UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

O REZIDUIRANIM MREŽAMA

SEMINARSKI RAD BR. 3

Milanka Bradić

Novi Sad, jun, 2011.

Uvod

U sekciji 1.1 definišemo reziduirane mreže, kao i razne algebre u okviru reziduiranih mreža. U 1.2 izlažemo osnovna svojstva strukture reziduiranih mreža. Takođe, pokazujemo da je klasa reziduiranih mreža varietet algebri, a dajemo i neke potrebne i dovoljne uslove da algebra koja ima strukturu potpune mreže i strukturu komutativnog monoida bude reziduirana mreža. U 1.3 dajemo svojstva reziduiranih mreža koje zadovoljavaju aksiomu prelinearnosti (resp. uslov deljivosti). Po definiciji, to su i svojstva BL-algebri. U sekciji 1.4. izlažemo posledice zakona dvojne negacije. Osim toga, dajemo neke karakterizacije deljivih reziduarnih mreža, G-algebri i MV-algebri. Sekcija 1.5 se odnosi na osnovna svojstva linearnih MV-algebri, G-algebri i Π-algebri. U 1.6 navodimo dve alternativne definicije MV-algebri i pokazujemo da postoji bijektivna korespondencija između MV-algebri i (*Chang*) MV-algebri, kao i između MV-algebri i Vajsbergovih algebri.

Drugi deo se odnosi na filtere, kongruencije i faktor algebre reziduiranih mreža, gde se pokazuje da postoji bijektivna korespondencija između filtera i kongruencija reziduirane mreže, zatim se izlaže o prostim filterima na reziduiranim mrežama i na kraju, daje se teorema o poddirektnoj reprezentaciji reziduiranih mreža, koja glasi da je reziduirana mreža izomorfna poddirektnom proizvodu linearno uređenih reziduiranih mreža akko zadovoljava aksiomu prelinearnosti.

U trećem delu dajemo vezu između t-normi i reziduiranih mreža na $[0,1]$, gde pokazujemo da postoji bijektivna korespondencija između sleva neprekidnih (resp. neprekidnih) t-normi i reziduiranih mreža (resp. BL-algebri) na $[0,1]$.

Sadržaj

Glava 1

Reziduirane mreže

1.1 Definicija i klasifikacija reziduiranih mreža

Definicija 1.1 *Algebra* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ *je* **reziduirana mreža** *ako su zadovoljeni sledeći uslovi:*

- $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ *je* **ograničena mreža**;[1] (1.1)
- $\langle L, \otimes, \mathbf{1}\rangle$ *je* **komutativni monoid**; (1.2)
- *Važi* **svojstvo adjungovanosti**, *tj.*

$$\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y} \rightarrow \boldsymbol{z} \text{ akko } \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{z}, \text{ za sve } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in L, \tag{1.3}$$

  gde je $\leqslant$ *mrežno uređenje.*

Uređeni par $(\otimes, \rightarrow)$ *nazivamo* **adjungovani par**. *Operacije* $\otimes$ *i* $\rightarrow$ *nazivamo* **multiplikacija** *i* **reziduum**, *respektivno. Za* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$, $\boldsymbol{a} \rightarrow \boldsymbol{b}$ *je* **reziduum od** $\boldsymbol{b}$ **po** $\boldsymbol{a}$. *Inače, za operaciju* $\rightarrow$ *koristimo i logički izraz ,,implikacija”.*
$\mathcal{L}$ *je* **potpuna reziduirana mreža** *ako je* $\langle L, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ *potpuna mreža.*

Neke neklasične logike uzimaju određene reziduirane mreže za strukture svojih istinitosnih vrednosti. Tada, uslov potpunosti je potreban, ako želimo da odredimo vrednost neke egzistencijalne ili univerzalne rečenice, npr. ako je $\{\phi_i \,|\, i \in I\}$ skup nekih formula, onda je istinitosna vrednost rečenice ,,postoji $i \in I$ tako da važi ϕ_i” jednaka supremumu istinitosnih vrednosti od ϕ_i, tj. $\bigvee_{i\in I} ||\phi_i||$.[2]

Napomena 1.1 Neka je $(\otimes, \rightarrow)$ adjungovani par reziduirane mreže $\mathcal{L}$. Tada, multiplikacija $\otimes$ jednoznačno određuje reziduum $\rightarrow$. Zaista, ako je poznata operacija $\otimes$ i ako je $\rightarrow^*$ neka druga operacija koja zadovoljava uslov (1.3), onda za sve $x, y, z \in L$

[1] Binarne operacije $\wedge$ i $\vee$ izgovaraju se redom ,,i” i ,,ili”, terminima pozajmljenim iz iskazne logike. U srpskom jeziku ne postoje drugi šire prihvaćeni nazivi za ove operacije. U engleskom jeziku se za operacije $\wedge$ i $\vee$ koriste izrazi ,,meet” i ,,join”, respektivno.

[2] $||\phi||$ je istinitosna vrednost koju formula ϕ ima u L.

važi: $x \leqslant y \to z$ akko $x \otimes y \leqslant z$ akko $x \leqslant y \to^* z$, te ako stavimo $x = y \to z$, dobijamo: $y \to z \leqslant y \to z$ akko $y \to z \leqslant y \to^* z$, a kako je prva rečenica tačna, na osnovu refleksivnosti poretka $\leqslant$, to je tačno i tvrđenje $y \to z \leqslant y \to^* z$. Analogno, ako stavimo $x = y \to^* z$, zaključujemo da je $y \to^* z \leqslant y \to z$. Slično, druga komponenta adjungovanog para jednoznačno određuje multiplikaciju $\otimes$.

Definicija 1.2 *Neka je* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ *reziduirana mreža.*

(1) $\mathcal{L}$ *zadovoljava* **aksiomu prelinearnosti** *ako zadovoljava identitet*

$$(x \to y) \vee (y \to x) = 1. \tag{1.4}$$

(2) $\mathcal{L}$ *je* **deljiva reziduirana mreža** *ako zadovoljava identitet*

$$x \wedge y = x \otimes (x \to y). \tag{1.5}$$

(3) *U* $\mathcal{L}$ *važi* **zakon dvojne negacije** *ako* $\mathcal{L}$ *zadovoljava identitet*

$$x = (x \to 0) \to 0. \tag{1.6}$$

Operacija $\neg$ *na* L, *gde je* $\neg a =_{def} a \to 0$, *naziva se* **negacija**. (1.7)

(4) *U* $\mathcal{L}$ *važi* **zakon idempotentnosti** *ako* $\mathcal{L}$ *zadovoljava* $x \otimes x = x$. (1.8)

Definicija 1.3 (1) *Reziduirana mreža u kojoj važi zakon dvojne negacije naziva se* **integralni komutativni Žirardov monoid** (*Girard-monoid*).

(2) **Hejtingova algebra** (*Heyting-algebra*) *je reziduirana mreža u kojoj važi*

$$x \otimes y = x \wedge y. \tag{1.9}$$

(3) **BL-algebra** *je deljiva reziduirana mreža u kojoj važi aksioma prelinearnosti.*

(4) **MV-algebra**[3] *je reziduirana mreža koja zadovoljava identitet*

$$x \vee y = (x \to y) \to y. \tag{1.10}$$

(5) **Π-algebra** (*ili* **produkt algebra**) *je* BL-*algebra koja zadovoljava:*

$$(z \to 0) \to 0 \leqslant ((x \otimes z) \to (y \otimes z)) \to (x \to y); \tag{1.11}$$
$$x \wedge (x \to 0) = 0. \tag{1.12}$$

(6) **G-algebra** (*ili* **Gedelova algebra** (*Gödel algeba*)) *je* BL-*algebra u kojoj važi zakon idempotentnosti.*

[3]BL je skraćenica od ,,basic logic", a MV je skraćenica od ,,many-valued".

NAPOMENA 1.2 Ako je $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, ', \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ **Bulova algebra**, onda uvođenjem operacije $\rightarrow$, gde je $x \rightarrow y =_{def} x' \vee y$, dobijamo algebru $\mathcal{L}' = \langle L, \wedge, \vee, \wedge, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ koja je istovremeno i Hejtingova algebra i MV-algebra.

Važi i obratno, ako je $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ reziduirana mreža koja je i Hejtingova algebra i MV-algebra, onda je $\mathcal{L}' = \langle L, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ Bulova algebra.[4]

Definicija 1.4 *Neka je $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \rightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ reziduirana mreža.*

- *Binarna operacija $\leftrightarrow$ na L, gde je $\boldsymbol{a \leftrightarrow b =_{def} (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)}$, naziva se* **bireziduum** *u $\mathcal{L}$.* (1.13)
- *Za $\boldsymbol{a} \in L$,* **stepen elementa $\boldsymbol{a}$ nenegativnim celim brojem** *dobija se iz uslova: $\boldsymbol{a^0 = 1}$ i $\boldsymbol{a^{n+1} = a^n \otimes a}$, gde $\boldsymbol{n} \in \mathbf{N}$.* (1.14)

1.2 Osnovna svojstva reziduiranih mreža

U ovoj sekciji dajemo neke osnovne osobine reziduiranih mreža.

Teorema 1.1 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi su zadovoljeni:*

$$\boldsymbol{x \otimes (x \rightarrow y) \leqslant y,\ y \leqslant x \rightarrow (x \otimes y),\ x \leqslant (x \rightarrow y) \rightarrow y;} \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{x \leqslant y} \text{ akko } \boldsymbol{x \rightarrow y = 1;} \tag{1.16}$$

$$\boldsymbol{x \rightarrow x = 1,\ x \rightarrow 1 = 1,\ 0 \rightarrow x = 1;} \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{1 \rightarrow x = x;} \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{x \otimes 0 = 0;} \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{x \otimes y \leqslant x,\ \ x \leqslant y \rightarrow x;} \tag{1.20}$$

$$\boldsymbol{x \otimes y \leqslant x \wedge y;} \tag{1.21}$$

$$\boldsymbol{x \leqslant y} \text{ povlači } \boldsymbol{x \otimes z \leqslant y \otimes z}\ \ (\textbf{\textit{izotonost za}} \otimes); \tag{1.22}$$

$$\boldsymbol{(x \otimes y) \rightarrow z = x \rightarrow (y \rightarrow z),} \tag{1.23}$$

$$\boldsymbol{x \rightarrow (y \rightarrow z) = y \rightarrow (x \rightarrow z);} \tag{1.24}$$

$$\boldsymbol{(x \rightarrow y) \otimes (y \rightarrow z) \leqslant (x \rightarrow z);} \tag{1.25}$$

DOKAZ (1.15) Prvu nejednakost dobijamo kada na $x \rightarrow y \leqslant x \rightarrow y$ primenimo (1.3) i komutativnost za $\otimes$. Slično, primena (1.3) na $y \otimes x \leqslant x \otimes y$ daje drugu nejednakost, dok treća sledi iz prve, još jednom primenom (1.3).
(1.16) $x \leqslant y$ akko $\mathbf{1} \otimes x \leqslant y$ akko $\mathbf{1} \leqslant x \rightarrow y$ akko $\mathbf{1} = x \rightarrow y$.
(1.17) Direktna posledica (1.16) i mrežnih nejednakosti $x \leqslant x$, $x \leqslant \mathbf{1}$ i $\mathbf{0} \leqslant x$.
(1.18) Primenom prvog dela iz (1.15) imamo $\mathbf{1} \rightarrow x = \mathbf{1} \otimes (\mathbf{1} \rightarrow x) \leqslant x$. U drugom smeru, primenom drugog dela iz (1.15) sledi $x \leqslant \mathbf{1} \rightarrow (\mathbf{1} \otimes x) = \mathbf{1} \rightarrow x$.
(1.19) Kako je $\mathbf{0} \leqslant x \rightarrow \mathbf{0}$, to mora biti $\mathbf{0} \otimes x \leqslant \mathbf{0}$ (po (1.3)), te je $x \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
(1.20) $y \leqslant \mathbf{1}$ akko (po (1.17)) $y \leqslant x \rightarrow x$ akko (primenom (1.3)) $x \otimes y \leqslant x$, što

[4]Kompletan dokaz može se naći u [1].

dokazuje prvi deo. Drugi deo je posledica prvog dela i svojstva (1.3).
(1.21) Kako u svakoj mreži $u \leqslant v$ i $u \leqslant w$ povlači $u \leqslant v \wedge w$, rezultat (1.21) je posledica prvog dela iz (1.20) i komutativnosti operacije $\otimes$.
(1.22) Neka je $x \leqslant y$. Prema drugom delu iz (1.15), $y \leqslant z \to (z \otimes y)$, te preko tranzitivnosti relacije $\leqslant$ sledi $x \leqslant z \to z \otimes y$. Odavde je $x \otimes z \leqslant y \otimes z$.
(1.23) $(x \otimes y) \to z \leqslant x \to (y \to z)$ akko (preko (1.3)) $x \otimes ((x \otimes y) \to z) \leqslant y \to z$ akko (takođe preko (1.3)) $(x \otimes y) \otimes ((x \otimes y) \to z) \leqslant z$. Kako je ova poslednja nejednakost tačna (po prvom delu iz (1.15)), dokazali smo $x \otimes y \to z \leqslant x \to (y \to z)$.

Obratno, $x \to (y \to z) \leqslant (x \otimes y) \to z$ akko $y \otimes x \otimes (x \to (y \to z)) \leqslant z$. Dokazaćemo da je ova poslednja nejednakost tačna. Zaista, prema prvom delu iz (1.15) imamo $x \otimes (x \to (y \to z)) \leqslant y \to z$, odakle, primenom (1.22), sledi $y \otimes x \otimes (x \to (y \to z)) \leqslant y \otimes (y \to z)$, a kako je $y \otimes (y \to z) \leqslant z$, takođe prema (1.15), sada $y \otimes x \otimes (x \to (y \to z)) \leqslant z$ sledi primenom tranzitivnosti relacije $\leqslant$.
(1.24) Ova jednakost je posledica (1.23) i komutativnosi za $\otimes$.
(1.25) Slično je dokazu za (1.23). Naime, nejednakost koju dokazujemo ekvivalentna je sa $x \otimes (x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant z$. Da je ova nejednakost tačna, sledi primenom (1.22) i prvog dela iz (1.15), tako što najpre uočimo da je $x \otimes (x \to y) \leqslant y$, a zatim da je $x \otimes (x \to y) \otimes (y \to z) \leqslant y \otimes (y \to z) \leqslant z$. □

Teorema 1.2 *Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža. Tada, za sve $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$ važi:*

- $\boldsymbol{a} \to \boldsymbol{b}$ *je najveći element skupa* $\{\boldsymbol{c} \in L \mid \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b}\}$; (1.26)
- $\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ *je najmanji element skupa* $\{\boldsymbol{c} \in L \mid \boldsymbol{a} \leqslant \boldsymbol{b} \to \boldsymbol{c}\}$. (1.27)

DOKAZ. (1.26) Iz (1.15), $a \otimes (a \to b) \leqslant b$, odakle imamo $a \to b \in \{c \in L \mid a \otimes c \leqslant b\}$. Dalje, ako je $a \otimes t \leqslant b$ za neko $t \in L$, onda, prema (1.3), sledi $t \leqslant a \to b$.
(1.27) Prema drugom delu iz (1.15), $a \leqslant b \to (a \otimes b)$, te $a \otimes b \in \{c \in L \mid a \leqslant b \to c\}$. Ako je $a \leqslant b \to t$ za neko $t \in L$, onda je $a \otimes b \leqslant t$, na osnovu (1.3). □

Teorema 1.3 *Klasa reziduiranih mreža je* **varietet algebri**.

DOKAZ. Uslovi (1.1) i (1.2) u Definiciji 1.1 već su zadati identitetima. Njima ćemo dodati sledeća tri:

$$(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z) \tag{1.28}$$

$$(x \otimes (x \to y)) \vee y = y \tag{1.29}$$

$$x \to (x \vee y) = \mathbf{1} \tag{1.30}$$

i dokazati da su svi oni zajedno ekvivalentni uslovima (1.1)-(1.3) iz Definicije 1.1.

Prvo, uslovi (1.28)-(1.30) važe u svakoj reziduiranoj mreži. Zaista, (1.28) je identično sa prvim delom iz (1.23). Dalje, iz (1.15) imamo $x \otimes (x \to y) \leqslant y$, odakle je, na osnovu mrežnih nejednakosti, $(x \otimes (x \to y)) \vee y \leqslant y$. Takođe na osnovu mrežnih nejednakosti, $y \leqslant (x \otimes (x \to y)) \vee y$, te uslov (1.29) važi. A kako je $x \leqslant x \vee y$, (1.30) je posledica od (1.16).

Dalje, pokažimo da uslovi (1.1), (1.2) i (1.28)-(1.30) povlače svojstvo (1.3). Prvo dokazujemo da pod ovim uslovima važi tvrđenje (1.16) Teoreme 1.1. Neka je $x \leqslant y$.

Odavde je $y = x \vee y$, te je $x \to y = \mathbf{1}$, primenom (1.30). Obratno, ako je $x \to y = \mathbf{1}$, onda je $(x \otimes \mathbf{1}) \vee y = y$, prema (1.29), odakle imamo $x \vee y = y$, te je $x \leqslant y$. Sada, na osnovu (1.16) i (1.28), važi: $x \otimes y \leqslant z$ akko $(x \otimes y) \to z = \mathbf{1}$ akko $x \to (y \to z) = \mathbf{1}$ akko $x \leqslant y \to z$. □

Reziduirane mreže smo definisali kao algebre sa mrežnom strukturom, monoidnom strukturom i ,,dodatnom" operacijom $\to$ koja je određena preko uslova adjungonovanosti (1.3). Međutim, reziduirane mreže se mogu definisati i tako da operacija multiplikacije $\otimes$ ima ulogu ,,dodatne operacije". U takvoj definiciji se iz njoj ekvivalentne Definicije 1.1 zadržavaju uslovi (1.1) i (1.3), dok se uslov (1.2) zamenjuje određenim identitetima koji su zadovoljeni u algebri $\langle L, \to, \mathbf{1}\rangle$.

U delu (1.22) Teoreme 1.1 pokazali smo da je multiplikacija $\otimes$ **izotona po prvom argumentu**, a kako je komutativna, izotona je **po oba argumenta**. Naredna teorema odnosi se na monotonost reziduuma $\to$, gde pokazujemo da je ova operacija **izotona po drugom argumentu** i da je **antitona po prvom**.

