UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

LOGIČKI SISTEMI BAZIRANI NA BL-ALGEBRAMA

SEMINARSKI RAD BR. 2

Milanka Bradić

Novi Sad, jun, 2011.

Uvod

Cilj ovog rada je da pokažemo da su BL-algebre okvir u kome se nalaze različite algebre (MV-algebre, G-algebre, Π-algebre, posebne, $[0,1]_L$, $[0,1]_G$ i $[0,1]_\Pi$ algebre, uopšteno, algebre $[0,1]_*$, gde je $*$ neprekidna t-norma) koje odgovaraju raznim neklasičnim logikama. Po definiciji, BL-algebre su deljive reziduirane mreže koje zadovoljavaju aksiomu prelinearnosti.

U prvom delu, osim definicije i klasifikacije reziduiranih mreža, dajemo pregled nekih osnovnih svojstva reziduiranih mreža.

U drugom delu definišemo t-norme, navodimo poznato tvrđenje iz teorije reziduiranih mreža, koje se odnosi na bijektivnu korespondenciju između neprekidnih t-normi i BL-algebri na $[0,1]$, a zatim za fiksiranu neprekidnu t-normu $*$ definišemo iskazni račun $PC(*)$, koji je baziran semantički, na svojstvima BL-algebre $[0,1]_*$ (ili, $\mathcal{L}(*)$). Dajemo i pregled istinitosnih funkcija za $PC(*_L)$, $PC(*_G)$ i $PC(*_\Pi)$, gde su $*_L$, $*_G$ i $*_\Pi$ Lukasijevičeva, Gedelova i produkt t-norma, respektivno. Za ove logičke sisteme koristimo i oznake Fuzzy_L, Fuzzy_G i Fuzzy_Π.

U sekciji 3.1 definišemo aksiomatski sistem BLA i pokazujemo njegovu saglasnost u odnosu na BL-tautologije. Inače, devedesetih godina prošlog veka, Hájek je uveo ovaj logički sistem, kao i BL-algebre, G-algebre i Π-algebre. U sekciji 3.2 izlažemo derivacije sistema BLA iz kojih zaključujemo o osnovnim svojstvima veznika jake konjunkcije, slabe konjunkcije, slabe disjunkcije, implikacije i ekvivalencije, koje ovaj sistem dokazuje.

U sekciji 4.1 definišemo, za fiksiranu teoriju T nad BLA, algebru klasa ekvivalencije međusobno ekvivalentnih formula u teoriji T i dokazujemo da je ta algebra BL-algebra. Zatim, dokazujemo da je sistem BLA slabo potpun u odnosu na BL-tautologije. Osim toga, razmatramo i tzv. šematska proširenja logike BLA i dokazujemo slabu potpunost šematskog proširenja $\mathcal{C}$ u odnosu na $\mathcal{C}$-tautologije odgovarajućih $\mathcal{C}$-algebri.

U sekciji 4.2, u okviru šematskih proširenja sistema BLA, nalazimo slabo potpune aksiomatizacije za MV-tautologije, G-tautologije i Π-tautologije. Zatim, ove rezultate stavljamo u relaciju sa nekim drugim poznatim rezultatima, npr. navodimo, bez dokaza, poznata tvrđenja o vezi MV-tautologija, G-tautologija i Π-tautologija sa 1-tautologijama iskaznog računa $PC(*_L)$, $PC(*_G)$ i $PC(*_\Pi)$, respektivno, gde dobijamo, za svaki od ovih iskaznih računa, saglasnu i slabo potpunu aksiomatizaciju, koja je sada predstavljena određenim šematskim proširenjem sistema BLA. Takođe, dajemo i dokaz da logika $PC(*_L)$ (tj. Fuzzy_L) nema saglasnu i jako potpunu aksiomatizaciju.

Sadržaj

Glava 1

Pregled osnovnih svojstava reziduiranih mreža

1.1 Definicija i klasifikacija reziduiranih mreža

Definicija 1.1 *Algebra* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ *je* **reziduirana mreža** *ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

- $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ *je* **ograničena mreža***;* (1.1)
- $\langle L, \otimes, \mathbf{1} \rangle$ *je* **komutativni monoid***;* (1.2)
- *Važi* **svojstvo adjungovanosti***, tj.*

$$\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{z} \text{ akko } \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{z}, \text{ za sve } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L, \tag{1.3}$$

  gde je $\leqslant$ *mrežno uređenje.*

Uređeni par $(\otimes, \rightarrow)$ *nazivamo* **adjungovani par***. Operacije* $\otimes$ *i* $\rightarrow$ *nazivamo* **multiplikacija** *i* **reziduum***, respektivno. Za* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$*,* $\boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{b}$ *je* **reziduum od** $\boldsymbol{b}$ **po** $\boldsymbol{a}$*. Inače, za operaciju* $\rightarrow$ *koristimo i logički izraz ,,implikacija".*
$\mathcal{L}$ *je* **potpuna reziduirana mreža** *ako je* $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ *potpuna mreža.*

Ako je $(\otimes, \rightarrow)$ adjungovani par neke reziduirane mreže $\mathcal{L}$, tada, koristeći svojstvo (1.3) lako se može pokazati da multiplikacija $\otimes$ jednoznačno određuje reziduum $\rightarrow$, i obratno.

Kada je reziduirana mreža struktura istinitosnih vrednosti za neku neklasičnu logiku, tada, uslov potpunosti je potreban, ako želimo da odredimo vrednost neke egzistencijalne ili univerzalne rečenice.

Definicija 1.2 *Neka je* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ *reziduirana mreža.*

(1) $\mathcal{L}$ *zadovoljava* **aksiomu prelinearnosti** *ako zadovoljava identitet*

$$(\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{x}) = \mathbf{1}. \tag{1.4}$$

(2) $\mathcal{L}$ *je* **deljiva reziduirana mreža** *ako zadovoljava identitet*

$$\boldsymbol{x \wedge y = x \otimes (x \to y).} \tag{1.5}$$

(3) *U* $\mathcal{L}$ *važi* **zakon dvojne negacije** *ako* $\mathcal{L}$ *zadovoljava identitet*

$$\boldsymbol{x = (x \to 0) \to 0.} \tag{1.6}$$

(4) *U* $\mathcal{L}$ *važi* **zakon idempotentnosti** *ako* $\mathcal{L}$ *zadovoljava* $\boldsymbol{x \otimes x = x}$. (1.7)

Definicija 1.3 *Neka je* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ *reziduirana mreža.*

- *Unarna operacija* $\neg$ *na* L, *gde je* $\neg \boldsymbol{a} =_{\boldsymbol{def}} \boldsymbol{a} \to \mathbf{0}$, *naziva se* **negacija**. (1.8)
- *Binarna operacija* $\leftrightarrow$ *na* L, *gde je*
  $$\boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b} =_{\boldsymbol{def}} (\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}) \wedge (\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a}),$$
  naziva se **bireziduum** *u* $\mathcal{L}$. (1.9)
- *Binarna operacija* $\sim$ *na* L, *gde je*
  $$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{b} =_{\boldsymbol{def}} (\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}) \otimes (\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a}),$$
  naziva se **alternativni bireziduum** *u* $\mathcal{L}$. (1.10)

Definicija 1.4 (1) *Reziduirana mreža u kojoj važi zakon dvojne negacije naziva se* **integralni komutativni Žirardov monoid** (*Girard-monoid*).

(2) **Hejtingova algebra** (*Heyting-algebra*) *je reziduirana mreža u kojoj važi*

$$\boldsymbol{x \otimes y = x \wedge y.} \tag{1.11}$$

(3) **BL-algebra** *je deljiva reziduirana mreža u kojoj važi aksioma prelinearnosti.*

(4) **MV-algebra**[1] *je reziduirana mreža koja zadovoljava identitet*

$$\boldsymbol{x \vee y = (x \to y) \to y.} \tag{1.12}$$

(5) **Π-algebra** (*ili* **produkt algebra**) *je* BL-*algebra koja zadovoljava:*

$$\boldsymbol{(z \to 0) \to 0 \leqslant ((x \otimes z) \to (y \otimes z)) \to (x \to y);} \tag{1.13}$$
$$\boldsymbol{x \wedge (x \to 0) = 0.} \tag{1.14}$$

(6) **G-algebra** (*ili* **Gedelova algebra** (*Gödel algeba*)) *je* BL-*algebra u kojoj važi zakon idempotentnosti.*

[1] BL je skraćenica od „basic logic”, a MV je skraćenica od „many-valued”.

1.2 Neka osnovna svojstva reziduiranih mreža

U ovoj sekciji dajemo pregled nekih osnovnih osobina reziduiranih mreža. Dokazujemo samo pojedine. Neka od svojstava, koja slede, koristimo u kasnijim dokazima, npr. u dokazu za saglasnost logičkog sistema BLA u odnosu na BL-tautologije.

Teorema 1.1 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi su zadovoljeni:*

$$\boldsymbol{x \otimes (x \to y) \leqslant y},\ \boldsymbol{y \leqslant x \to (x \otimes y)},\ \boldsymbol{x \leqslant (x \to y) \to y}; \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{x \leqslant y} \ \textit{akko}\ \boldsymbol{x \to y = 1}; \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{x \to x = 1},\ \boldsymbol{x \to 1 = 1},\ \boldsymbol{0 \to x = 1}; \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{1 \to x = x}; \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{x \otimes 0 = 0}; \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{x \otimes y \leqslant x},\ \ \boldsymbol{x \leqslant y \to x}; \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{x \otimes y \leqslant x \wedge y}; \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{x \leqslant y}\ \textit{povlači}\ \boldsymbol{x \otimes z \leqslant y \otimes z}\ \ \boldsymbol{(\textit{izotonost za}\ \otimes)}; \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z)}, \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{x \to (y \to z) = y \to (x \to z)}; \tag{1.24}$$

$$\boldsymbol{(x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant (x \to z)}; \tag{1.25}$$

$$\boldsymbol{(x \to y) \leqslant (y \to z) \to (x \to z)}. \tag{1.26}$$

DOKAZ (1.15) Prvu nejednakost dobijamo kada na $x \to y \leqslant x \to y$ primenimo (1.3) i komutativnost za $\otimes$. Slično, primena (1.3) na $y \otimes x \leqslant x \otimes y$ daje drugu nejednakost, dok treća sledi iz prve, još jednom primenom (1.3).
(1.16) $x \leqslant y$ akko $\mathbf{1} \otimes x \leqslant y$ akko $\mathbf{1} \leqslant x \to y$ akko $\mathbf{1} = x \to y$.
(1.17) Direktna posledica (1.16) i mrežnih nejednakosti $x \leqslant x$, $x \leqslant \mathbf{1}$ i $\mathbf{0} \leqslant x$.
(1.18) Primenom prvog dela iz (1.15) imamo $\mathbf{1} \to x = \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \to x) \leqslant x$. U drugom smeru, primenom drugog dela iz (1.15) sledi $x \leqslant \mathbf{1} \to (\mathbf{1} \otimes x) = \mathbf{1} \to x$.
(1.19) Kako je $\mathbf{0} \leqslant x \to \mathbf{0}$, to mora biti $\mathbf{0} \otimes x \leqslant \mathbf{0}$ (po (1.3)), te je $x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
(1.20) $y \leqslant \mathbf{1}$ akko (po (1.17)) $y \leqslant x \to x$ akko (primenom (1.3)) $x \otimes y \leqslant x$, što dokazuje prvi deo. Drugi deo je posledica prvog dela i svojstva (1.3).
(1.21) Kako u svakoj mreži $u \leqslant v$ i $u \leqslant w$ povlači $u \leqslant v \wedge w$, rezultat (1.21) je posledica prvog dela iz (1.20) i komutativnosti operacije $\otimes$.
(1.22) Neka je $x \leqslant y$. Prema drugom delu iz (1.15), $y \leqslant z \to (z \otimes y)$, te preko tranzitivnosti relacije $\leqslant$ sledi $x \leqslant z \to z \otimes y$. Odavde je $x \otimes z \leqslant y \otimes z$.
(1.23) $(x \otimes y) \to z \leqslant x \to (y \to z)$ akko (preko (1.3)) $x \otimes ((x \otimes y) \to z) \leqslant y \to z$ akko (takođe preko (1.3)) $(x \otimes y) \otimes ((x \otimes y) \to z) \leqslant z$. Kako je ova poslednja nejednakost tačna (po prvom delu iz (1.15)), dokazali smo $x \otimes y \to z \leqslant x \to (y \to z)$.

Obratno, $x \to (y \to z) \leqslant (x \otimes y) \to z$ akko $y \otimes x \otimes (x \to (y \to z)) \leqslant z$. Dokazaćemo da je ova poslednja nejednakost tačna. Zaista, prema prvom delu iz (1.15) imamo $x \otimes (x \to (y \to z)) \leqslant y \to z$, odakle, primenom (1.22), sledi $y \otimes x \otimes (x \to (y \to z)) \leqslant y \otimes (y \to z)$, a kako je $y \otimes (y \to z) \leqslant z$, takođe prema (1.15), sada $y \otimes x \otimes (x \to (y \to z)) \leqslant z$ sledi primenom tranzitivnosti relacije $\leqslant$.

(1.24) Ova jednakost je posledica (1.23) i komutativnosi za $\otimes$.
(1.25) Slično je dokazu za (1.23). Naime, nejednakost koju dokazujemo ekvivalentna je sa $x \otimes (x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant z$. Da je ova nejednakost tačna, sledi primenom (1.22) i prvog dela iz (1.15), tako što najpre uočimo da je $x \otimes (x \to y) \leqslant y$, a zatim da je $x \otimes (x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant y \otimes (y \to z) \leqslant z$.
(1.27) Direktna posledica (1.26) i (1.3). □

Teorema 1.2 *Neka je* $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ *reziduirana mreža. Tada, za sve* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$ *važi:*

- $\boldsymbol{a \to b}$ *je najveći element skupa* $\{\boldsymbol{c} \in L \,|\, \boldsymbol{a \otimes c \leqslant b}\}$; (1.27)
- $\boldsymbol{a \otimes b}$ *je najmanji element skupa* $\{\boldsymbol{c} \in L \,|\, \boldsymbol{a \leqslant b \to c}\}$. (1.28)

DOKAZ. (1.26) Iz (1.15), $a \otimes (a \to b) \leqslant b$, odakle imamo $a \to b \in \{c \in L \mid a \otimes c \leqslant b\}$. Dalje, ako je $a \otimes t \leqslant b$ za neko $t \in L$, onda, prema (1.3), sledi $t \leqslant a \to b$.
(1.27) Prema drugom delu iz (1.15), $a \leqslant b \to (a \otimes b)$, te $a \otimes b \in \{c \in L \,|\, a \leqslant b \to c\}$. Ako je $a \leqslant b \to t$ za neko $t \in L$, onda je $a \otimes b \leqslant t$, na osnovu (1.3). □

Sledi pregled tvrđenja koja se odnode na monotonost reziduuma, na svojstva multiplikacije i reziduuma u odnosu na infimume i supremume, kao i na svojstva negacije i bireziduuma.

