}/\rho)$$

tj. $q_i = r_i$ važi na $\mathcal{A}/\rho$. Drugim rečima, za svako $\rho \in E_{ua}(\mathcal{A})$ važi da $R_{\mathcal{I}} \subseteq \rho$, pa je $\alpha^* = \alpha(R_{\mathcal{I}})$ najmanji element u $E_{ua}(\mathcal{A})$.

Specijalno, ako na $\mathcal{A}$ važi slab identitet $q \cap r \neq \emptyset$, onda je $\alpha^* = \alpha^*_{qr}$. □

Lema 8.12 *Za kompletnu mrežu $(E_{ua}(\mathcal{A}), \subseteq)$ važi da je*

$$\alpha(R_{\mathcal{I}}) = \bigvee_{i \in I} \alpha^*_{q_i r_i}.$$

Dokaz. Ako je $I = \emptyset$, onda je i $R_{\mathcal{I}} = \emptyset$ pa je $\alpha(\emptyset) = \alpha^*$ a to je najmanji element iz $E_{ua}(\mathcal{A})$, stoga i supremum svake prazne familije relacija iz $E_{ua}(\mathcal{A})$.

Ako je $I \neq \emptyset$, onda za svako $i \in I$ važi $\alpha^*_{q_i r_i} = \alpha(R_{q_i r_i})$, tj.

$$\alpha^*_{q_i r_i} = \alpha(\{q_i(a_0, \dots, a_{m_i-1}) \times r_i(a_0, \dots, a_{m_i-1}) \mid a_0, \dots, a_{m_i-1} \in A\}) \subseteq \alpha(R_{\mathcal{I}}),$$

što znači da je $\alpha(R_{\mathcal{I}})$ gornja granica za familiju $\{\alpha^*_{q_i r_i} \mid i \in I\}$. Još treba pokazati da je najmanja među gornjim granicama, pa neka je relacija $\beta \in E_{ua}(\mathcal{A})$ takva da za svako $i \in I, \alpha^*_{q_i r_i} \subseteq \beta$. Tada je

$$\{q_i(a_0, \dots, a_{m_i-1}) \times r_i(a_0, \dots, a_{m_i-1}) \mid a_0, \dots, a_{m_i-1} \in A\} \subseteq \alpha^*_{q_i r_i} \subseteq \beta,$$

pa sledi da je $R_{\mathcal{I}} \subseteq \beta$, a prema tome $\alpha(R_{\mathcal{I}}) \subseteq \beta$, što je trebalo pokazati. □

Teorema 8.13 *Neka je $\mathcal{A} \in \mathcal{F}(A)$ multialgebra, $I \neq \emptyset$ indeksni skup takav da za svako $i \in I$, q_i, r_i su m_i-arni termi tipa $\mathcal{F}$ i $\mathcal{I} = \{q_i = r_i \mid i \in I\}$ familija identiteta. Tada je najmanja relacija ekvivalencije na $\mathcal{A}$ za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra koja zadovoljava identitete iz $\mathcal{I}$, tranzitivno zatvaranje $\alpha^*_{\mathcal{I}}$ relacije $\alpha_{\mathcal{I}} \subseteq A^2$ definisane na sledeći način:*

$$\begin{array}{lll} x\ \alpha_{\mathcal{I}}\ y & \iff & \textit{postoje } i \in I, p_i \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A})), a_0^i, \dots, a_{m_i-1}^i \in A, \\ & & x \in p_i(q_i(a_0^i, \dots, a_{m_i-1}^i)), \quad y \in p_i(r_i(a_0^i, \dots, a_{m_i-1}^i)) \quad \textit{ili} \\ & & x \in p_i(r_i(a_0^i, \dots, a_{m_i-1}^i)), \quad y \in p_i(q_i(a_0^i, \dots, a_{m_i-1}^i)), \end{array}$$

tj. $\alpha^*_{\mathcal{I}} = \alpha(R_{\mathcal{I}})$.

Dokaz. Kako je $\alpha(R_{\mathcal{I}})$ najmanja relacija ekvivalencije na A za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra na kojoj važe identiteti iz $\mathcal{I}$, pokazaćemo da je $\alpha^*_{\mathcal{I}}$ sadržano u $\alpha(R_{\mathcal{I}})$ i poseduje pomenute osobine.