Teorema 1.4 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi su zadovoljeni:*

- $\boldsymbol{y_1 \leqslant y_2}$ *povlači* $\boldsymbol{x \to y_1 \leqslant x \to y_2}$; (1.31)
- $\boldsymbol{x_1 \leqslant x_2}$ *povlači* $\boldsymbol{x_2 \to y \leqslant x_1 \to y}$. (1.32)

DOKAZ. (1.31) $x \to y_1 \leqslant x \to y_2$ akko $x \otimes (x \to y_1) \leqslant x \to y_2$, primenom (1.3). Poslednja nejednakost je tačna, jer važi $x \otimes (x \to y_1) \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant x \to y_2$, na osnovu prvog dela iz (1.15), pretpostavke i drugog dela iz (1.20).
(1.32) Primenom (1.3), $x_2 \to y \leqslant x_1 \to y$ ekvivalentno je sa $x_1 \otimes (x_2 \to y) \leqslant y$, a ova poslednja nejednakost važi, jer važi $x_1 \otimes (x_2 \to y) \leqslant x_2 \otimes (x_2 \to y) \leqslant y$, kao posledica od $x_1 \leqslant x_2$, (1.22) i (1.15). □

Sada slede svojstva operacija multiplikacije $\otimes$ i reziduuma $\to$ u odnosu na **supremume i infimume**.

Teorema 1.5 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi su zadovoljeni (kada leva i desna strana jednakosti, odnosno nejednakosti, imaju smisla):*

- $\boldsymbol{x \otimes \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I}(x \otimes y_i)}$; (1.33)
- $\boldsymbol{x \to \bigwedge_{i\in I} y_i = \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i)}$; (1.34)
- $\boldsymbol{\bigvee_{i\in I} x_i \to y = \bigwedge_{i\in I}(x_i \to y)}$; (1.35)
- $\boldsymbol{x \otimes \bigwedge_{i\in I} y_i \leqslant \bigwedge_{i\in I}(x \otimes y_i)}$; (1.36)
- $\boldsymbol{\bigvee_{i\in I}(x \to y_i) \leqslant x \to \bigvee_{i\in I} y_i}$; (1.37)
- $\boldsymbol{\bigvee_{i\in I}(x_i \to y) \leqslant \bigwedge_{i\in I} x_i \to y}$. (1.38)

Osim toga, za uslove (1.33)-(1.35) *važi da ako leva strana ima smisla, onda ima i desna i one su jednake.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža i neka $x, y, x_i, y_i \in L$, $i \in I$.
(1.33) Pretpostavimo da $\bigvee_{i\in I} y_i$ ima smisla u L. Dokažimo da tada u L postoji i

supremum $\bigvee_{i\in I}(x\otimes y_i)$ i da je jednak $x\otimes\bigvee_{i\in I} y_i$. Izotonost operacije $\otimes$ povlači $x\otimes y_i \leqslant x\otimes\bigvee_{i\in I} y_y$, za svako $i\in I$, te je $x\otimes\bigvee_{i\in I} y_i$ gornje ograničenje skupa $\{x\otimes y_i\,|\,i\in I\}$. Ako je za neko $t\in L$ i za sve $i\in I$, $x\otimes y_i\leqslant t$, tada je (po (1.2)-(1.3)) $y_i\leqslant x\to t$, za sve $i\in I$. Odavde je (prema svojstvu mreže) $\bigvee_{i\in I} y_i\leqslant x\to t$, te još jednom primenom (1.2)-(1.3) dobijamo $x\otimes\bigvee_{i\in I} y_i\leqslant t$. Dakle, $x\otimes\bigvee_{i\in I} y_i$ je najmanje gornje ograničenje skupa $\{x\otimes y_i\,|\,i\in I\}$.
(1.34) Neka u L postoji infimum $\bigwedge_{i\in I} y_i$. Primenom izotonosti operacije $\to$ dobijamo $x\to\bigwedge_{i\in I} y_i\leqslant x\to y_i$, za svako $i\in I$. Pokažimo da je $x\to\bigwedge_{i\in I} y_i$ najveće donje ograničenje skupa $\{x\to y_i\,|\,i\in I\}$. Pretpostavimo da je $t\leqslant x\to y_i$, za neko $t\in L$ i za sve $i\in I$. Tada je (po (1.3)) $t\otimes x\leqslant y_i$, za svako $i\in I$, odakle je $t\otimes x\leqslant\bigwedge_{i\in I} y_i$ (po definiciji infimuma), te je dalje $t\leqslant x\to\bigwedge_{i\in I} y_i$, takođe prema (1.3).
(1.35) Neka supremum $\bigvee_{i\in I} x_i$ postoji u L. Primenom antitonosti reziduuma $\to$ imamo $\bigvee_{i\in I} x_i\to y\leqslant x_i\to y$, za svako $i\in I$. Pokažimo da je $\bigvee_{i\in I} x_i\to y$ najveće donje ograničenje skupa $\{x_i\to y\,|\,i\in I\}$. Neka je $t\leqslant x_i\to y$, za neko $t\in L$ i za sve $i\in I$. Prema (1,2)-(1.3), za svako $i\in I$ važi: $t\leqslant x_i\to y$ akko $t\otimes x_i\leqslant y$ akko $x_i\otimes t\leqslant y$ akko $x_i\leqslant t\to y$, te zaključujemo da mora biti $\bigvee_{i\in I} x_i\leqslant t\to y$. Odavde, analognim postupkom, sledi $t\leqslant\bigvee_{i\in I} x_i\to y$.
(1.36) Pretpostavimo da $\bigwedge_{i\in I} y_i$ i $\bigwedge_{i\in I}(x\otimes y_i)$ imaju smisla u L. Tada je, primenom izotonosti operacije $\otimes$, $x\otimes\bigwedge_{i\in I} y_i\leqslant x\otimes y_i$, za svako $i\in I$. Dakle, $x\otimes\bigwedge_{i\in I} y_i$ je donje ograničenje skupa $\{x\otimes y_i\,|\,i\in I\}$, pa mora biti $x\otimes\bigwedge_{i\in I} y_i\leqslant\bigwedge_{i\in I}(x\otimes y_i)$.
(1.37) Slično dokazu za (1.36), ako leva i desna strana imaju smisla, onda ovo tvrđenje sledi na osnovu izotonosti reziduuma i definicije supremuma.
(1.38) Slično dokazima za (1.36) i (1.37), primenom antitonosti reziduuma i definicija infimuma i supremuma. □

Napomena 1.3 U potpunoj reziduiranoj mreži, uslovi (1.33)-(1.38) važe za svaki indeksni skup I. Takođe, oni važe u proizvoljnoj reziduiranoj mreži kada je skup I konačan. Na primer, u slučaju $|I|=2$ imamo:

$$\begin{aligned} x\otimes(y_1\vee y_2) &= (x\otimes y_1)\vee(x\otimes y_2); && (1.39)\\ x\to(y_1\wedge y_2) &= (x\to y_1)\wedge(x\to y_2); && (1.40)\\ (x_1\vee x_2)\to y &= (x_1\to y)\wedge(x_2\to y); && (1.41)\\ x\otimes(y_1\wedge y_2) &\leqslant (x\otimes y_1)\wedge(x\otimes y_2); && (1.42)\\ (x\to y_1)\vee(x\to y_2) &\leqslant x\to(y_1\vee y_2); && (1.43)\\ (x_1\to y)\vee(x_2\to y) &\leqslant (x_1\wedge x_2)\to y. && (1.44) \end{aligned}$$

Teorema 1.6 *U svakoj reziduiranoj mreži važi:*

- $x\to y\leqslant(x\wedge z)\to(y\wedge z);$ (1.45)
- $x\to y\leqslant(x\vee z)\to(y\vee z);$ (1.46)
- $x\to y\leqslant(x\otimes z)\to(y\otimes z);$ (1.47)
- $x\to y\leqslant(z\to x)\to(z\to y);$ (1.48)
- $x\to y\leqslant(y\to z)\to(x\to z).$ (1.49)

DOKAZ. (1.45) Kako je $x \wedge z \leqslant x, z$, na osnovu izotonosti operacije $\otimes$, kao i na osnovu činjenice da u svakoj mreži iz $u \leqslant v, w$ sledi $u \leqslant v \wedge w$, imamo nejednakost $(x \wedge z) \otimes (x \to y) \leqslant (x \otimes (x \to y)) \wedge (z \otimes (x \to y))$. Sada, $x \otimes (x \to y) \leqslant y$ (po (1.15)), dok je $z \otimes (x \to y) \leqslant z$ (po (1.20)), te zaključujemo da je $(x \wedge z) \otimes (x \to y) \leqslant y \wedge z$. Dobijena nejednakost ekvivalentna je sa (1.45) (primenom (1.3)).
(1.46) (1.46) važi akko (primenom (1.3)) $(x \vee z) \otimes (x \to y) \leqslant y \vee z$ akko (po (1.39)) $(x \otimes (x \to y)) \vee (z \otimes (x \to y)) \leqslant y \vee z$, a ova poslednja nejednakost važi, na osnovu (1.15), (1.20) i mrežne osobine da $y \leqslant v$ i $w \leqslant t$ povlači $u \vee w \leqslant v \vee t$.
(1.47) Ekvivalentno je sa $z \otimes x \otimes (x \to y) \leqslant z \otimes y$, što je tačno, jer ova nejednakost je posledica od $x \otimes (x \to y) \leqslant y$ (po (1.15)) i izotonosti multiplikacije.
(1.48) Ekvivalentno je sa $(z \to x) \otimes (x \to y) \leqslant z \to y$, što je tačno, po (1.25).
(1.49) Posledica od (1.3) i (1.25). $\square$

Sledeća teorema daje još neka svojstva reziduiranih mreža.

Teorema 1.7 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi su zadovoljeni:*

$$\boldsymbol{x \to y = ((x \to y) \to y) \to y}; \tag{1.50}$$

$$\boldsymbol{x \otimes (x \to y) = y} \textit{ akko } \boldsymbol{(\exists z)(x \otimes z = y)}; \tag{1.51}$$

$$\boldsymbol{x \to (x \otimes y) = y} \textit{ akko } \boldsymbol{(\exists z)(x \to z = y)}; \tag{1.52}$$

$$\boldsymbol{(y \to x) \to x = y} \textit{ akko } \boldsymbol{(\exists z)(z \to x = y)}; \tag{1.53}$$

$$\boldsymbol{(x \wedge y) \otimes (x \vee y) \leqslant x \otimes y}; \tag{1.54}$$

$$\boldsymbol{x \vee y \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)}; \tag{1.55}$$

$$\boldsymbol{x \otimes (x \to y) \leqslant x \wedge y}; \tag{1.56}$$

$$\boldsymbol{x \otimes (y \to z) \leqslant y \to (x \otimes z)}. \tag{1.57}$$

DOKAZ: (1.50) $x \to y \leqslant ((x \to y) \to y) \to y$, prema trećem delu iz (1.15). Obratno, imamo $x \leqslant (x \to y) \to y$, takođe prema trećem delu iz (1.15), odakle primenom antitonosti reziduuma sledi $((x \to y) \to y) \to y \leqslant x \to y$.
(1.51) Neka je $x \otimes z = y$. Odavde je $z \leqslant x \to y$ (po (1.2)-(1.3)), te primenjujući izotonost za $\otimes$ i prvi deo iz (1.15) sledi $y = x \otimes z \leqslant x \otimes (x \to y) \leqslant y$. Dakle, zaista važi $x \otimes (x \to y) = y$. Tvrđenje u suprotnom smeru je trivijalno.
(1.52) Neka je $x \to z = y$. Odavde je $x \otimes y \leqslant z$, po (1.3), te koristeći drugi deo iz (1.15) i izotonost za $\to$ sledi $y \leqslant x \to (x \otimes y) \leqslant x \to z = y$. Dakle, $x \to (x \otimes y) = y$.
(1.53) Neka je $z \to x = y$. Dvostrukom primenom (1.3), kao i komutativnosti za $\otimes$, odavde sledi $z \leqslant y \to x$. Dalje je $y \leqslant (y \to x) \to x \leqslant z \to x = y$, na osnovu trećeg dela iz (1.15) i antitonosti reziduuma.
(1.54) $(x \wedge y) \otimes (x \vee y) = (x \otimes (x \wedge y)) \vee (y \otimes (x \wedge y)) \leqslant (x \otimes y) \vee (y \otimes x) = x \otimes y$, na osnovu (1.39), mrežnih osobina, kao i izotonosti i komutativnosti za $\otimes$.
(1.55) $x \leqslant (x \to y) \to y$ (po (1.15)) i $x \leqslant (y \to x) \to x$ (po (1.20)), te je dalje $x \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)$. Analogno, $y \leqslant ((y \to x) \to x) \wedge ((x \to y) \to y)$. Sada, rezultat sledi na osnovu mrežnih osobina.
(1.56) Posledica od $x \otimes (x \to y) \leqslant x$ (po (1.20)) i $x \otimes (x \to y) \leqslant y$ (po (1.15)).
(1.57) Ekvivalentno je sa $x \otimes y \otimes (y \to z) \leqslant x \otimes z$. Ova nejednakost je tačna, jer je posledica primene izotonosti multiplikacije na (iz (1.15)) $y \otimes (y \to z) \leqslant z$. $\square$

Teorema 1.8 *Neka je* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ *algebra koja zadovoljava uslove* (1.1) *i* (1.2) *iz Definicije 1.1, kao i uslov da je operacija* $\otimes$ *izotona. Dalje, neka je* $\langle L, \wedge, \vee\rangle$ *potpuna mreža. Tada, sledeća četiri uslova su ekvivalentna:*

- *Postoji binarna operacija* $\rightarrow$ *koja sa* $\otimes$ *ima svojstvo adjunkcije;* (1.58)
- *Za sve* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$, *skup* $\{\boldsymbol{c} \in L \,|\, \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{b}\}$ *ima najveći element;* (1.59)
- $\mathcal{L}$ *zadovoljava identitet* $\boldsymbol{x} \otimes \bigvee_{\boldsymbol{i}\in \boldsymbol{I}} \boldsymbol{y_i} = \bigvee_{\boldsymbol{i}\in \boldsymbol{I}}(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y_i})$; (1.60)
- *Za operaciju* $\rightarrow$ *na* L, *gde je* $\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{y} =_{\boldsymbol{def}} \bigvee \{\boldsymbol{z} \,|\, \boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{y}\}$, (1.61)
  $(\otimes, \rightarrow)$ *je adjungovani par u* $\mathcal{L}$.

DOKAZ. (1.61)$\Rightarrow$(1.58): Trivijalno.
(1.58)$\Rightarrow$(1.59): Dokazano u delu (1.26) Teoreme 1.2.
(1.58)$\Rightarrow$(1.60): Već dokazano u Teoremi 1.5, pod (1.33).
(1.59)$\Rightarrow$(1.61): Pretpostavimo (1.59) i definišimo $\rightarrow$ kao u (1.61). Uočimo da je tada $a \rightarrow b = \max\{c \in L \,|\, a \otimes c \leqslant b\}$ i da važi $a \otimes (a \rightarrow b) \leqslant b$.

Sada, ako je $a \otimes c \leqslant b$, onda je $c \leqslant a \rightarrow b$. Obratno, neka je $c \leqslant a \rightarrow b$. Odavde sledi $a \otimes c \leqslant a \otimes (a \rightarrow b)$, primenom izotonosti za $\otimes$, te zaključujemo, na osnovu tranzitivnosti relacije $\leqslant$, da je $a \otimes c \leqslant b$.
(1.60)$\Rightarrow$(1.61): Ako je $a \otimes c \leqslant b$, tada je $c \leqslant \bigvee\{t \in L \,|\, a \otimes t \leqslant b\}$ (prema definiciji supremuma), te je dalje $c \leqslant a \rightarrow b$, prema definiciji iz (1.61). Obratno, neka je $c \leqslant a \rightarrow b$. Sada, primenom izotonosti za $\otimes$ i pretpostavke (1.60), dobijamo $a \otimes c \leqslant a \otimes (a \rightarrow b) = a \otimes \bigvee\{d \in L \,|\, a \otimes d \leqslant b\} = \bigvee\{a \otimes d \,|\, a \otimes d \leqslant b\} \leqslant b$. □

Ako važe pretpostavke Teoreme 1.8 i ako je zadovoljen uslov (1.58) ove teoreme, s obzirom na Napomenu 1.1, tada je binarna operacija $\rightarrow$ iz uslova (1.58) jednoznačno određena i njena definicija je data u (1.61).

Operacije negacije i bireziduuma definisali smo u (1.7) i (1.13). Sledeće dve teoreme odnose se na svojstva ovih operacija.

Teorema 1.9 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi (kada imaju smisla) su zadovoljeni, gde je uslov* (1.66) *zadovoljen kada leva strana jednakosti ima smisla, a uslov* (1.67), *ako obe strane nejednakosti imaju smisla:*

- $\neg\mathbf{0} = \mathbf{1}, \;\; \neg\mathbf{1} = \mathbf{0}$; (1.62)
- $\boldsymbol{x} \otimes \neg\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$; (1.63)
- $\boldsymbol{x} \leqslant \neg\neg\boldsymbol{x}, \;\; \neg\boldsymbol{x} = \neg\neg\neg\boldsymbol{x}$; (1.64)
- $\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}$ *povlači* $\neg\boldsymbol{y} \leqslant \neg\boldsymbol{x}$; (1.65)
- $\neg(\bigvee_{\boldsymbol{i}\in \boldsymbol{I}} \boldsymbol{x_i}) = \bigwedge_{\boldsymbol{i}\in \boldsymbol{I}} \neg\boldsymbol{x_i}$; (1.66)
- $\bigvee_{\boldsymbol{i}\in \boldsymbol{I}} \neg\boldsymbol{x_i} \leqslant \neg(\bigwedge_{\boldsymbol{i}\in \boldsymbol{I}} \boldsymbol{x_i})$. (1.67)

DOKAZ: (1.62) je posledica od (1.17) i (1.18); (1.63) sledi iz $x \otimes (x \rightarrow \mathbf{0}) \leqslant \mathbf{0}$ (po (1.15)); prvi deo iz (1.64) sledi iz (1.15), a drugi iz (1.50); (1.65) je posledica primene antitonosti reziduuma; (1.66) sledi iz (1.35), a (1.67) iz (1.38). □