Teorema 1.3 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi su zadovoljeni:*

- $\boldsymbol{y_1 \leqslant y_2}$ *povlači* $\boldsymbol{x \to y_1 \leqslant x \to y_2}$; (1.29)
- $\boldsymbol{x_1 \leqslant x_2}$ *povlači* $\boldsymbol{x_2 \to y \leqslant x_1 \to y}$. (1.30)

Teorema 1.4 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi su zadovoljeni (kada leva i desna strana jednakosti, odnosno nejednakosti, imaju smisla):*

- $\boldsymbol{x \otimes \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I}(x \otimes y_i)}$; (1.31)
- $\boldsymbol{x \to \bigwedge_{i\in I} y_i = \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i)}$; (1.32)
- $\boldsymbol{\bigvee_{i\in I} x_i \to y = \bigwedge_{i\in I}(x_i \to y)}$; (1.33)
- $\boldsymbol{x \otimes \bigwedge_{i\in I} y_i \leqslant \bigwedge_{i\in I}(x \otimes y_i)}$; (1.34)
- $\boldsymbol{\bigvee_{i\in I}(x \to y_i) \leqslant x \to \bigvee_{i\in I} y_i}$; (1.35)
- $\boldsymbol{\bigvee_{i\in I}(x_i \to y) \leqslant \bigwedge_{i\in I} x_i \to y}$. (1.36)

Osim toga, za uslove (1.31)-(1.33) *važi da ako leva strana ima smisla, onda ima i desna i one su jednake.*

Teorema 1.5 *U svakoj reziduiranoj mreži važi:*

- $\boldsymbol{x \to y \leqslant (x \wedge z) \to (y \wedge z)}$; (1.37)
- $\boldsymbol{x \to y \leqslant (x \vee z) \to (y \vee z)}$; (1.38)
- $\boldsymbol{x \to y \leqslant (x \otimes z) \to (y \otimes z)}$; (1.39)
- $\boldsymbol{x \to y \leqslant (z \to x) \to (z \to y)}$; (1.40)
- $\boldsymbol{x \to y \leqslant (y \to z) \to (x \to z)}$. (1.41)

Teorema 1.6 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi su zadovoljeni:*

$$\boldsymbol{x \to y = ((x \to y) \to y) \to y};\tag{1.42}$$

$$\boldsymbol{x \otimes (x \to y) = y} \text{ akko } \boldsymbol{(\exists z)(x \otimes z = y)};\tag{1.43}$$

$$\boldsymbol{x \to (x \otimes y) = y} \text{ akko } \boldsymbol{(\exists z)(x \to z = y)};\tag{1.44}$$

$$\boldsymbol{(y \to x) \to x = y} \text{ akko } \boldsymbol{(\exists z)(z \to x = y)};\tag{1.45}$$

$$\boldsymbol{(x \wedge y) \otimes (x \vee y) \leqslant x \otimes y};\tag{1.46}$$

$$\boldsymbol{x \vee y \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)};\tag{1.47}$$

$$\boldsymbol{x \otimes (x \to y) \leqslant x \wedge y};\tag{1.48}$$

$$\boldsymbol{x \otimes (y \to z) \leqslant y \to (x \otimes z)}.\tag{1.49}$$

Teorema 1.7 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi (kada imaju smisla) su zadovoljeni, gde je uslov* (1.54) *zadovoljen kada leva strana jednakosti ima smisla, a* (1.55)*, ako obe strane nejednakosti imaju smisla:*

- $\boldsymbol{\neg 0 = 1, \ \ \neg 1 = 0}$; (1.50)
- $\boldsymbol{x \otimes \neg x = 0}$; (1.51)
- $\boldsymbol{x \leqslant \neg\neg x, \ \ \neg x = \neg\neg\neg x}$; (1.52)
- $\boldsymbol{x \leqslant y}$ *povlači* $\boldsymbol{\neg y \leqslant \neg x}$; (1.53)
- $\boldsymbol{\neg(\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigwedge_{i\in I} \neg x_i}$; (1.54)
- $\boldsymbol{\bigvee_{i\in I} \neg x_i \leqslant \neg(\bigwedge_{i\in I} x_i)}$. (1.55)

DOKAZ: (1.50) je posledica (1.17) i (1.18); (1.51) sledi iz $x \otimes (x \to 0) \leqslant 0$ (po (1.15)); prvi deo iz (1.52) sledi iz (1.15), a drugi iz (1.42); (1.53) je posledica primene antitonosti reziduuma; (1.54) sledi iz (1.33), a (1.55) iz (1.36). □

Teorema 1.8 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi (kada imaju smisla) su zadovoljeni:*

$$\boldsymbol{0 \leftrightarrow 1 = 1 \leftrightarrow 0}, \ \ \boldsymbol{0 \leftrightarrow 0 = 1 \leftrightarrow 1 = 1};\tag{1.56}$$

$$\boldsymbol{x \leftrightarrow x = 1};\tag{1.57}$$

$$\boldsymbol{x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x};\tag{1.58}$$

$$\boldsymbol{(x \leftrightarrow y) \otimes (y \leftrightarrow z) \leqslant x \leftrightarrow z};\tag{1.59}$$

$$\boldsymbol{x \leftrightarrow 1 = x}, \ \ \boldsymbol{x \leftrightarrow 0 = \neg x};\tag{1.60}$$

$$\boldsymbol{x \leftrightarrow y} \text{ akko } \boldsymbol{x = y};\tag{1.61}$$

$$\boldsymbol{(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \wedge x_2) \leftrightarrow (y_1 \wedge y_2)};\tag{1.62}$$

$$\boldsymbol{(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (y_1 \vee y_2)};\tag{1.63}$$

$$\boldsymbol{(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \otimes x_2) \leftrightarrow (y_1 \otimes y_2)};\tag{1.64}$$

$$\boldsymbol{(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \to x_2) \leftrightarrow (y_1 \to y_2)};\tag{1.65}$$

$$\boldsymbol{\bigwedge_{i\in I}(x_i \leftrightarrow y_i) \leqslant (\bigwedge_{i\in I} x_1) \leftrightarrow (\bigwedge_{i\in I} y_i)};\tag{1.66}$$

$$\boldsymbol{\bigwedge_{i\in I}(x_i \leftrightarrow y_i) \leqslant (\bigvee_{i\in I} x_1) \leftrightarrow (\bigvee_{i\in I} y_i)};\tag{1.67}$$

$$\boldsymbol{x \leftrightarrow y = (x \vee y) \to (x \wedge y)},\tag{1.68}$$

Glava 2

Iskazni račun $PC(*)$

U ovom delu izlažemo o iskaznom računu $PC(*)$, gde je $*$ fiksirana neprekidna t-norma. Dajemo i pregled tri najznačajnija sistema ove vrste – $PC(*_L)$, $PC(*_G)$ i $PC(*_\Pi)$, gde su $*_L$, $*_G$ i $*_\Pi$ **Lukasijevičeva, Gedelova i produkt t-norma**, respektivno. Inače, za ove sisteme, u upotrebi su i oznake Fuzzy_L, Fuzzy_G i Fuzzy_Π, respektivno.

2.1 Veza neprekidnih t-normi i BL-algebri

U ovoj sekciji definišemo t-norme i navodimo poznato tvrđenje iz teorije reziduiranih mreža, koje se odnosi na bijektivnu korespondenciji između reziduiranih mreža (resp. BL-algebri) na $[0,1]$ i sleva neprekidnih (resp. neprekidnih) t-normi.

Definicija 2.1 **t-norma** $*$ *je binarna operacija na* $[0,1]$*, tj.* $* : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$*, koja zadovoljava sledeće uslove:*

(1) $*$ *je komutativna i asocijativna;*

(2) $*$ *je neopadajuća po oba argumenta, tj. za sve* $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ *važi:*

$$\begin{array}{lll} x_1 \leqslant x_2 & \textit{povlači} & x_1 * y \leqslant x_2 * y, \\ y_1 \leqslant y_2 & \textit{povlači} & x * y_1 \leqslant x * y_2; \end{array}$$

(3) $1 * x = x$ *i* $0 * x = 0$,[1] *za svako* $x \in [0,1]$.

t-norma $*$ *je* **neprekidna t-norma** *ako* $*$ *neprekidno preslikava* $[0,1]^2$ *u* $[0,1]$ *(u smislu neprekidnosti funkcije dve promenljive).*

Primeri neprekidnih t-normi:

1. **Lukasijevičeva t-norma**: $x *_L y = \max(0, x + y - 1)$;

2. **Gedelova t-norma**: $x *_G y = \min(x, y)$;

[1] Ovaj uslov je višak jer se može dobiti iz $0 * x \leqslant 0 * 1 = 0$

3. **Produkt t-norma**: $x *_\Pi y = x \cdot y$ (gde je $\cdot$ proizvod realnih brojeva).

Ovde, bez dokaza, navedimo sledeći poznati rezultat iz teorije reziduiranih mreža:

Teorema 2.1 *Neka je $*$ t-norma.*

(1) *Ako je $*$ sleva neprekidna t-norma, tada je algebra*
$$\mathcal{L}(*) = \langle [0,1], \min, \max, *, \to, 0, 1\rangle,$$
gde je operacija $\to$ definisana sa
$$x \to y =_{def} \sup\{z \mid x \otimes z \leqslant y\},$$
reziduirana mreža. Pri tome, sleva neprekidna t-norma $*$ jednoznačno određuje reziduiranu mrežu na $[0,1]$.

(2) *Obratno, ako je $\mathcal{L} = \langle [0,1], \min, \max, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ reziduirana mreža na $[0,1]$, tada je operacija multiplikacije $\otimes$ sleva neprekidna t-norma.*

(3) *Neka je $*$ t-norma. Tada, algebra $\mathcal{L} = \langle [0,1], \min, \max, *, \to, 0, 1\rangle$ je BL-algebra akko je t-norma $*$ neprekidna.*

Napomenimo da tvrđenje napred navedene teoreme važi i kada umesto ,,sup" stavimo ,,max".

2.2 Iskazni račun $PC(*)$

Definicija 2.2 *Neka je $*$ fiksirana neprekidna t-norma.* **Iskazni račun $\boldsymbol{PC}(*)$** *određen po neprekidnoj t-normi $\boldsymbol{*}$ ima iskazne promenljive (velika slova sa ili bez prirodnih brojeva u subskriptu), veznike &, $\to$ i istinitosnu konstantu $\overline{0}$, koja uvek ima vrednost* $\mathbf{0}$. **Formule** *su definisane na uobičajeni način: svaka iskazna promenljiva je formula; $\overline{0}$ je formula; ako su φ i ψ formule, onda su $\varphi \& \psi$, $\varphi \to \psi$ formule. Osim toga, uvedena je logička konstanta $\overline{1} =_{def} \overline{0} \to \overline{0}$ i uvedeni su sledeći veznici:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi \wedge \psi} &\;\boldsymbol{=_{def}}\; \boldsymbol{\varphi \& (\varphi \to \psi)},\\
\boldsymbol{\varphi \vee \psi} &\;\boldsymbol{=_{def}}\; \boldsymbol{((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)},\\
\boldsymbol{\neg\varphi} &\;\boldsymbol{=_{def}}\; \boldsymbol{\varphi \to \overline{0}},\\
\boldsymbol{\varphi \equiv \psi} &\;\boldsymbol{=_{def}}\; \boldsymbol{(\varphi \to \psi) \& (\psi \to \varphi)}.
\end{aligned}$$

Preslikavanje $\boldsymbol{e}$ iz skupa iskaznih promenljivih u skup $[0,1]$ naziva se **evaluacija iskaznih promenljivih**.

Definicija 2.3 *Reziduirana mreža $\boldsymbol{\mathcal{L}} = \langle \boldsymbol{L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1}\rangle$ je* **linearna** *ako je njeno uređenje $\langle \boldsymbol{L, \leqslant}\rangle$ linearno.*

Teorema 2.2 *Neka je $\mathcal{L} = \langle \boldsymbol{L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1}\rangle$ linearna reziduirana mteža. Tada, $\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti.*

DOKAZ: Neka $a, b \in L$. Kako je $a \leqslant b$ ili $b \leqslant a$, to mora biti $a \to b = \mathbf{1}$ ili $b \to a = \mathbf{1}$, po (1.16). Odavde, na osnovu osobina mreže, $(a \to b) \vee (b \to a) = \mathbf{1}$. $\square$

Teorema 2.3 *Ako reziduirana mreža zadovoljava aksiomu prelinearnosti, onda zadovoljava i sledeći identitet:*

$$\bullet\quad \boldsymbol{x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x).} \tag{2.1}$$

DOKAZ. Prema (1.47), $x \vee y \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x))$ važi u svakoj reziduiranoj mreži (dokazuje se koristeći treći deo iz (1.15) i drugi deo iz (1.20)). Dokažimo suprotan smer ove nejednakosti. Obeležimo izraz na desnoj strani sa A. $A = (((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)) \otimes ((x \to y) \vee (y \to x))$, jer važi aksioma prelinearnosti $(x \to y) \vee (y \to x) = \mathbf{1}$. Primenom (1.31) dobijamo

$$A = ((x \to y) \otimes (((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x))\vee$$
$$((y \to x) \otimes (((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)),$$

odakle, na osnovu izotonosti operacije $\otimes$ i osobina mreže, sledi

$$A \leqslant ((x \to y) \otimes ((x \to y) \to y))\vee$$
$$((y \to x) \otimes ((y \to x) \to x)).$$

Odavde, primenom prvog tvrđenja iz (1.15) Teoreme 1.1, dobijamo $A \leqslant x \vee y$. $\square$

Lema 2.1 *Neka je $*$ neprekidna t-norma. Za iskazni račun $PC(*)$, svaka evaluacija promenljivih $\boldsymbol{e}$ jednoznačno se proširuje na* **evaluaciju svih formula** *(za koju koristimo istu oznaku $\boldsymbol{e}$), na sledeći način:*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}(\overline{\mathbf{0}}) &= \mathbf{0};\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi} \& \boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}) * \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi});\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}) \to_* \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi});\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi}) &= \mathbf{min}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi}));\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi} \vee \boldsymbol{\psi}) &= \mathbf{max}(\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi})).
\end{aligned}$$

DOKAZ. Proširenje se vrši uobičajeno, po složenosti formula, za formule koje od veznika sadrže samo & i $\to$. Zatim, tvrđenje leme se dokazuje za slabe konjunkcije i slabe disjunkcije. Prvo, s jedne strane, po definiciji, $\boldsymbol{e}(\varphi \wedge \psi) = \boldsymbol{e}(\varphi) * (\boldsymbol{e}(\varphi) \to_* \boldsymbol{e}(\psi))$, s druge strane, prema Teoremi 2.1, $\mathcal{L}(*) = \langle [0,1], \min, \max, *, \to_*, 0, 1\rangle$ je BL-algebra, što znači da je i deljiva reziduirana mreža, te izraz u $\mathcal{L}(*)$ koji je naveden na desnoj strani ove jednakosti, po definiciji uslova deljivosti (1.5), mora biti jednak $\boldsymbol{e}(\varphi) \wedge \boldsymbol{e}(\psi)$, što je, s obzirom na definiciju operacije $\wedge$ u $\mathcal{L}(*)$, jednako $\min(\boldsymbol{e}(\varphi), \boldsymbol{e}(\psi))$. Drugo, prema Teoremi 2.2, $\mathcal{L}(*)$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti, te, na osnovu Teoreme 2.3, zadovoljava i identitet (2.1), što, prema definiciji veznika $\vee$, dalje povlači $\boldsymbol{e}(\varphi \vee \psi) = \max(\boldsymbol{e}(\varphi), \boldsymbol{e}(\psi))$. $\square$

Definicija 2.4 *Neka je $*$ fiksirana neprekidna t-norma. Formula φ logike $PC(*)$ je* **1-tautologija** *ove logike ako je $\boldsymbol{e}(\varphi) = 1$, za svaku evaluaciju $\boldsymbol{e}$.*
Za skup formula Σ i evaluaciju $\boldsymbol{e}$ formula logike $PC(*)$, kažemo da je $\boldsymbol{e}$ **model** *za Σ, ako je $\boldsymbol{e}(\varphi) = 1$, za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$.*

Ako fiksiramo neprekidnu t-normu $*$, onda smo fiksirali i iskazni račun $PC(*)$, čiji je skup istinitosnih vrednosti [0,1], gde je $*$ istinitosna funkcija **jake konjunkcije**, reziduum od $*$ je istinitosna funkcija **implikacije**, a min i max su istinitosne funkcije **slabe konjunkcije** i **slabe disjunkcije**, respektivno.