Primetimo prvo da je $\alpha_{\mathcal{I}} = \cup_{i \in I} \alpha_{q_i r_i}$, a kako su relacije $\alpha_{q_i r_i}$ refleksivne i simetrične za svako $i \in I$, to iste osobne važe i za $\alpha_{\mathcal{I}}$. Stoga je $\alpha^*_{\mathcal{I}}$ najmanja relacija ekvivalencije koja sadrži sve $\alpha_{q_i r_i},\ i \in I$. Takođe važi da za svako $i \in I,\ \alpha^*_{q_i r_i} \subseteq \alpha^*_{\mathcal{I}}$, pa

$$\bigcup_{i \in I} \alpha^*_{q_i r_i} \subseteq \alpha^*_{\mathcal{I}}.$$

Sem toga, primetimo da je

$$\alpha_{\mathcal{I}} = \bigcup_{i\in I} \alpha_{q_i r_i} \subseteq \bigcup_{i\in I} \alpha^*_{q_i r_i} \subseteq \bigvee_{i\in I} \alpha^*_{q_i r_i} = \alpha(R_{\mathcal{I}}),$$

a kako je tranzitivno zatvaranje monotono i $\alpha(R_{\mathcal{I}})$ tranzitivna relacija, važi $\alpha^*_{\mathcal{I}} \subseteq \alpha(R_{\mathcal{I}})$.

Da bismo pokazali da $\alpha^*_{\mathcal{I}} \in E_{ua}(\mathcal{A})$, prvo pokažimo da ako $p \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$, $a, b \in A$, onda

$$a\ \alpha^*_{\mathcal{I}}\ b \quad \Rightarrow \quad p(a)\ \overline{\overline{\alpha^*_{\mathcal{I}}}}\ p(b).$$

Naime, $a\ \alpha^*_{\mathcal{I}}\ b$ znači da postoji $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ i $z_0, \ldots, z_s \in A$ tako da je

$$a = z_0\ \alpha_{\mathcal{I}}\ z_1\ \alpha_{\mathcal{I}} \ldots \alpha_{\mathcal{I}}\ z_s = b.$$

Za svako $j \in \{0, \ldots, s-1\}$ važi $z_j\ \alpha_{\mathcal{I}}\ z_{j+1}$, tj. postoje $i \in I$, $p_i \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$ i $a^i_0, \ldots a^i_{m_i-1} \in A$ tako da

$$\begin{array}{lll} z_j \in p_i(q_i(a^i_0, \ldots, a^i_{m_i-1})), & z_{j+1} \in p_i(r_i(a^i_0, \ldots, a^i_{m_i-1})) & \text{ili} \\ z_j \in p_i(r_i(a^i_0, \ldots, a^i_{m_i-1})), & z_{j+1} \in p_i(q_i(a^i_0, \ldots, a^i_{m_i-1})). & \end{array}$$

Prema Lemi 8.1 znamo da je $p'_i = p \circ p_i \in Pol_1^A(\mathcal{P}^*(\mathcal{A}))$, pa važi da

$$\begin{array}{lll} p(z_j) \in p'_i(q_i(a^i_0, \ldots, a^i_{m_i-1})), & p(z_{j+1}) \in p'_i(r_i(a^i_0, \ldots, a^i_{m_i-1})) & \text{ili} \\ p(z_j) \in p'_i(r_i(a^i_0, \ldots, a^i_{m_i-1})), & p(z_{j+1}) \in p'_i(q_i(a^i_0, \ldots, a^i_{m_i-1})), & \end{array}$$

odnosno, za svako $u_j \in p(z_j)$ i $u_{j+1} \in p(z_{j+1})$, $u_j\ \alpha_{\mathcal{I}}\ u_{j+1}$, pa kako je $j \in \{0, \ldots, s-1\}$ bilo proizvoljno, to je

$$u_0\ \alpha^*_{\mathcal{I}}\ u_s.$$

Kako su $u_0 \in p(z_0) = p(a)$ i $u_s \in p(z_s) = p(b)$ takođe proizvoljni, dobijamo traženo,

$$p(a)\ \overline{\overline{\alpha^*_{\mathcal{I}}}}\ p(b).$$

Neka je sada $n \in \mathbb{N}, f \in \mathcal{F}_n, a, b, x_0, \ldots x_{n-1} \in A$, $a\ \alpha^*_{\mathcal{I}}\ b$. Za proizvoljno $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, primenićemo upravo dokazano pomoćno tvrđenje za slučaj

$$p = f(c^1_{x_0}, \ldots, c^1_{x_{i-1}}, e^1_0, c^1_{x_{i+1}}, \ldots, c^1_{x_{n-1}})$$

i dobijamo

$$f(x_0, \ldots x_{i-1}, a, x_{i+1}, x_{n-1})\ \overline{\overline{\alpha^*_{\mathcal{I}}}}\ f(x_0, \ldots, x_{i-1}, b, x_{i+1}, x_{n-1})$$