Teorema 1.10 *U svakoj reziduiranoj mreži, sledeći uslovi (kada imaju smisla) su zadovoljeni:*

$$\mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{0} = \mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{1} = \mathbf{1}; \tag{1.68}$$
$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{x} = \mathbf{1}; \tag{1.69}$$
$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{x}; \tag{1.70}$$
$$(\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y}) \otimes (\boldsymbol{y} \leftrightarrow \boldsymbol{z}) \leqslant \boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{z}; \tag{1.71}$$
$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \mathbf{1} = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \leftrightarrow \mathbf{0} = \neg \boldsymbol{x}; \tag{1.72}$$
$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y} \text{ akko } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}; \tag{1.73}$$
$$(\boldsymbol{x_1} \leftrightarrow \boldsymbol{y_1}) \wedge (\boldsymbol{x_2} \leftrightarrow \boldsymbol{y_2}) \leqslant (\boldsymbol{x_1} \wedge \boldsymbol{x_2}) \leftrightarrow (\boldsymbol{y_1} \wedge \boldsymbol{y_2}); \tag{1.74}$$
$$(\boldsymbol{x_1} \leftrightarrow \boldsymbol{y_1}) \wedge (\boldsymbol{x_2} \leftrightarrow \boldsymbol{y_2}) \leqslant (\boldsymbol{x_1} \vee \boldsymbol{x_2}) \leftrightarrow (\boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{y_2}); \tag{1.75}$$
$$(\boldsymbol{x_1} \leftrightarrow \boldsymbol{y_1}) \otimes (\boldsymbol{x_2} \leftrightarrow \boldsymbol{y_2}) \leqslant (\boldsymbol{x_1} \otimes \boldsymbol{x_2}) \leftrightarrow (\boldsymbol{y_1} \otimes \boldsymbol{y_2}); \tag{1.76}$$
$$(\boldsymbol{x_1} \leftrightarrow \boldsymbol{y_1}) \otimes (\boldsymbol{x_2} \leftrightarrow \boldsymbol{y_2}) \leqslant (\boldsymbol{x_1} \rightarrow \boldsymbol{x_2}) \leftrightarrow (\boldsymbol{y_1} \rightarrow \boldsymbol{y_2}); \tag{1.77}$$
$$\textstyle\bigwedge_{\boldsymbol{i\in I}} (\boldsymbol{x_i} \leftrightarrow \boldsymbol{y_i}) \leqslant (\bigwedge_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{x_1}) \leftrightarrow (\bigwedge_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{y_i}); \tag{1.78}$$
$$\textstyle\bigwedge_{\boldsymbol{i\in I}} (\boldsymbol{x_i} \leftrightarrow \boldsymbol{y_i}) \leqslant (\bigvee_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{x_1}) \leftrightarrow (\bigvee_{\boldsymbol{i\in I}} \boldsymbol{y_i}); \tag{1.79}$$
$$\boldsymbol{x} \leftrightarrow \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y}) \rightarrow (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}), \tag{1.80}$$

DOKAZ: Kao neposredne posledice ranije dobijenih svojstava reziduuma, imamo da su u svakoj reziduiranj mreži zadovoljeni uslovi (1.68)-(1.70) i (1.72)-(1.73). Dalje, svi ostali uslovi, osim (1.80), u formi su $m \leqslant s \leftrightarrow t$, tj. $m \leqslant (s \rightarrow t) \wedge (t \rightarrow s)$. Neka je $\mathcal{L}$ proizvoljna reziduirana mreža. Prema osobinama mreže, ako u $\mathcal{L}$ važi $m \leqslant s \rightarrow t$ i $m \leqslant t \rightarrow s$, onda važi i $m \leqslant s \leftrightarrow t$. Osim toga, ako primenimo rezultat (1.70) na levoj strani svake od nejednakosti u tvrđenjima (1.71) i (1.74)-(1.77), uočavamo da je za dokaz ovih tvrđenja dovoljno dokazati da u $\mathcal{L}$ važi samo jedna od nejednakosti $m \leqslant s \rightarrow t$ i $m \leqslant t \rightarrow s$, te ćemo tako i postupiti.
(1.71) Na osnovu izotonosti za $\otimes$, $(x \leftrightarrow y) \otimes (y \leftrightarrow z) \leqslant (x \rightarrow y) \otimes (y \rightarrow z)$, te rezultat $(x \leftrightarrow y) \otimes (y \leftrightarrow z) \leqslant x \rightarrow z$ sledi primenom (1.25) i tranzitivnosti za $\leqslant$.
(1.74) Primenom (1.3) imamo da je $(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \wedge x_2) \rightarrow (y_1 \wedge y_2)$ ekvivalentno sa $(x_1 \wedge x_2) \otimes ((x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2)) \leqslant y_1 \wedge y_2$. Sada,

$$\begin{array}{rcl}
 & & (x_1 \wedge x_2) \otimes ((x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2)) \\
(po\ (1.22)) & \leqslant & (x_1 \wedge x_2) \otimes ((x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2)) \\
(po\ (1.42)) & \leqslant & ((x_1 \wedge x_2) \otimes (x_1 \rightarrow y_1)) \wedge ((x_1 \wedge x_2) \otimes (x_2 \rightarrow y_2)) \\
(po\ (1.22), (1.15)) & \leqslant & (x_1 \otimes (x_1 \rightarrow y_1)) \wedge (x_2 \otimes (x_2 \rightarrow y_2)) \leqslant y_1 \wedge y_2.
\end{array}$$

(1.75) Nejednakost $(x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \vee x_2) \rightarrow (y_1 \vee y_2)$ ekvivalentna je sa $(x_1 \vee x_2) \otimes ((x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2)) \leqslant y_1 \vee y_2$ (primenom (1.3)). Sada,

$$\begin{array}{rcl}
 & & (x_1 \vee x_2) \otimes ((x_1 \leftrightarrow y_1) \wedge (x_2 \leftrightarrow y_2)) \\
(po\ (1.22)) & \leqslant & (x_1 \vee x_2) \otimes ((x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2)) \\
(po\ (1.39)) & = & (x_1 \otimes ((x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2)) \vee (x_2 \otimes ((x_1 \rightarrow y_1) \wedge (x_2 \rightarrow y_2)) \\
(po\ (1.22)) & \leqslant & (x_1 \otimes (x_1 \rightarrow y_1)) \vee (x_2 \otimes (x_2 \rightarrow y_2)) \\
(po\ (1.15)) & \leqslant & y_1 \vee y_2.
\end{array}$$

(1.76) Slično je dokazu prethodna dva tvrđenja, koristeći izotonost za $\otimes$ i (1.15).
(1.77) $(x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant (x_1 \to x_2) \to (y_1 \to y_2)$ ekvivalentno je sa $(x_1 \to x_2) \otimes (x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \leqslant y_1 \to y_2$. Sada,

$$\begin{array}{rcl} & & (x_1 \to x_2) \otimes (x_1 \leftrightarrow y_1) \otimes (x_2 \leftrightarrow y_2) \\ (po\ (1.2), (1.22)) & \leqslant & ((y_1 \to x_1) \otimes (x_1 \to x_2)) \otimes (x_2 \to y_2) \\ (po\ (1.22), (1.25)) & \leqslant & (y_1 \to x_2) \otimes (x_2 \to y_2) \leqslant y_1 \to y_2 \end{array}$$

(1.78) (*uopštenje od* (1.74)) Ekvivalentno je sa $\big(\bigwedge_{i\in I}(x_i \leftrightarrow y_i)\big) \otimes \big(\bigwedge_{i\in I} x_i\big) \leqslant \bigwedge_{i\in I} y_i$. $\big(\bigwedge_{i\in I}(x_i \leftrightarrow y_i)\big) \otimes \big(\bigwedge_{i\in I} x_i\big) \leqslant \big(\bigwedge_{i\in I}(x_i \to y_i) \otimes \big(\bigwedge_{i\in I} x_i\big) \leqslant (x_i \to y_i) \otimes x_i \leqslant y_i$, za svako $i \in I$, koristeći definiciju infimuma, komutativnost i izotonost za $\otimes$, kao (1.15). Odavde sledi $\big(\bigwedge_{i\in I}(x_i \leftrightarrow y_i)\big) \otimes \big(\bigwedge_{i\in I} x_i\big) \leqslant \bigwedge_{i\in I} y_i$, što je i trbalo dokazati.
(1.79) (*uopštenje od* (1.75)) Nejednakost (1.79), koju dokazujemo, ekvivalentna je sa $\big(\bigwedge_{i\in I}(x_i \leftrightarrow y_i)\big) \otimes \big(\bigvee_{i\in I} x_i\big) \leqslant \bigvee_{i\in I} y_i$. Sada sledi:

$$\begin{array}{rcl} & & \big(\bigwedge_{i\in I}(x_i \leftrightarrow y_i)\big) \otimes \big(\bigvee_{i\in I} x_i\big) \\ (po\ (1.22)) & \leqslant & \big(\bigwedge_{i\in I}(x_i \to y_i)\big) \otimes \big(\bigvee_{i\in I} x_i\big) \\ (po\ (1.33)) & = & \bigvee_{i\in I}\big(\big(\bigwedge_{i\in I}(x_i \to y_i)\big) \otimes x_i\big) \\ (po\ (1.22), (1.15) & \leqslant & \bigvee_{i\in I}((x_i \to y_i) \otimes x_i) \leqslant \bigvee_{i\in I} y_i. \end{array}$$

(1.80) $(x \leftrightarrow y) \leqslant (x \vee y) \to (x \wedge y)$ akko (po (1.3)) $(x \leftrightarrow y) \otimes (x \vee y) \leqslant x \wedge y$. Sada, $(x \leftrightarrow y) \otimes (x \vee y) = (x \otimes (x \leftrightarrow y)) \vee (y \otimes (x \leftrightarrow y))$ (primenom (1.39)). Dalje, $x \otimes (x \leftrightarrow y) \leqslant x \otimes (x \to y) \leqslant x \wedge y$ (po (1.22) i (1.56)). Simetrično, za drugi disjunkt, $y \otimes (x \leftrightarrow y) \leqslant y \otimes (y \to x) \leqslant y \wedge x$. Sada, na osnovu mrežnih osobina, zaključujemo da je $(x \leftrightarrow y) \otimes (x \vee y) \leqslant x \wedge y$.

Za dokaz u drugom smeru, iz $x \wedge y \leqslant y$, primenom izotonosti reziduuma, imamo $x \to (x \wedge y) \leqslant x \to y$, a iz $x \leqslant x \vee y$, primenom antitonosti reziduuma, imamo $(x \vee y) \to (x \wedge y) \leqslant x \to (x \wedge y)$, te rezultat $(x \vee y) \to (x \wedge y) \leqslant x \to y$ sada sledi preko tranzitivnosti relacije $\leqslant$. Simetrično, $(y \vee x) \to (y \wedge x) \leqslant y \to x$, te dalje sledi traženi rezultat $(x \vee y) \to (x \wedge y) \leqslant x \leftrightarrow y$. □

1.3 Aksioma prelinearnosti i uslov deljivosti

BL-algebre su deljive reziduirane mreže koje zadovoljavaju aksiomu prelinearnosti. Aksiomu prelinearnosti i uslov deljivosti naveli smo u (1.4) i (1.5). U ovoj sekciji dajemo neke osnovne osobine reziduiranih mreža koje zadovoljavaju aksiomu prelinearnosti (resp. uslov deljivosti). Samim tim, izlažemo i osnovna svojstva BL-algebri.

Teorema 1.11 *Za svaku rezidualnu mrežu $\mathcal{L}$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

- *$\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti, tj.* $(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}) = \mathbf{1}$; (1.81)
- *$\mathcal{L}$ zadovoljava identitet* $\boldsymbol{x} \to (\boldsymbol{y_1} \vee \boldsymbol{y_2}) = (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y_1}) \vee (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y_2})$; (1.82)
- *$\mathcal{L}$ zadovoljava identitet* $(\boldsymbol{x_1} \wedge \boldsymbol{x_2}) \to \boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x_1} \to \boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{x_2} \to \boldsymbol{y})$. (1.83)

DOKAZ. (1.81)⇒(1.82): S obzirom na rezultat (1.43), ostaje nam da dokažemo da aksioma prelinearnosti povlači $x \to (y_1 \vee y_2) \leqslant (x \to y_1) \vee (x \to y_2)$.

$$
\begin{aligned}
& & & x \to (y_1 \vee y_2) = \mathbf{1} \otimes (x \to (y_1 \vee y_2)) \\
&(po\ (1.81)) &=\ & ((y_1 \to y_2) \vee (y_2 \to y_1)) \otimes (x \to (y_1 \vee y_2)) \\
&(po\ (1.39)) &=\ & ((y_1 \to y_2) \otimes (x \to (y_1 \vee y_2))) \vee ((y_2 \to y_1) \otimes (x \to (y_1 \vee y_2))) \\
&(po\ (1.57)) &\leqslant\ & (x \to ((y_1 \to y_2) \otimes (y_1 \vee y_2))) \vee (x \to ((y_2 \to y_1) \otimes (y_1 \vee y_2))) \\
&(po\ (1.39)) &=\ & (x \to (((y_1 \to y_2) \otimes y_1) \vee ((y_1 \to y_2) \otimes y_2))) \vee \\
& & & (x \to (((y_2 \to y_1) \otimes y_1) \vee ((y_2 \to y_1) \otimes y_2))) \\
&(po\ (1.15, 31)) &\leqslant\ & (x \to (y_2 \vee ((y_1 \to y_2) \otimes y_2))) \vee \\
& & & (x \to (((y_2 \to y_1) \otimes y_1) \vee y_1)) \\
&(po\ (1.20, 31)) &\leqslant\ & (x \to (y_2 \vee y_2)) \vee (x \to (y_1 \vee y_1)) = (x \to y_1) \vee (x \to y_2).
\end{aligned}
$$

(1.81)⇒(1.83): S obzirom na rezultat (1.44), ostaje nam da dokažemo da aksioma prelinearnosti povlači $(x_1 \wedge x_2) \to y \leqslant (x_1 \to y) \vee (x_2 \to y)$.

$$
\begin{aligned}
& & & (x_1 \wedge x_2) \to y = ((x_1 \wedge x_2) \to y) \otimes \mathbf{1} \\
&(po\ (1.81)) &=\ & ((x_1 \wedge x_2) \to y) \otimes ((x_1 \to x_2) \vee (x_2 \to x_1)) \\
&(po\ (1.39)) &=\ & (((x_1 \wedge x_2) \to y) \otimes (x_1 \to x_2)) \vee \\
& & & (((x_1 \wedge x_2) \to y) \otimes (x_2 \to x_1)) \\
&(po\ (1.56), (1.32), (1.22)) &\leqslant\ & ((x_1 \otimes (x_1 \to x_2)) \to y) \otimes (x_1 \to x_2)) \vee \\
& & & ((x_2 \otimes (x_2 \to x_1)) \to y) \otimes (x_2 \to x_1)) \\
&(po\ (1.23)) &=\ & (((x_1 \to x_2) \to (x_1 \to y)) \otimes (x_1 \to x_2)) \vee \\
& & & (((x_2 \to x_1) \to (x_2) \to y)) \otimes (x_2) \to x_1) \\
&(po\ (1.15)) &\leqslant\ & (x_1 \to y) \vee (x_2 \to y).
\end{aligned}
$$

(1.82)⇒(1.81): Neka važi (1.82). Koristeći (1.41), kao i prvi deo iz (1.17), dobijamo:

$$
\begin{aligned}
(x \to y) \vee (y \to x) &= ((y \to y) \wedge (x \to y)) \vee ((x \to x) \wedge (y \to x)) \\
&= (x \vee y) \to y) \vee ((x \vee y) \to x) = (x \vee y) \to (x \vee y) = \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

(1.83)⇒(1.81): Neka važi uslov (1.83). Slično, koristeći (1.40) i (1.17) sledi:

$$
\begin{aligned}
(x \to y) \vee (y \to x) &= ((x \to x) \wedge (x \to y)) \vee ((y \to y) \wedge (y \to x)) \\
&= ((x \to (x \wedge y)) \vee (y \to (x \wedge y)) = (x \wedge y) \to (x \wedge y) = \mathbf{1}.
\end{aligned}
$$

□

NAPOMENA 1.4 Aksioma prelinearnosti ne povlači $x \to \bigvee_{i \in I} y_i = \bigvee_{i \in I}(x \to y_i)$, odnosno, uopštenje uslova (1.82). Za kontraprimer imamo **standardnu Gedelovu reziduiranu mreža** $\langle [0,1], \min, \max, *_G, \to_G, 0, 1 \rangle$, u kojoj aksioma prelinearnosti važi, ali funkcija $\to_G$ nije sleva neprekidna po drugom argumentu. Zaista, neka $a \in (0,1]$ i neka je $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz brojeva iz intervala $[0, a)$, takav da je $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$. Po definiciji Gedelove t-norme $*_G$, kao i Gedelove implikacije $\to_G$, $\lim\limits_{n \to \infty}(a \to b_n) = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a$, dok je $a \to \lim\limits_{n \to \infty} b_n = a \to a = 1$.

Teorema 1.12 *Ako reziduirana mreža zadovoljava aksiomu prelinearnosti, onda zadovoljava i sledeće uslove:*

- $\boldsymbol{(x \otimes x) \wedge (y \otimes y) \leqslant x \otimes y \leqslant (x \otimes x) \vee (y \otimes y),}$ (1.84)

- $\boldsymbol{x \otimes (y_1 \wedge y_2) = (x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2)},$ (1.85)
- $\boldsymbol{x \wedge (y_1 \vee y_2) = (x \wedge y_1) \vee (x \wedge y_2)},$ (1.86)
- $\boldsymbol{x \vee y = ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)}.$ (1.87)

DOKAZ. Pretpostavimo da važi aksioma prelinearnosti.
(1.84). Kako je $x \otimes y = (x \otimes y) \otimes ((x \to y) \vee (y \to x))$, drugu nejednakost lako dobijamo ako na desnoj strani ove jednakosti primenimo (1.39), prvi deo iz (1.15), kao i (1.22). Slično je i za prvu nejednakost:

$$\begin{aligned}
& (x \otimes x) \wedge (y \otimes y) = ((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes \mathbf{1} \\
(po\ (1.4)) \quad = \quad & ((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes ((x \to y) \vee (y \to x)) \\
(po\ (1.39)) \quad = \quad & (((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes (x \to y)) \vee \\
& (((x \otimes x) \wedge (y \otimes y)) \otimes (y \to x)) \\
(po\ (1.22)) \quad \leqslant \quad & ((x \otimes x) \otimes (x \to y)) \vee ((y \otimes y) \otimes (y \to x)) \\
(po\ (1.15), (1.22)) \quad \leqslant \quad & (x \otimes y) \vee (y \otimes x) = x \otimes y.
\end{aligned}$$

(1.85). S obzirom na (1.42), kao i na tvrđenje (1.16), dovoljno je pokazati da važi $((x \otimes y_1) \wedge (x \wedge y_2)) \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2)) = \mathbf{1}$.

$$\begin{aligned}
& ((x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2)) \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2)) \\
(po\ (1.83)) \quad = \quad & ((x \otimes y_1) \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2))) \vee ((x \otimes y_2) \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2))) \\
(po\ (1.23)) \quad = \quad & (x \to (y_1 \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2)))) \vee (x \to (y_2 \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2)))) \\
(po\ (1.82)) \quad = \quad & x \to ((y_1 \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2))) \vee (y_2 \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2)))) \\
(po\ (1.83)) \quad = \quad & x \to ((y_1 \wedge y_2) \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2))) \\
(po\ (1.23, 17)) \quad = \quad & (x \otimes (y_1 \wedge y_2)) \to (x \otimes (y_1 \wedge y_2)) = \mathbf{1}.
\end{aligned}$$

(1.86). Kako u svakoj mreži važi $(x \wedge y_1) \vee (x \wedge y_2) \leqslant x \wedge (y_1 \vee y_2)$, ostaje nam da pokažemo da važi $(x \wedge (y_1 \vee y_2)) \to ((x \wedge y_1) \vee (x \wedge y_2)) = \mathbf{1}$. Obeležimo izraz na levoj strani ove jednakosti sa A. Primenom (1.82) i (1.83) dobijamo:

$$A = (x \to (x \wedge y_1)) \vee (x \to (x \wedge y_2)) \vee \\ ((y_1 \vee y_2) \to (x \wedge y_1)) \vee ((y_1 \vee y_2) \to (x \wedge y_2)).$$

Primenom (1.40) i (1.17) dobijamo $x \to (x \wedge y_1) = x \to y_1$ i $x \to (x \wedge y_2) = x \to y_2$, odakle, koristeći (1.82) sledi $(x \to (x \wedge y_1)) \vee (x \to (x \wedge y_2)) = x \to y_1 \vee y_2$. Dalje,

$$\begin{aligned}
& ((y_1 \vee y_2) \to (x \wedge y_1)) \vee ((y_1 \vee y_2) \to (x \wedge y_2)) \\
(po\ (1.40)) \quad = \quad & (((y_1 \vee y_2) \to x) \wedge ((y_1 \vee y_2) \to y_1)) \vee \\
& (((y_1 \vee y_2) \to x) \wedge ((y_1 \vee y_2) \to y_2)) \\
(po\ (1.21)) \quad \geqslant \quad & (((y_1 \vee y_2) \to x) \otimes ((y_1 \vee y_2) \to y_1)) \vee \\
& (((y_1 \vee y_2) \to x) \otimes ((y_1 \vee y_2) \to y_2)) \\
(po\ (1.39)) \quad = \quad & ((y_1 \vee y_2) \to x) \otimes (((y_1 \vee y_2) \to y_1) \vee ((y_1 \vee y_2) \to y_2)) \\
(po\ (1.82)) \quad = \quad & ((y_1 \vee y_2) \to x) \otimes ((y_1 \vee y_2) \to (y_1 \vee y_2)) = \\
(po\ (1.17)) \quad = \quad & ((y_1 \vee y_2) \to x) \otimes 1 = (y_1 \vee y_2) \to x.
\end{aligned}$$

Sada vidimo da je $A \geqslant (x \to (y_1 \vee y_2)) \vee ((y_1 \vee y_2) \to x)$. Dakle, $A = \mathbf{1}$.
(1.87). Iz (1.55) imamo $x \vee y \leqslant ((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x))$. Izraz na desnoj

strani jednak je $(((x \to y) \to y) \wedge ((y \to x) \to x)) \otimes ((x \to y) \vee (y \to x))$, te primenom (1.39) i (1.15) lako možemo dobiti i suprotan smer ove nejednakossi. $\square$

U nastavku ove sekcije dajemo jednu karakterizaciju deljivih reziduiranih mreža, još neke posledice uslova deljivosti, kao i jednu karakterizaciju G-algebri.