2.3 Istinitosne funkcije u sistemima $PC(*_L)$, $PC(*_G)$ i $PC(*_\Pi)$

U ovoj sekciji dajemo pregled istinitosnih funkcija iskaznih računa $PC(*_L)$, $PC(*_G)$ i $PC(*_\Pi)$, gde su $*_L$, $*_G$ i $*_\Pi$ Lukasijevičeva, Gedelova i produkt t-norma, respektivno. Već smo napomenuli da za ove sisteme koristimo i oznake Fuzzy_L, Fuzzy_G i Fuzzy_Π[2] i nazivamo ih **Lukasijevičeva (fuzzy) iskazna logika**, **Gedelova (fuzzy) iskazna logika** i **produkt (fuzzy) iskazna logika**, respektivno. Semantička osnova ovih sistema ogleda se u u strukturalnim svojstvima **standardnih reziduiranih mreža**:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(*_L) = [0,1]_L &= \langle [0,1], \min, \max, *_L, \to_L, 0, 1\rangle,\\
\mathcal{L}(*_G) = [0,1]_G &= \langle [0,1], \min, \max, *_G, \to_G, 0, 1\rangle,\\
\mathcal{L}(*_\Pi) = [0,1]_\Pi &= \langle [0,1], \min, \max, *_\Pi, \to_\Pi, 0, 1\rangle.
\end{aligned}$$

Sada, navedimo istinitosne funkcije koje se pojavljuju u ova tri sistema:[3]

- Za slabu konjunkciju i slabu disjunkciju koriste se et_1 i vel_1, respektivno.
- Za jaku konjunkciju:

$$\begin{aligned}
\mathrm{et}_1(u,v) &=_{def} u *_G v =_{def} \min(u,v),\\
\mathrm{et}_2(u,v) &=_{def} u *_L v =_{def} \max(0, u+v-1),\\
\mathrm{et}_3(u,v) &=_{def} u *_\Pi v =_{def} u \cdot v.
\end{aligned}$$

- Za implikaciju:

$$\begin{aligned}
\mathrm{seq}_1(u,v) &=_{def} \begin{cases} 1, & u \leqslant v \\ v, & u > v \end{cases},\\
\mathrm{seq}_2(u,v) &=_{def} \min(1, 1-u+v),\\
\mathrm{seq}_3(u,v) &=_{def} \begin{cases} 1, & u \leqslant v \\ \frac{v}{u}, & u > v \end{cases}.
\end{aligned}$$

- Za negaciju:

$$\begin{aligned}
\mathrm{non}_0(u) &=_{def} \begin{cases} 1, & u = 0 \\ 0, & u \neq 0 \end{cases},\\
\mathrm{non}_1(u) &=_{def} 1-u.
\end{aligned}$$

- Za jaku disjunkciju:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vel}_1(u,v) &=_{def} \max(u,v),\\
\mathrm{vel}_2(u,v) &=_{def} \min(1, u+v),\\
\mathrm{vel}_3(u,v) &=_{def} u + v - u \cdot v.
\end{aligned}$$

[2] U literaturi postoji neslaganje oko toga da li je suvišno ili nije ove logičke sisteme nazivati (*fuzzy*) *logikama*. Logički sistem u kome rečenice mogu imati beskonačno mnogo *stepena istinitosti* (vrednosti iz $[0,1]$) je *beskonačnovrednosni logički sistem*. Neki autori, ako je u takvom logičkom sistemu pridruživanje stepena istinitosti bazirano na *fuzzy skupovima*, taj logički sistem nazivaju *fuzzy logika*. Po tom konceptu, ova tri beskonačnovrednosna logička sistema su i *fuzzy logike*. Inače, obeležavanje sa Fuzzy_L, Fuzzy_G i Fuzzy_P se koristi u [2].

[3] Mogu se naći u [3].

$$\text{Fuzzy}_L : \begin{array}{l|ccccccc} \text{veznici} & \wedge & \vee & \& & \rightarrow & \neg & \veebar & \equiv \\ \hline \text{ist. funkc.} & \text{et}_1 & \text{vel}_1 & \text{et}_2 & \text{seq}_2 & \text{non}_1 & \text{vel}_2 & \tau^L \end{array}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e(\varphi \wedge \psi)} &= \mathbf{min}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \vee \psi)} &= \mathbf{max}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \& \psi)} &= \mathbf{max}(\mathbf{0}, \boldsymbol{e(\varphi) + e(\psi)} - \mathbf{1}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \rightarrow \psi)} &= \mathbf{min}(\mathbf{1}, \mathbf{1} - \boldsymbol{e(\varphi) + e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\neg\varphi)} &= \mathbf{1} - \boldsymbol{e(\varphi)} \\ \boldsymbol{e(\varphi \equiv \psi)} &= \mathbf{min}(\mathbf{1}, \mathbf{1} - \boldsymbol{e(\varphi) + e(\psi)}, \mathbf{1} - \boldsymbol{e(\psi) + e(\varphi)}) \\ &= \mathbf{1} - |\boldsymbol{e(\varphi) - e(\psi)}| \\ \boldsymbol{e(\varphi \veebar \psi)} &= \mathbf{min}(\mathbf{1}, \boldsymbol{e(\varphi) + e(\psi)}). \end{aligned}$$

Inače, seq_2, et_2, vel_2 i non_1 nazivaju se *Lukasijevičeva (aritmetička) implikacija, konjunkcija, disjunkcija i negacija*, respektivno. Postoji veza između ovih funkcija, npr. $\text{seq}_2(u, v) = \text{vel}_2(\text{non}_1(u), v) = \text{non}_1(\text{et}_2(u, \text{non}_1(v)))$.

$$\text{Fuzzy}_G : \begin{array}{l|ccccccc} \text{veznici} & \wedge & \vee & \& & \rightarrow & \neg & \veebar & \equiv \\ \hline \text{ist. funkc.} & \text{et}_1 & \text{vel}_1 & \text{et}_1 & \text{seq}_1 & \text{non}_0 & \text{vel}_1 & \tau^G \end{array},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e(\varphi \wedge \psi)} &= \mathbf{min}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \vee \psi)} &= \mathbf{max}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \& \psi)} &= \mathbf{min}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \rightarrow \psi)} &= \mathbf{seq_1}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\neg\varphi)} &= \mathbf{non_0}(\boldsymbol{e(\varphi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \equiv \psi)} &= \begin{cases} \mathbf{1}, & \boldsymbol{e(\varphi) = e(\psi)} \\ \mathbf{min}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}), & \boldsymbol{e(\varphi) \neq e(\varphi)} \end{cases} \\ \boldsymbol{e(\varphi \veebar \psi)} &= \mathbf{max}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}). \end{aligned}$$

$$\text{Fuzzy}_\Pi : \begin{array}{l|ccccccc} \text{veznici} & \wedge & \vee & \& & \rightarrow & \neg & \veebar & \equiv \\ \hline \text{ist. funkc.} & \text{et}_1 & \text{vel}_1 & \text{et}_3 & \text{seq}_3 & \text{non}_0 & \nabla_\Pi & \tau^\Pi \end{array},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e(\varphi \wedge \psi)} &= \mathbf{min}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \vee \psi)} &= \mathbf{max}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \& \psi)} &= \boldsymbol{e(\varphi) \cdot e(\psi)} \\ \boldsymbol{e(\varphi \rightarrow \psi)} &= \mathbf{seq_3}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \\ \boldsymbol{e(\neg\varphi)} &= \mathbf{non_0}(\boldsymbol{e(\varphi)}) \\ \boldsymbol{e(\varphi \equiv \psi)} &= \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{max}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) = \mathbf{0} \\ \frac{\mathbf{min}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)})}{\mathbf{max}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)})}, & \mathbf{max}(\boldsymbol{e(\varphi), e(\psi)}) \neq \mathbf{0} \end{cases} \\ \boldsymbol{e(\varphi \veebar \psi)} &= \boldsymbol{e(\varphi) + e(\psi) - e(\varphi) \cdot e(\psi)}. \end{aligned}$$

Rutinski se proverava da je BL-algebra $[0,1]_L$ (resp. $[0,1]_G$ i $[0,1]_\Pi$) MV-algebra (resp. G-algebra i $\Pi-$algebra).

Na kraju, u vezi istorijskih napomena o radovima, istaknimo samo dva rada, nisu se odnosila na logiku, ali su imala važnu ulogu u njenom razvoju. Prvi je prvi rad o reziduiranim mrežama, rad Dilvorta i Vorda,[4] (1939), a drugi rad je Mendžerov rad,[5] (1942), u kome su definisane t-norme (inače, na način koji se razlikuje od sadašnje definicije koja je u upotrebi).

[4]Dilworth, R. P., and Ward, M., Residuated lattices. *Trans. A. M. S. 45* (1939), 335-354

[5]Menger, K., Statistical metrics. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. 28* (1942), 535-537

Glava 3

Aksiomatski sistem BLA

Za različite t-norme t_1 i t_2, skupovi 1-tautologija u $PC(t_1)$ i $PC(t_2)$ mogu biti različiti. Sistem BLA[1] aksiomatizuje osnovna svojstva BL-algebri, kao i osnovna svojstva neprekidnih t-normi i predstavlja zajedničku osnovu svih logika $PC(*)$.

3.1 Saglasnost za BL-tautologije

Definicija 3.1 BLA *je formalni logički sistem koji ima iskazne promenljive (velika slova sa ili bez prirodnih brojeva u subskriptu), veznike* &, $\rightarrow$ *i istinitosnu konstantu* $\overline{0}$*, koja uvek ima vrednost* **0**. **Formule** *su definisane na uobičajeni način: svaka iskazna promenljiva je formula;* $\overline{0}$ *je formula; ako su* φ *i* ψ *formule, onda su* $\varphi\&\psi$*,* $\varphi \rightarrow \psi$ *formule.*
Šeme aksioma *sistema* BLA *su sledeće:*

$$
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{BL1.} & (\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \rightarrow ((\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R}) \rightarrow (\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{R})) \\
\boldsymbol{BL2.} & (\boldsymbol{P}\&\boldsymbol{Q}) \rightarrow \boldsymbol{P} \\
\boldsymbol{BL3.} & (\boldsymbol{P}\&\boldsymbol{Q}) \rightarrow (\boldsymbol{Q}\&\boldsymbol{P}) \\
\boldsymbol{BL4.} & (\boldsymbol{P}\&(\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q})) \rightarrow (\boldsymbol{Q}\&(\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{P})) \\
\boldsymbol{BL5.} & (\boldsymbol{P} \rightarrow (\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R})) \rightarrow ((\boldsymbol{P}\&\boldsymbol{Q}) \rightarrow \boldsymbol{R}) \\
\boldsymbol{BL6.} & ((\boldsymbol{P}\&\boldsymbol{Q}) \rightarrow \boldsymbol{R}) \rightarrow (\boldsymbol{P} \rightarrow (\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{R})) \\
\boldsymbol{BL7.} & ((\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}) \rightarrow \boldsymbol{R}) \rightarrow (((\boldsymbol{Q} \rightarrow \boldsymbol{P}) \rightarrow \boldsymbol{R}) \rightarrow \boldsymbol{R}) \\
\boldsymbol{BL8.} & \overline{\boldsymbol{0}} \rightarrow \boldsymbol{P},
\end{array}
$$

a jedino pravilo izvođenja je **modus ponens***, za koje koristimo oznaku MP.*
Osim toga, u ovom sistemu se uvodi konstanta $\overline{1}$*, gde je* $\overline{1} =_{def} \overline{0} \rightarrow \overline{0}$*, i uvode se sledeći veznici:*

$$
\begin{aligned}
\varphi \wedge \psi &=_{def} \varphi\&(\varphi \rightarrow \psi), \\
\varphi \vee \psi &=_{def} ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi), \\
\neg\varphi &=_{def} \varphi \rightarrow \overline{0}, \\
\varphi \equiv \psi &=_{def} (\varphi \rightarrow \psi)\&(\psi \rightarrow \varphi).
\end{aligned}
$$

[1]BLA je skraćenica za ,,Basic logic axiomatic system".

Za svaku BL-*algebru* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$*, preslikavanje* $\boldsymbol{e}$ *iz skupa svih promenljivih sistema* BLA *u skup* L *naziva se* **$\mathcal{L}$-evaluacija iskaznih promenljivih**.

Šema aksioma BL1 izražava tranzitivnost implikacije, BL2 i BL3 izražavaju da &−konjunkcija implicira njen prvi element i da je komutativna. BL4 izražava komutativnost $\wedge-$konjunkcije, a BL5 i BL6 zajedno izražavaju reziduaciju, BL7 je varijanta dokaza za slučajeve: ako χ sledi iz $\varphi \rightarrow \psi$, onda ako χ sledi iz $\psi \rightarrow \varphi$, tada χ,[2] BL8 kazuje da $\overline{0}$ implicira bilo šta.

Lema 3.1 *Neka je* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ BL-*algebra, i neka je* $\boldsymbol{e}$ $\mathcal{L}$*-evaluacija iskaznih promenljivih sistema* BLA*. Tada,* $\boldsymbol{e}$ *se jednoznačno proširuje na* $\mathcal{L}-$**evaluaciju svih formula** *sistema* BLA*, na sledeći način (koristeći operacije na L):*

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}(\overline{0}) &= \mathbf{0},\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}\&\boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}) \otimes \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi}),\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}) \rightarrow \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi}),\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi} \wedge \boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}) \wedge \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi}),\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi} \vee \boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}) \vee \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi}),\\
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\psi}) &= \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}) \sim \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\varphi}) \leftrightarrow \boldsymbol{e}(\boldsymbol{\psi}).
\end{aligned}$$

DOKAZ: Analogno je dokazu Leme 2.1. Zapravo, tvrđenje Leme 2.1 samo je jedan poseban slučaj opšteg tvrđenja ove leme. U ovom dokazu, kao i u dokazu Leme 2.1, koristimo činjenicu da je u deljivim reziduiranim mrežama operacija $\wedge$ definisana preko operacija $\otimes$ i $\rightarrow$, kao i tvrđenja Teorema 2.2 i 2.3. $\square$

NAPOMENA 3.1 Važi tvrđenje da se u reziduiranoj mreži koja zadovoljava aksiomu prelinearnosti, operacije bireziduuma i alternativnog bireziduuma poklapaju, te je $\boldsymbol{e}e(\varphi) \leftrightarrow \boldsymbol{e}(\psi) = \boldsymbol{e}(\varphi) \sim \boldsymbol{e}(\psi)$, za svaku $\mathcal{L}$-evaluaciju $\boldsymbol{e}$ BL-algebre $\mathcal{L}$.