što je ekvivalentno uslovu $\alpha^*_{\mathcal{I}} \in E_{ua}(\mathcal{A})$. □

Posledica 8.14 *Ako na $\mathcal{A}/\alpha^*_{\mathcal{I}}$ važe svi identiteti iz skupa $\mathcal{J}$, onda je*

$$\alpha^*_{\mathcal{J}} \subseteq \alpha^*_{\mathcal{I}}.$$

Dokaz. Direktno sledi iz Posledice 8.11. □

Posledica 8.15 *Ako na $\mathcal{A}/\alpha^*_{\mathcal{I}}$ važe svi identiteti iz skupa $\mathcal{J}$, onda je*

$$\alpha^*_{\mathcal{J}\cup\mathcal{I}} = \alpha^*_{\mathcal{I}}.$$

Glava 9

Zaključak

Ovaj rad se bavi multialgebrama i pojmovima vezanih za njih. Definisane su tri vrste homomorfizama multialgebri i predstavljene su najvažnije osobine sve tri vrste kao u [12]. Svaka na prirodan način indukuje po jednu vrstu izomorfizama, međutim, one se poklapaju, tj. imamo samo jednu vrstu izomorfizama. Sem toga, dobijamo tri vrste slobodnih multialgebri i date su neke njihove opšte osobine, kao i neke koje su vezane za konkretne klase multialgebri. Tako je npr. u Tvrđenju 4.19 predstavljen iznenađujući rezultat iz [12], da ni nad jednom od klasa $\mathcal{E}$, *Con, Mult, Reg,* $\mathit{Mult}(\alpha), \mathit{Mult}[\beta], \mathit{Con}[\beta], \mathit{Con}^{+}, \alpha$ i β kardinali i $\alpha > 0$, ne postoji slobodna multialgebra, ali zato u [13] vidimo da nad *Reg* svaka $2-$slobodna multialgebra ima jedinstvenu $2-$bazu (Posledica 4.27). Dati su neki rezultati iz [12] i [27] vezani za podmultialgebre kao npr. da je skup svih podmultialgebri neke multialgebre algebarski sistem zatvaranja na njenom nosaču (Tvrđenje 3.7).

Stepene strukture su pojam koji je usko vezan za multialgebre. Stepenu strukturu svake multialgebre možemo posmatrati kao stepenu strukturu odgovarajuće relacijske strukture. Kao najznačajnija tvrđenja vezana za stepene strukture izdvajamo ona tvrđenja iz [3] koja govore o vezi sa Booleovim algebrama sa operatorima. Naime, Teorema 5.10 kaže da je stepena struktura svake multialgebre dobra Booleova algebra sa operatorima, a važi i obrnuto, da je svaka dobra Booleova algebra sa operatorima stepena struktura neke multialgebre (dokaz je dat u Teoremi 5.12).

U radu su takođe opisane faktor-multialgebre i predstavljene su neke njihove osobine i rezultati radova [32], [36] i dr. Fundamentalna relacija multialgebre je najmanja relacija ekvivalencije definisana na nosaču multialgebre za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra. Dat je opis ove relacije kao i neke osobine skupa svih relacija ekvivalencije za koju je faktor-multialgebra univerzalna algebra.

U Teoremi 6.2 je dat dokaz teoreme reprezentacije za faktor-multialgebre iz [21], koja kaže da je svaka multialgebra $\mathcal{A}$ dobijena kao faktor-multialgebra neke univerzalne algebre $\mathcal{B}$ po modulu odgovarajuće relacije ekvivalencije ρ na B. Interesantan rezultat iz [32] je dat u Teoremi 8.6, koji kaže da je univerzalna algebra $(\mathcal{B}/\rho)/\alpha^{*}_{qr}$ na kojoj važi identitet $q = r$, izomorfna faktor-strukturi algebre $\mathcal{B}$ po modulu najmanje relacije kongruencije θ na $\mathcal{B}$ koja sadrži ρ i za koju je na $\mathcal{B}/\theta$ zadovoljen identitet $q = r$.

Sledeći problemi, dati u [21], prirodno se nameću iz teoreme reprezentacije za faktor-multialgebre, a na većinu još uvek nemamo potpune odgovore.

Problem 1. Da li je Teorema 6.2 ekvivalentna sa Aksiomom izbora?

Problem 2. Ako je $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ semihipergrupa, da li postoji semigrupa $\mathcal{S} = (S, *)$ i relacija ekvivalencije θ na S tako da je $\mathcal{S}/\theta \cong \mathcal{A}$?