Teorema 1.13 *Za svaku reziduiranu mrežu $\mathcal{L}$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

- *$\mathcal{L}$ je deljiva reziduirana mreža, tj. zadovoljava $\boldsymbol{x \wedge y = x \otimes (x \to y)}$;* (1.88)
- *$\mathcal{L}$ zadovoljava uslov: $\boldsymbol{x \leqslant y}$ povlači $\boldsymbol{(\exists z)(x = y \otimes z)}$.* (1.89)

DOKAZ. Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža, i neka $a, b \in L$. Iz tvrđenja (1.51) Teoreme 1.7 imamo da $\mathcal{L}$ zadovoljava sledeći uslov:

$$x \otimes (x \to y) = y \text{ akko } (\exists z)(y = x \otimes z).$$

(1.88)$\Rightarrow$(1.89): Pretpostavimo da je $\mathcal{L}$ deljiva reziduirana mreža i da je $a \leqslant b$. Tada je $a = b \wedge a = b \otimes (b \to a)$, odakle, prema napred navedenom tvrđenju Teoreme 1.7, zaključujemo da je tačno i tvrđenje (1.89).
(1.89)$\Rightarrow$(1.88): Kako je $a \wedge b \leqslant a$, postoji neko $c \in L$ tako da je $a \wedge b = a \otimes c$, što je, takođe po napred navedenom tvrđenju Teoreme 1.7, ekvivalentno sa $a \wedge b = a \otimes (a \to (a \wedge b))$. Dalje, $a \wedge b \leqslant b$, te primenom izotonosti operacija $\to$ i $\otimes$ sledi $a \otimes (a \to (a \wedge b)) \leqslant a \otimes (a \to b)$. Tako smo dobili $a \wedge b \leqslant a \otimes (a \to b)$. Suprotan smer ove nejednakosti imamo iz (1.56) Teoreme 1.7. $\square$

Teorema 1.14 *Svaka deljiva reziduirana mreža zadovoljava sledeće uslove:*

- $\boldsymbol{x \otimes (y_1 \wedge y_2) = (x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2)}$; (1.90)
- $\boldsymbol{x \wedge \left(\bigvee_{i \in I} y_i\right) = \bigvee_{i \in I}(x \wedge y_i)}$
  (kada leva i desna strana imaju smisla) ; (1.91)
- $\boldsymbol{x \otimes x = x}$ *povlači* $\boldsymbol{(\forall y)(x \wedge y = x \otimes y)}$. (1.92)

DOKAZ. Neka je $\mathcal{L}$ deljiva reziduirana mreža.
(1.90). Dokazaćemo da u $\mathcal{L}$ važi $(x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2) \leqslant x \otimes (y_1 \wedge y_2)$. Suprotan smer ove nejednakosti imamo iz (1.42).

$$\begin{array}{rcl}
 & & (x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2) \\
(po\ (1.5)) & = & (x \otimes y_1) \otimes ((x \otimes y_1) \to (x \otimes y_2)) \\
(po\ (1.2),(1.23)) & = & x \otimes (y_1 \otimes (y_1 \to (x \to (x \otimes y_2)))) \\
(po\ (1.5)) & = & x \otimes (y_1 \wedge (x \to (x \otimes y_2))) \\
(po\ (1.5)) & = & x \otimes (x \to (x \otimes y_2)) \otimes ((x \to (x \otimes y_2)) \to y_1) \\
(po\ (1.15),(1.22)) & \leqslant & (x \otimes y_2) \otimes ((x \to (x \otimes y_2)) \to y_1) \\
(po\ (1.15),(1.32),(1.22)) & \leqslant & (x \otimes y_2) \otimes (y_2 \to y_1) \\
(po\ (1.5)) & = & x \otimes (y_1 \wedge y_2).
\end{array}$$

(1.91). Neka $\bigvee_{i\in I}(x \wedge y_i)$ i $\bigvee_{i\in I} y_i$ imaju smisla u L, gde $x, y_i \in L$, $i \in I$. Iz teorije mreža imamo $\bigvee_{i\in I}(x \wedge y_i) \leqslant x \wedge \left(\bigvee_{i\in I} y_i\right)$. Dalje,

$$
\begin{array}{rcl}
 & & x \wedge \left(\bigvee_{i\in I} y_i\right) \\
(po\ (1.5)) & = & \left(\bigvee_{i\in I} y_i\right) \otimes \left(\left(\bigvee_{i\in I} y_i\right) \to x\right) \\
(po\ (1.33)) & = & \bigvee_{i\in I} \left(y_i \otimes \left(\left(\bigvee_{i\in I} y_i\right) \to x\right)\right) \\
(po\ (1.32), (1.22), (1.5)) & \leqslant & \bigvee_{i\in I} \left(y_i \otimes (y_i \to x)\right) = \bigvee_{i\in I} (x \wedge y_i)\,.
\end{array}
$$

(1.92). $x \wedge y = x \otimes (x \to y) = x \otimes x \otimes (x \to y) \leqslant x \otimes y$, gde smo redom koristili (1.5), pretpostavku $x \otimes x = x$, prvi deo iz (1.15), kao i izotonost za $\otimes$, dok nejednakost $x \otimes y \leqslant x \wedge y$ imamo iz (1.21). □

Posledica 1.1 *Reziduirana mreža $\mathcal{L}$ je* G-*algebra akko je Hejtingova algebra i zadovoljava aksiomu prelinearnosti.*

DOKAZ. Po Definiciji 1.3, reziduirana mreža je G-algebra akko je BL-algebra i zadovoljava zakon idempotentnosti.

Ako je $\mathcal{L}$ G-algebra, onda zadovoljava aksiomu prelinearnosti, jer je BL-algebra, a da je Hejtingova algebra, sledi na osnovu tvrđenja (1.92) Teoreme 1.14.

Obratno, neka je $\mathcal{L}$ Hejtingova algebra koja zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Tada je $x \otimes x = x \wedge x = x$, te $\mathcal{L}$ zadovoljava zakon idempotentnosti. Dokažimo da je $\mathcal{L}$ deljiva reziduirana mreža. Prema (1.56), $x \otimes (x \to y) \leqslant x \wedge y$, te nam ostaje da dokažemo suprotan smer ove nejednakosti, odnosno $x \wedge y \leqslant x \wedge (x \to y)$, jer su operacije $\wedge$ i $\otimes$ identične. Koristeći drugi deo iz (1.20) imamo $x \wedge y \leqslant y \leqslant x \to y$, što sa $x \wedge y \leqslant x$ daje $x \wedge y \leqslant x \wedge (x \to y)$. □

1.4 Posledice zakona dvojne negacije

U ovoj sekciji dajemo neke posledice zakona dvojne negacije, koji je naveden u (1.6), i dokazujemo da su MV-algebre BL-algebre u kojima važi zakon dvojne negacije.

Teorema 1.15 *Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža u kojoj važi zakon dvojne negacije. Tada, $\mathcal{L}$ zadovoljava sledeće uslove (kada imaju smisla):*

- $\boldsymbol{x \to y = \neg(x \otimes \neg y)}$; (1.93)
- $\boldsymbol{x \to y = \neg y \to \neg x}$; (1.94)
- $\boldsymbol{\neg\left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) = \bigvee_{i\in I} \neg x_i}$; (1.95)
- *uslov* ***prelinearnosti*** *ekvivalentan je uslovu*

  $\boldsymbol{x \otimes (y_1 \wedge y_2) = (x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2)}$, (1.96)

gde za (1.95) *važi da ako desna strana ima smisla, onda ima i leva i one su jednake.*

DOKAZ. Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža u kojoj važi zakon dvojne negacije.
(1.93). $\neg(x \otimes \neg y) = (x \otimes (y \to \mathbf{0})) \to \mathbf{0} = x \to ((y \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}) = x \to y$, gde smo osim (1.6) koristili i (1.23).

(1.94). $\neg y \to \neg x = (y \to \mathbf{0}) \to (x \to \mathbf{0}) = x \to ((y \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}) = x \to y$, gde smo koristili i (1.24).
(1.95). Pretpostavimo da $\bigvee_{i\in I} \neg x_i$ postoji u L, gde $x_i \in L$, $i \in I$. Koristeći (1.35) sledi $\neg \left(\bigvee_{i\in I} \neg x_i\right) = \left(\bigvee_{i\in I} \neg x_i\right) \to \mathbf{0} = \bigwedge_{i\in I}(\neg x_i \to \mathbf{0}) = \bigwedge_{i\in I} x_i$, što povlači (1.95).
(1.96). Tvrđenje u smeru „$\Rightarrow$" sledi iz dela (1.85) Teoreme 1.12. Za dokaz u smeru „$\Leftarrow$", pretpostavimo da u $\mathcal{L}$ važi $x \otimes (y_1 \wedge y_2) = (x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2)$. Sada,

$$\begin{array}{rcl}
 & & x \to (y_1 \vee y_2) \\
(po\ (1.93)) & = & \neg(x \otimes \neg(y_1 \vee y_2)) \\
 & = & \neg(x \otimes ((y_1 \vee y_2) \to \mathbf{0})) \\
(po\ (1.41)) & = & \neg(x \otimes ((y_1 \to \mathbf{0}) \wedge (y_2 \to \mathbf{0}))) \\
 & = & \neg(x \otimes (\neg y_1 \wedge \neg y_2)) \\
(po\ pretpostavci) & = & \neg((x \otimes \neg y_1) \wedge (x \otimes \neg y_2)) \\
(po\ (1.95)) & = & \neg(x \otimes \neg y_1) \vee \neg(x \otimes \neg y_2) \\
(po\ (1.93)) & = & (x \to y_1) \vee (x \to y_2).
\end{array}$$

Tako smo dokazali da u $\mathcal{L}$ važi $x \to (y_1 \vee y_2) = (x \to y_1) \vee (x \to y_2)$, odakle, na osnovu Teoreme 1.11, sledi da $\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti. $\square$

Teorema 1.16 *Za svaku reziduiranu mrežu $\mathcal{L}$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

- *$\mathcal{L}$ je* MV-*algebra.*
- *$\mathcal{L}$ je deljiva i zadovoljava zakon dvojne negacije.*

DOKAZ. MV-algebre smo definisali kao reziduirane mreže koje zadovoljavaju identitet $x \vee y = (x \to y) \to y$, naveden u (1.10).
„$\Rightarrow$": Neka je $\mathcal{L}$ MV-algebra. Ako u (1.10) stavimo $y = \mathbf{0}$, direktno dobijamo da $\mathcal{L}$ zadovoljava identitet $x = \neg\neg x$.

Dokažimo sada da je $\mathcal{L}$ deljiva. S obzirom na (1.56), ostaje nam da dokažemo da u $\mathcal{L}$ važi $x \wedge y \leqslant x \otimes (x \to y)$. Kako u $\mathcal{L}$ važi zakon dvojne negacije, preko (1.65) dobijamo da je ovaj uslov ekvivalentan sa $(x \otimes (x \to y)) \to \mathbf{0} \leqslant (x \wedge y) \to \mathbf{0}$. Osim toga, iz (1.44) imamo $\neg x \vee \neg y \leqslant (x \wedge y) \to \mathbf{0}$, te je sada dovoljno dokazati

$$(x \otimes (x \to y)) \to \mathbf{0} \leqslant \neg y \vee \neg x.$$

Desna strana ove nejednakosti jednaka je $(\neg y \to \neg x) \to \neg x$, prema definiciji MV-algebri, što je dalje, primenom (1.94), jednako $(x \to y) \to \neg x$. Primenom (1.23), leva strana ove nejednakosti jednaka je $(x \to y) \to (x \to \mathbf{0})$, čime se dokaz završava.
„$\Leftarrow$": Pretpostavimo da je $\mathcal{L}$ deljiva reziduirana mreža u kojoj važi zakon dvojne negacije. S obzirom na (1.55), ostaje nam da dokažemo $(x \to y) \to y \leqslant x \vee y$.

$$\begin{array}{lll}
 & & (x \to y) \to y \leqslant x \vee y \\
akko & (po\ (1.6)) & (x \to y) \to y \leqslant \neg(x \vee y) \to \mathbf{0} \\
akko & (po\ (1.66) & (x \to y) \to y \leqslant (\neg x \wedge \neg y) \to \mathbf{0} \\
akko & (po\ (1.5)) & (x \to y) \to y \leqslant ((\neg y) \otimes (\neg y \to \neg x)) \to \mathbf{0} \\
akko & (po\ (1.94)) & (x \to y) \to y \leqslant ((\neg y) \otimes (x \to y)) \to \mathbf{0} \\
akko & (po\ (1.3)) & (\neg y) \otimes (x \to y) \otimes ((x \to y) \to y) \leqslant \mathbf{0},
\end{array}$$

te kako je $(\neg y) \otimes (x \to y) \otimes ((x \to y) \to y) \leqslant (\neg y) \otimes y = \mathbf{0}$ (po (1.15), (1.22) i (1.63)), zaključujemo da u $\mathcal{L}$ važi nejednakost $(x \to y) \to y \leqslant x \vee y$. □

Teorema 1.17 *Svaka* MV-*algebra zadovoljava sledeće uslove:*

$$\bullet \ \ \boldsymbol{aksiomu\ prelinearnosti;} \tag{1.97}$$

$$\bullet \ \ \boldsymbol{x \to (x \otimes y) = (x \to 0) \vee y}. \tag{1.98}$$

DOKAZ. Neka je $\mathcal{L}$ MV-algebra. Prema Teoremi 1.16, $\mathcal{L}$ je deljiva reziduirana mreža u kojoj važi zakon dvojne negacije.
(1.97). Po Teoremi 1.14, $\mathcal{L}$ zadovoljava identitet $x \otimes (y_1 \wedge y_2) = (x \otimes y_1) \wedge (x \otimes y_2)$, a po Teoremi 1.15, $\mathcal{L}$ zadovoljava ovaj identitet akko zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Dakle, $\mathcal{L}$ zadovoljava aksomu prelinearnosti.
(1.98). $x \to (x \otimes y) = ((x \otimes y) \to \mathbf{0}) \to (x \to \mathbf{0}) = (y \to (x \to \mathbf{0})) \to (x \to \mathbf{0}) = y \vee (x \to \mathbf{0})$, gde smo koristili (1.94), (1.23), kao i (1.10). □

Posledica 1.2 *Za svaku reziduiranu mrežu $\mathcal{L}$, sledeći uslovi su ekvivalentni:*

- $\mathcal{L}$ *je* MV-*algebra.*
- $\mathcal{L}$ *je* BL-*algebra u kojoj važi zakon dvojne negacije.*

DOKAZ. Direktna posledica Teoreme 1.16 i prvog tvrđenja Teoreme 1.17. □

1.5 Linearnost MV, G i Π algebri

Linearnost je značajno svojstvo struktura istinitosnih vrednosti, kako bi svake dve istinitosne vrednosti bile uporedive.

Definicija 1.5 *Reziduirana mreža* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ *je* **linearna** *ako je njeno uređenje* $\langle L, \leqslant\rangle$ *linearno.*

Teorema 1.18 *Neka je* $\mathcal{L} = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ *linearna reziduirana mteža. Tada, sledeći uslovi su zadovoljeni:*

(1) $\mathcal{L}$ *zadovoljava aksiomu prelinearnosti.*

(2) *Ako u* $\mathcal{L}$ *važi zakon idempotentnosti, onda je* $\mathcal{L}$ *Hejtingova algebra.*

DOKAZ: (1) Neka $a, b \in L$. Kako je $a \leqslant b$ ili $b \leqslant a$, to mora biti $a \to b = \mathbf{1}$ ili $b \to a = \mathbf{1}$, po (1.16). Odavde je, na osnovu osobina mreže, $(a \to b) \vee (b \to a) = \mathbf{1}$.
(2) Pretpostavimo da u $\mathcal{L}$ važi zakon idempotentnosti, tj. $x \otimes x = x$. Neka je $a \leqslant b$, $a, b \in L$. Koristeći izotonost za $\otimes$ imamo $a = a \otimes a \leqslant a \otimes b \leqslant a \otimes \mathbf{1} = a$, odakle sledi $a \otimes b = a$. Kako je $a \leqslant b$ ekvivalentno sa $a \wedge b = a$, dobijamo $a \otimes b = a \wedge b$. Analogno je u slučaju $b \leqslant a$. □

Slede neka svojstva linearno uređenih MV-algebri, G-algebri i Π-algebri.

Teorema 1.19 *U svakoj linearno uređenoj* MV-*algebri važi:*

- $\boldsymbol{x \oplus y < 1}$ *povlači* $\boldsymbol{x \otimes y = 0}$*;* (1.99)
- $\boldsymbol{x \oplus y = 1}$ *i* $\boldsymbol{x \otimes y = 0}$ *povlači* $\boldsymbol{x = \neg y}$*;* (1.100)
- $\boldsymbol{x \oplus y = x \oplus\ z < 1}$ *ili* $\boldsymbol{x \otimes y = x \otimes z > 0}$ *povlači* $\boldsymbol{y = z}$*;* (1.101)
- $\boldsymbol{x \oplus y = x \oplus z}$ *i* $\boldsymbol{x \otimes y = x \otimes z}$ *povlači* $\boldsymbol{y = z}$*;* (1.102)
- $\boldsymbol{x \oplus y = x}$ *povlači* $\boldsymbol{x = 1}$ *ili* $\boldsymbol{y = 0}$*,* (1.103)

gde je $\boldsymbol{x \oplus y =_{def} \neg(\neg x \otimes \neg y)}$.

DOKAZ. Neka je $\mathcal{L}$ linearno uređena MV-algebra, i neka $x, y, z \in L$. Prema Teoremi 1.16, u $\mathcal{L}$ važi zakon dvojne negacije, te primenom (1.93) Teoreme 1.15 dobijamo:

$$\boldsymbol{\neg x \rightarrow y = x \oplus y = \neg(\neg x \otimes \neg y)},$$

što koristimo u dokazu koji sledi.[5]
(1.99). Po pretpostavci, $\neg x \rightarrow y < \mathbf{1}$. Odavde sledi, po (1.16), da nije $\neg x \leqslant y$, te mora biti $y < \neg x$, zbog linearnosti poretka $\leqslant$. Iz ove nejednakosti, na osnovu (1.22) i (1.63), sledi $x \otimes y \leqslant x \otimes \neg x = \mathbf{0}$.
(1.100). Neka je $x \oplus y = \mathbf{1}$ i $x \otimes y = \mathbf{0}$. Lako se pokazuje koristeći i (1.62) da važi: $x \otimes y = \mathbf{0}$ akko $\neg(\neg\neg y \otimes \neg\neg x) = \mathbf{1}$ akko $y \rightarrow \neg x = \mathbf{1}$. Sada, po pretpostavci, imamo $\neg x \rightarrow y = \mathbf{1}$ i $y \rightarrow \neg x = \mathbf{1}$, što, prema (1.16), povlači $\neg x = y$, odakle sledi $x = \neg y$.
(1.101). Neka je $x \oplus y = x \oplus z < \mathbf{1}$. Kao i u dokazu za (1.99), zaključujemo da je $y < \neg x$ i $z < \neg x$, odakle sledi $y = \neg x \wedge y$ i $z = \neg x \wedge z$. Prema Teoremi 1.16, $\mathcal{L}$ je deljiva reziduirana mreža, te je sada $y = \neg x \otimes (\neg x \rightarrow y) = \neg x \otimes (x \oplus y)$, i analogno, $z = \neg x \otimes (x \oplus z)$. Odavde, kako je $x \oplus y = x \oplus z$, dobijamo $y = z$.

Neka je $x \otimes y = x \otimes z > \mathbf{0}$. Na osnovu (1.62), mora biti $\neg(x \otimes y) = \neg(x \otimes z) < \mathbf{1}$, što je ekvivalentno sa $\neg x \oplus \neg y = \neg x \oplus \neg z < \mathbf{1}$. Sada, na osnovu prethodnog dela ovog dokaza, dobijamo $\neg y = \neg z$, odakle sledi $y = z$.
(1.102). Ovaj rezultat je posledica od (1.100) i (1.101).
(1.103). Neka je $x \otimes y = x$. Najpre, lako se pokazuje da je $x \oplus \mathbf{0} = x$. Ako je $x < \mathbf{1}$, onda je $x \oplus y = x \oplus \mathbf{0} < \mathbf{1}$, te je $y = \mathbf{0}$, prema (1.101). □

Teorema 1.20 *U svakoj linearno uređenoj* G-*algebri* $\mathcal{L}$ *važi:*

- $\boldsymbol{x < y}$ *povlači* $\boldsymbol{y \rightarrow x = x}$*;* (1.104)
- *Svaki podskup koji sadrži* $\mathbf{0}$ *i* $\mathbf{1}$ *je podalgebra od* $\mathcal{L}$*.* (1.105)

DOKAZ. Neka je $\mathcal{L}$ linearna G-algebra. Prema Posledici 1.1, u $\mathcal{L}$ važi $x \otimes y = x \wedge y$.
(1.104). Neka $x, y \in L$, gde je $x < y$. Prema (1.26), $y \rightarrow x = \max\{z \in L \mid y \wedge z \leqslant x\}$. Kako je $y \wedge x = x$, $x \in \{z \in L \mid y \wedge z \leqslant x\}$. Dokažimo da je $x = \max\{z \mid y \wedge z \leqslant x\}$. Neka je $y \wedge t \leqslant x$, za neko $t \in L$. Zbog linearnosti, $y \leqslant t$ ili $t < y$. Ako je $y \leqslant t$, tada je $y = y \wedge t \leqslant x$, te imamo kontradikciju $y \leqslant x$. Dakle, mora biti $t < y$. Tada,

[5] MV-algebre su strukture koje odgovaraju (fuzzy) Lukasijevičevom aksiomatskom sistemu, gde je operacija $\oplus$ u korespondenciji sa veznikom *jake disjunkcije,* za koji se koristi oznaka ∇, ili $\veebar$.

$t = y \wedge t \leqslant x$, dakle, $t \leqslant x$.
(1.105). Neka je $A \subseteq L$, gde $\mathbf{0}, \mathbf{1} \in A$. Dokažimo zatvorenost skupa A u odnosu na operacije $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$. Neka $x, y \in A$. Ako je $x \leqslant y$, onda je $x \wedge y = x$ i $x \vee y = y$, $x \rightarrow y = \mathbf{1}$ (po (1.16)) i $y \rightarrow x = x$ (po (1.104)). Simetrično je u slučaju $y \leqslant x$, te zaista imamo zatvorenost skupa A u odnosu na operacije G-algebre $\mathcal{L}$. □

Teorema 1.21 *U svakoj linearno uređenoj* Π*-algebri važi:*

- $\boldsymbol{0 < x}$ *povlači* $\boldsymbol{\neg x = 0}$*;* (1.106)
- *ako je* $\boldsymbol{0 < x}$ *onda* $\boldsymbol{x \otimes y_1 = x \otimes y_2}$ *povlači* $\boldsymbol{y_1 = y_2}$*;* (1.107)
- *ako je* $\boldsymbol{0 < x}$ *onda* $\boldsymbol{x \otimes y_1 < x \otimes y_2}$ *povlači* $\boldsymbol{y_1 < y_2}$*.* (1.108)

DOKAZ. (1.106). Na osnovu linearnosti, $x \leqslant \neg x$ ili $\neg x \leqslant x$, što je ekvivalenntno sa $x \wedge \neg x = x$ ili $x \wedge \neg x = \neg x$. S druge strane, $x \wedge \neg x = \mathbf{0}$, prema (1.12) Definicije 1.3. Sada, kako je, po pretpostavci, $x > \mathbf{0}$, mora biti $\neg x = 0$.
(1.107). Neka je $\mathbf{0} < x$ i $x \otimes y_1 = x \otimes y_2$. Uslov $\mathbf{0} < x$ povlači $\neg\neg x = \mathbf{1}$, prema (1.106) i (1.62). Prema prvom delu iz (1.17), imamo $(x \otimes y_1) \rightarrow (x \otimes y_2) = 1$. Sada, $\neg\neg x \leqslant ((x \otimes y_1 \rightarrow (x \otimes y_2)) \rightarrow (y_1 \rightarrow y_2)$, po (1.11) Definicije 1.3, te dobijamo $\mathbf{1} \rightarrow (y_1 \rightarrow y_2) = \mathbf{1}$, odakle je, prema (1.18), $y_1 \rightarrow y_2 = \mathbf{1}$, što je, po (1.16), ekvivalentno sa $y_1 \leqslant y_2$. Analogno, $y_2 \leqslant y_1$.
(1.108). Prema dokazu tvrđenja (1.107), imamo $y_1 \leqslant y_2$, a slučaj $y_1 = y_2$ je nemoguć, jer $y_1 = y_2$ daje kontradikciju $x \otimes y_1 = x \otimes y_2$. □

1.6 Alternativne definicije MV-algebri

U ovoj sekciji definišemo **Čengove (Chang) MV-algebre**[6] i **Vajsbergove (Wajsberg) algebre**. Uvodeći nove operacije na ovim algebarskim strukturama, kao i na MV-algebrama, pokazujemo da postoji bijektivna korespondencija između MV-algebri i (*Chang*) MV-algebri i da postoji bijektivna korespondencija između MV-algebri i Vajsbergovih algebri.

Definicija 1.6 (*Chang*) MV-algebra *je algebra* $\mathcal{A} = \langle A, \oplus, ', \mathbf{0} \rangle$ *koja zadovoljava sledeće uslove:*

(1) $\boldsymbol{\langle A, \oplus, 0 \rangle}$ *je komutativni monoid;*

(2) $\boldsymbol{x'' = x}$ *(zakon dvojne negacije);*

(3) $\boldsymbol{x \oplus 0' = 0'}$ *(provođenje jedinice);*

(4) $\boldsymbol{(x' \oplus y)' \oplus y = (y' \oplus x)' \oplus x}$ *(komutativnost za mrežno „i”).*

[6]MV-algebre je uveo Chang, 1958. godine.

Teorema 1.22 (I) *Neka je* $\mathcal{A} = \langle A, \oplus, {}', \mathbf{0}\rangle$ (*Chang*) MV-*algebra, gde su na* A *definisane binarne operacije* $\otimes$, $\longrightarrow$, $\wedge$ *i* $\vee$, *kao i konstanta* $\mathbf{1}$, *na sledeći način:*

$$\begin{array}{rl} (i) & \mathbf{1} =_{def} \mathbf{0}'; \\ (ii) & x \otimes y =_{def} (x' \oplus y')'; \\ (iii) & x \longrightarrow y =_{def} x' \oplus y; \\ (iv) & x \wedge y =_{def} (x' \oplus (x' \oplus y)')'; \\ (v) & x \vee y =_{def} (x' \oplus y)' \oplus y. \end{array}$$

Tada, algebarska struktura $\mathcal{A}' = \langle A, \wedge, \vee, \otimes, \longrightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ *je* MV-*algebra.*

(II) *Obratno, neka je* $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \otimes, \longrightarrow, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ MV-*algebra u kojoj su uvedene unarna operacija* $'$ *i binarna operacija* $\oplus$, *na sledeći način:*

$$\begin{array}{rl} (vi) & x' =_{def} x \longrightarrow \mathbf{0}; \\ (vii) & x \oplus y =_{def} (x' \otimes y')'. \end{array}$$

Tada, algebra $\mathcal{A}' = \langle A, \oplus, {}', \mathbf{0}\rangle$ *je* (*Chang*) MV-*algebra.*

DOKAZ. (I) Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \oplus, {}', \mathbf{0}\rangle$ (*Chang*) MV-algebra u kojoj su konstanta $\mathbf{1}$ i operacije $\otimes$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$ definisane sa *(i)-(v).*

• Dokažimo da je $\langle A, \otimes, \mathbf{1}\rangle$ komutativni monoid.

Komutativnost operacije $\otimes$ je direktna posledica komutativnosti operacije $\oplus$. Asocijativnost operacije $\otimes$ može se lako dobiti koristeći asocijativnost operacije $\oplus$ i zakon dvojne negacije (2). Dalje, $x \otimes \mathbf{1} = x \otimes \mathbf{0}' = (x' \oplus \mathbf{0}'')' = (x' \oplus \mathbf{0})' = x'' = x$, te je zaista $\langle A, \otimes, \mathbf{1}\rangle$ komutativni monoid.

• Dokažimo da je $\langle A, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ ograničena mreža.

$$\begin{array}{rcl} & & x \wedge y \\ (prema\ (iv)) & = & (x' \oplus (x' \oplus y)')' \\ (prema\ (1), (2)) & = & (y'' \oplus x')' \oplus x')' \\ (prema\ (4)) & = & ((x'' \oplus y')' \oplus y')' \\ (prema\ (1), (2)) & = & (y' \oplus (y' \oplus x)')' \\ (prema\ (iv)) & = & y \wedge x. \end{array}$$

Tako smo dokazali da je $\wedge$ komutativna operacija. Slično se dokazuje komutativnost za $\vee$ koristeći *(v)* i (4). Pre nego što dokažemo da u $\mathcal{A}$ važi asocijativnost za $\wedge$ i $\vee$, kao i zakoni apsorpcije, dokazujemo da $\mathcal{A}$ zadovoljava sledeće uslove:

(viii) $x \oplus x' = \mathbf{1}$;

(ix) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$, $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ (De Morganovi zakoni za $\wedge$ i $\vee$);

(x) $(x \oplus y)' = x' \otimes y'$, $(x \otimes y)' = x' \oplus y'$ (De Morganovi zakoni za $\otimes$ i $\oplus$);

(xi) $x \wedge y = x \otimes (x' \oplus y) = x \otimes (x \rightarrow y)$.

Dokažimo *(viii)*.

$$\begin{array}{rclclcl} x \oplus x' & = & (\textit{prema }(1)) & (\mathbf{0} \oplus x)' \oplus x & = & (\textit{prema }(2)) & (\mathbf{0}'' \oplus x)' \oplus x \\ & = & (\textit{prema }(4)) & (x' \oplus \mathbf{0}')' \oplus \mathbf{0}' & = & (\textit{prema }(3)) & \mathbf{0}' = \mathbf{1}. \end{array}$$

Dalje, iz (2), (4) i *(iv)*-*(v)* imamo $(x \wedge y)' = (x' \oplus (x' \oplus y)')'' = (y'' \oplus x')' \oplus x') = y' \vee x'$, te, s obzirom na već dokazanu komutativnost za $\vee$, dokazali smo i prvi deo iz *(ix)*. Drugi deo je posledica prvog i zakona dvojne negacije. Slično je u dokazima za *(x)*-*(xi)*. Sada, dokažimo asocijativnost operacije $\wedge$:

$$\begin{array}{rcl} & & x \wedge (y \wedge z) = (y \wedge z) \wedge x \\ (\textit{prema }(xi)) & = & (y \otimes (y' \oplus z)) \otimes ((y \otimes (y' \oplus z))' \oplus x) \\ (\textit{asoc. za }\otimes) & = & y \otimes ((y' \oplus z) \otimes ((y \otimes (y' \oplus z))' \oplus x)) \\ (\textit{prema }(x)) & = & y \otimes ((y' \oplus z) \otimes ((y' \oplus (y' \oplus z)') \oplus x)) \\ (\textit{asoc. za }\oplus) & = & y \otimes ((y' \oplus z) \otimes ((y' \oplus z)' \oplus (y' \oplus x))) \\ (\textit{prema }(2),(x)) & = & y \otimes ((y' \oplus z)' \oplus ((y' \oplus z)' \oplus (y' \oplus x))')' \\ (\textit{komut. za }\oplus,(2)) & = & y \otimes (((y' \oplus x)'' \oplus (y' \oplus z)')' \oplus (y' \oplus z)')' \\ (\textit{prema }(4)) & = & y \otimes (((y' \oplus z)'' \oplus (y' \oplus x)')' \oplus (y' \oplus x)')' \\ (\textit{prema }(2),(x)) & = & y \otimes ((y' \oplus z) \oplus (y' \oplus x)') \otimes (y' \oplus x)) \\ (\textit{asoc. za }\otimes) & = & (y \otimes (y' \oplus x)) \otimes ((y' \oplus z) \oplus (y' \oplus x)') \\ (\textit{prema }(xi)) & = & (y \wedge x) \otimes ((y' \oplus z) \oplus (y' \oplus x)') \\ (\textit{asoc. za }\oplus) & = & (y \wedge x) \otimes ((y' \oplus (y' \oplus x)') \oplus z) \\ (\textit{prema }(2),(iv)) & = & (y \wedge x) \otimes ((y \wedge x)' \oplus z) \\ (\textit{prema }(xi)) & = & (y \wedge x) \wedge z = (x \wedge y) \wedge z. \end{array}$$

Dalje, $(x \vee y) \vee z = (x' \wedge y')' \vee z = ((x' \wedge y')'' \wedge z')' = ((x' \wedge y') \wedge z')'$, te je sada asocijativnost za $\vee$ posledica asocijativnosti za $\wedge$.

$$\begin{array}{rcl} & & x \wedge (x \vee y) \\ (\textit{prema }(xi)) & = & x \otimes (x' \oplus (x \vee y)) \\ (\textit{prema }(v)) & = & x \otimes (x' \oplus ((x' \oplus y)' \oplus y)) \\ (\textit{asoc. za }\oplus) & = & x \otimes ((x' \oplus y) \oplus (x' \oplus y)') \\ (\textit{prema }(viii)) & = & x \otimes \mathbf{1} = x. \end{array}$$

Dakle, u $\mathcal{A}$ važi $x \wedge (x \vee y) = x$, odakle, po *(ix)* i (2), imamo da važi i $x \vee (x \wedge y) = x$. Za osobine $\mathbf{0}$ i $\mathbf{1}$ imamo $x \wedge \mathbf{1} = (\mathbf{1}' \oplus (\mathbf{1}' \oplus x)')' = (\mathbf{0} \oplus (\mathbf{0} \oplus x)')' = x'' = x$ i $x \vee \mathbf{0} = (x' \oplus \mathbf{0})' \oplus \mathbf{0} = x'' = x$. Konačno, $\langle A, \wedge, \vee, \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$ je ograničena mreža.

• Dokažimo da u $\mathcal{A}$ važi svojstvo adjungovanosti.

Najpre pokazujemo da $\mathcal{A}$ zadovoljava sledeća dva uslova:

(xii) $\boldsymbol{x \leqslant y}$ *akko* $\boldsymbol{x \to y = 1}$;

(xiii) $\boldsymbol{(x \otimes y) \to z = x \to (y \to z)}$.

Važi sledeće tvrđenje: $x \leqslant y$ akko $y = x \vee y$ akko $y = (x' \oplus y)' \oplus y$. Ako je $x \to y = \mathbf{1}$, tj. (po *(iii)*) $x' \oplus y = \mathbf{1}$, onda se lako dobija da je $(x' \oplus y)' \oplus y = y$, što, na osnovu napred navedenog tvrđenja, povlači $x \leqslant y$. Ako je $x \leqslant y$, onda je, takođe prema

napred navedenom tvrđenju, $y = (x' \oplus y)' \oplus y$, odakle sledi $x' \oplus y = (x' \oplus y)' \oplus (x' \oplus y)$, što, prema (*viii*), povlači $x' \oplus y = \mathbf{1}$, dakle, $x \to y = \mathbf{1}$.
Tako smo dokazali *(xii)*. Koristeći (1)-(2) i *(ii)-(iii)* dobijamo:

$$(x \otimes y) \to z = (x' \oplus y')' \to z = (x' \oplus y') \oplus z$$
$$= x' \oplus (y' \oplus z) = x' \oplus (y \to z) = x \to (y \to z),$$

što dokazuje *(xiii)*. Sada, primenom *(xii)-(xiii)* sledi svojstvo adjungovanosti: $x \otimes y \leqslant z$ akko $(x \otimes y) \to z = \mathbf{1}$ akko $x \to (y \to z) = \mathbf{1}$ akko $x \leqslant y \to z$.

Dakle, $\mathcal{A}'$ je reziduirana mreža.

Kako je $x \vee y = (x' \oplus y)' \oplus y = (x \to y)' \oplus y = (x \to y) \to y$, $\mathcal{A}'$ je MV-algebra, prema Definiciji 1.3.
(II) Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ MV-algebra, i neka su operacije $'$ i $\oplus$ definisane sa *(vi)-(vii)*. Prema Teoremi 1.16, u $\mathcal{A}$ važi zakon dvojne negacije, te je uslov (2) iz Definicije 1.6 ispunjen. Komutativnost operacije $\oplus$ je direktna posledica komutativnosti za $\otimes$. Koristeći (2) i asocijativnost za $\otimes$ sledi:

$$(x \oplus y) \oplus z = (x' \otimes y')' \oplus z = ((x' \otimes y')'' \otimes z')' = ((x' \otimes y') \otimes z')'$$
$$= (x' \otimes (y' \otimes z'))' = (x' \otimes (y' \otimes z')'')' = (x' \otimes (y \oplus z)')' = x \oplus (y \oplus z),$$

te imamo asocijativnost operacije $\oplus$. Prema (1.62) Teoreme 1.9, $\mathbf{0}' = \mathbf{1}$, te imamo $x \oplus \mathbf{0} = (x' \otimes \mathbf{0}')' = (x' \otimes \mathbf{1})' = x'' = x$. Dakle, dokazali smo da je $\langle A, \oplus, \mathbf{0} \rangle$ komutativni monoid. Takođe rutinski, koristeći (1.19) i (2) dobijamo $x \oplus \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$, što znači da $\mathcal{A}$ zadovoljava uslov (3) Definicije 1.6. Na kraju, prema Teoremi 1.16, $\mathcal{A}$ je deljiva reziduirana mreža, te imamo:

$$(x' \oplus y)' \oplus y = (x'' \otimes y')'' \oplus y = (x \otimes y') \oplus y = ((x \otimes y')' \otimes y')' =$$
$$= (y' \otimes (y' \otimes x)')' = (y' \otimes ((y' \otimes x) \to \mathbf{0}))' = (po\ (1.23))$$
$$= (y' \otimes (y' \to (x \to \mathbf{0})))' = (y' \otimes (y' \to x'))' = (zbog\ deljivosti)\ (y' \wedge x')'.$$

Analogno, $(y' \oplus x)' \oplus x = (x' \wedge y')'$. Dakle, $\mathcal{A}$ zadovoljava i uslov (4) Definicije 1.6, čime se dokaz ove teoreme završava. $\square$

Definicija 1.7 Vajsbergova algebra *je algebra* $\mathcal{A} = \langle A, \to, \mathbf{0} \rangle$ *koja zadovoljava sledeće identitete:*

W1 $\mathbf{1} \to y = y$;
W2 $(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = \mathbf{1}$;
W3 $(x' \to y') \to (y \to x) = \mathbf{1}$;
W4 $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$,

gde je $x' =_{def} x \to \mathbf{0}$ *i* $\mathbf{1} =_{def} \mathbf{0} \to \mathbf{0}$.

Lema 1.1 *U svakoj Vajsbergovoj algebri, sledeći uslovi su zadovoljeni:*

- $x \to x = \mathbf{1}$; (1.109)
- $x = y$ *akko* $(x \to y = \mathbf{1}$ *i* $y \to x = \mathbf{1})$; (1.110)
- $x \to \mathbf{1} = \mathbf{1}$; (1.111)
- $\mathbf{0} \to x = \mathbf{1}$; (1.112)

- $\boldsymbol{x'' = x}$*;* (1.113)
- $\boldsymbol{x' \to y' = y \to x}$*;* (1.114)
- $\boldsymbol{x \to (y \to x) = 1}$*;* (1.115)
- $\boldsymbol{x \to y = y \to z = 1}$ *povlači* $\boldsymbol{x \to z = 1}$*;* (1.116)
- $\boldsymbol{(x \to y) \to ((z \to x) \to (z \to y)) = 1}$*;* (1.117)
- $\boldsymbol{x \to (y \to z) = y \to (x \to z)}$*.* (1.118)

DOKAZ. (1.109). Po W2, $\mathbf{1} = (\mathbf{1} \to \mathbf{1}) \to ((\mathbf{1} \to x) \to (\mathbf{1} \to x))$, odakle, primenom W1, sledi $\mathbf{1} = \mathbf{1} \to (x \to x)$. Još jedna primena W1 daje $\mathbf{1} = x \to x$.
(1.110). Ako je $x = y$, tada je $x \to y = \mathbf{1}$ i $y \to x = \mathbf{1}$, po (1.109). Obratno, pretpostavimo da je $x \to y = y \to x = \mathbf{1}$. Tada, primenom W1 i W4, sledi:

$$x = \mathbf{1} \to x = (y \to x) \to x = (x \to y) \to y = \mathbf{1} \to y = y.$$

(1.111).

$$\begin{array}{rcl} & & x \to \mathbf{1} \\ (\textit{prema } (1.109)) & = & x \to (x \to x) \\ (\textit{prema } \mathrm{W1}) & = & (\mathbf{1} \to x) \to ((\mathbf{1} \to x) \to x) \\ (\textit{prema } \mathrm{W4}) & = & (\mathbf{1} \to x) \to ((x \to \mathbf{1}) \to \mathbf{1}) \\ (\textit{prema } (1.109)) & = & (\mathbf{1} \to x) \to ((x \to \mathbf{1}) \to (\mathbf{1} \to \mathbf{1})) \\ (\textit{prema } \mathrm{W2}) & = & \mathbf{1}. \end{array}$$

(1.112). Iz (1.109) i definicije operacije $'$ sledi $\mathbf{0}' = \mathbf{1}$. Sada,

$$\mathbf{1} \text{ (po W3)} = (x' \to \mathbf{0}') \to (\mathbf{0} \to x) = (x' \to \mathbf{1}) \to (\mathbf{0} \to x)$$
$$\text{(po (1.111))} = \mathbf{1} \to (\mathbf{0} \to x) \ \ \text{(po W1)} = \mathbf{0} \to x$$

(1.113). $x'' = (x \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0} = (\mathbf{0} \to x) \to x = \mathbf{1} \to x = x$, gde smo redom koristili W4, (1.112) i W1.
(1.114). Iz W3 imamo $(x' \to y') \to (y \to x) = \mathbf{1}$ i $(y'' \to x'') \to (x' \to y') = \mathbf{1}$, te odavde, primenom (1.113) i (1.110), sledi $x' \to y' = y \to x$.
(1.115).

$$\begin{array}{rcl} & & x \to (y \to x) \\ (\textit{prema } \mathrm{W1}) & = & \mathbf{1} \to (x \to (y \to x)) \\ (\textit{prema } \mathrm{W1}) & = & \mathbf{1} \to ((\mathbf{1} \to x) \to (y \to x)) \\ (\textit{prema } (1.111)) & = & (y \to \mathbf{1}) \to ((\mathbf{1} \to x) \to (y \to x)) \\ (\textit{prema } \mathrm{W2}) & = & \mathbf{1}. \end{array}$$

(1.116). Direktna posledica od W1 i W2.
(1.117). Pokazaćemo da $x \to (y \to z) = \mathbf{1}$ povlači $y \to (x \to z) = \mathbf{1}$. Tako će rezultat (1.117) biti direktna posledica ovog tvrđenja i W2.

Iz W2 imamo $((x \to (y \to z)) \to (((y \to z) \to z) \to (x \to z)) = \mathbf{1}$. Neka je $x \to (y \to z) = \mathbf{1}$. Sada, po W1 i W4, sledi $((z \to y) \to y) \to (x \to z) = \mathbf{1}$. Kako je, po (1.115), $y \to ((z \to y) \to y) = \mathbf{1}$, primenom (1.116) dobijamo $y \to (x \to z) = \mathbf{1}$.
(1.118). $(x \to (y \to z)) \to (((z \to y) \to y) \to (x \to z)) = \mathbf{1}$, po W2 i W4. Dalje je $(((z \to y) \to y) \to (x \to z)) \to ((y \to ((z \to y) \to y)) \to (y \to (x \to z)) = \mathbf{1}$, po (1.117). Kako je, po (1.115), $y \to ((z \to y) \to y) = \mathbf{1}$, primenom W1 i (1.116) dobijamo $(x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)) = \mathbf{1}$. Simetrično, $(y \to (x \to z)) \to (x \to (y \to z)) = \mathbf{1}$, te sada rezultat (1.118) sledi na osnovu (1.110). □

Teorema 1.23 (I) *Neka je $\mathcal{A} = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\to}, \boldsymbol{0} \rangle$ Vajsbergova algebra. Ako na skupu A definišemo operacije $\otimes$, $\wedge$ i $\vee$ na sledeći način:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x \otimes y} &=_{\boldsymbol{def}} \boldsymbol{(x \to y')'}; \\ \boldsymbol{x \wedge y} &=_{\boldsymbol{def}} \boldsymbol{x \otimes (x \to y)}; \\ \boldsymbol{x \vee y} &=_{\boldsymbol{def}} \boldsymbol{(x \to y) \to y}, \end{aligned}$$

onda je $\mathcal{A}' = \langle \boldsymbol{A}, \wedge, \vee, \boldsymbol{\to}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$ MV-*algebra.*

(II) *Obratno, ako je algebarska struktura $\mathcal{A} = \langle \boldsymbol{A}, \wedge, \vee, \otimes, \boldsymbol{\to}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$* MV-*algebra, tada je $\mathcal{A}' = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{\to}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{1} \rangle$ Vajsbergova algebra.*

DOKAZ. (I) Prvo dokazujemo da je $\mathcal{A}'' = \langle A, \oplus, ', \mathbf{0} \rangle$ (*Chang*) MV-algebra, gde je

$$\boldsymbol{x \oplus y =_{def} x' \to y} \quad \text{i} \quad \boldsymbol{x' =_{def} x \to 0}.$$

Taj dokaz sprovodimo tako što proveravamo ispunjenost uslova (1)-(4) Definicije 1.6, za algebru $\mathcal{A}''$. Unarne operacije iz $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}''$ su identične, te, po (1.113), $\mathcal{A}''$ zadovoljava uslov (2). Kako je $\mathbf{0}' = \mathbf{1}$, koristeći (1.111) imamo $x \oplus \mathbf{0}' = x'' \to \mathbf{0}' = x'' \to \mathbf{1} = \mathbf{1}$, te je zadovoljen i uslov (3). Dalje, $(x' \oplus y)' \oplus y = (x'' \to y)' \oplus y = (x'' \to y)'' \to y = (x \to y) \to y$. Analogno, $(y' \oplus x)' \oplus x = (y \to x) \to x$, te primenom W4 dobijamo da u $\mathcal{A}''$ važi (4). Ostaje nam da dokažemo da važi i uslov (1), tj. da je $\langle A, \oplus, \mathbf{0} \rangle$ komutativni monoid. Koristeći (1.114) i (2) dobijamo $x \oplus y = x' \to y'' = y' \to x = y \oplus x$, dakle, $\oplus$ je komutativna operacija. Sada,

$$\begin{aligned} x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (z \oplus y) = x' \to (z \oplus y) = x' \to (z' \to y) \\ (po\ (1.118))\ &= z' \to (x' \to y) = z' \to (x \oplus y) = z \oplus (x \oplus y) = (x \oplus y) \oplus z, \end{aligned}$$

a koristeći W1 dobijamo $\mathbf{0} \oplus x = \mathbf{0}' \to x = \mathbf{1} \to x = x$, te je zaista $\langle A, \oplus, \mathbf{0} \rangle$ komutativni monoid. Dakle, $\mathcal{A}'' = \langle A, \oplus, \mathbf{0} \rangle$ je (*Chang*) MV-algebra.

Sada, prema Teoremi 1.22, $\mathcal{A}''' = \langle A, \wedge^\star, \vee^\star, \otimes^\star, \to^\star, \mathbf{0}, \mathbf{1}^\star \rangle$ je MV-algebra, gde je $\mathbf{1}^\star = \mathbf{0}'$, $x \otimes^\star y =_{def} (x' \oplus y')'$, $x \to^\star y =_{def} x' \oplus y$, $x \wedge^\star y =_{def} (x' \oplus (x' \oplus y)')'$ i $x \vee^\star y =_{def} (x' \oplus y)' \oplus y$.

Međutim, odgovarajuće operacije na $\mathcal{A}'''$ i $\mathcal{A}'$ se podudaraju. Zaista, $x \otimes^\star y = (x' \oplus y')' = (x'' \to y')' = (x \to y')'$, $x \to^\star y = x' \oplus y = x'' \to y = x \to y$, a kako je $\mathcal{A}'''$ deljiva reziduirana mreža, sledi $x \wedge^\star y = x \otimes^\star (x \to^\star y) = x \otimes (x \to y) = x \wedge y$, dok za $\vee^\star$ imamo $x \vee^\star y = (x' \oplus y)' \oplus y = (x'' \to y)' \oplus y = (x \to y) \to y$.

Tako smo pokazali da su algebre $\mathcal{A}'''$ i $\mathcal{A}'$ identične, te je $\mathcal{A}'$ MV-algebra, što je trebalo dokazati.

(II) Neka je $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \otimes, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$ MV-algebra. Dokažimo da $\mathcal{A}$ zadovoljava uslove W1-W4 Definicije 1.7. W1 važi, po (1.18) Teoreme 1.1, W2 je posledica (1.49) Teoreme 1.6 i (1.16) Teoreme 1.1. Kako, prema Teoremi 1.16, u $\mathcal{A}$ važi zakon dvojne negacije, tvrđenje (1.94) Teoreme 1.15 možemo primeniti na algebru $\mathcal{A}$, što sa (1.16) povlači da u $\mathcal{A}$ važi identitet W3. W4 je ekvivalentno sa $x \vee y = y \vee x$, što je tačno. Dakle, $\mathcal{A}' = \langle A, \to, \mathbf{0} \rangle$ je Vajsbergova algebra. $\square$

Glava 2

Poddirektna reprezentacija reziduiranih mreža

2.1 Faktor algebre i filteri reziduiranih mreža

Definicija 2.1 *Neka su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ reziduirane mreže. Preslikavanje $h : L_1 \longrightarrow L_2$ je* **homomorfizam** *iz $\mathcal{L}_1$ u $\mathcal{L}_2$ ako je h* **saglasno** *(ili* **kompatibilno***) sa svim fundamentalnim operacijama reziduirane mreže, tj. ako za sve $a, b \in L_1$ važi:*

$$\begin{array}{rcl} h(a \wedge^{\mathcal{L}_1} b) & = & h(a) \wedge^{\mathcal{L}_2} h(b); \\ h(a \vee^{\mathcal{L}_1} b) & = & h(a) \vee^{\mathcal{L}_2} h(b); \\ h(a \otimes^{\mathcal{L}_1} b) & = & h(a) \otimes^{\mathcal{L}_2} h(b); \\ h(a \rightarrow^{\mathcal{L}_1} b) & = & h(a) \rightarrow^{\mathcal{L}_2} h(b); \\ h(\mathbf{0}^{\mathcal{L}_1}) & = & \mathbf{0}^{\mathcal{L}_2}; \\ h(\mathbf{1}^{\mathcal{L}_1}) & = & \mathbf{1}^{\mathcal{L}_2}. \end{array}$$

Homomorfizam h je **potpuni homomorfizam** *ako za svaki podskup $\{a_i \,|\, i \in I\}$ od L_1 važi: $h(\bigwedge_{i\in I} a_i) = \bigwedge_{i\in I} h(a_i)$, kada obe strane ove jednakosti imaju smisla, i $h(\bigvee_{i\in I} a_i) = \bigvee_{i\in I} h(a_i)$, takođe, kad god obe strane ove jednakosti imaju smisla.*

Definicija 2.2 *Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža. Relacija ekvivalencije $\theta \subseteq L \times L$ je* **kongruencija reziduirane mreže** *$\mathcal{L}$ ako je* **saglasna** *(ili* **kompatibilna***) sa svim fundamentalnim binarnim operacijama iz $\mathcal{L}$, tj. ako za sve $a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$,*

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \theta \text{ povlači}$$
$$(a_1 \wedge a_2, b_1 \wedge b_2), (a_1 \vee a_2, b_1 \vee b_2), (a_1 \otimes a_2, b_1 \otimes b_2), (a_1 \rightarrow a_2, b_1 \rightarrow b_2) \in \theta.$$

Uslov kompatibilnosti označavamo sa (CP). Skup svih kongruencija reziduirane mreže $\mathcal{L}$ obeležavamo sa $Con\mathcal{L}$, a umesto $(x, y) \in \theta$ koristićemo i oznaku $x\,\theta\,y$.
Kongruenciju θ je **potpuna kongruencija** *ako za svaki indeksni skup I i sve podskupove $\{a_i \,|\, i \in I\}$, $\{b_i \,|\, i \in I\} \subseteq L_1$ važi:*

Iz $(a_i, b_i) \in \theta$, za sve $i \in I$, sledi $(\bigwedge_{i\in I} a_i, \bigwedge_{i\in I} b_i) \in \theta$ i $(\bigvee_{i\in I} a_i, \bigvee_{i\in I} b_i) \in \theta$, kad god ovi infimumi, odnosno supremumi imaju smisla.

Slede dve direktne posledice dva poznata tvrđenja iz teorije univerzalnih algebri, koje se odnose na **faktor algebre reziduirane mreže**.

Lema 2.1 *Za svaku kongruenciju θ reziduirane mreže $\mathcal{L}$, možemo definisati tzv. faktor algebru reziduirane mreže $\mathcal{L}$, u oznaci $\mathcal{L}/\theta$, čiji je nosač L/θ jednak skupu $\{[a]_\theta \,|\, a \in L\}$, gde je $\mathcal{L}/\theta = \langle L/\theta, \wedge^{\mathcal{L}/\theta}, \vee^{\mathcal{L}/\theta}, \otimes^{\mathcal{L}/\theta}, \rightarrow^{\mathcal{L}/\theta}, \mathbf{0}^{\mathcal{L}/\theta}, \mathbf{1}^{\mathcal{L}/\theta}\rangle$ takođe reziduirana mreža, u kojoj su operacije dobro definisane, na sledeći način:*

$$\begin{array}{rcl}
[a]_\theta \wedge^{\mathcal{L}/\theta} [b]_\theta & =_{def} & [a \wedge^{\mathcal{L}} b]_\theta; \\
[a]_\theta \vee^{\mathcal{L}/\theta} [b]_\theta & =_{def} & [a \vee^{\mathcal{L}} b]_\theta; \\
[a]_\theta \otimes^{\mathcal{L}/\theta} [b]_\theta & =_{def} & [a \otimes^{\mathcal{L}} b]_\theta; \\
[a]_\theta \rightarrow^{\mathcal{L}/\theta} [b]_\theta & =_{def} & [a \rightarrow^{\mathcal{L}} b]_\theta; \\
\mathbf{0}^{\mathcal{L}/\theta} & =_{def} & [\mathbf{0}^{\mathcal{L}}]_\theta; \\
\mathbf{1}^{\mathcal{L}/\theta} & =_{def} & [\mathbf{1}^{\mathcal{L}}]_\theta.
\end{array}$$

U nastavku ovog teksta izostavljaćemo superskripte $\mathcal{L}$ i $\mathcal{L}/\theta$, osim u Definiciji 2.5.

Lema 2.2 *Za svaku reziduiranu mrežu $\mathcal{L}$ i svaku kongruenciju $\theta \in Con\mathcal{L}$, algebra $\mathcal{L}/\theta$ zadovoljava svaki identitet koji važi u $\mathcal{L}$.*

Takođe bez dokaza, navodimo i sledeća dva tvrđenja koja se odnose na reziduirane mreže, analogna poznatim tvrđenjima iz teorije mreža.

Lema 2.3 *Ako je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža i $\theta \in Con\mathcal{L}$, onda $\mathcal{L}/\theta$ zadovoljava uslov:*

- *$[x]_\theta \leqslant [y]_\theta$ akko za svako $x_1 \in [x]_\theta$ postoji $y_1 \in [y]_\theta$ takvo da je $x_1 \leqslant y_1$.*

Lema 2.4 *U svakoj reziduiranoj mreži $\mathcal{L}$, za svaku kongruenciju $\theta \in Con\mathcal{L}$ važi:*

- *Iz $x\,\theta\,y_1$, $x\,\theta\,y_2$ i $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$ sledi $x\,\theta\,y$.*

Definicija 2.3 **Filter reziduirane mreže** *$\mathcal{L}$ je neprazni podskup $F \subseteq L$ takav da u $\mathcal{L}$ važe sledeći uslovi:*

- *$a \otimes b \in F$ kad god $a, b \in F$;*
- *Iz $a \in F$ i $a \leqslant b$ sledi $b \in F$.*

Filter F reziduirane mreže $\mathcal{L}$ je **potpun** *ako za svaki podskup $\{a_i \,|\, i \in I\} \subseteq L$, za koji $\bigwedge_{i\in I} a_i$ ima smisla u L, u $\mathcal{L}$ važi sledeći uslov:*

- *Iz $a_i \in F$, za sve $i \in I$, sledi $\bigwedge_{i\in I} a_i \in F$.*

U reziduiranim mrežama koje predstavljaju strukture istinitosnih vrednosti nekih neklasičnih logika, filtere možemo shvatiti kao skupove istinitosnih vrednosti koje su locirane u blizini **1**.

Sledeća teorema daje bijektivnu korespondenciju između filtera i kongruencija reziduirane mreže.

Teorema 2.1 *Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža. Tada, sledeća tri uslova su zadovoljena:*
(1) *Za svaku (potpunu) kongruenciju θ na $\mathcal{L}$, $F_\theta =_{def} [\mathbf{1}]_\theta$ je (potpun) filter.*
(2) *Za bilo koji filter F na $\mathcal{L}$, relacija θ_F, definisana sa:*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{\theta_F} \quad \textit{akko} \quad \boldsymbol{a} \leftrightarrow \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{F},$$

je kongruencija na $\mathcal{L}$. Pri tome, ako je $\mathcal{L}$ potpuna reziduirana mreža i F potpun filter, onda je θ_F potpuna kongruencija na $\mathcal{L}$.
(3) *Dalje, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta_{F_\theta}}$ i $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_{\theta_F}}$.*

DOKAZ. (1) Neka $\theta \in Con\mathcal{L}$, i neka $a, b \in L$. Ako $a, b \in [\mathbf{1}]_\theta$, onda je $a\,\theta\,\mathbf{1}$ i $b\,\theta\,\mathbf{1}$, odakle sledi $(a \otimes b)\,\theta\,\mathbf{1}$ (po (CP)). Dalje, pretpostavimo da $a \in [\mathbf{1}]_\theta$ i da je $a \leqslant b$. Tada je $a\,\theta\,\mathbf{1}$ i $a \wedge b = a$, a kako je $(a \wedge b)\,\theta\,(\mathbf{1} \wedge b)$ (po (CP)), dobijamo $a\,\theta\,b$, što sa $a\,\theta\,\mathbf{1}$ daje $b\,\theta\,\mathbf{1}$, te $b \in [\mathbf{1}]_\theta$. Dakle, $F_\theta = [\mathbf{1}]_\theta$ je filter na $\mathcal{L}$.

Neka je θ potpuna kongruencija. Neka je $\{a_i \,|\, i \in I\} \subseteq F$, gde $\bigwedge_{i \in I} a_i$ ima smisla u L. Tada važi $a_i\,\theta\,\mathbf{1}$, za sve $i \in I$, odakle, na osnovu potpunosti za θ, sledi $(\bigwedge_{i\in I} a_i)\,\theta\,\mathbf{1}$. Dakle, $\bigwedge_{i \in I} a_i \in F_\theta$, te je F_θ potpun filter.
(2) Neka je F filter na $\mathcal{L}$ i neka $a, b, c, a_1, a_2, b_1, b_2 \in L$. Kako $\mathbf{1} \in F$, a po (1.69)-(1.70), $a \leftrightarrow a = \mathbf{1}$ i $a \leftrightarrow b = b \leftrightarrow a$, imamo da je relacija θ_F refleksivna i simetrična. Neka je $a\,\theta_F\,b$ i $b\,\theta_F\,c$, tj. neka $a \leftrightarrow b, b \leftrightarrow c \in F$. Odavde, $(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \in F$, a kako je $(a \leftrightarrow b) \otimes (b \leftrightarrow c) \leqslant a \leftrightarrow c$ (po (1.71) Teoreme 1.10), to mora biti $a \leftrightarrow c \in F$, što znači da je $a\,\theta_F\,c$. Dakle, θ_F je relacija ekvivalencije. Pretpostavimo da je $a_1\,\theta_F\,b_1$ i $a_2\,\theta_F\,b_2$. Tada, $a_1 \leftrightarrow b_1, a_2 \leftrightarrow b_2 \in F$, te sledi da $(a_1 \leftrightarrow b_1) \otimes (a_2 \leftrightarrow b_2) \in F$. Odavde, koristeći (1.21) dobijamo da i $(a_1 \leftrightarrow b_1) \wedge (a_2 \leftrightarrow b_2) \in F$. Sada, da je θ_F saglasna sa operacijama $\wedge$, $\vee$, $\otimes$ i $\rightarrow$, odnosno, da je kongruencija na $\mathcal{L}$, možemo dobiti primenom tvrđenja (1.74)-(1.77) Teoreme 1.10.

Pretpostavimo da je $\mathcal{L}$ potpuna reziduirana mreža i da je F potpun filter. Neka $a_i, b_i \in L$, $i \in I$. Pretpostavimo da je $a_i\,\theta_F\,b_i$, za sve $i \in I$. Tada, $a_i \leftrightarrow b_i \in F$, za sve $i \in I$. Kako je F potpun filter, sledi da $\bigwedge_{i\in I}(a_i \leftrightarrow b_i) \in F$, odakle, na osnovu (1.78)-(1.79) Teoreme 1.10, dobijamo $(\bigwedge_{i\in I} a_i)\,\theta_F\,(\bigwedge_{i\in I} b_i)$ i $(\bigvee_{i\in I} a_i)\,\theta_F\,(\bigvee_{i\in I} b_i)$. Dakle, θ_F je potpuna kongruencija.
(3) $a \in F_{\theta_F}$ akko $a \in [\mathbf{1}]_{\theta_F}$ akko $a\,\theta_F\,\mathbf{1}$ akko $a \leftrightarrow \mathbf{1} \in F$ akko $(a \rightarrow \mathbf{1}) \wedge (\mathbf{1} \rightarrow a) \in F$ akko (po (1.17)-(1.18)) $\mathbf{1} \wedge a \in F$ akko $a \in F$, što dokazuje jednakost $F = F_{\theta_F}$.
Dalje, važi: $a\,\theta_{F_\theta}\,b$ akko $a \leftrightarrow b \in F_\theta$ akko $(a \leftrightarrow b)\,\theta\,\mathbf{1}$, te nam ostaje da dokažemo:

$$a\,\theta\,b \;\; akko \;\; (a \leftrightarrow b)\,\theta\,\mathbf{1}.$$

Neka je $a\,\theta\,b$. Kako je $b\,\theta\,b$, sledi $(a \leftrightarrow b)\,\theta\,(b \leftrightarrow b)$, te je $(a \leftrightarrow b)\,\theta\,\mathbf{1}$ (po (CP) i (1.17)). Obratno, neka je $(a \leftrightarrow b)\,\theta\,\mathbf{1}$. Iz $a \leftrightarrow b \leqslant a \rightarrow b \leqslant \mathbf{1}$, $(a \leftrightarrow b)\,\theta\,\mathbf{1}$ i $\mathbf{1}\,\theta\,\mathbf{1}$, direktnom primenom Leme 2.4, sledi $(a \rightarrow b)\,\theta\,\mathbf{1}$. Analogno, $(b \rightarrow a)\,\theta\,\mathbf{1}$. Sada, koristeći (CP) i (1.18) sledi $((a \rightarrow b) \rightarrow b)\,\theta\,b$ i $(b \otimes (b \rightarrow a))\,\theta\,b$. Kako je, iz (1.15), $b \otimes (b \rightarrow a) \leqslant a \leqslant (a \rightarrow b) \rightarrow b$, još jednom primenom Leme 2.4 dobijamo $a\,\theta\,b$. $\Box$

Zbog postojanja bijektivne korespondencije između filtera i kongruencija reziduirane mreze $\mathcal{L}$, faktor algebru $\mathcal{L}/\theta_F$ obeležavamo i sa $\mathcal{L}/F$.

2.2 Prosti filteri na reziduiranim mrežama

Definicija 2.4 *Filter F reziduirane mreže $\mathcal{L}$ je* ***prost*** *ako u $\mathcal{L}$ važi sledeći uslov:*

- *Za sve $a, b \in L$, iz $a \vee b \in F$ sledi da $a \in F$ ili $b \in F$.*

Lema 2.5 *Neka reziduirana mreža $\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti i neka je F filter na $\mathcal{L}$. Tada, F je prost akko za sve $a, b \in L$ važi $a \to b \in F$ ili $b \to a \in F$.*

DOKAZ. Neka važe uslovi leme i neka $a, b \in L$. Tada je $(a \to b) \vee (b \to a) = \mathbf{1}$.
„$\Rightarrow$": Neka je F prost filter. Kako $\mathbf{1} \in F$, to mora biti $a \to b \in F$ ili $b \to a \in F$.
„$\Leftarrow$": Neka $a \vee b \in F$, i neka $a \to b \in F$ ili $b \to a \in F$. Uzmimo da $a \to b \in F$. Iz (1.55) Teoreme 1.7 imamo $a \vee b \leqslant (a \to b) \to b$, te $(a \to b) \to b \in F$. Dalje dobijamo da $(a \to b) \otimes ((a \to b) \to b) \in F$, a kako je $(a \to b) \otimes ((a \to b) \to b) \leqslant b$ (po prvom delu iz (1.15)), sledi $b \in F$. Analogno je za $b \to a \in F$. $\square$

Lema 2.6 *U reziduiranoj mreži $\mathcal{L}$ koja zadovoljava aksiomu prelinearnosti, filter F je prost akko je faktor algebra $\mathcal{L}/F$ linearno uređena.*

DOKAZ. Neka $\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti i neka $a, b \in L$. Imamo da $a \to b \in F$ ili $b \to a \in F$ akko (po Teoremi 2.1) $(a \to b)\, \theta_F\, \mathbf{1}$ ili $(b \to a)\, \theta_F\, \mathbf{1}$ akko $[a]_{\theta_F} \to [b]_{\theta_F} = [\mathbf{1}]_{\theta_F}$ ili $[b]_{\theta_F} \to [a]_{\theta_F} = [\mathbf{1}]_{\theta_F}$ akko (po (1.16)) $[a]_{\theta_F} \leqslant [b]_{\theta_F}$ ili $[b]_{\theta_F} \leqslant [a]_{\theta_F}$. Odavde, na osnovu Leme 2.5, zaključujemo da je F prost filter akko je $\mathcal{L}/F$ lanac. $\square$

Lema 2.7 *Neka je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža. Tada, za svako $\mathbf{1} \neq a \in L$ postoji prost filter F takav da $a \notin F$.*

DOKAZ: Neka je $\mathbf{1} \neq a \in F$. Neka je $\mathcal{F}_a$ kolekcija svih filtera na $\mathcal{L}$ koji ne sadrže a. Ona je neprazna, jer joj pripada bar $\{\mathbf{1}\}$. Dalje, kolekcija $\mathcal{F}_a$ je uređena inkluzijom. Pokažimo da u $\mathcal{F}_a$ svaki lanac ima gornje ograničenje. Neka je $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}_a$ i neka je $H = \bigcup \mathcal{C}$. Ako $a, b \in H$, tada $a, b \in X$ za neki filter X iz $\mathcal{C}$, te kako $a \otimes b \in X$, sledi $a \otimes b \in H$, a ako je $a \leqslant b$ i $a \in H$, onda je iz istih razloga $b \in H$. Dakle, H je filter na $\mathcal{L}$. Po konstrukciji, $a \notin H$, pa je H gornje ograniženje skupa $\mathcal{C}$ koje pripada $\mathcal{F}_a$. Zornova lema implicira da u $\mathcal{F}_a$ postoji maksimalni element. Označimo ga sa G.

Dokazaćemo da je G prost filter, čime se dokaz ove leme završava.

Pretpostavimo suprotno, da postoje $b, b' \notin G$, a da $b \vee b' \in G$. Uzmimo skup $W = \{x \mid b^n \otimes c \leqslant x, c \in G, m \in \mathbf{N}\}$. Ako stavimo $n = 0$, vidimo da je $G \subseteq W$, a ako stavimo $c = 1$ i $n = 1$, vidimo da $b \in W$, dakle, G je pravi podskup od W. Ako $x, y \in G$, onda je $b^m \otimes c_1 \leqslant x$ i $b^n \otimes c_2 \leqslant y$, za neke elemente $c_1, c_2 \in G$ i za neke $m, n \in \mathbf{N}$. te je dalje, na osnovu osobina multiplikacije $\otimes$, $b^{m+n} \otimes (c_1 \otimes c_2) \leqslant x \otimes y$, pa kako $c_1 \otimes c_2 \in G$, sledi da $x \otimes y \in W$. Ako je $x \in G$, $y \in L$ i $x \leqslant y$, tada je $b^n \otimes c \leqslant x$, za neko $c \in G$ i neko $n \in \mathbf{N}$, te iz $b^n \otimes c \leqslant y$ sledi da $y \in G$. Dakle, W je filter i pravi nadskup od G. Kako je G maksimalni filter koji ne sadrži a, to mora biti $a \in W$. Stoga, postoje $m \in \mathbf{N}$ i $c \in G$ takvi da je $b^m \otimes c \leqslant a$. Analognim rezonom za $W' = \{x \mid (b')^n \otimes c \leqslant x, c \in G, n \in \mathbf{N}\}$, sledi da postoje $n \in \mathbf{N}$ i $d \in G$ takvi da je $(b')^n \otimes d \leqslant a$.

Sada dokazujemo da je $(b \vee b')^{m+n} \otimes c \otimes d \leqslant a$, odakle, kako $(b \vee b')^{m+n} \otimes c \otimes d \in G$, dobijamo kontradikciju $a \in G$.

Prvo, matematičkom indukcijom dokazujemo da je $(x \vee y)^s = \bigvee_{i+j=s}(x^i \otimes y^j)$, za sve $x, y \in L$ i sve $0 < s \in \mathbf{N}$, gde $i, j \in \mathbf{N}$. Zaista, $(x \vee y)^1 = (x^1 \otimes y^0) \vee (x^0 \otimes y^1) = (x \otimes 1) \vee (1 \otimes y) = x \vee y$. Koristeći (1.39) imamo $(x \vee y)^2 = (x \vee y) \otimes (x \vee y) = (x \otimes (x \vee y)) \vee (y \otimes (x \vee y)) = x^2 \vee (x \otimes y) \vee (y \otimes x) \vee y^2 = x^2 \vee (x \otimes y) \vee y^2 = (x^2 \otimes y^0) \vee (x^1 \otimes y^1) \vee (x^0 \otimes y^2)$. Pretpostavimo da je $(x \vee y)^s = \bigvee_{i+j=s}(x^i \otimes y^j)$. Koristeći tvrđenje (1.33) Teoreme 1.5 sledi $(x \vee y)^{s+1} = (\bigvee_{i+j=s}(x^i \otimes y^j)) \otimes (x \vee y) = (\bigvee_{i+j=s}(x^{i+1} \otimes y^j)) \vee (\bigvee_{i+j=s}(x^i \otimes y^{j+1}) \leqslant \bigvee_{i+j=s+1}(x^i \otimes y^j)$. Obratno, svaki disjunkt $x^i \otimes y^j$, gde je $i + j = s + 1$, pojavljuje se i na levoj strani ove dobijene nejednakosti. Zaista, $x^{s+1} \otimes y^0$ imamo iz množenja $x^s \otimes y^0$ sa x, a $x^i \otimes y^j$, za $j \geqslant 1$, imamo iz množenja $x^i \otimes y^{j-1}$ sa y. Dakle, važi jednakost $(x \vee y)^{s+1} = \bigvee_{i+j=s+1}(x^i \otimes y^j)$.

Na kraju, $(b \vee b')^{m+n} \otimes c \otimes d = (\bigvee_{i+j=m+n}(b^i \otimes (b')^j) \otimes (c \otimes d) =$ (koristeći (1.33)) $\bigvee_{i+j=m+n}(b^i \otimes (b')^j \otimes c \otimes d)$, a u ovoj disjunkciji, svaki disjunkt je $\leqslant$ od a, jer, ako je $i \geqslant m$, tada je $b^i \otimes (b')^j \otimes c \otimes d \leqslant$ (po (1.20)) $b^m \otimes c \leqslant a$, a ako je $i < m$, tada je $j \geqslant n$, što povlači $b^i \otimes (b')^j \otimes c \otimes d \leqslant$ (isto, po (1.20)) $(b')^n \otimes d \leqslant a$. $\square$

2.3 Teorema poddirektne reprezentacije

Definicija 2.5 *Neka je $\langle \mathcal{L}_i : i \in I \rangle$ familija reziduiranih mreža.*
Direktan proizvod familije reziduiranih mreža *$\langle \mathcal{L}_i : i \in I \rangle$ je algebra*

$$\mathcal{L} = \prod_{i \in I} \mathcal{L}_i = \langle \prod_{i \in I} L_i, \wedge^{\mathcal{L}}, \vee^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}, \rightarrow^{\mathcal{L}}, \mathbf{0}^{\mathcal{L}}, \mathbf{1}^{\mathcal{L}} \rangle,$$

u kojoj su operacije definisane po komponentama:

$$\begin{array}{rcl} a \wedge^{\mathcal{L}} b & =_{def} & \langle a(j) \wedge^{\mathcal{L}_j} b(j) : j \in I \rangle; \\ a \vee^{\mathcal{L}} b & =_{def} & \langle a(j) \vee^{\mathcal{L}_j} b(j) : j \in I \rangle; \\ a \otimes^{\mathcal{L}} b & =_{def} & \langle a(j) \otimes^{\mathcal{L}_j} b(j) : j \in I \rangle; \\ a \rightarrow^{\mathcal{L}} b & =_{def} & \langle a(j) \rightarrow^{\mathcal{L}_j} b(j) : j \in I \rangle; \\ \mathbf{0}^{\mathcal{L}} & =_{def} & \langle \mathbf{0}^{\mathcal{L}_j} : j \in I \rangle; \\ \mathbf{1}^{\mathcal{L}} & =_{def} & \langle \mathbf{1}^{\mathcal{L}_j} : j \in I \rangle. \end{array}$$

Za sve $j \in I$, preslikavanje $\pi_j : \prod_{i \in I} L_i \longrightarrow L_j$, gde je $\pi_j(a) =_{def} a(j)$, je tzv. **projekcija**. *Reziduirana mreža $\mathcal{L}$ je* **poddirektan proizvod familije reziduiranih mreža** *$\langle \mathcal{L}_i : i \in I \rangle$ ako je $\mathcal{L}$ podalgebra od $\prod_{i \in I} \mathcal{L}_i$ i $\pi_j(L) = L_j$, za sve $j \in I$.*

Prema Teoremi 1.3, klasa reziduiranih mreža je varijetet algebri, odakle, na osnovu poznatog tvrđenja iz univerzalnih algebri, imamo da su podalgebre i homomorfne slike reziduiranih mreža, kao i direktni proizvodi familija reziduiranih mreža, takođe reziduirane mreže.

Teorema 2.2 *Reziduirana mreža $\mathcal{L}$ je izomorfna poddirektnom proizvodu linearno uređenih reziduiranih mreža akko zadovoljava aksiomu prelinearnosti.*
Šta više, ove linearno uređene reziduirane mreže mogu biti izabrane tako da zadovoljavaju sve identitete koji su zadovoljeni u $\mathcal{L}$.

DOKAZ. „$\Rightarrow$": Prema Teoremi 1.18, svaka linearno uređena reziduirana mreža zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Na osnovu ovog tvrđenja sledi da direktan proizvod familije linearno uređenih reziduiranih mreža zadovoljava aksiomu prelinearnosti, što se odnosi i na poddirektan proizvod.
„$\Leftarrow$": Pretpostavimo da $\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Obeležimo sa $P(\mathcal{L})$ familiju svih prostih filtera na $\mathcal{L}$. Prema Lemi 2.6, faktor algebra $\mathcal{L}/F$ je linearno uređena reziduirana mreža, za svaki filter $F \in P(\mathcal{L})$. Neka je preslikavanje $h : L \longrightarrow \prod_{F\in P(\mathcal{L})} L/F$ definisano sa $h(x) = \langle [x]_{\theta_F} : F \in P(\mathcal{L})\rangle$. Lako se pokazuje da je h homomorfizam iz $\mathcal{L}$ u $\prod_{F\in P(\mathcal{L})} \mathcal{L}/F$. Dokažimo da je h injektivno. Ako je $a \neq b$, $a, b \in L$, onda je $a \leftrightarrow b \neq \mathbf{1}$, po tvrđenju (1.73) Teoreme 1.10, odakle, na osnovu Leme 2.7, dobijamo da postoji $F \in P(\mathcal{L})$ tako da $a \leftrightarrow b \notin F$, što je, po Teoremi 2.1, ekvivalentno sa $(a, b) \notin \theta_F$, odakle je, dalje, $[a]_{\theta_F} \neq [b]_{\theta_F}$. Dakle, $h(a) \neq h(b)$.

Tako smo dokazali da se $\mathcal{L}$ može potopiti u direktan proizvod linearno uređenih reziduiranih mreža. Kako je $\pi_F(h(L)) = \{[a]_{\theta_F} \mid a \in L\} = L/F$, za sve $F \in P(\mathcal{L})$, sledi da je algebra $h(\mathcal{L})$ poddirektan proizvod od $\prod_{F\in P(\mathcal{L})} \mathcal{L}/F$.

Na kraju, prema Lemi 2.2, faktori ovog direktnog proizvoda zadovoljavaju sve identitete koji važe u $\mathcal{L}$, što dokazuje i drugo tvrđenje ove teoreme. $\square$

NAPOMENA 2.1 Na reziduiranim mrežama, operaciju bireziduuma definisali smo sa $a \leftrightarrow b =_{def} (a \to b) \wedge (b \to a)$, dok je operacija **alternativnog bireziduuma** $\sim$ definisana sa $a \sim b =_{def} (a \to b) \otimes (b \to a)$. U reziduiranoj mreži koja zadovoljava aksiomu prelinearnosti, $\leftrightarrow$ (bireziduum) i $\sim$ (alternativni bireziduum) se poklapaju. Prvo, poklapaju se u svakoj linearnoj reziduiranoj mreži. Zaista, neka je $\mathcal{L}'$ linearna rezidualna mreža i neka $a, b \in L'$. Uzmimo da je $a \leqslant b$. Tada je, po (1.16), $a \to b = 1$, te imamo $a \leftrightarrow b = \mathbf{1} \wedge (b \to a) = b \to a$, i $a \sim b = \mathbf{1} \otimes (b \to a) = b \to a$. Analogno je za $b \leqslant a$. Sada, neka je $\mathcal{L}$ rezidualna mreža koja zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Prema Teoremi 2.2, postoji familija $\langle \mathcal{L}_i : i \in I\rangle$ linearno uređenih reziduiranih mreža takvih da je $\mathcal{L}$ izomorfna nekoj podalgebri od $\prod_{i\in I} \mathcal{L}_i$. Kako je identitet $x \leftrightarrow y = x \sim y$ zadovoljen u $\mathcal{L}_i$, za sve $i \in I$, zadovoljen je i u $\prod_{i\in I} \mathcal{L}_i$, što dalje povlači da ovaj identitet važi i u $\mathcal{L}$. $\square$

Glava 3

Reziduirane mreže i t-norme

U ovom delu dokazujemo bijektivnu korespondenciju između reziduiranih mreža (resp. BL-algebri) na $[0,1]$ i sleva neprekidnih (resp. neprekidnih) t-normi.

3.1 Reziduirane mreže na [0,1]

Definicija 3.1 **t-norma** $*$ *je binarna operacija na* $[0,1]$, *tj.* $* : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, *koja zadovoljava sledeće uslove:*

(1) $*$ *je komutativna i asocijativna;*

(2) $*$ *je neopadajuća po oba argumenta, tj. za sve* $x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ *važi:*

$$\begin{aligned} x_1 \leqslant x_2 \quad &\textit{povlači} \quad x_1 * y \leqslant x_2 * y, \\ y_1 \leqslant y_2 \quad &\textit{povlači} \quad x * y_1 \leqslant x * y_2; \end{aligned}$$

(3) $1 * x = x$ *i* $0 * x = 0$,[1] *za svako* $x \in [0,1]$.

t-norma $*$ *je* **neprekidna t-norma** *ako* $*$ *neprekidno preslikava* $[0,1]^2$ *u* $[0,1]$ *(u smislu neprekidnosti funkcije dve promenljive).*

Primeri neprekidnih t-normi:

1. **Lukasijevičeva t-norma**: $x *_L y = \max(x + y - 1, 0)$;

2. **Gedelova t-norma**: $x *_G y = \min(x, y)$;

3. **Produkt t-norma**: $x *_\Pi y = x \cdot y$ (gde je $\cdot$ proizvod realnih brojeva).

U nastavku, prvo navodimo dva poznata tvrđenja iz matematičke analize.

Lema 3.1 *Neka je* $f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ *funkcija takva da su za svako* $a \in [0,1]$, *funkcije* $g_a, h_a : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *definisane sa* $g_a(x) = f(x,a)$ *i* $h_a(x) = f(a,x)$, *neprekidne. Tada je i* f *neprekidna.*

[1] Ovaj uslov je višak jer se može dobiti iz $0 * x \leqslant 0 * 1 = 0$

Lema 3.2 *Neka je $f : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ binarna operacija na $[0,1]$. Ako je f neopadajuća po x, onda je f sleva (resp. zdesna) neprekidna po x akko za bilo koji podskup $\{a_j \mid j \in J\} \subseteq [0,1]$ i bilo koje $b \in [0,1]$ važi (3.1) (resp. (3.2)), gde je*

$$f(\sup\{a_j \mid j \in J\}, b) = \sup\{f(a_j, b) | \, j \in J\}, \tag{3.1}$$
$$f(\inf\{a_j \mid j \in J\}, b) = \inf\{f(a_j, b) | \, j \in J\}. \tag{3.2}$$

Dalje, f je neprekidna po x akko su oba uslova (3.1) i (3.2) ispunjena. Ako ,,po x" zamenimo sa "po y", dobijamo analogno tvrđenje. Takođe, dualno tvrđenje važi, za nerastuću funkciju f.

Teorema 3.1 (I) *Neka je $*$ sleva neprekidna t-norma i neka je binarna operacija $\to_*$ na $[0,1]$ definisana na sledeći način:*

$$\boldsymbol{a \to_* b =_{def} \sup\{c \mid a * c \leqslant b\}.} \tag{3.3}$$

Tada, algebra $\mathcal{L} = \langle [0,1], \min, \max, *, \to_*, 0, 1\rangle$ je potpuna reziduirana mreža.
(II) *Obratno, ako je $\mathcal{L} = \langle [0,1], \min, \max, \otimes, \to, 0, 1\rangle$ reziduirana mreža, onda je $\otimes$ sleva neprekidna t-norma.*

DOKAZ: Algebra $\langle [0,1], \min, \max, 0, 1\rangle$ je potpuna mreža, a za t-normu $*$ imamo da je algebra $\langle [0,1], *, 1\rangle$ komutativni monoid, gde je $*$ izotona operacija. Tako, dokaz ove teoreme je direktna posledica Leme 3.2 i Teoreme 1.8. $\square$

Uzimajući u obzir i komentar posle dokaza Teoreme 1.8, odnosno, da ne postoje dve različite reziduirane mreže na segmentu $[0,1]$ koje imaju istu multiplikaciju, zaključujemo da postoji bijektivna korespondencija između sleva neprekidnih t-normi i reziduiranih mreža na $[0,1]$. Za sleva neprekidnu t-normu $*$, reziduiranu mrežu $\langle [0,1], \min, \max, *, \to, 0, 1\rangle$ obeležavamo sa $\mathcal{L}(*)$ (ili, sa $[0,1]_*$), a operaciju definisanu u (3.3) nazivamo **reziduum po t-normi** $*$.

Uočimo još da, prema Teoremi 1.2 (ili, prema Teoremi 1.8), tvrđenje Teoreme 3.1 važi i kada umesto ,,sup" stavimo ,,max".

3.2 Neprekidne t-norme i BL-algebre

Pre nego što izložimo o vezi neprekidnih t-normi i BL-algebri na $[0,1]$, navedimo još dva poznata tvrđenja iz matematičke analize, koja koristimo u dokazu Leme 3.4.

Lema 3.3 *Neka je f realna funkcija realne promenljive.*

1. *Neka je f neprekidna na $[a,b]$, i neka je $f(a) = A$, $f(b) = B$. Tada, za svako $C \in [A,B]$ postoji $c \in [a,b]$, tako da je $f(c) = C$.*

2. *Neka je f monotona na $[a,b]$. Tada, f je neprekidna na $[a,b]$ akko je slika segmenta $[a,b]$ interval sa krajnjim tačkama $f(a)$ i $f(b)$.*

Lema 3.4 *Za t-normu $*$, sledeći uslov je zadovoljen:*
$*$ je neprekidna akko je $\mathcal{L} = \langle [0,1], \min, \max, *, \rightarrow, 0, 1\rangle$ deljiva reziduirana mreža.

DOKAZ. Najpre, prema Teoremi 1.13, $\mathcal{L}(*)$ je deljiva reziduirana mreža akko za sve $a, b \in [0,1]$, gde je $a \leqslant b$, postoji $c \in [0,1]$ tako da je $a = b * c$. Dalje, za svako $b \in [0,1]$, definišimo funkciju $f_b : [0,1] \longrightarrow [0,b]$ sa $f_b(x) = b * x$.
,,$\Rightarrow$": Pretpostavimo da je $*$ neprekidna t-norma. Neka $a, b \in [0,1]$, i neka je $a \leqslant b$. Imamo da je f_b neprekidna, odakle, na osnovu prvog tvrđenja Leme 3.3, postoji $c \in [0,1]$ tako da je $a = f_b(c)$, tj. $a = b * c$. Sada, prema napred navedenom tvrđenju Teoreme 1.13, sledi da je $\mathcal{L}$ deljiva reziduirana mreža.
,,$\Leftarrow$": Neka je $\mathcal{L} = \langle [0,1], \min, \max, *, \rightarrow, 0, 1\rangle$ deljiva reziduirana mreža. Tada, takođe po napred navedenom tvrđenju Teoreme 1.13, za svako $a \in [0,b]$, postoji neko $c \in [0,1]$ tako da je $a = b * c$. Dakle, za svako a, gde je $0 = f_b(0) \leqslant a \leqslant f_b(1) = b$, postoji $c \in [0,1]$ tako da je $f_b(c) = a$. Kako je f_b neopadajuća i preslikava $[0,1]$ na $[f_b(0), f_b(1)]$, prema drugom tvrđenju Leme 3.3, f_b je neprekidna. Sada, neprekidnost funkcije $f : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$, definisane sa $f(x,y) = x * y$, sledi na osnovu Leme 3.1. □

Teorema 3.2 *Za t-normu $*$, sledeći uslov je zadovoljen:*
Algebra $\mathcal{L} = \langle [0,1], \min, \max, *, \rightarrow, 0, 1\rangle$ je BL-algebra akko je t-norma $*$ neprekidna.

DOKAZ. ,,$\Rightarrow$": Kako je BL-algebra deljiva reziduirana mreža, tvrđenje je direktna posledica Leme 3.4.
,,$\Leftarrow$": Neka je t-norma $*$ neprekidna. Prema Lemi 3.4, $\mathcal{L}$ je deljiva reziduirana mreža, a kako je $\mathcal{L}$ i linearna reziduirana mreža, prema prvom tvrđenju Teoreme 1.18, $\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Dakle, $\mathcal{L}$ je BL-algebra. □

U nastavku ove sekcije, eksplicitno navodimo fundamentalne operacije algebri $\mathcal{L}(*_L)$, $\mathcal{L}(*_G)$ i $\mathcal{L}(*_\Pi)$, kao i neke uvedene operacije.

Neka $x, y \in [0,1]$.

U algebri

$$\boldsymbol{\mathcal{L}(*_L) = [0,1]_L = \langle [0,1], \min, \max, *_L, \rightarrow_L, 0, 1\rangle}$$

važi:

$$\begin{aligned}
x \wedge y &=_{def} \min(x,y),\\
x \vee y &=_{def} \max(x,y),\\
x *_L y &=_{def} \max(0, x+y-1),\\
x \rightarrow_L y &=_{def} \min(1, 1-x+y),\\
\neg_L x &=_{def} 1-x,\\
x \leftrightarrow_L y &=_{def} 1-|x-y| = \min(1, 1-x+y, 1-y+x),\\
x \oplus y &=_{def} \min(1, x+y).
\end{aligned}$$

U algebri

$$\mathcal{L}(*_G) = [0,1]_G = \langle [0,1], \min, \max, *_G, \rightarrow_G, 0, 1\rangle$$

važi:

$$\begin{array}{rcl}
x \wedge y & =_{def} & \min(x,y), \\
x \vee y & =_{def} & \max(x,y), \\
x *_G y & =_{def} & \min(x,y), \\
x \rightarrow_G y & =_{def} & \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leqslant y \\ y, & x > y \end{array} \right., \\
\neg_G x & =_{def} & \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{array} \right., \\
x \leftrightarrow_G y & =_{def} & \left\{ \begin{array}{rl} 1, & x = y \\ \min(x,y), & x \neq y \end{array} \right., \\
x \bigtriangledown_G y & =_{def} & \max(x,y).
\end{array}$$

U algebri

$$\mathcal{L}(*_\Pi) = [0,1]_\Pi = \langle [0,1], \min, \max, *_\Pi, \rightarrow_\Pi, 0, 1\rangle$$

važi:

$$\begin{array}{lcl}
x \wedge y & =_{def} & \min(x,y), \\
x \vee y & =_{def} & \max(x,y), \\
x *_\Pi y & =_{def} & x \cdot y, \\
x \rightarrow_\Pi y & = & \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \leqslant y \\ \frac{y}{x}, & x > y \end{array} \right., \\
\neg_\Pi x & =_{def} & \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{array} \right., \\
x \leftrightarrow_\Pi & =_{def} & \left\{ \begin{array}{rl} 1, & \max(x,y) = 0 \\ \frac{\min(x,y)}{\max(x,y)}, & \max(x,y) \neq 0 \end{array} \right., \\
x \bigtriangledown_\Pi y & =_{def} & (x+y) - (x \cdot y).
\end{array}$$

Rutinski se proverava da je BL-algebra $[0,1]_L$ (resp. $[0,1]_G$, $[0,1]_\Pi$) MV-algebra (resp. G-algebra, Π-algebra).

Algebra $[0,1]_L$ (resp. $[0,1]_G$, $[0,1]_\Pi$) naziva se **standardna MV-algebra** (resp. **G-algebra**, **Π-algebra**) i predstavlja semantičku osnovu **Lukasijevičeve** (resp. **Gedelove**, **produkt**) **(fuzzy) iskazne logike**.[2]

[2] U [2], ove logike se redom obeležavaju sa Fuzzy_L, Fuzzy_G i Fuzzy_Π.

Literatura

[1] Bělohlávek, R., *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*, Kluwer Academic/Plenum Publishers, 2002.

[2] Bergman, M.,*Many-Valued and Fuzzy Logic*, Cambridge University Press, 2008.

[3] Bolc, L., Borowik, P., *Many-Valued Logics, 1 Theoretical Foundations*, Springer-Verlang, 1992. (str. 154-171)

[4] Hájek, P., *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Kluwer Academic Publishers, 1998. (str. 71-73)

[5] Madarász, S., R., *Od skupova do univerzalnih algebri*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2004.

[6] Šešelja, B., *Teorija mreža*, Prirodno-matematički fakultet, Departman za matematiku i informatiku u Novom Sadu, 2006.