Definicija 3.2 *Neka je* φ *formula logičkog sistema* BLA*, i neka je* $\mathcal{L}$ BL-*algebra.*

1. *Formula* φ *je* **$\mathcal{L}$-tautologija** *ako je* $\boldsymbol{e}(\varphi) = \mathbf{1}$*, za svaku* $\mathcal{L}$*-evaluaciju* $\boldsymbol{e}$*.*

2. *Formula* φ *je* **BL-tautologija** *ako je* $\mathcal{L}$*-tautologija za svaku* BL-*algebru* $\mathcal{L}$*, što obeležavamo sa* $\models_{\boldsymbol{BL}} \boldsymbol{\varphi}$*.*

Definicija 3.3 1. **Derivacija** *(ili* **izvođenje***) u* BLA *je svaki konačni niz formula čiji je svaki član ili instanca neke šeme aksioma ili je pravilom MP dobijen iz nekih prethodnih članova. Svaka derivacija u* BLA *je* **dokaz** *u* BLA*. Ako je formula* φ *poslednji član nekog dokaza u* BLA*, onda kažemo da je* φ **dokaziva** *(ili* **izvodljiva***, ili da je* **teorema***) u* BLA*, što obeležavamo sa* $\vdash_{\boldsymbol{BLA}} \boldsymbol{\varphi}$*.*

[2] Što će se koristiti, između ostalog, i u dokazu da BLA dokazuje $(\varphi \rightarrow \psi) \vee (\psi \rightarrow \varphi)$.

2. *Svaki skup formula* Σ *sistema* BLA *je* **teorija** *nad* BLA.
   Derivacija *(ili* **izvođenje***)* **u teoriji** Σ *nad* BLA *je svaki konačni niz formula čiji je svaki član ili neka formula iz* Σ *(specijalna aksioma) ili instanca neke šeme aksioma ili je pravilom MP dobijen iz nekih prethodnih članova. Svaka derivacija u* Σ *je* **dokaz u teoriji** Σ.
   Da je formula φ **dokaziva** *u teoriji* $\boldsymbol{\Sigma}$*, označavamo sa* $\boldsymbol{\Sigma} \vdash_{\boldsymbol{BLA}} \boldsymbol{\varphi}$.

3. **Model** *teorije* Σ *nad* BLA *je svaka* $\mathcal{L}$*-evaluacija* $\boldsymbol{e}$*, gde je* $\mathcal{L}$ *neka* BL*-algebra, takva da je* $\boldsymbol{e}(\varphi) = \mathbf{1}$*, za svaku formulu* $\varphi \in \Sigma$.
   Ako je $\boldsymbol{e}(\psi) = \mathbf{1}$*, kažemo da je formula* ψ **tačna** *(ili* **validna***) u modelu* $\boldsymbol{e}$.
   Sa $\boldsymbol{\Sigma} \models_{\boldsymbol{BL}} \boldsymbol{\psi}$ *označavamo da je formula* ψ *tačna u svakom modelu teorije* Σ.

Definicija 3.4 *Sistem* BLA *je* **saglasan** *u odnosu na* BL*-tautologije ako za svaku formulu* φ *i svaki skup formula* Σ *važi:*

1. *Ako* $\vdash_{\boldsymbol{BLA}} \boldsymbol{\varphi}$*, onda* $\models_{\boldsymbol{BL}} \boldsymbol{\varphi}$*;*

2. *Ako* $\boldsymbol{\Sigma} \vdash_{\boldsymbol{BLA}} \boldsymbol{\varphi}$*, onda* $\boldsymbol{\Sigma} \models_{\boldsymbol{BL}} \boldsymbol{\varphi}$.

Teorema 3.1 *Aksiomatski sistem* BLA *je saglasan u odnosu na* BL*-tautoligije.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{L}$ BL-algebra, i neka je $\boldsymbol{e}$ proizvoljna $\mathcal{L}$-evaluacija. Dokažimo da je $\boldsymbol{e}(\delta) = \mathbf{1}$, za svaku instancu δ šema aksioma BL1-BL8.

Prema (1.16), u $\mathcal{L}$ važi: $x \to y = \mathbf{1}$ akko $x \leqslant y$. Ovo tvrđenje koristimo u dokazu, kako je evaluacija svake istance šema aksioma BL1-BL8 u formi $x \to y$. Tako, $\boldsymbol{e}(\delta) = \mathbf{1}$, po (1.41), ako je δ instanca od BL1, po (1.20), ako je δ instanca od BL2, na osnovu komutativnosti za $\otimes$, ako je δ instanca od BL3, na osnovu (1.23), ako je δ instanca od BL5 ili BL6, i na osnovu trećeg dela iz (1.17), ako je δ instanca od BL8. Kako je $\mathcal{L}$ deljiva reziduirana mreža, $\mathcal{L}$ zadovoljava uslov $x \otimes (x \to y) = x \wedge y = y \wedge x = y \otimes (y \to x)$, te je $\boldsymbol{e}(\delta) = \mathbf{1}$ i u slučaju kada je δ instanca od BL4. Dalje, u $\mathcal{L}$ imamo:

$$
\begin{array}{rcl}
 & & ((x \to y) \to z) \otimes ((y \to x) \to z) \\
(\text{zbog prelinearn.}) & = & (((x \to y) \to z) \otimes ((y \to x) \to z)) \otimes ((x \to y) \vee (y \to x)) \\
(\text{po } (1.31))) & = & ((x \to y) \otimes (((x \to y) \to z) \otimes ((y \to x) \to z)) \\
 & \vee & ((y \to x) \otimes ((x \to y) \to z) \otimes ((y \to x) \to z)) \\
(\text{po } (1.15), (1.22)) & \leqslant & (z \otimes ((y \to x) \to z)) \vee (z \otimes ((x \to y) \to z)) \\
(\text{po } (1.20)) & \leqslant & z \vee z = z,
\end{array}
$$

dakle, u $\mathcal{L}$ važi $((x \to y) \to z) \otimes ((y \to x) \to z) \leqslant z$. Odavde, prema svojstvu adjungovanosti (1.3), sledi da je u $\mathcal{L}$ zadovoljeno

$$(x \to y) \to z \leqslant ((y \to x) \to z) \to z.$$

Zaključujemo da je $\boldsymbol{e}(\delta) = \mathbf{1}$ i u slučaju kada je δ instanca šeme aksioma BL7.

Dalje, skup formula, koje u evaluaciji $\boldsymbol{e}$ imaju vrednost $\mathbf{1}$, zatvoren je u odnosu na MP. Zaista, iz $\boldsymbol{e}(\varphi) = \mathbf{1}$ i $\boldsymbol{e}(\varphi \to \psi) = \mathbf{1}$ sledi $\boldsymbol{e}(\psi) = 1$, koristeći (1.18). $\square$

3.2 Derivacije sistema BLA

U ovoj sekciji, kroz dokaze aksiomatskog sistema BLA, dajemo osnovna svojstva veznika ovog sistema.

Da bi derivacije što lakše izložili, uvodimo **izvedene šeme aksioma**, kao i **izvedena pravila**. Na primer, dokaz za $\vdash_{BLA} P \to (Q \to P)$ može se konvertovati u dokazivost svake instance od ove formule, uopšteno, čim dokažemo da je neka formula teorema u BLA, možemo je prezentovati kao izvedenu šemu aksioma, koju koristimo u narednim derivacijama. Slčno je i za izvedena pravila izvođenja.

Najpre, opštepoznato pravilo izvođenja kada se iz $P \Rightarrow Q$ i $Q \Rightarrow R$ zaključuje $P \Rightarrow R$, naziva se **hipotetički silogizam**. Razmotrimo sledeću derivaciju:

1	$\varphi \to \psi$	Pretpostavka
2	$\psi \to \chi$	Pretpostavka
3	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	BL1
4	$(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	$1, 3,$ MP
5	$\varphi \to \chi$	$2, 4,$ MP

Uvedimo ovaj obrazac izvođenja kao derivaciono pravilo:

HS (Hipotetički silogizam) Iz $\boldsymbol{P \to Q}$ i $\boldsymbol{Q \to R}$, izvodljivo je $\boldsymbol{P \to R}$.

Osnovna svojstva implikacije, jake konjunkcije, slabe konjunkcije, slabe disjunkcije, jedinice i ekvivalencije, koja BLA dokazuje, predstavljamo izvedenim šemama aksioma, koje slede.[3]

Lema 3.2 BLA *dokazuje sledeća svojstva implikacije:*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{BLD1.}\ \ \boldsymbol{P \to (Q \to P)};\\
&\boldsymbol{BLD2.}\ \ \boldsymbol{(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))};\\
&\boldsymbol{BLD3.}\ \ \boldsymbol{P \to P};\\
&\boldsymbol{BLD4.}\ \ \boldsymbol{(P \to Q) \to ((R \to P) \to (R \to Q))}.
\end{aligned}$$

DOKAZ. BLD1 dobijamo iz BL6 i BL2, uz primenu MP. Sada, sledi dokaz za BLD2:

1	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \& \psi) \to \chi))$	BL5
2	$(\psi \& \varphi) \to (\varphi \& \psi)$	BL3
3	$((\psi \& \varphi) \to (\varphi \& \psi)) \to$ $(((\varphi \& \psi) \to \chi) \to ((\psi \& \varphi) \to \chi))$	BL1
4	$((\varphi \& \psi) \to \chi) \to ((\psi \& \varphi) \to \chi)$	$2, 3,$ MP
5	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\psi \& \varphi) \to \chi))$	$1, 4,$ HS
6	$((\psi \& \varphi) \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$	BL6
7	$(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi))$	$5, 6,$ HS

Dalje, iz BLD1 i BLD2 možemo dobiti $\vdash_{BLA} \psi \to (\varphi \to \varphi)$. Ako za ψ uzmemo bilo koju aksiomu, BLD3 sledi primenom MP. BLD4 je posledica od BL1 i BLD2. □

[3] D je skraćenica od *derived*.

Izvedena šema aksioma BLD2 omogućuje da uvedemo **transpoziciju**. To je još jedno opštepoznato pravilo izvođenja, koje premešta antecedense. A na osnovu BLD4, uvešćemo pravilo koje izražava izotonost implikacije po drugom argumentu. Obeležimo ga sa DP3. Dakle,

TRAN (Transpozicija) Iz $\boldsymbol{P \to (Q \to R)}$, izvodljivo je $\boldsymbol{Q \to (P \to R)}$.

DP3. Iz $\boldsymbol{P \to Q}$, izvodljivo je $\boldsymbol{(R \to P) \to (R \to Q)}$.

Inače, DP3 možemo dobiti i direktno, na sledeći način:

1	$\varphi \to \psi$	Pretpostavka
2	$(\chi \to \varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\chi \to \psi))$	BL1
3	$(\varphi \to \psi) \to ((\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi))$	$2, \mathrm{TRAN}$
4	$(\chi \to \varphi) \to (\chi \to \psi)$	$1, 3, \mathrm{MP}$

Lema 3.3 BLA *dokazuje sledeća svojstva jake konjunkcije:*

$$
\begin{array}{ll}
\boldsymbol{BLD5.} & \boldsymbol{((P \to Q)\&(Q \to R)) \to (P \to R)}; \\
\boldsymbol{BLD6.} & \boldsymbol{(P\&(P \to Q)) \to Q}; \\
\boldsymbol{BLD7.} & \boldsymbol{P \to (Q \to (P\&Q))}; \\
\boldsymbol{BLD8.} & \boldsymbol{(P \to Q) \to ((P\&R) \to (Q\&R))}; \\
\boldsymbol{BLD8'.} & \boldsymbol{(P \to Q) \to ((R\&P) \to (R\&Q))}.
\end{array}
$$

DOKAZ. BLD5 sledi iz

$$
\begin{array}{l}
\vdash_{BLA} ((\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))) \to \\
\quad ,(((\varphi \to \psi)\&(\psi \to \chi)) \to (\varphi \to \chi))
\end{array}
$$

(po BL5) koristeći BL1 i MP. BL6 dobijamo iz sledeće derivacije:

1	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	BLD3
2	$\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$	$1, \mathrm{TRAN}$
3	$(\varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)) \to ((\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi)$	BL5
4	$(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$	$2, 3, \mathrm{MP}$

BLD7 se slično dokazuje polazeći od $\vdash_{BLA} (\varphi\&\psi) \to (\varphi\&\psi)$ i koristeći BL6.

1	$\psi \to (\chi \to (\psi\&\chi))$	BLD7
2	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\chi \to (\psi\&\chi)))$	$1, \mathrm{DP3}$
3	$(\varphi \to (\chi \to (\psi\&\chi))) \to ((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi))$	BL5
4	$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi))$	$2, 3, \mathrm{HS}$
5	$(\varphi\&\chi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi\&\chi))$	$4, \mathrm{TRAN}$
6	$(\chi\&\varphi) \to (\varphi\&\chi)$	BL3
7	$(\chi\&\varphi) \to ((\varphi \to \psi) \to (\psi\&\chi))$	$5, 6, \mathrm{HS}$
8	$(\varphi \to \psi) \to ((\chi\&\varphi) \to (\psi\&\chi))$	$7, \mathrm{TRAN}$
9	$(\psi\&\chi \to (\chi\&\psi)$	BL3
10	$((\chi\&\varphi) \to (\psi\&\chi)) \to ((\chi\&\varphi) \to (\chi\&\psi))$	$9, \mathrm{DP3}$
11	$(\varphi \to \psi) \to ((\chi\&\varphi) \to (\chi\&\psi))$	$8, 10, \mathrm{HS}$

Iz 8. i 11. koraka ove derivacije dobijamo BLD8 i BLD8$'$. $\square$

Ovde uvodimo još tri izvedena pravila izvođenja:

BCF (Bold Conjunction Formation) Iz $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$, izvodljivo je $\boldsymbol{P\&Q}$.

DP4 Iz $\boldsymbol{P \to Q}$, izvodljivo je $\boldsymbol{(P\&R) \to (Q\&R)}$;

DP4′ Iz $\boldsymbol{P \to Q}$, izvodljivo je $\boldsymbol{(R\&P) \to (R\&Q)}$.

BCF je **pravilo formiranja jake konjunkcije**. To pravilo je posledica izvedene šeme aksioma BLD7 i MP, što vidimo iz sledeće defivacije:

1	φ	Pretpostavka
2	ψ	Pretpostavka
3	$\varphi \to (\psi \to (\varphi\&\psi))$	BLD7
4	$\psi \to (\varphi\&\psi)$	$1, 3, \mathrm{MP}$
5	$\varphi\&\psi$	$2, 4, \mathrm{MP}$

Izvedena pravila DP4 i DP4′ su posledica od BLD8 i BLD8′.

Slede još neka svojstva jake konjunkcije:

Lema 3.4 BLA *dokazuje sledeća svojstva jake konjunkcije:*

$$\boldsymbol{BLD9.}\quad \boldsymbol{((P_1 \to Q_1)\&(P_2 \to Q_2)) \to ((P_1\&P_2) \to (Q_1\&Q_2))};$$
$$\boldsymbol{BLD10.}\quad \boldsymbol{(P\&(Q\&R)) \to ((P\&Q)\&R)};$$
$$\boldsymbol{BLD10'.}\quad \boldsymbol{((P\&Q)\&R) \to (P\&(Q\&R))}.$$

DOKAZ: U dokazu za BLD9 koristimo oba pravila DP4 i DP4′, na sledeći način:

1	$(\varphi_1 \to \psi_1) \to ((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\varphi_2))$	BLD8
2	$((\varphi_1 \to \psi_1)\&(\varphi_2 \to \psi_2)) \to (((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\varphi_2))\&(\varphi_2 \to \psi_2))$	$1, \mathrm{DP4}$
3	$(\varphi_2 \to \psi_2) \to ((\psi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2))$	BLD8′
4	$(((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\varphi_2))\&(\varphi_2 \to \psi_2)) \to$	
	$(((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\varphi_2))\&((\psi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2)))$	$3, \mathrm{DP4'}$
5	$(((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\varphi_2))\&((\psi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2))) \to$	
	$((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2))$	BLD5
6	$(((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\varphi_2))\&(\varphi_2 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2))$	$4, 5, \mathrm{HS}$
7	$((\varphi_1 \to \varphi_2)\&(\psi_1 \to \psi_2)) \to ((\varphi_1\&\varphi_2) \to (\psi_1\&\psi_2))$.	$2, 6, \mathrm{HS}$

Tako smo dokazali BLD9. Dalje, sledi:

1	$(((\varphi\&\psi)\&\chi) \to \delta) \to ((\varphi\&\psi) \to (\chi \to \delta))$	BL6
2	$((\varphi\&\psi) \to (\chi \to \delta)) \to (\varphi \to (\psi \to (\chi \to \delta)))$	BL6
3	$(((\varphi\&\psi)\&\chi) \to \delta) \to (\varphi \to (\psi \to (\chi \to \delta)))$	$1, 2, \mathrm{MP}$
4	$(\psi \to (\chi \to \delta)) \to ((\psi\&\chi) \to \delta)$	BL7
5	$(\varphi \to (\psi \to (\chi \to \delta))) \to (\varphi \to ((\psi\&\chi) \to \delta))$	$4, \mathrm{DP3}$
6	$(\varphi \to ((\psi\&\chi) \to \delta)) \to ((\varphi\&(\psi\&\chi)) \to \delta)$	BL5
7	$(\varphi \to (\psi \to (\chi \to \delta))) \to ((\varphi\&(\psi\&\chi)) \to \delta)$	$5, 6, \mathrm{HS}$
8	$(((\varphi\&\psi)\&\chi) \to \delta) \to ((\varphi\&(\psi\&\chi)) \to \delta)$	$3, 7, \mathrm{HS}$

Sada, ako stavimo $\delta = (\varphi\&\psi)\&\chi$ i upotrebimo BLD3 i MP, završavamo dokaz za BLD10. Slično se dokazuje i BLD10′. □

Lema 3.5 *Sistem* BLA *dokazuje sledeća svojstva slabe konjunkcije:*

BLD11. $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \to \boldsymbol{P}$,
BLD11′. $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \to \boldsymbol{Q}$;
BLD12. $(\boldsymbol{P} \& \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q})$;
BLD13. $(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}))$;
BLD14. $(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{P})$;
BLD15. $((\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \wedge (\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})) \to (\boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}))$.

DOKAZ. Podsetimo da je u BLA veznik $\wedge$ definisan sa: $\varphi \wedge \psi =_{def} \varphi \& (\varphi \to \psi)$. BLD11 je direktna posledica od BL2. BLD11′ je ekvivalentno sa BLD6. Sledeće dve derivacije dokazuju BLD12 i BLD13:

1	$\psi \to (\varphi \to \psi)$	BLD1
2	$(\varphi \& \psi) \to (\varphi \& (\varphi \to \psi))$	1, DP4

1	$((\varphi \to \psi) \& \varphi) \to (\varphi \wedge \psi)$	BL3
2	$(((\varphi \to \psi) \& \varphi) \to (\varphi \wedge \psi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi)))$	BL6
3	$(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\varphi \wedge \psi))$	1, 2, MP

BLD14 je identično sa šema aksiomom BL4.
Sada, dokažimo BLD15.
Obeležimo formulu $((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi))$ sa δ. Iz BLD13 imamo $\vdash_{BLA} (\psi \to \chi) \to (\psi \to (\psi \wedge \chi))$, te ako dokažemo da važi

$$\vdash_{BLA} (\psi \to (\psi \wedge \chi)) \to \delta, \tag{$*$}$$

po pravilu HS, dobićemo

$$\vdash_{BLA} (\psi \to \chi) \to \delta. \tag{1}$$

Za $(*)$ imamo ovu derivaciju:

1	$((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to \psi)$	BLD11
2	$(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$	BL1
3	$((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to ((\psi \to (\psi \wedge \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$	1, 2, HS
4	$(\psi \to (\psi \wedge \chi)) \to (((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \wedge \chi)))$	3, TRAN

Analogno, koristeći BLD11′, umesto BLD11, možemo dobiti

$$\vdash_{BLA} (\chi \to (\chi \wedge \psi)) \to \delta,$$

i dalje,

$$\vdash_{BLA} (\chi \to \psi) \to \delta. \tag{2}$$

Na kraju, prema BL7, $\vdash_{BLA} ((\psi \to \chi) \to \delta) \to (((\chi \to \psi) \to \delta) \to \delta$, što zajedno sa (1) i (2), uz dvostruku primenu MP, daje $\vdash_{BL} \delta$. $\Box$

Lema 3.6 BLA *dokazuje sledeća svojstva slabe disjunkcije:*

***BLD*16.** $(\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \to (\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{P})$;
***BLD*17.** $\boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$,
***BLD*17′.** $\boldsymbol{Q} \to (\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})$;
***BLD*18.** $(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \to ((\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \to \boldsymbol{Q})$;
***BLD*19.** $(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}) \vee (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{P})$;
***BLD*20.** $((\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R}) \wedge (\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R})) \to ((\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \to \boldsymbol{R})$.

DOKAZ. Podsetimo, najpre, na definiciju veznika slabe disjunkcije $\vee$:

$$\varphi \vee \psi =_{def} ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi).$$

BLD16: Posledica definicije veznika $\vee$ i BLD14.
BLD17: Iz $\vdash_{BLA} (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$ (po BLD3), primenom pravila TRAN, dobijamo $\vdash_{BLA} \varphi \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$. Prema BLD1, $\vdash_{BL} \varphi \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$. Sada, upotrebom BCF, dobijamo

$$\vdash_{BLA} \varphi \to (((\varphi \to \psi) \to \psi)\&(\varphi \to ((\varphi \to \psi)),$$

odakle, koristeći BLD12 sledi

$$\vdash_{BLA} \varphi \to (((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge (\varphi \to ((\varphi \to \psi)).$$

Odavde, dalje, primenom BLD15, sledi

$$\vdash_{BLA} \varphi \to (((\varphi \to \psi) \to \psi)\&((\psi \to \varphi) \to \varphi)),$$

odnosno $\vdash_{BLA} \varphi \to (\varphi \vee \psi)$.
BLD17$'$: Posledica od BLD16 i BLD17.
BLD18: Prema BLD11$'$, $\vdash_{BL} (\varphi \vee \psi) \to ((\varphi \to \psi) \to \psi)$, odakle, po pravilu TRAN, sledi BLD18.
BLD19: Stavimo $\delta = (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$. Sada, po BLD17, $\vdash_{BLA} (\varphi \to \psi) \to \delta$, a po BLD17$'$, $\vdash_{BLA} (\psi \to \varphi) \to \delta$, te upotrebom BL7 i MP lako dobijamo $\vdash_{BLA} \delta$.
BLD20: Dokaz je sličan dokazu za BLD15. Stavimo

$$\delta = ((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi).$$

1	$((\varphi \vee \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$	BL1
2	$(\psi \to \chi) \to (((\varphi \vee \psi) \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$	1, TRAN
3	$((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to (\psi \to \chi)$	BLD11$'$
4	$((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi)) \to (((\varphi \vee \psi) \to \varphi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi))$	2, 3, HS
5	$((\varphi \vee \psi) \to \psi) \to (((\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \to (\varphi \vee \psi) \to \chi))$	4, TRAN

Dobili smo $\vdash_{BLA} ((\varphi \vee \psi) \to \psi) \to \delta$, a imamo $\vdash_{BLA} (\varphi \to \psi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \psi)$ (po BLD18), odakle, primenom HS, sledi $\vdash_{BLA} (\psi \to \varphi) \to \delta$. Sličnim postupkom možemo dobiti $\vdash_{BLA} (\varphi \to \psi) \to \delta$. Sada, koristeći BL7 lako se dobija rezultat BLD20. □

Posledica 3.1 *Sledeće dve formule su šeme aksioma sistema* BLA*:*

$$\boldsymbol{BLD21.}\ \ ((\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q})\&(\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})) \to (\boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{Q} \wedge \boldsymbol{R}));$$
$$\boldsymbol{BLD22.}\ \ ((\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R})\&(\boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R})) \to ((\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q}) \to \boldsymbol{R}).$$

DOKAZ. Iz BLD12 imamo $\vdash_{BLA} ((\varphi \to \psi)\&(\varphi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi))$, odakle, primenom BLD15 i HS, sledi BLD21.
BLD22 dokazujemo analogno, koristeći BLD20 umesto BLD15. □

Lema 3.7 BLA *dokazuje sledeća svojstva jedinice:*

$$\boldsymbol{BLD23}\ \ \overline{1};$$
$$\boldsymbol{BLD24}\ \ \boldsymbol{P} \to (1\&\boldsymbol{P}).$$

DOKAZ. BLD23 je posledica od BLD3. Iz BLD7 imamo $\vdash_{BLA} 1 \to (\varphi \to (1\&\varphi))$, što zajedno sa BLD23 i HS povlači BLD24. □

Da bismo što lakše predstavili neke naredne derivacije, uvedimo još jedno izvedeno pravilo, na osnovu BLD9:

DP5. Iz $(\boldsymbol{P_1} \to \boldsymbol{Q_1})\&(\boldsymbol{P_2} \to \boldsymbol{Q_2})$, izvodljivo je $(\boldsymbol{P_1}\&\boldsymbol{P_2}) \to (\boldsymbol{Q_1}\&\boldsymbol{Q_2})$.

Lema 3.8 *BLA dokazuje sledeća svojstva ekvivalencije:*

$$\begin{array}{ll}
\boldsymbol{BLD25} & \boldsymbol{P \equiv P}; \\
\boldsymbol{BLD26} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to (Q \equiv P)}; \\
\boldsymbol{BLD27} & \boldsymbol{((P \equiv Q)\&(Q \equiv R)) \to (P \equiv R)}; \\
\boldsymbol{BLD28} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to (P \to Q)}, \\
\boldsymbol{BLD28'} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to (Q \to P)}; \\
\boldsymbol{BLD29} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to ((P\&R) \equiv (Q\&R))}; \\
\boldsymbol{BLD29'} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to ((R\&P) \equiv (R\&Q))}; \\
\boldsymbol{BLD30} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to ((P \to R) \equiv (Q \to R))}; \\
\boldsymbol{BLD30'} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to ((R \to P) \equiv (R \to Q))}; \\
\boldsymbol{BLD31} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to ((P \to Q) \wedge (Q \to P))}; \\
\boldsymbol{BLD32} & \boldsymbol{((P \to Q) \wedge (Q \to P)) \to (P \equiv Q)}; \\
\boldsymbol{BLD32'} & \boldsymbol{(P \equiv Q) \to ((P \to Q) \wedge (Q \to P))}.
\end{array}$$

DOKAZ. Podsetimo, $\varphi \equiv \psi =_{def} (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$.
BLD25 sledi preko BLD3 i BCF, BLD26 je posledica od BL3. BLD27 se lako dobija primenom asocijativnosti iz BLD10 i BLD10', BL2 i BLD5, kao i HS. BLD28 je posledica od BL2, a BLD28$'$ je posledica od BL2 i BL3. Dalje,

$$\begin{array}{r|ll}
1 & (\varphi \to \psi) \to ((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi)) & \text{BLD8} \\
2 & (\psi \to \varphi) \to ((\psi\&\chi) \to (\varphi\&\chi)) & \text{BLD8} \\
3 & ((\varphi \to \psi) \to ((\varphi\&\chi) \to (\psi\&\chi)))\& & \\
 & ((\psi \to \varphi) \to ((\psi\&\chi) \to (\varphi\&\chi))) & 1, 2, \text{BCF} \\
4 & (\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi\&\chi) \equiv (\psi\&\chi)) & 3, \text{DP5}
\end{array}$$

Tako smo dokazali BLD29. Analogno je u dokazu za BLD29$'$, koristeći BLD8$'$ umesto BLD8. Naredna derivacija dokazuje BLD30:

$$\begin{array}{r|ll}
1 & (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\psi \to \chi))) & \text{BL1} \\
2 & ((\psi \to \varphi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi))) & \text{BL1} \\
3 & ((\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)))\& & \\
 & ((\psi \to \varphi) \to ((\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi))) & 1, 2, \text{BCF} \\
4 & (\varphi \equiv \psi) \to ((\varphi \to \chi) \equiv (\psi \to \chi)) & 3, \text{DP5}
\end{array}$$

Analogno je u dokazu za BLD30$'$, koristeći BLD4 umesto BL1. BLD31 je direktna posledica od BLD12.
Sada, dokažimo BLD32. Stavimo $\delta = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$. Iz BLD11$'$ imamo

$$\vdash_{BLA} \delta \to (\psi \to \varphi).$$

Kako je, prema BLD8$'$,

$$\vdash_{BLA} (\delta \to (\psi \to \varphi)) \to (((\varphi \to \psi)\&\delta) \to (\varphi \equiv \psi)),$$

primenom MP dobijamo

$$\vdash_{BLA} ((\varphi \to \psi)\&\delta) \to (\varphi \equiv \psi),$$

odakle, primenom BL6, sledi

$$\vdash_{BLA} (\varphi \to \psi) \to (\delta \to (\varphi \equiv \psi)).$$

Sličnim postupkom možemo dobiti

$$\vdash_{BLA} (\psi \to \varphi) \to (\delta \to (\varphi \equiv \psi)).$$

Konačno, na osnovu BL7, sledi $\vdash_{BLA} \delta \to (\varphi \equiv \psi)$.

BLD32$'$ je direktna posledica od BLD12. $\square$

Glava 4

Slaba BLA-potpunost i posledice

U ovom delu dokazujemo slabu potpunost sistema BLA u odnosu na BL-tautologije. Zatim, u okviru tzv. **šematskih proširenja** sistema BLA, nalazimo slabo potpune aksiomatizacije za MV-tautologije, G-tautologije i Π-tautologije. Na kraju, ove rezultate stavljamo u relaciju sa nekim drugim poznatim tvrđenjima.

4.1 Slaba BLA-potpunost za BL-tautologije

Najpre, navodimo sledeće poznato tvrđenje iz teorije uređenih skupova:[1]

Teorema 4.1 *Ako je ρ relacija pretporetka (tj. refleksivna i tranzitivna) na skupu A, a $\sigma = \rho \cap \rho^{-1}$, tada je σ relacija ekvivalencije na A i formula*

$$[x] \leqslant [y] \ \text{akko} \ x\,\rho\,y \tag{4.1}$$

definiše relaciju poretka $\leqslant$ na skupu klasa ekvivalencije A/σ.

Obeležimo sa $\mathcal{F}$ skup svih formula iz BLA.

Lema 4.1 *Neka je T fiksirana teorija nad* BLA *ili $T = \emptyset$, i neka je relaciju σ_T na $\mathcal{F}$ definisana na sledeći način:*

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \in \boldsymbol{\sigma_T} \ \text{akko} \ \boldsymbol{T} \vdash_{\boldsymbol{BLA}} \varphi \equiv \boldsymbol{\psi}. \tag{4.2}$$

Tada, σ_T je relacija ekvivalencije na $\mathcal{F}$ i skup $\mathcal{F}/\sigma_T$ je parcijalno uređen relacijom $\leqslant$ koja je definisana sa:

$$[\boldsymbol{\varphi}]_{\boldsymbol{T}} \leqslant [\boldsymbol{\psi}]_{\boldsymbol{T}} \ \text{akko} \ \boldsymbol{T} \vdash_{\boldsymbol{BLA}} \varphi \rightarrow \boldsymbol{\psi}. \tag{4.3}$$

DOKAZ: Definišimo na $\mathcal{F}$ relaciju ρ_T, na sledeći način:

$$(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \in \boldsymbol{\rho_T} \ \text{akko} \ , \boldsymbol{T} \vdash_{\boldsymbol{BLA}} \varphi \rightarrow \boldsymbol{\psi}. \tag{4.4}$$

[1] Može se naći u [6].

DOKAZ. Iz BLD3, $\vdash_{BLA} \varphi \to \varphi$, te je ρ_T refleksivna relacija.
Ako $T \vdash_{BLA} \varphi \to \psi$ i $T \vdash_{BLA} \psi \to \chi$, tada $T \vdash_{BLA} (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \chi)$ (primenom BCF). Odavde, na osnovu BLD5, sledi $T \vdash_{BLA} \varphi \to \chi$. Dakle, ρ_T je tranzitivna relacija.
Stavimo $\theta_T = \rho_T \cap \rho_T^{-1}$ i pokažimo da je $\theta_T = \sigma_T$. Važi: $\varphi\, \theta_T\, \psi$ akko $\varphi\, \rho_T\, \psi$ i $\psi\, \rho_T\, \varphi$ akko $T \vdash_{BLA} \varphi \to \psi$ i $T \vdash_{BLA} \psi \to \varphi$ akko (u jednom smeru, primenom BCF, a u drugom smeru, na osnovu BLD28 i BLD28$'$) $T \vdash_{BLA} \varphi \equiv \psi$ akko $\varphi\, \sigma_T\, \psi$. Dakle, zaista je $\theta_T = \sigma_T$. Sada, prema napred navedenoj Teoremi 4.1, sledi da je σ_T relacija ekvivalencije na $\mathcal{F}$ i da je relacioni sistem $\langle \mathcal{F}/\sigma_T, \leqslant \rangle$, gde je relacija $\leqslant$ definisana sa (4.3), parcijalno uređenje.[2] □

Iz Leme 4.1 imamo da svaku klasu ekvivalencije u $\mathcal{F}/\sigma_T$ čine formule čije su sve međusobne ekvivalencije dokazive u teoriji T, tj. za sve $\varphi, \psi \in \mathcal{F}$ važi:

$$[\boldsymbol{\varphi}]_{\boldsymbol{T}} = [\boldsymbol{\psi}]_{\boldsymbol{T}} \ \text{ akko } \ \boldsymbol{T} \vdash_{\boldsymbol{BL}} \boldsymbol{\varphi} \equiv \boldsymbol{\psi}. \tag{4.5}$$

Lema 4.2 *Na skupu $\mathcal{F}/\sigma_T$, gde je relacija ekvivalencije σ_T definisana sa* (4.2), *binarne operacije $\otimes$, $\to$, koje su definisane na sledeći način:*

$$[\boldsymbol{\varphi}]_{\boldsymbol{T}} \otimes [\boldsymbol{\psi}]_{\boldsymbol{T}} \ =_{\boldsymbol{def}} \ [\boldsymbol{\varphi}\&\boldsymbol{\psi}]_{\boldsymbol{T}}; \tag{4.6}$$

$$[\boldsymbol{\varphi}]_{\boldsymbol{T}} \to [\boldsymbol{\psi}]_{\boldsymbol{T}} \ =_{\boldsymbol{def}} \ [\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi}]_{\boldsymbol{T}}, \tag{4.7}$$

dobro su definisane.

DOKAZ. Neka $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}$, i neka je $\varphi_1\, \sigma_T\, \psi_1$ i $\varphi_2\, \sigma_T\, \psi_2$, tj. $T \vdash_{BL} \varphi_1 \equiv \psi_1$ i $T \vdash_{BL} \varphi_2 \equiv \psi_2$. Pogledajmo sledeću derivaciju u sistemu BLA:

1	$\varphi_1 \equiv \psi_1$	Pretpostavka
2	$\varphi_2 \equiv \psi_2$	Pretpostavka
3	$(\varphi_1 \equiv \psi_1) \to ((\varphi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\varphi_2))$	BLD28
4	$(\varphi_2 \equiv \psi_2) \to ((\psi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\psi_2))$	BLD29
5	$(\varphi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\varphi_2)$	$1, 3, \mathrm{MP}$
6	$(\psi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\psi_2)$	$2, 4, \mathrm{MP}$
7	$((\varphi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\varphi_2))\&((\psi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\psi_2))$	$5, 6, \mathrm{BCF}$
8	$(((\varphi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\varphi_2))\&((\psi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\psi_2))) \to$	
	$((\varphi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\psi_2))$	BLD27
9	$(\varphi_1\&\varphi_2) \equiv (\psi_1\&\psi_2)$	$7, 8, \mathrm{MP}$
10	$(\varphi_1 \equiv \psi_1) \to ((\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \varphi_2))$	BLD30
11	$(\varphi_2 \equiv \psi_2) \to ((\psi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2))$	BLD30$'$
12	$(\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \varphi_2)$	$1, 10, \mathrm{MP}$
13	$(\psi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2)$	$2, 11, \mathrm{MP}$
14	$((\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \varphi_2))\&((\psi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2))$	$12, 13, \mathrm{BCF}$
15	$(((\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \varphi_2))\&((\psi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2))) \to$	
	$((\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2))$	BLD27
16	$(\varphi_1 \to \varphi_2) \equiv (\psi_1 \to \psi_2)$	$14, 15, \mathrm{MP}$

Iz 9. i 16. koraka ove derivacije sledi da su operacije $\otimes$ i $\to$ dobro definisane. □

[2] Inače, da je neka relacija σ, definisana sa $(\varphi, \psi) \in \sigma$ akko $T \vdash_{BLA} \varphi \equiv \psi$, relacija ekvivalencije, direktno se dobija koristeći BL25, BL26 i BL27.

Lema 4.2 i definicije veznika $\wedge$ i $\vee$ omogućuju da u $\mathcal{F}/\sigma_T$ dobro definisemo još dve binarne operacije:

$$\begin{aligned}
[\varphi]_T \wedge [\psi]_T &=_{def} [\varphi]_T \otimes ([\varphi]_T \to [\psi]_T) && (4.8)\\
&= [\varphi \wedge \psi]_T,\\
[\varphi]_T \vee [\psi]_T &=_{def} (([\varphi]_T \to [\psi]_T) \to [\psi]_T) \wedge (([\psi]_T \to [\varphi]_T) \to [\varphi]_T) && (4.9)\\
&= [\varphi \vee \psi]_T.
\end{aligned}$$

Definicija 4.1 *Algebarsku strukturu* $\langle \mathcal{F}/\sigma_T, \wedge, \vee, \otimes, \to, [\overline{0}]_T, [\overline{1}]_T \rangle$, *gde je* T *neki fiksirani skup formula sistema* BLA, *a operacije* $\wedge$, $\vee$, $\otimes$ *i* $\to$ *su definisane kao u* (4.6)-(4.9), *obeležavamo sa* $\mathcal{L}_T$ *(u slučaju* $T = \emptyset$, *imamo oznaku* $\mathcal{L}_\emptyset$*).*

Teorema 4.2 *Za svaki podskup* $T \subseteq \mathcal{F}$, *gde je* $\mathcal{F}$ *skup svih formula sistema* BLA, *algebra* $\mathcal{L}_T$ *je* BL-*algebra.*

DOKAZ. Neka je $T \subseteq \mathcal{F}$, i neka $[\varphi]_T, [\psi]_T, [\chi]_T \in \mathcal{F}/\sigma_T$.
• Dokažimo da je $\langle \mathcal{F}/\sigma_T, \wedge, \vee, [\overline{0}]_T, [\overline{1}]_T \rangle$ ograničena mreža.
Prvo dokazujemo da je

$$\inf\{[\varphi]_T, [\psi]_T\} = [\varphi]_T \wedge [\psi]_T. \tag{6.10}$$

Po definiciji (4.8), $[\varphi]_T \wedge [\psi]_T = [\varphi \wedge \psi]_T$. Prema (4.3), $[\varphi \wedge \psi]_T \leqslant [\varphi]_T$ akko $T \vdash_{BLA} \varphi \wedge \psi \to \varphi$. Takođe, $[\varphi \wedge \psi]_T \leqslant [\psi]_T$ akko $T \vdash_{BLA} \varphi \wedge \psi \to \psi$. Odavde, na osnovu BLD11 i BLD11$'$, zaključujemo da je $[\varphi \wedge \psi]_T$ donje ograničenje skupa $\{[\varphi]_T, [\psi]_T\}$. Pretpostavimo da je $[\chi]_T \leqslant [\varphi]_T, [\psi]_T$. Tada, $T \vdash_{BLA} \chi \to \varphi$ i $T \vdash_{BLA} \chi \to \psi$, odakle, primenom BCF, sledi $T \vdash_{BLA} (\chi \to \varphi)\&(\chi \to \psi)$. Odavde, koristeći BLD21 sledi $T \vdash_{BLA} \chi \to (\varphi \wedge \psi)$, što je ekvivalentno sa $[\chi]_T \leqslant [\varphi \wedge \psi]_T$. Dakle, $[\varphi \wedge \psi]_T$ je najveće donje ograničenje skupa $\{[\varphi]_T, [\psi]_T\}$.
Sledi analogni dokaz jednakosti

$$\sup\{[\varphi]_T, [\psi]_T\} = [\varphi]_T \vee [\psi]_T. \tag{6.11}$$

$[\varphi]_T \vee [\psi]_T = [\varphi \vee \psi]_T$, i važi: $[\varphi]_T, [\psi]_T \leqslant [\varphi \vee \psi]_T$ akko $T \vdash_{BLA} \varphi \to (\varphi \vee \psi)$ i $T \vdash_{BLA} \psi \to (\varphi \vee \psi)$. Odavde, na osnovu BLD17 i BLD17$'$, zaključujemo da je $[\varphi \vee \psi]_T$ gornje ograničenje skupa $\{[\varphi]_T, [\psi]_T\}$. Pretpostavimo da je $[\varphi]_T, [\psi]_T \leqslant [\chi]_T$. Tada, $T \vdash_{BLA} \varphi \to \chi$ i $T \vdash_{BLA} \psi \to \chi$, odakle, primenom BCF, sledi $T \vdash_{BLA} (\varphi \to \chi)\&(\psi \to \chi)$. Odavde, koristeći BLD22 sledi $T \vdash_{BLA} (\varphi \vee \psi) \to \chi$, što je ekvivalentno sa $[\varphi \vee \psi]_T \leqslant [\chi]_T$.

Tako smo dokazali da je relacioni sistem $\langle \mathcal{F}/\sigma_T, \leqslant \rangle$, gde je parcijalno uređenje $\leqslant$ definisano u (4.3), mrežno uređeni skup, te, prema poznatom tvrđenju iz teorije mreža, $\langle \mathcal{F}/\sigma_T, \leqslant \rangle$ je mreža i kao algebarska struktura $\langle \mathcal{F}/\sigma_T, \wedge, \vee \rangle$, gde su binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ jednake infimumu i supremumu, respektivno.

Iz BL8 i (4.3) imamo $[\overline{0}]_T \leqslant [\varphi]_T$, te je $[\overline{0}]_T$ najmanji element u ovoj mreži. Iz BLD1 imamo $T \vdash_{BLA} \overline{1} \to (\varphi \to \overline{1})$, te upotrebom BLD23 dobijamo $T \vdash_{BLA} \varphi \to \overline{1}$, što je ekvivalentno sa $[\varphi]_T \leqslant [\overline{1}]$. Dakle, $[\overline{1}]$ je najveći element mreže $\langle \mathcal{F}/\sigma_T, \wedge, \vee \rangle$.

• Sada, dokažimo da je $\langle \mathcal{F}/\sigma_T, \otimes, [\overline{1}]_T \rangle$ komutativni monoid.
Na osnovu definicije (4.6), jednakost $[\varphi]_T \otimes [\psi]_T = [\psi]_T \otimes [\varphi]_T$ dobijamo preko BL3, dok je $([\varphi]_T \otimes [\psi]_T) \otimes [\psi]_T = [\varphi]_T \otimes ([\psi]_T \otimes [\chi]_T)$ posledica upotrebe BLD10 i BLD10$'$. Dalje, koristeći BLD24 dobijamo $[\varphi]_T \leqslant [\overline{1}]_T \otimes [\varphi]_T$, dok je suprotan smer ove nejednakosti posledica od BL2 i komutativnosi operacije $\otimes$.
• Sledi dokaz da u $\mathcal{L}_T$ važi svojstvo adjungovanosti (1.3).
$[\varphi]_T \leqslant [\psi]_T \to [\chi]_T$ akko $[\varphi]_T \leqslant [\psi \to \chi]_T$ akko $T_{BL} \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$ akko (koristeći BL5 i BL6) $T \vdash_{BLA} (\varphi \& \psi) \to \chi$ akko $[\varphi \& \psi]_T \leqslant [\chi]_T$ akko $[\varphi]_T \otimes [\psi]_T \leqslant [\chi]_T$.
Tako smo dokazali da je algebra $\mathcal{L}_T = \langle \mathcal{F}/\sigma_T, \wedge, \vee, \otimes, \to, [\overline{0}]_T, [\overline{1}]_T \rangle$ reziduirana mreža.
• Kao direktnu posledicu definicije (4.8), imamo da je $\mathcal{L}_T$ deljiva reziduirana mreža. Dalje, na osnovu derivacije:

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi) & \text{BLD19} \\
2 & ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi) \to (1 \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))) & \text{BLD1} \\
3 & 1 \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)), & 1, 2, \text{MP}
\end{array}
$$

sledi $[\overline{1}]_T \leqslant ([\varphi]_T \to [\psi]_T) \vee ([\psi]_T \to [\varphi]_T)$, što povlači da $\mathcal{L}_T$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Dakle, $\mathcal{L}_T$ je BL-algebra. □

Po Teoremi 3.1, sistem BLA je saglasan u odnosu na BL-tautologije. Pre nego što dokažemo njegovu **slabu potpunost** u odnosu na BL-tautologije (tj. da iz $\models_{BL} \varphi$ sledi $\vdash_{BLA} \varphi$), navodimo poznato tvrđenje iz teorije reziduiranih mreža, koje se odnosi na poddirektnu reprezentaciju reziduiranih mreža.

Teorema 4.3 *Reziduirana mreža $\mathcal{L}$ je izomorfna poddirektnom proizvodu linearno uređenih reziduiranih mreža akko zadovoljava aksiomu prelinearnosti.*
Šta više, ove linearno uređene reziduirane mreže mogu biti izabrane tako da zadovoljavaju sve identitete koji su zadovoljeni u $\mathcal{L}$.

Teorema 4.4 *Za svaku formulu φ logičkog sistema* BLA*, sledeća tri uslova su ekvivalentna:*

(1) *Formula φ je dokazivau u* BLA*, tj.* $\vdash_{\boldsymbol{BLA}} \boldsymbol{\varphi}$*;*

(2) *Za svaku linearno uređenu* BL*-algebru $\mathcal{L}$, φ je $\mathcal{L}$-tautologija;*

(3) *Za svaku* BL*-algebru $\mathcal{L}$, φ je $\mathcal{L}$-tautologija, tj.* $\models_{\boldsymbol{BL}} \boldsymbol{\varphi}$.

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2): Da je sistem BLA saglasan u odnosu na BL-tautologije, dokazano je u Teoremi 3.1. Dakle, iz (1) sledi da je φ $\mathcal{L}$-tautologija, za svaku BL-algebru $\mathcal{L}$, samim tim, φ je $\mathcal{L}$-tautologija, za svaku linearnu BL-algebru $\mathcal{L}$.
(2) $\Rightarrow$ (3): Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljna BL-algebra. Kako $\mathcal{L}$, po definiciji, zadovoljava aksiomu prelinearnosti, prema Teoremi 4.3, $\mathcal{L}$ se može potopiti u direktan proizvod neke familije $\langle \mathcal{L}_i : i \in I \rangle$ linearno uređenih reziduiranih mreža. Neka je $\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{L}_i$. Obeležimo sa φ^* term na jeziku reziduiranih mreža koji je prirodno

dobijen iz φ (zamenom veznika i konstanti $\wedge, \vee, \&, \rightarrow, \overline{0}, \overline{1}$ iz φ odgovarajućim funkcijskim simbolima i konstantama). Po pretpostavci, φ je $\mathcal{L}_i$-tautologija, za sve $i \in I$, što povlači da $\mathcal{L}_i$ zadovoljava identitet $\varphi^* = 1$, za sve $i \in I$. Odavde sledi da i $\mathcal{A}$ zadovoljava identitet $\varphi^* = 1$, te zbog potapanja, ovaj identitet važi i u algebri $\mathcal{L}$, što povlači da je $\boldsymbol{e}(\varphi) = \mathbf{1}$, za svaku $\mathcal{L}$-evaluaciju $\boldsymbol{e}$. Dakle, φ je $\mathcal{L}$-tautologija.
(3) $\Rightarrow$ (1): Prema Teoremi 4.2, algebra $\mathcal{L}_\emptyset$ je BL-algebra. Sada, prema pretpostavci, φ je $\mathcal{L}_\emptyset$-tautologija. Uzmimo $\mathcal{L}_\emptyset$-evaluaciju $\boldsymbol{e}$ takvu da je $\boldsymbol{e}(\mathrm{P})= [\mathrm{P}]$, za svaku iskaznu promenljivu P. Tada je $\boldsymbol{e}(\varphi) = [\varphi]_\emptyset$, te mora biti $[\varphi]_\emptyset = [\overline{1}]_\emptyset$, što je, prema (4.5), ekvivalentno sa $\vdash_{BLA} \overline{1} \equiv \varphi$. Odavde, koristeći BL2 i BLD23 sledi $\vdash_{BLA} \varphi$. $\square$

Definicija 4.2 1. *Aksiomatski sistem $\mathcal{C}$ je tzv.* **šematsko proširenje** *sistema* BLA *ako je dobijen iz sistema* BLA *tako što su njegovim šemama aksioma* BL1-BL8 *dodate još neke šeme aksioma (konačno ili beskonačno).*
Ako je $\mathcal{C}$ šematsko proširenje od BLA*, tada za* BL*-algebru $\mathcal{L}$ kažemo da je* **$\mathcal{C}$-algebra** *ukoliko za sve aksiome iz $\mathcal{C}$ važi da su $\mathcal{L}$-tautologije.*

2. *Formula φ je* **$\mathcal{C}$-tautologija** *ako je $\mathcal{L}$-tautologija za svaku $\mathcal{C}$-algebru $\mathcal{L}$, što obeležavamo sa $\models_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\varphi}$.*

3. *Šematsko proširenje $\mathcal{C}$ od* BLA *je* **slabo potpuno** *u odnosu na $\mathcal{C}$-tautologije ako za svaku formulu φ važi: $\models_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\varphi}$ povlači $\vdash_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\varphi}$.*

4. **Model** *teorije Σ nad $\mathcal{C}$ je svaka $\mathcal{L}$-evaluacija $\mathbf{e}$, gde je $\mathcal{L}$ neka $\mathcal{C}$-algebra, takva da je $\mathbf{e}(\varphi) = \mathbf{1}$, za svaku formulu $\varphi \in \Sigma$.*
Ako je $\mathbf{e}(\psi) = \mathbf{1}$, kažemo da je formula ψ **tačna** *(ili* **validna***) u modelu $\mathbf{e}$.*
Sa $\boldsymbol{\Sigma} \models_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\psi}$ označavamo da je formula ψ tačna u svakom modelu teorije Σ nad $\mathcal{C}$.

Sledeća teorema tvrdi da je svako šematsko proširenje $\mathcal{C}$ od BLA saglasno i slabo potpuno u odnosu na $\mathcal{C}$-tautologije.

Teorema 4.5 *Neka je $\mathcal{C}$ šematsko proširenje od* BLA*. Tada, za svaku formulu φ, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) *φ ima dokaz u $\mathcal{C}$, tj. $\vdash_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\varphi}$;*

(2) *φ je $\mathcal{L}$-tautologija za svaku linearno uređenu $\mathcal{C}$-algebru $\mathcal{L}$;*

(3) *Za svaku $\mathcal{C}$-algebru $\mathcal{L}$, φ je $\mathcal{C}$-tautologija, tj. $\models_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\varphi}$.*

DOKAZ. (1) $\Rightarrow$ (2): Analogno dokazu Teoreme 4.4.
(2) $\Rightarrow$ (3): Takođe, analogno dokazu Teoreme 4.4, samo što sada koristimo i drugo tvrđenje Teoreme 4.3. Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljna $\mathcal{C}$-algebra. Kako je $\mathcal{L}$ BL-algebra, $\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Prema Teoremi 4.3, postoji familija $\langle \mathcal{L}_i : i \in I \rangle$ linearno uređenih reziduiranih mreža, takva da svaki identitet koji važi u $\mathcal{L}$, važi i u $\mathcal{L}_i$, za sve $i \in I$, i takva da se $\mathcal{L}$ može potapiti u direktn proizvod $\prod_{i \in I} \mathcal{L}_i$. Dakle, $\mathcal{L}_i$ su linearno uređene $\mathcal{C}$-algebre, za sve $i \in I$, te se tvrđenje dalje dokazuje analogno

dokazu Teoreme 4.4.
(3) $\Rightarrow$ (1) Prema Teoremi 4.2, algebra $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ klasa ekvivalencije međusobno ekvivalentnih formula u teoriji $\mathcal{C}$ je BL-algebra. Dokažimo da je i $\mathcal{C}$-algebra, tj. da zadovoljava svaku aksiomu iz $\mathcal{C}$. Neka je $\{P_i : i \in \mathbf{N}\}$ skup svih promenljivih sistema BLA. Neka je $\Psi(P_1, \dots, P_n)$ šema aksioma iz $\mathcal{C}$. Prvo, za svaku instancu Ψ' od Ψ važi $[\Psi']_{\mathcal{C}} = [\overline{1}]_{\mathcal{C}}$. Neka je $\boldsymbol{e}$ proizvoljna $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-evaluacija, u kojoj je $\boldsymbol{e}(P_i) = [\psi_i]$, za sve $i \in \mathbf{N}$, i neka je $\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ neka instanca od $\Psi(P_1, \dots, P_n)$. Tada, $\boldsymbol{e}(\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = [\Psi(\varphi'_1, \dots, \varphi'_n)]$, gde je formula φ'_i dobijena iz φ_i substitucijom P_i sa ψ_i, za sve $i \in \mathbf{N}$. Kako je $\Psi(\varphi'_1, \dots, \varphi'_n)$ takođe jedna instanca od $\Psi(P_1, \dots, P_n)$, važi $[\Psi(\varphi'_1, \dots, \varphi'_n)]_{\mathcal{C}} = [\overline{1}]_{\mathcal{C}}$, te je $\boldsymbol{e}(\Psi(\varphi_1, \dots, \varphi_n)) = [\overline{1}]_{\mathcal{C}}$. Dakle, $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$ je $\mathcal{C}$-algebra. Sada, po pretpostavci, φ je $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-tautologija. Ako uzmemo $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}$-evaluaciju $\boldsymbol{e}$ takvu da je $\boldsymbol{e}(P_i) = [P_i]$, za sve $i \in \mathbf{N}$, dobijamo $[\varphi]_{\mathcal{C}} = [\overline{1}]_{\mathcal{C}}$, što je, prema (4.5), ekvivalentno sa $\mathcal{C} \vdash_{BLA} \overline{1} \equiv \varphi$. Odavde, koristeći BL2 i BLD23 lako dobijamo $\mathcal{C} \vdash_{BLA} \varphi$, tj. $\vdash_{\mathcal{C}} \varphi$. $\square$

Napomena 4.1 Nazovimo sve algebre određene po neprekidnim t-normama **t-algebre**, a formulu nazovimo **t-tautologijom**, ako je ta formula $\mathcal{L}(*)$-tautologija, za svaku neprekidnu t-normu $*$. Ovde, prenesimo jednu napomenu iz [4]. Naime, ako $\vdash_{BLA} \varphi$, onda je φ t-tautologija. Međutim, može se postaviti pitanje t-potpunosti sistema BLA, odnosno pitanje dokazivosti t-tautologija u sistemu BLA. Znamo da je svaka t-tautologija dokaziva u BLA, ako je BL-tautologija (tj. ako je $\mathcal{L}$-tautologija za svaku BL-algebru $\mathcal{L}$). Drugim rečima, da li je BLA (slabo) potpuna aksiomatizacija za presek svih logika $PC(*)$, gde je $*$ neprekidna t-norma? Ili, da li se može pronaći neka formula koja je t-tautologija, a da u nekoj BL-algebri $\mathcal{L}$ nije $\mathcal{L}$-tautologija? Postoji proširenje od BLA koje je (slabo) potpuno u odnosu na t-tautologije, te ostaje pitanje dokazivosti tih dodatnih aksioma u BLA.

Napomena 4.2 Za svako šematsko proširenje $\mathcal{C}$ sistema BLA važi i jaka potpunost,[3] koja dovodi u vezu dokazivost formule u nekoj teoriji sistema $\mathcal{C}$ i validnost te formule u svakom modelu ove teorije. Naime, ako je T neka teorija nad $\mathcal{C}$, onda za svaku formulu φ važi: $T \vdash_{\mathcal{C}} \varphi$ akko $T \models_{\mathcal{C}} \varphi$.

4.2 Formalni sistemi za MV, G i Π-tautologije

U ovoj sekciji, u okviru šematskih proširenja sistema BLA, nalazimo slabo potpune aksiomatizacije za MV-tautologije, G-tautologije i Π-tautologije. Bez dokaza, navodimo poznata tvrđenja o vezi MV-tautologija, G-tautologija i Π-tautologija sa 1-tautologijama iskaznog računa $PC(*_L)$, $PC(*_G)$ i $PC(*_\Pi)$, respektivno. Na taj način, dobijamo saglasne i slabo potpune aksiomatizaije za svaku od ovih logika. Kao primer dva ekvivalentna sistema, navodimo poznati **(fuzzy) Lukasijevičev aksiomatski sistem** za Lukasijevičevu (fuzzy) iskaznu logiku Fuzzy$_L$, koji je ekvivalentan sa BLA + $(\neg\neg)$, u smislu ekvivalentnih teorija. Osim toga, pokazujemo da nema saglasne i jako potpune aksiomatizacije za Fuzzy$_L$.

[3] Može se naći u [4].

Inače, u ovoj sekciji, za logike $PC(*_L)$, $PC(*_G)$ i $PC(*_\Pi)$ koristimo oznake Fuzzy_L, Fuzzy_G i Fuzzy_Π, respektivno.

Definicija 4.3 *Formula aksiomatskog sistema* BLA *je* MV-*tautologija (resp.* G-*tautologija,* Π-*tautologija) ako je ta formula* $\mathcal{L}$-*tautologija, za svaku* MV-*algebru (resp.* G-*algebru,* Π-*algebru)* $\mathcal{L}$.

Najpre, navedimo, bez dokaza, poznatu karakterizaciju MV-algebri.

Teorema 4.6 *Za svaku reziduiranu mrežu* $\boldsymbol{\mathcal{L}}$, *sledeći uslovi su ekvivalentni:*

- $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ *je* MV-*algebra.*
- $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ *je* BL-*algebra u kojoj važi zakon dvojne negacije.*

Sada slede tri značajne posledice Teoreme 4.5.

Posledica 4.2 *Neka je* $\mathcal{C}_1$ *šematsko proširenje sistema* BLA, *čije su šeme aksioma dobijene proširenjem* BL1-BL8 *šema aksiomom*

$$\neg\neg \boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{P}. \tag{$\neg\neg$}$$

Tada, za svaku formulu φ, *sledeća tri uslova su ekvivalentna:*

(1) Formula φ *je teorema logike* $\mathcal{C}_1$;

(2) Formula φ *je* $\mathcal{L}$-*tautologija, za svaku linearno uređenu* MV-*algebru* $\mathcal{L}$;

(3) Formula φ *je* $\mathcal{L}$-*tautologija, za svaku* MV-*algebru* $\mathcal{L}$.

DOKAZ: Prema Teoremi 4.6, klasa $\mathcal{C}_1$-algebri i klasa MV-algebri su identične, te sada dokaz sledi na osnovu Teoreme 4.5. □

Posledica 4.3 *Neka je* $\mathcal{C}_2$ *šematsko proširenje sistema* BLA, *čije su šeme aksioma dobijene proširenjem* BL1-BL8 *šema aksiomom*

$$\boldsymbol{\varphi \rightarrow (\varphi \& \varphi)}. \tag{$\boldsymbol{G}$}$$

Tada, za svaku formulu φ, *sledeća tri uslova su ekvivalentna:*

(1) Formula φ *je teorema logike* $\mathcal{C}_2$;

(2) Formula φ *je* $\mathcal{L}$-*tautologija, za svaku linearno uređenu* G-*algebru* $\mathcal{L}$;

(3) Formula φ *je* $\mathcal{L}$-*tautologija, za svaku* G-*algebru* $\mathcal{L}$.

DOKAZ. Lako se pokazuje da $\mathcal{C}_2$ dokazuje formulu $(\varphi\&\psi) \equiv (\varphi \wedge \psi)$, te da su klasa $\mathcal{C}_2$-algebri i klasa G-algebri (Definicija 1.4) identične. Sada, tvrđenje, koje dokazujemo, je posledica tvrđenja Teoreme 4.5. □

Posledica 4.4 *Neka je* $\mathcal{C}_3$ *šematsko proširenje sistema* BLA*, čije su šeme aksioma dobijene proširenjem* BL1-BL8 *sledećim dvema šemama aksioma:*

$$\neg\neg\boldsymbol{\chi} \to (((\boldsymbol{\varphi}\&\boldsymbol{\chi}) \to (\boldsymbol{\phi}\&\boldsymbol{\chi})) \to (\boldsymbol{\varphi} \to \boldsymbol{\psi})), \qquad \textbf{(}\boldsymbol{\Pi}\textbf{1)}$$

$$\boldsymbol{\varphi} \wedge \neg\boldsymbol{\varphi} \to \overline{\mathbf{0}}. \qquad \textbf{(}\boldsymbol{\Pi}\textbf{2)}$$

Tada, za svaku formulu φ*, sledeća tri uslova su ekvivalentna:*

(1) Formula φ *je teorema logike* $\mathcal{C}_3$*;*

(2) Formula φ *je* $\mathcal{L}$*-tautologija, za svaku linearno uređenu* Π*-algebru* $\mathcal{L}$*;*

(3) Formula φ *je* $\mathcal{L}$*-tautologija, za svaku* Π*-algebru* $\mathcal{L}$*.*

DOKAZ. Direktna posledica Teoreme 4.5 i definicije Π-algebri (Definicija 1.4). □

Obeležimo logike $\mathcal{C}1$, $\mathcal{C}2$, $\mathcal{C}3$ sa $\mathrm{BL}_L\mathrm{A}$, $\mathrm{BL}_G\mathrm{A}$, $\mathrm{BL}_\Pi\mathrm{A}$, respektivno.

Važe sledeća tri poznata tvrđenja (koja ovde ne dokazujemo):

Teorema 4.7 *1. Formula* φ *je* $\mathcal{L}$*-tautologija, za svaku* MV*-algebru* $\mathcal{L}$ *(tj.* MV*-tautologija) akko je* φ 1*-tautologija Lukasijevičeve (fuzzy) iskazne logike* Fuzzy_L *(tj.* $[0,1]_L$*-tautologija).*

2. Formula φ *je* $\mathcal{L}$*-tautologija, za svaku* G*-algebru* $\mathcal{L}$ *(tj.* G*-tautologija) akko je* φ 1*-tautologija Gedelove (fuzzy) iskazne logike* Fuzzy_G *(tj.* $[0,1]_G$*-tautologija).*

3. Formula φ *je* $\mathcal{L}$*-tautologija, za svaku* Π*-algebru* $\mathcal{L}$ *(tj.* Π*-tautologija) akko je* φ 1*-tautologija produkt (fuzzy) iskazne logike* Fuzzy_Π *(tj.* $[0,1]_\Pi$*-tautologija).*

Na osnovu Teoreme 4.7 i Posledica 4.2, 4.3 i 4.4, zaključujemo da važi sledeće tvrđenje:

Posledica 4.5 *Aksiomatski sistem* $\mathrm{BL}_L\mathrm{A}$ *(resp.* $\mathrm{BL}_G\mathrm{A}$*,* $\mathrm{BL}_\Pi\mathrm{A}$*) je saglasan i slabo potpun za logiku* Fuzzy_L *(resp.* Fuzzy_G*,* Fuzzy_Π*).*

Logički sistem	Oznaka	Saglasnost i slaba potpunost
BLA + (¬¬)	$\mathrm{BL}_L\mathrm{A}$	za MV-tautologije za Fuzzy_L
BLA + (G)	$\mathrm{BL}_G\mathrm{A}$	za G-tautologije za Fuzzy_L
BLA + (Π1) + (Π2)	$\mathrm{BL}_\Pi\mathrm{A}$	za Π-tautologije za Fuzzy_Π

Sistem $\mathrm{BL}_L\mathrm{A}$ (BLA+(¬¬)) je **alternativni aksiomatski sistem** za Fuzzy_L. Jer, važi sledeće tvrđenje (koje, takođe, ovde ne dokazujemo):

Teorema 4.8 *Formula* φ *je dokaziva u* $\mathrm{F_L A}$ *akko je* 1*-tautologija u* Fuzzy_L*.*

Sa $\mathrm{F_L A}$ je obeležen poznati **(fuzzy) Lukasijevičev aksiomatski sistem**, koji ima samo jedan osnovni veznik $\rightarrow$, jednu istinitosnu konstantu $\overline{0}$, ima sledeće šeme aksioma:

$$\begin{array}{ll}
(\text{Ł}1) & \boldsymbol{P \rightarrow (Q \rightarrow P)};\\
(\boldsymbol{L2}) & \boldsymbol{(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))};\\
(\text{Ł}3) & \boldsymbol{(\neg P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)};\\
(\text{Ł}4) & \boldsymbol{((P \rightarrow Q) \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow P) \rightarrow P)},
\end{array}$$

gde je veznik $\neg$ definisan sa $\neg\varphi =_{def} \varphi \rightarrow \overline{0}$, a jedino pravilo izvođenja je MP.

Može se i direktno pokazati da su logike $\mathrm{BL}_L\mathrm{A}$ i $\mathrm{F}_L A$ ekvivalentne teorije, u smislu da je svaka formula teorema jedne logike, ako je teorema druge, i obratno.[4] Pri tome, u sistemu $\mathrm{F}_L A$ uvode se novi veznici, na sledeći način:

$$\begin{array}{rcl}
\boldsymbol{\varphi \& \psi} & \boldsymbol{=_{def}} & \boldsymbol{\neg(\varphi \rightarrow \neg\psi)},\\
\boldsymbol{\varphi \wedge \psi} & \boldsymbol{=_{def}} & \boldsymbol{\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi)},\\
\boldsymbol{\varphi \vee \psi} & \boldsymbol{=_{def}} & \boldsymbol{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi},\\
\boldsymbol{\varphi \veebar \psi} & \boldsymbol{=_{def}} & \boldsymbol{\neg\varphi \rightarrow \psi}.
\end{array}$$

Ovde pokazujemo da ne postoji saglasan i jako potpun aksiomatski sistem za Fuzzy_L. Najpre,

Definicija 4.4 *Ako za svaki beskonačan skup Σ formula neke logike važi da kad god je neka formula tačna u svakom modelu za Σ, onda postoji konačan podskup $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ takav da je ta formula tačna i u svakom modelu za Σ_0, tada za tu logiku kažemo da je* **kompaktna**.

Lema 4.3 Fuzzy_L *nije kompaktna logika.*

DOKAZ: U Fuzzy_L, veznik jake disjunkcije $\veebar$ definisan je sa:

$$\boldsymbol{\varphi \veebar \psi =_{def} \neg\varphi \rightarrow \psi}, \tag{4.10}$$

U sekciji 2.3 možemo videti da za svaku evaluaciju $\boldsymbol{e}$ formula logike Fuzzy_L važi:

$$\begin{array}{rcll}
\boldsymbol{e(\varphi \veebar \psi)} & = & \boldsymbol{\min(1, e(\varphi) + e(\psi))}, & (4.11)\\
\boldsymbol{e(\varphi \rightarrow \psi)} & = & \boldsymbol{\min(1, 1 - e(\varphi) + e(\psi))}, & (4.12)\\
\boldsymbol{e(\neg\varphi)} & = & \boldsymbol{1 - e(\varphi)}. & (4.13)
\end{array}$$

Neka su P i Q iskazne promenljive logike Fuzzy_L, i neka je

$$T = \{nP \rightarrow Q \,|\, n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2\} \cup \{\neg P \rightarrow Q\},$$

[4] Može se videti u [4].

gde je nP definisano sa: $2P = P \veebar P$, $(n+1)P = P \veebar nP$, $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$.
Skup T je beskonačan. Sadrži formule:

$$
\begin{array}{l}
\neg P \to Q \\
(P \veebar P) \to Q \\
(P \veebar P \veebar P) \to Q \\
(P \veebar P \veebar P \veebar P) \to Q \\
(P \veebar P \veebar P \veebar P \veebar P) \to Q \\
\dots
\end{array}
$$

Odnosno,

$$
\begin{array}{l}
\neg P \to Q \\
(\neg P \to P) \to Q \\
(\neg P \to (\neg P \to P)) \to Q \\
(\neg P \to (\neg P \to (\neg P \to))) \to Q \\
(\neg P \to (\neg P \to (\neg P \to (\neg P \to P)))) \to Q \\
\dots
\end{array}
$$

• Pokažimo da je formula Q tačna u svakom modelu za T.
Najpre, matematičkom indukcijom, lako se pokazuje da za svaku evaluaciju $\boldsymbol{e}$ formula sistema Fuzzy$_L$ važi:

$$\boldsymbol{e}(nP) = \min(1, n{\cdot}\boldsymbol{e}(P)), \text{ za svako } n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2. \tag{4.14}$$

Neka je $\boldsymbol{e}$ model teorije T.
Pretpostavimo da je $\boldsymbol{e}(P) = 0$. Tada, koristeći (4.12) i (4.13) dobijamo:

$$1 = \boldsymbol{e}(\neg P \to Q) = \min(1, 1 - (1 - \boldsymbol{e}(P)) + \boldsymbol{e}(Q)) = \boldsymbol{e}(Q).$$

Dakle, $\boldsymbol{e}(Q) = 1$. Sada, pretpostavimo da je $\boldsymbol{e}(P) = s > 0$. Tada, postoji pozitivan broj $n \in \mathbf{N}$, takav da je $n \cdot s \geqslant 1$. Uzmimo formulu $nP \to Q$ iz T. Prema (4.14), $\boldsymbol{e}(nP) = 1$, te dalje sledi $1 = \boldsymbol{e}(nP \to Q) = \boldsymbol{e}(Q)$. Dakle, zaista je $\boldsymbol{e}(Q) = 1$
• Dokažimo da Fuuzy$_L$ nije kompaktna logika.
Neka je skup $T_0 \subseteq T$ konačan. Pokažimo da Q nije tačna u svakom modelu za T_0.

I slučaj: T_0 ne sadrži formulu $\neg P \to Q$.

Uzmimo evaluaciju $\boldsymbol{e}$ takvu da je $\boldsymbol{e}(P) = 0$ i $\boldsymbol{e}(Q) < 1$. Tada je, prema (4.14), $\boldsymbol{e}(nP) = 0$, za svako $n \geqslant 2$, odakle je dalje $\boldsymbol{e}(np \to Q) = \min(1, 1 + \boldsymbol{e}(Q)) = 1$. Dakle, $\boldsymbol{e}$ je model za T_0, u kome formula Q nije validna.

II slučaj: T_0 sadrži formulu $\neg P \to Q$.

Ako T_0 sadrži samo formulu $\neg P \to Q$, onda je evaluacija $\boldsymbol{e}$ u kojoj je $\boldsymbol{e}(P) = 1$ i $\boldsymbol{e}(Q) \neq 1$, model za ovu formulu.

Neka T_0 sadrži i formule u formi $nP \to Q$, i neka je k najveći prirodan broj takav da $kP \to Q \in T_0$. Uzmimo evaluaciju $\boldsymbol{e}$ takvu da je $0 < \boldsymbol{e}(P) < \frac{1}{k+1}$ i

$$e(Q) \geqslant \max\left(\frac{k}{k+1}, 1 - s\right), \tag{4.15),}$$

gde je $s = \boldsymbol{e}(P)$. Tada je $\boldsymbol{e}(\neg P \to Q) = \min(1, s + e(Q))$. Kako je $\boldsymbol{e}(Q) \geqslant 1 - s$, dobijamo $\boldsymbol{e}(\neg P \to Q) = 1$. Dalje, neka je $np \to Q$ formula iz T_0. Kako je

$$n \cdot s < \frac{n}{k+1} \leqslant \frac{k}{k+1} < 1, \tag{4.16}$$

imamo, prema (4.14), da je $\boldsymbol{e}(nP) = n \cdot s$, i dalje,

$$\boldsymbol{e}(nP \to Q) = \min(1, 1 - n \cdot s + \boldsymbol{e}(Q)).$$

Međutim, iz (4.15) i (4.16) sledi $1 - n \cdot s + e(Q) \geqslant 1 - n \cdot s + \frac{k}{k+1} \geqslant 1$. Dakle, $\boldsymbol{e}$ je model za T_0, a u kome formula Q nije tačna. □

Teorema 4.9 *Ne postoji saglasan i jako potpun aksiomatski sistem za* Fuzzy_L.[5]

DOKAZ: Pretpostavimo suprotno, da takav logički sistem postoji. Obeležimo ga sa $\mathcal{S}$. Neka je T beskonačan skup formula definisan u dokazu prethodne leme. Tada, iz dokaza prethodne leme, imamo $T \models Q$, a po pretpostavci, iz $T \models Q$ sledi $T \vdash_{\mathcal{S}} Q$. Dakle, $T \vdash_{\mathcal{S}} Q$. Kako se dokaz u $\mathcal{S}$ sastoji iz konačno mnogo koraka, postoji konačan podskup $T_0 \subseteq T$, takav da je $T_0 \vdash_{\mathcal{S}} Q$. Kako je S saglasan u odnosu na Fuzzy_L, odavde sledi kontradikcija $T_0 \models Q$. □

NAPOMENA 4.3 Takođe, ne postoji saglasan i jako potpun aksiomatski sistem za Fuzzy_Π. Dokazuje se slično kao u slučaju za Fuzzy_L.[6] Inače, sistem $\mathrm{BL}_G\mathrm{A}$ ($\mathrm{BLA} + (G)$) je jako potpun u odnosu na Fuzzy_G.

[5] Inače, prvi objavljeni dokaz slabe potpunosti Lukasijevičevog aksiomatskog sistema za *Lukasijevičevu beskonačnovrednosnu iskaznu logiku* (odnosno, za Fuzzy_L) dali su Rose i Rosser (1958). Dve godine kasnije, Chang je dao novi dokaz, algebarski, baziran na MV-algebrama.

[6] Može se naći u [2].

Literatura

[1] Bělohlávek, R., *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002.

[2] Bergman, M.,*Many-Valued and Fuzzy Logic*, Cambridge University Press, 2008.

[3] Gottwald, S., *Many-Valued Logic And Fuzzy Set Theory*, Chapter 1 in Mathematics of Fuzzy Sets, Logic, Topology, and Measure Theory, Kluwer Academic Publishers,

[4] Hájek, P., *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[5] Madarász, S., R., *Od skupova do univerzalnih algebri*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2004.

[6] Šešelja, B., *Teorija mreža*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2006.