Problem 3. Ako je $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ multialgebra i $\cdot$ binarna komutativna multioperacija, da li postoji komutativan grupoid $\mathcal{G} = (G, *)$ i relacija ekvivalencije θ na G tako da je $\mathcal{G}/\theta \cong \mathcal{A}$?

Problem 4. Šta su faktor-multialgebre grupe, Abelove grupe, mreže, prstena itd? Dati odgovarajući sistem aksioma.

Problem 5. Ako se klasa algebri može aksiomatizovati, da li se onda i klasa faktor-multialgebri takođe može aksiomatizovati?

Problem 6. Neka je $(A, \mathcal{F})$ multialgebra i A konačan skup. Kada će postojati konačna algebra čija je to faktor-multialgebra? (Ako je i $\mathcal{F}$ konačan skup, odgovor je dat u Posledici 6.6.)

Problem 7. Neka je $(A, \mathcal{F})$ multialgebra, pri čemu je A konačan skup a $\mathcal{F}$ sadrži i konačne i beskonačne multioperacije. Kada postoji algebra $(B, \mathcal{F})$ sa beskonačnim operacijama i konačnim nosačem B tako da je faktor-multialgebra algebre $(B, \mathcal{F})$ izomorfna sa $(A, \mathcal{F})$?

Literatura

[1] Ameri, R., Nozari, T., *A connection between categories of (fuzzy) multialgebras and (fuzzy) algebras*, Ital. J. Pure Appl. Math. No. 27 (2010), 201-208.

[2] Ameri, R., Nozari, T., *Fuzzy hyperalgebras*, Comput. Math. Appl. 61 (2011), no. 2, 149-154.

[3] Bošnjak, I., *O algebrama kompleksa*, doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2002.

[4] Bošnjak, I., Madarász, Sz. R., *On power structures*, Algebra and Discrete Mathematics, No 2 (2003), 14-35.

[5] Brink, C., *Power structures and their applications*, preprint, Department of Mathematics, University of Cape Town (1992), pp. 152.

[6] Brink, C., *Power structures*, Algebra univers. 30 (1993), 177-216.

[7] Bruck, R.H., *A survey of binary Systems*, Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg, 1958.

[8] Burris, S., Sankappanavar, H.P., *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[9] Campaigne, H., *Partition hypergroups*, Amer. J. Math. 62, (1940), 599-612.

[10] Corsini, P., Leoreanu, V., *Applications of hyperstructure theory*, (Kluwer, Boston, 2003).

[11] Čolić, J., *Neke klase maksimalnih hiperklonova*, završni rad, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2012.

[12] Čupona, Ǵ., Madarász, Sz. R., *On poly-algebras*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 21, 2(1991), 141-156.

[13] Čupona, Ǵ., Madarász, Sz. R., *Free poly-algebras*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 23, 2(1993), 245-261.

[14] Czédli, G., Pollák, G., *When do coalition lattices?*, Acta Sci. Math. (Szeged) 60 (1995) 197-206.

[15] Drapal, A., *Globals of unary algebras*, Czech. Math. J. 35 (1985), 52-58.

[16] Dresher, M., Ore, M., *Theory of multigroups*, Amer. J. Math. 60 (1938), 705-733.

[17] Freni, D., *A new characterization of the derived hypergroup via strongly regular equivalences*, Comm. Algebra 30 (2002), 3977-3989.

[18] Gautam, N.D., *The validity of equations of complex algebras*, Arch. Math. Logik Grundlag. 3 (1957), 117-124.

[19] Goldblatt, R., *Varieties of complex algebras*, Annals of Pure and Applied Logic 44 (1989), 173-242.

[20] Grätzer, G., Whitney, S., *Infinitary varieties of structures closed under the formation of complex structures*, Colloq. Math. 48 (1984), 1-5.

[21] Grätzer, G., *A representation theorem for multi-algebras*, Arch. Math. No 3 (1962), 452-456.

[22] Grätzer, G., *Universal Algebra*, Second Ed., Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1979.

[23] Jónsson, B., Tarski, A., *Boolean algebras with operators I, II,* Amer. J. Math. 73 (1951) 891-939, 74 (1952) 127-167.

[24] Madarász, Sz. R., *Od skupova do univerzalnih algebri*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2006.

[25] Pate, R., *Rings with multiple-valued operations*, Amer. J. Math. 64, (1942), 506-517

[26] Pelea, C., *On the fundamental relation of a multialgebra*, Ital. J. Pure Appl. Math., No 10 (2001) 141-146.

[27] Pelea, C., Breaz, S.,*Multialgebras and term functions over the algebra of their nonvoid subsets*, Mathematica (Cluj), 44(66) (2001), 143-149.

[28] Pelea, C., *On the direct product of multialgebras*, Studia Univ. Babes-Bolyai Math., 48, 2, 2003, 93-98.

[29] Pelea, C., *Identities and multialgebras*, Ital. J. Pure Appl. Math., No 15, (2004) 83-92.

[30] Pelea, C., *On the fundamental algebra of a direct product of multialgebras*, Ital. J. Pure Appl. Math., 18, 2005, 69-84.

[31] Pelea, C., *On the direct limit of a direct system of multialgebras*, Discrete Mathematics, 306, 22, 2006, 2916-1930.

[32] Pelea, C., Purdea, I., *Multialgebras, universal algebras and identities*, J. Aust. Math. Soc. 81 (2006), 121-139.

[33] Pelea, C., Purdea, I., *Identities in multialgebra theory*, Proseedings of the 10th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Brno, 2008, Hošková, S.,ed., Brno, 2009, 251-266.

[34] Pickett, H. E., *Homomorphism and subalgebras*, Pacific J. Math, No 21 (1967), 327-342.

[35] Pinus, A., Madarász, Sz. R., *On generic multi-algebras*, Novi Sad J. Math. Vol 27, No. 2, 1997, 77-82.

[36] Purdea, I., Stanca, L., *Factor multialgebras, univerzal algebras and identities*, 2012. (u štampi)

[37] Tamura, T., Shafer, J., *Power semigroups*, Math. Japon. 12 (1967), 25-32.

[38] Vaš, L., Madarász, Sz. R., *A note about multi-algebras, power algebras and identities*, IX Conference on Applied Mathematics, D. Herceg, Lj Cvetković, edc., Institute of Mathematics, Novi Sad, 1995, (147-153).

[39] Walicki, M., Wolter, U., *Universal multialgebra. New topics in theoretical computer science* , Nova Sci. Publ., New York, 2008, 27-93.

[40] Whitney, S., *Théories linéaries*, Ph.D. thesis, Université Laval, Québec, 1977.

Biografija

Marijana Lazić je rođena 6. maja 1988. godine u Šapcu, gde je 2003. godine završila osnovnu školu "Nata Jeličić" i upisala Šabačku gimnaziju. Srednju školu je završila braneći maturski rad na temu "Prizma i piramida" 2007. godine i iste upisala Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer profesor matematike. Osnovne studije je završila sa prosečnom ocenom 9.47 i poslednji ispit na osnovnim studijama je položila u septembru 2011. god. Iste godine je upisala master akademske studije na matičnom fakuletu, modul nastava matematike. U junu 2012. god. je položila poslednji ispit na master studijama i time stekla uslov za odbranu ovog master rada.

Novi Sad, septembar 2012. Marijana Lazić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Master rad

Autor: (AU): Marijana Lazić

Mentor: (MN): Rozália Sz. Madarász

Naslov rada: (NR): Stepene strukture i multialgebre

Jezik publikacije: (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): Srbija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2012.

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (FO):9/74/40/0/0/0/0

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Algebra

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): Multialgebre, stepene strukture, faktor-strukture, homomorfizmi, slobodne strukture, fundamentalna relacija, identiteti

UDK:

Čuva se: (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): Ovaj rad se bavi stepenim strukturama i multialgebrama uopšte.

Dajemo primere multialgebri kao i najvažnije osobine homomorfizama multialgebri, podmultialgebri i slobodnih multialgebri. Najznačajnije teoreme u radu su teorema reprezentacije za Booleove algebre sa operatorima i teorema reprezentacije za multialgebre. Poslednje dve glave su posvećene faktor-multialgebrama.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP): 14.6.2012.

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Petar Đapić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monographic documentation

Type of record: (TR): Textual printed matter

Contents code: (CC): Master's thesis

Author: (AU): Marijana Lazić

Mentor: (MN): Rozália Sz. Madarász

Title: (TI): Power structures and multialgebras

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): Serbia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2012.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: (PD): 9/74/40/0/0/0/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Algebra

Subject/Key words: (SKW): Multialgebras, power structures, factor-structures, fundamental relation, homomorphisms, free structures, identities

UC:

Holding data: (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note: (N):

Abstract: (AB): This thesis deals with power structures and multialgebras in general. We give examples of multialgebras and the most important properties

of homomorphisms of multialgebras, submultialgebras and free multialgebras. The most significant theorems in this paper are a representation theorem for Boolean algebras with operators and a representation theorem for multialgebras. Last two chapters are devoted to factor-multialgebras.

Accepted by the Scientific Board on: (ASb): 14.6.2012.

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Ivica Bošnjak, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Rozália Sz. Madarász, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Petar Đapić, assistant professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad