UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I INFORMATIKU

Mirčov Milena

RAZVIJANJE SPOSOBNOSTI LOGIČKOG REZONOVANJA KROZ REŠAVANJE MATEMATIČKIH ZADATAKA

DIPLOMSKI RAD

Novi Sad, 2012.

PREDGOVOR

Svesni smo svi da iz nekih razloga školstvo nije u dobroj poziciji kako je to nekada bilo. Veliki broj učenika se školuje, istina, ali je procenat onih koji po završetku školovanja mogu da se pohvale stečenim znanjem veoma mali. Zbog čega se epidemija neznanja i nezainteresovanosti za nauku širi i zašto je ne možemo zaobići?

Suočeni smo i sa problemom velike nezaposlenosti, naročito mladih. Ona za sobom povlači niz loših istina- đaci i studenti se nadaju boljem životu, ali ne nalaze da im obrazovanje može obezbediti bolji život o kom sanjaju. Dok ih stvarnost lomi i uništava njihov stvaralački duh, znanje ne postoji više kao sigurnost za bolje sutra, ono postaje nepotrebno; ono čak postaje prepreka za uživanje u mladosti. Ne možemo da utičemo na politiku zapošljavanja ali možemo da približimo nauku i da navedemo buduće generacije da shvate koliko je znanje neophodno, lepo i korisno.

Tema ovog diplomskog rada u tesnoj je vezi sa izučavanjem matematike u školama. Ne bežeći od istine i svesna svoje buduće profesije i velikog zadatka koji je predamnom, skrenula sam pažnju na izvesne nedostatke koji prate naš obrazovni sistem, izložila sam bitne činjenice vezane za rezultate PISA testa i između ostalog želela sam da ukažem na moguće izmene u nastavi matematike koje bi probudile interesovanje đaka i koje bi omogućile logičko razumevanje matematičkih sadržaja.

Matematika nije suvoparna, nije dosadna, niti postoji kao školski predmet da bi zastrašivala đake, ona je tu, svuda oko nas, i onaj ko kroči u tajanstveni svet matematike shvatiće mnoge istine ovog sveta. Ovim radom želim takođe da opomenem sve zastrašene i da im odagnam strah kroz zanimljive matematičke probleme.

Kroz devet poglavlja razrađene su mnoge teme.

U prvom, uvodnom poglavlju izneti su rezultati PISA testa Srbije i ostalih zemalja koji učestvuju na testiranju, što je bio prvi korak u suočavanju sa lošim matematičkim znanjima naših školaraca.

U drugom poglavlju objašnjen je pojam matematičkog mišljenja i njegove karakteristike, a takođe i osobine mišljenja koje bi trebao da razvija učenik radeći matematičke zadatke.

U trećem poglavlju "Ličnost nastavnika" iznete su osobine koje bi trebao da poseduje svaki dobar nastavnik matematike; delom se mogu shvatiti i kao instrukcije za dostizanje titule predanog, uvek spremnog za saradnju i nastavnika koga poštuju odlični, ali i slabiji đaci.

U četvrtom je izneto kratko poređenje nekadašnjih đaka i novijih generacija.

Nadalje, peto i šesto poglavlje se nadovezuju kao načini da se časovi matematike učine zanimljivim kroz istorijske matematičke probleme i priče.

U sedmom poglavlju su kroz teoreme iz geometrije opisani različiti načini dokazivanja istih, koji nas upućuju na fleksibilnost mišljenja i koji pokazuju da u matematici ne treba da postoji učenje napamet, već da slobodna misao kroz različite zaključke može dovesti do razonode.

Osmo poglavlje opominje na memorisanje koje je ipak prisutno i pomenuti su načini na koje se može izbeći.

U devetom poglavlju su iznete misli velikih ljudi o matematici koji đake mogu uputiti na korist koju mogu imati izučavajući matematiku.

Nadam se da će među ovim stranicama mnogi naći odgovore na pitanja koja su ih mučila, a da će nastavnici matematike dobiti kreativne ideje kako da svoje časove učine zanimljivim i idu u korak sa novijim generacijama.

Ovom prilikom, takođe, želim da se zahvalim mami koja mi je omogućila studiranje, a veliko hvala i svim profesorima fakulteta uz pomoć kojih sam stekla znanja koja su značajno uticala na formiranje moje ličnosti i koja će mi biti bitan oslonac u daljem životu.

Novi Sad, Septembar 2012.

Mirčov Milena

SADRŽAJ

Predgovor…………………………………………………………………………………………………..2

Sadržaj………………………………………………………………………………………………...4

1. Matematički testovi i poražavajuće istine…………………………………..5

2. Šta je matematičko mišljenje? …………………………………………………10

2.1. Originalnost…………………………………………………………… 17

2.2. Fleksibilnost……………………………………………………………19

2.3. Fluentnost………………………………………………………………21

2.4. Redefinicija…………………………………………………………… 22

2.5. Elaboracija………………………………………………………………23

3. Ličnost nastavnika…………………………………………………………………..24

4.Nekad i sad…………………………………………………………………………… 26

5. Priče o beskonačnosti………………………………………………………………26

Zenonovi paradoksi:

5.1. Dihotomija... 27

5.2. Ahil i kornjača…………………………………………………………..27

6. Zablude o matematičarima i još neki istorijski problemi………….. 29

6.1. Prosti brojevi i Eratostenovo sito……………………………..30

7. Dokazivanje teorema na više načina…………………………………………..32

8. Matematika u školama = memorisanje, ima leka!…………………….. 34

9 .Recite nam sada- Zašto matematika?.. 36

Literatura..37

Biografija..38

1. MATEMATIČKI TESTOVI I PORAŽAVAJUĆE ISTINE

Matematički problem u svojoj kompletnosti može se tumačiti kao skup određenih podataka koji su postavljeni u određen odnos. Sa takvog uopštenog razmatranja matematičkog zadatka u kome iz poznatih podataka treba otkriti nepoznati, matematički problem delom predstavlja izazov. Zašto je takav izazov retko omiljen đacima i češće nepravedno odbačen i zapostavljen? Iskustva profesora matematike u radu sa đacima nam govore sledeće- matematički sadržaji đacima su obično nedopadljivi i suviše teški, zainteresovanost za rešavanje matematičkih problema je vrlo skromna i nečujna, učenici grabe ocene, a interesovanje za znanje gotovo da ne postoji.

O skromnosti matematičkih znanja u Srbiji svedoče i međunarodni testovi PISA i TIMSS.

Šta je PISA?

Međunarodni program učeničkih postignuća PISA (Program for International Student Assessment) je test kojim se utvrđuje da li su učenici dostigli odgovarajuće nivoe znanja, sa tim da se postignuća procenjuju u oblasti čitalačke, matematičke i prirodno naučne pismenosti i vrši se na reprezentativnom uzorku učenika uzrasta između 15 godina i 3 meseca i 16 godina i 2 meseca. Pitanja su osmišljena tako da se procenjuje sposobnost učenika da upotrebe znanja koja su stekli, dakle, ne forsira se reprodukcija usvojenih sadržaja. PISA 2009 obuhvatala je 74 zemlje, a Srbija učestvuje od 2001. godine. Podaci se saopštavaju na standardizovanoj skali u intervalu od 358 do 668 bodova. Skala je podeljena i na nivoe postignuća koji opisuju kojim nivoom i tipom znanja su učenici ovladali. Smatra se da su funkcionalno pismeni oni učenici čija su postignuća na drugom i višim nivoima. Na skali matematičke pismenosti učenici iz Srbije 2009. godine osvojili su 442 poena. U poređenju sa zemljama iz regiona i rezultatima koje su one ostvarile na istom testiranju, primećuje se da je matematička pismenost učenika iz Srbije viša u odnosu na učenike iz Bugarske (428 poena), Rumunije (427), Crne Gore (403), Albanije (377), dok je niža u odnosu na učenike iz Slovenije (501) i Hrvatske (460).Prva tri mesta pripadaju Kini (Šangaj) sa 600 poena, potom sledi Singapur sa 562 i Hong- Kong sa 555 poena. Japan je na primer zauzeo 9. mesto sa 529 poena.

Tabela rezultata PISA testa u Srbiji od njenog prvog učestvovanja pokazuje da su učenici iz Srbije ostvarili prosečan rezultat od 437 poena na skali matematičke pismenosti 2003. godine i zadržali isto prosečno postignuće i u narednom testiranju 2006 godine. Statistički značajno bolje postignuće Srbija je ostvarila na testiranju 2009 (tabela).

Tabela postignuća Srbije od 2000. do 2009.

	2000	2003	2006	2009
SRBIJA	————	437	435	442

Međutim, slabi rezultati učenika iz Srbije delom su povezana i sa odnosom broja pitanja iz određenih oblasti i njihove procentualne prisutnosti u nastavnim sadržajima, koji je predstavljen sledećom tabelom:

OBLAST	PISA	SRBIJA
BROJEVI I MERE	37,6 %	65,9 %
GEOMETRIJA	21,2 %	23,5 %
ALGEBRA	3,5 %	3,5 %
FUNKCIJE	10,6 %	2,7 %
STATISTIKA	21,2 %	0 %
VEROVATNOĆA	5,9 %	0 %

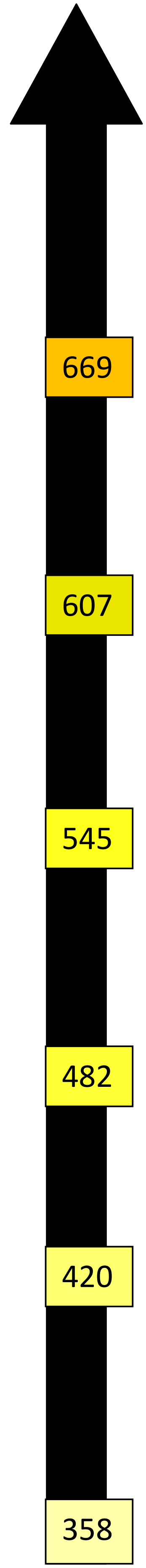
Ukoliko pogledamo skalu na narednoj strani i tabelu postignuća Srbije na PISA testiranju, možemo primetiti da postignuća pripadaju drugom nivou na razvojnoj skali, što znači da su, tokom devetogodišnjeg školovanja, učenici u proseku osposobljeni za primenu jednostavnih procedura i algoritama, za pronalaženje određene informacije korišćenjem jednog izvora, za pronalaženje rešenja u jednostavnoj situaciji u kojoj su sve relevantne informacije date.

Zahtevi koje učenici rešavaju na ovom nivou traže od njih reproduktivne aktivnosti. Možemo reći da je naš obrazovni sistem prevashodno orjentisan na razvijanje i podržavanje znanja koja se nalaze na nivou reprodukcije, s' tim da nešto manje od petine učenika ne uspeva da reši ni zadatke sa prvog nivoa i da nešto manje od jedne trećine učenika može da rešava i kompleksnije zadatke.

U odnosu na prosek svih zemalja učesnica (489 poena), postignuće učenika iz Srbije niže je za 47 poena (posmatrajući rezultate iz 2009. godine) . Raspon rezultata koji pripadaju jednom nivou postignuća je 62 poena. To znači da je prosečno postignuće učenika iz Srbije ne samo statistički niže od međunarodnog proseka, već obuhvata skor koji predstavlja niži nivo znanja. Takođe, ako se zna da jedna školska godina u proseku doprinosi sa oko 40 poena na skali matematičke pismenosti, to bi značilo da su naši učenici praktično više od jedne školske godine u zaostatku za svojim vršnjacima iz drugih zemalja, što otvoreno govori o neefikasnosti nastave matematike u našim školama.

Analize PISA testova mogu nam ukazati na nedostatke našeg sistema obrazovanja, ali nam mogu predočiti reforme koje bi te rezultate poboljšale ukoliko se ugledamo na obrazovne sisteme nekih zemalja sa vrha liste.

KARAKTERISTIKE ZAHTEVA	
Nivo6. Učenici mogu da uopštavaju i koriste podatke zasnovane na sopstvenom ispitivanju složenih problemskih situacija. Sposobni su za napredno matematičko mišljenje i rezonovanje. Mogu da formulišu i sa visokom preciznošću diskutuju o postupcima koje su primenili, da kritički razmatraju nalaze, argumente, uključujući i razmatranje njihove podobnosti za rešavanje kompleksnih problemskih situacija.	**SRBIJA** **0,6 %**
Nivo5. Učenici mogu da razviju i primene modele za rad u složenim situacijama formulišući pretpostavke. Umeju da odaberu, uporede i vrednuju različite strategije rešavanja problema. Mogu da razviju strategije rada, koristeći razvijene sposobnosti rezonovanja. Razmatraju sopstvene postupke, formulišu i obrazlažu interpretacije do kojih su došli.	**SRBIJA** **3,5 %**
Nivo4. Na ovom nivou učenici uspešno formulišu pretpostavke. Mogu da vrše izbor i povezuju podatke date na različite načine. Imaju dobro razvijene veštine, fleksibilni su u promišljanju i to uspešno koriste. Mogu da izgrade sopstveno objašnjenje, da ga formulišu i obrazlože koristeći sopstvene interpretacije, argumente i aktivnosti.	**SRBIJA** **13,0%**
Nivo3. Na ovom nivou učenici mogu da primene jasno opisane procedure, uključujući i one koje podrazumevaju nekoliko koraka u procesu donošenja odluka. Mogu da izaberu i primene jednostavne strategije u rešavanju problema. Mogu da interpretiraju podatke koje dobijaju iz različitih izvora i koji su predstavljeni na različite načine, kao i da zaključuju direktno na osnovu njih.	**SRBIJA** **32,9 %**
Nivo2. Na ovom nivou učenici mogu da prepoznaju i interpretiraju zahteve u kontekstima u kojima se ne traži ništa više od direktnog zaključivanja. Umeju da primene osnovne algoritme, formule, procedure ili konvencije. Direktno zaključuju i doslovno interpretiraju dobijene rezultate.	**SRBIJA** **59,4 %**
Nivo1. Na prvom nivou učenici mogu da odgovore na jednostavna, jasno formulisana pitanja koja se odnose na poznat kontekst i u kojima su date sve relevantne informacije. Ustanju su da pronađu traženi podatak i da izvode rutinske operacije, kada su svi podaci dati, a uputstva precizno formulisana. Izvode aktivnosti koje su očigledne i direktno slede iz datih podataka.	**SRBIJA** **82,3 %**



TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) je internacionalni test koji se koncentriše isključivo na prirodne nauke i daje se učenicima četvrtog i osmog razreda osnovne škole. Istraživanje se realizuje svake četvrte godine, do sada je obavljeno 4 istraživanja- 1995, 1999, 2003. i 2007. godine. Srbija je učestvovala 2003. i 2007. godine.

Rezultati TIMSS testiranja podsećaju na rezultate PISA testa, tako da je na prvom mestu Kina sa 576 poena (4. razred) i 598 (8. razred), potom Singapur 599 poena (4. razred) i 593 poena (8. razred) , dok je Srbija bila na osamnaestom mestu sa 486 poena (8. razred). (Rezultati testiranja iz 2007. godine, kada je učestvovalo 49 zemalja)

Ovi testovi nisu u potpunosti prihvaćeni kao sredstvo pokazatelja učinka iz matematike i drugih predmeta, jer delom ukazuju i na određene probleme. Prvo, svaka zemlja ima odgovarajući sistem obrazovanja- koji uključuje polazak u školu u određenom dobu, potom broj razreda se razlikuje od zemlje do zemlje, a takođe i gradivo predviđeno za određene uzraste nije jednako u svim zemljama. Problem koji se javlja je i primarna koncentracija na osposobljavanju dece za uspešno polaganje ovih testova, dok se ostali predmeti (koji nisu u okvirima ovih testova) zanemaruju. Bilo kako bilo, rezultati PISA i TIMSS testova svedoče i o izvesnom propustu u znanju - da li je kriv obrazovni sistem i gradivo ne prati uzrast učenika, ili nastavnici i profesori nisu dovoljno posvećeni da učine gradivo što razumljivijim i lakšim? Dok se razmišlja o tome kome prepisati krivicu, iznenađuje nedavno objavljen članak Andrew Hackera[1] u New York Time- su pod naslovom “Is Algebra Necessary?”.(videti [1])

Naime, matematika je često osnovna prepreka đacima da ostvare odgovarajuće rezultate na testovima i upišu željenje škole. Neznatan je broj onih koji matematiku savladavaju bez većih problema i ovaj članak se bavi upravo problemom izučavanja matematike. Autor je došao do zaključka da učenje matematike treba svesti na minimum, jer je nivo koji se obrađuje u školama potpuno nekoristan u većini poslova koji slede nakon obrazovanja. Kako je naveo, izučavanje algebre u školama možda ima mnogobrojne dobre strane, ali sa druge strane kaže- “…the more I examine virtue of learning algebra, the clearer it seems that they are largely or wholy wrong- unsupported by research or evidence, or based on wishful logic… ” U članku su takođe izneti podaci da je u Južnoj Karolini, na primer 34% učenika palo na testu iz matematike, u Nevadi čak 45%. Takođe Shirley Bagwell[2] upozorava da zahtevajući od svih učenika da savladaju algebru zapravo stvaramo probleme jer većina učenika postepeno odustaje od daljeg školovanja. Navodeći da izučavanje matematike treba svesti na svega nekoliko oblasti koje imaju ulogu u praksi, kao što je decimalni račun, procentni račun i račun sa razlomcima, zapravo nipodaštava važnost algebre i matematike uopšte i ograničavajući je na izučavanje tek nekoliko vrlo jednostavnih i trivijalnih oblasti, čini da se zaboravlja uloga matematike kao jedinstvenog predmeta koji omogućava razvoj logičkog mišljenja na svojstven način.

[1] Andrew Hacker je profesor političkih nauka na Queens College-u, univerzitetu u Njujorku i koautor knjige “Higher Education? How Colleges Are Wasting Our Money and Failing Our Kids- And What We Can Do About It.”

[2] Dugogodišnji nastavnik u Tennessee-u

Zabrinjava sama činjenica da, iako ima presudnu ulogu u razvoju mišljenja, matematika polako dobija sporedni karakter. Zašto smo nemoćni da se tome suprotstavimo i da na drugi način poboljšamo rezultate iz matematičkih testova?

Da li je zaboravljena iskra matematičkog mišljenja koja u sebi nosi stvaralačku crtu? Jer, kako je rekao Imanuel Kant- Pri obučavanju dece neophodno je težiti k' tome da se kod njih postepeno sjedinjuje znanje sa umenjem. Izgleda da je od svih nauka jedino matematika sposobna da u potpunosti zadovolji ovaj zahtev.(videti [9])

Istina, mnoga deca bivaju obeshrabrena neuspesima iz matematičkih testova prozivajući sebe nedovoljno inteligentnim za rešavanje matematičkih problema. Mnogi u njoj vide "bauka" i sa takvim stavom sebe sprečavaju u napretku. Međutim, koliko je zaista stvaralačko matematičko mišljenje u vezi sa inteligencijom?

Visoka inteligencija je neophodna, ali ne i dovoljna za uspeh u matematici, matematika se pre svega mora voleti i matematički problem treba da probudi strast za njegovo rešavanje, kako bi se pouzdano reklo da je neko zainteresovan za matematiku. Učenici koji nemaju probuđenu strast i interesovanje obično zaostaju i imaju problema sa razumevanjem ovog predmeta. Sigurno je da bez znanja nema ni rešenja matematičkog problema, ali je i činjenica da ponekad znanje, odnosno težnja da se nova rešenja traže u starim, već poznatim odnosima, predstavlja smetnju za stvaralaštvo. U takvom stanju misaone ukočenosti deca ne mogu kvalitetno da razvijaju sposobnosti matematičkog kreativnog mišljenja. To je danas osnovni problem matematike u školama. Deca možda i nauče potrebno, ali nisu u mogućnosti da sve povežu u logičku i smisaonu celinu. Da poznavanje određenih matematičkih pojmova i činjenica nije garancija uspešnog rešavanja zadataka pokazano je i eksperimentom (prema: Petrov, 2000, videti [7]). Eksperiment je izveden sa učenicima VIII razreda osnovne škole. Trebalo je da učenici rešavaju 10 lakših i 10 težih zadataka iz onih oblasti u kojima su imali sva znanja potrebna za njihovo rešavanje, što je prethodno provereno. Rezultati eksperimenta su pokazali da je rešeno 95% lakših i samo 25% težih zadataka. Čak i najbolji matematičari rešili su jedva polovinu težih. Ne radi se, dakle, o tome da učenici ne raspolažu potrebnim znanjima, već "ne umeju da misle", odnosno ne postoji dovoljan transfer sa teorijskog znanja na praktično rešavanje zadataka. Kako bi se popravilo ovo loše stanje učenika koji beleže u svoje sveske rešenja zadataka sa table, a pritom ne znaju šta pišu, potrebno je od samih početaka deci pokloniti pažnju i usmeriti ih na snažno mišljenje. Tu ulogu prvo treba da preuzmu roditelji i vaspitači u predškolskim ustanovama. Dakle, da bi se ostvarilo dobro razumevanje matematičkih sadržaja, decu treba pripremati za logičko razmišljanje već u ranom periodu razvoja. Od bitnog je značaja misaono izazvati dete u ranom dobu prilagođenim logičkim problemima. Na taj način dete razvija sposobnost mišljenja, analize, tumačenja, diskusije i gradi pozitivan stav prema svakoj vrsti misaonog problema.

2. ŠTA JE MATEMATIČKO MIŠLJENJE?

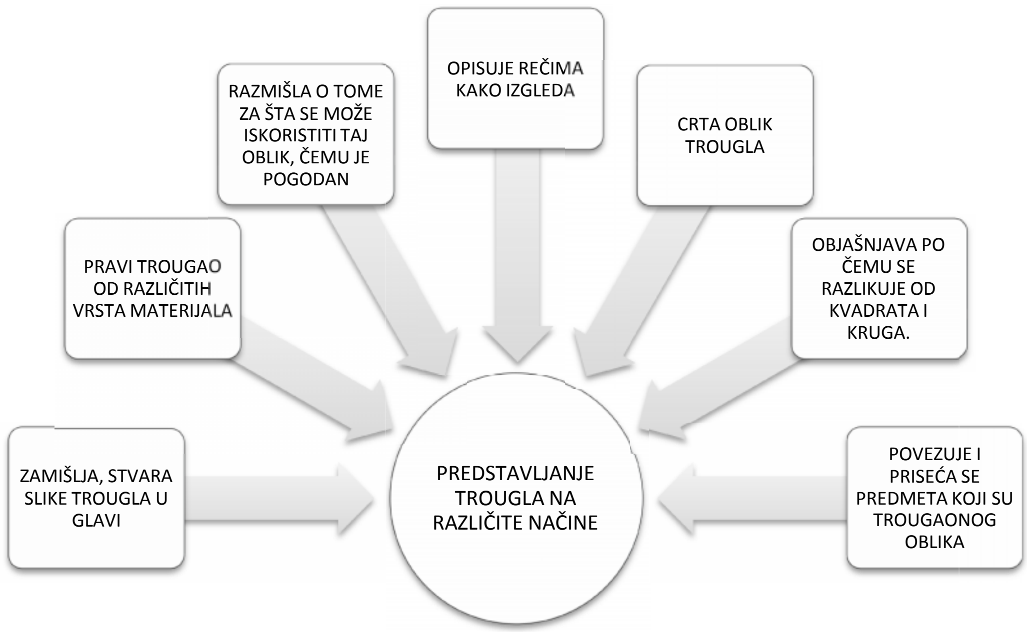
Zbog strogosti i rigoroznosti primene misaonih operacija i oblika zaključivanja u matematici, govorimo o matematičkom mišljenju. Međutim, misaone operacije, oblici zaključivanja i zakoni istinitog mišljenja ne primenjuju se samo u oblasti matematike i ne utiču samo na razvoj matematičkog mišljenja već se primenjuju u svim oblastima ljudske delatnosti i utiču na razvoj logičkog mišljenja uopšte. Znači, matematičko mišljenje je logičko mišljenje. Ako u nastavi matematike pominjemo matematičko mišljenje i razvoj tog mišljenja, mislimo na razvoj logičkog mišljenja primenom matematičkih sadržaja, oblika, metoda i sredstava rada.

Matematičko mišljenje karakterišu izvesne specifičnosti:

- APSTRAKTNOST. Kada se kaže da je matematika apstraktna nauka, često dolazi do nesporazuma. Šta to znači apstraktna nauka? Neki pod tim podrazumevaju da matematika operiše objektima koji ne postoje u realnom, odnosno da su matematički objekti isključivo konstrukcije ljudskog mišljenja. U stvari, svi matematički objekti proizilaze iz konkretne i realne stvarnosti koja nas okružuje, ali matematički objekti sami po sebi nisu materijalni objekti te stvarnosti. Od materijalnih objekata se izdvaja jedno ili više njegovih svojstava i to svojstvo predstavlja matematički objekat. Prilikom posmatranja skupa realnih i materijalnih predmeta, mi, na primer, apstrahujemo (eliminišemo, zanemarujemo) niz svojstava toga skupa i zadržavamo samo jedno ili više tih svojstava (broj, oblik, položaj, raspored, redosled, odnos i sl.). U tako nastalim matematičkim objektima mogu se i dalje apstrahovati neka svojstva, ali se može izvršiti i GENERALIZACIJA nekih od njih, tako da nastaju novi matematički objekti. To znači da u konstrukciji matematičkih objekata polaznu osnovu čini stvarnost, iz koje ljudsko mišljenje i stvaralaštvo konstruiše sve nove i nove matematičke objekte. Kako ti oblici nisu materijalni, za njih se upotrebljava termin “apstraktni”, da bi se naglasilo da su nastali apstrahovanjem određenih svojstava materijalnih objekata.
- TAČNOST I “LOGIČKA STROGOST”. O tačnosti u matematici govori se sa dva stanovišta. U prvom, elementarnijem, polazi se od toga da se u matematici većina rezultata kvantificirano iskazuje i to matematiku karakteriše kao preciznu i tačnu nauku. Ova karakteristika dolazi do izražaja najvećim delom samo u nekim oblastima elementarne matematike (aritmetika, npr.), tako da nedovoljno upućeni u matematiku ovu vrstu tačnosti smatraju suštinskom karakteristikom i specificnošću matematike. U stvari, ova karakteristika matematike ima daleko šire značenje. Pod tačnošću u matematici se podrazumeva tačnost svih zaključaka do kojih se dolazi. Tačnost se obezbeđuje doslednom i rigoroznom primenom zakona istinitog mišljenja i logičkog oblika zaključivanja. Zato se ova karakteristika matematike identifikuje sa logičkom strogošću. To znači da u matematici nema mesta proizvoljnim izvođenjima i subjektivnim tumačenjima.

Pri tom, takođe, treba imati u vidu da se matematička zapažanja javljaju veoma rano. Već kod beba starih 6 meseci može se uočiti sposobnost uočavanja jednakosti ili razlike kod skupova koji imaju do četiri elementa. Takav zaključak izveden je ispitivajući habituaciju[3]. Prilikom prikazivanja slika sa 3 objekta (pri čemu su objekti na slikama bili različitih boja i veličina), bebe bi nakon nekog vremena posmatranja tih slika sve kraće obraćale pažnju na njih. Međutim, kada bi im se prikazale slike sa dva ili četiri objekta, one bi duže posmatrale te slike, što znači da uočavaju razlike između slika sa tri, četiri ili dva objekta. Razlike među slikama sa više od četiri objekta ne uočavaju; takva sposobnost javlja se u četvrtoj i petoj godini života. Što se brojanja tiče, deca u dobi od dve godine uče brojati, mada još uvek nisu svesna šta brojevi predstavljaju, poznaju samo njihove nazive. U trećoj godini uče brojati zapravo.

Proces razvoja pojmova takođe teče postupno. U predškolskom uzrastu vaspitači trebaju da obrate pažnju na upoznavanje dece sa jednostavnijim geometrijskim oblicima i omoguće im pravilno usvajanje pojmova. Na primer prilikom usvajanja pojma trougla, potrebno je zahtevati predstavljanje trougla na različite načine:



Nadalje, nakon susreta sa brojevima, geometrijskim oblicima, upoređivanjem veličina objekata itd. , da bi se podstaklo logičko mišljenje, može se početi sa ozbiljnijim i raznolikim pitanjima koji na primer uključuju upoređivanje dva objekta. Na primer- ukoliko je dete svesno geometrijskog oblika- kruga, kvadrata, pravougaonika, trougla, potrebno je raznim veštim pitanjima podstaći dete na logičko zaključivanje i analizu.

[3] Habituacija je vreme koje beba provede gledajući u neki podražaj

PRIMER:

Postaviti pitanje- da li su ova dva objekta ista?

Treba insistirati na odgovoru- ne, oni su različiti.

Pitanje- zašto?

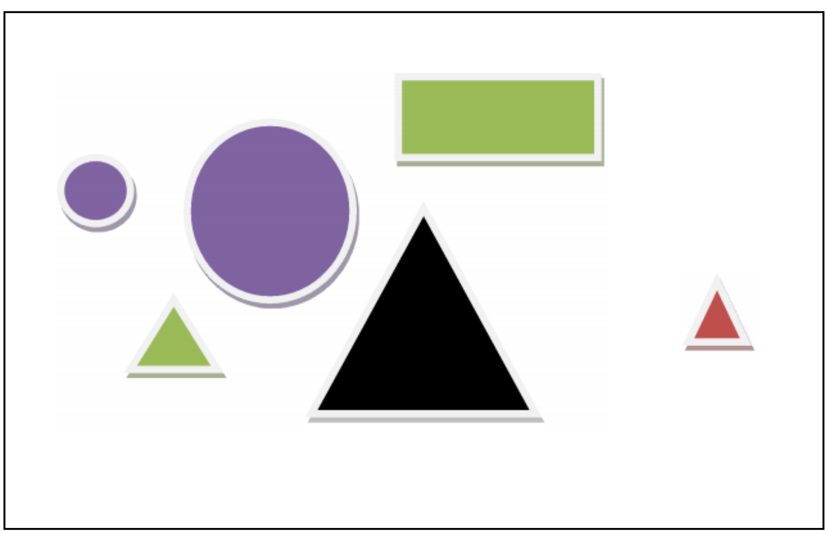
Zato što je drugi veći od prvog.

Koji je geometrijski oblik predstavljen?

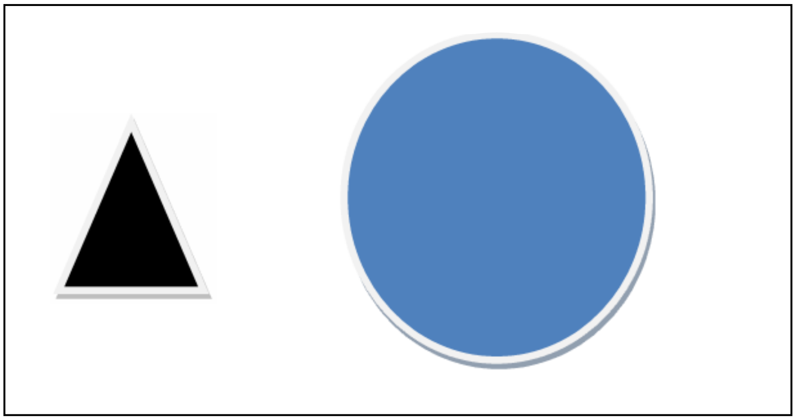
Kvadrat.

Potom preći na nešto zahtevniji nivo u kome su objekti različitog oblika i različite boje, a iste veličine, predstaviti više od dva objekta, napraviti varijacije sa osobinama objekata i postavljati raznolika pitanja. U kombinaciji sa brojanjem, a prilagođeno predškolskom uzrastu, mogu se osmisliti još složenija pitanja .

PRIMER:



Slika 1



Slika 2

Na primer postaviti pitanja:
Koliko je objekata na prvoj, a koliko na drugoj slici?
Na kojoj slici je veći broj krugova?
Po čemu se razlikuju krugovi iz prve u odnosu na krug iz druge slike?
Koji geometrijski oblik je najveći, posmatrajući obe slike?
Koji geometrijski oblik je najbrojniji, posmatrajući obe slike?

Insistirati na odgovorima:
Na prvoj slici je šest, na drugoj su dva objekta.
Na prvoj slici je veći broj krugova.
Razlikuju se po veličini i boji.
Najveći geometrijski oblik je krug.
Najbrojniji geometrijski oblik je trougao.

Ovakva osnova u ranom periodu je veoma značajna za dalje školsko napredovanje.

Osim toga, nezavisno od matematičkih pojmova i zapažanja, kroz razonodu, nizom zanimljivih problema- rebusa, zagonetki, može se uticati na pravilan razvoj logičkog mišljenja. Deci je ovaj vid učenja mnogo zabavniji, a time se pobuđuje i njihovo interesovanje.

PRIMER:

Tri gliste

Idu tri gliste. Prva se okrene, pogleda i kaže : "Iza mene su dve gliste." Druga se okrene, pogleda i kaže : "I iza mene su dve gliste." Treća se okrene, pogleda i kaže: "Pa, iza mene su takođe dve gliste".

Kako je moguće da iza svake idu dve gliste?

Napomena: Postoje dva rešenja.

Kroz ovu zanimljivu zagonetku, deca će razmišljajući o mogućem položaju glista koje zadovoljavaju date uslove doći do rešenja da gliste idu u krug.

Drugo rešenje je više dosetka- da prva glista govori istinu, a druge dve lažu.

PRIMER:

Rebusi

TTN

Zanimljiva dosetka daje nam rešenje rebusa: “ Par “T” iza “N” ”, čime dobijamo rešenje “PARTIZAN”

NARB

Iza “B”, “RAN”, dakle “IZABRAN”

IU

“I” straga, napred “U” je, dakle- “ISTRAGA NAPREDUJE”

Postoje i izvesni problemi, koji više predstavljaju igru reči, kojoj je cilj probuditi brzu koncentraciju i pažnju.

PRIMER:

Kineska braća

Napomena: Nemoj mnogo da razmišljaš nego odgovori na pitanje što brže možeš.

Otac kineza Moa ima pet sinova. Ako se četiri sina zovu: La, Le, Li, Lo, kako se zove peti sin?

Rešenje:

U trenutku nedovoljne pažnje, može se nazreti netačno rešenje, koje je česta greška pri ovakvim pitanjima. Naime, ukoliko zadatak nije pažljivo pročitan, primećuje se da se četiri sina zovu imenima koja počinju slovom “L”, iza koga slede samoglasnici, što bi navelo da je ime petog sina Lu, ali ako se zadatak pročita sa punom pažnjom, zaključujemo da nam je ime petog sina zapravo dato u samoj formulaciji pitanja, dakle, njegovo ime je Mo.

Vrlo primamljiva razonoda su i sudoko zadaci, u kojima zapažanje igra bitnu ulogu.

PRIMER:

U data polja rasporedi brojeve od 1 do 9 tako da horizontalno, vertikalno i koso uvek dobiješ isti zbir:

Rešenje:

Kao prvo, treba uočiti da na centralno mesto treba postaviti broj koji je na sredini brojeva od 1 do 9, dakle 5.

Drugo, treba uočiti da je zbir brojeva od 1 do 9, 45, pa da bismo dobili isti zbir u svakom redu i koloni, trebali bismo taj broj podeliti sa 3 (jer je broj kolona, odnosno redova 3) i stoga brojeve raspoređujemo tako da u istoj koloni, odnosno redu daju zbir 15.

Treće, brojevi 9, 8 i 7 se ne smeju rasporediti tako da budu u istom redu ili koloni, jer njihov zbir prelazi 15, pa se tek kasnije raspoređuju ostali brojevi.

Jedno od rešenja je dakle:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Ovakvi zadaci su veoma zanimljivi i u mnogome doprinose kreativnom mišljenju.

Nadalje, u susretu sa školskim zadacima đaci uče svojstva sabiranja, oduzimanja, rešavanja jednačina sa jednom i više nepoznatih, rešavanje geometrijskih problema..

Da bi se interesovanje održalo prilikom izučavanja računskih operacija i geometrijskih problema, potrebno je pronaći interesantne školske primere u vidu zadataka:

PRIMER:

Koliko se različitih četvorocifrenih brojeva može napisati stavljajući umesto zvezdica cifre 5**8 ?

Rešenje:

Na mestu prve zvezdice može se staviti 10 cifara $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, i na mestu druge takođe deset cifara, što znači da je ukupan broj različitih brojeva $10 \cdot 10 = 100$.

Dalje, treba navesti sličan primer:

PRIMER:

Koliko se različitih trocifrenih brojeva može napisati stavljajući umesto zvezdica cifre *6*?

Rešenje:

Potrebno je diskutovati rešenje, dakle, pošto treba navesti trocifrene brojeve, na prvom mestu ne sme pisati nula, dakle na mestu prve zvezdice možemo birati 9 cifara, dok na mestu druge možemo birati 10 cifara, pa je ukupan broj $9 \cdot 10 = 90$.

Potom zanimljivo pitanje koje će napraviti vezu naučenog o sabiranju parnih i neparnih brojeva:

Mogu li se među brojevima 11, 13, 17, 41, 53, 67, 83 i 91 izabrati tri broja da im zbir bude 100?

Odgovor:

Ne, jer su brojevi neparni, a zbir tri neparna broja je neparan.

Mogu se osmisliti mnogobrojni zadaci u vezi sa brojevima. Najbitnije je pronaći način da se deca zainteresuju za rešavanje problema, a to bi bilo najjednostavnije odabirom ovakvih tipova zadataka.

Ne sme se zapostaviti izuzetno značajna dimenzija koja dovodi do uspeha, ne samo u matematici nego i u svakom radu- a to je kontinuirano i intenzivno bavljenje matematikom. Poznata je izjava Edisona u kojoj on kaže da je “genije 99% znoja i 1% nadahnuća”. Ovu dimenziju naglašavali su i mnogi veliki matematičari. Objašnjavajući svoj uspeh na polju matematike Gaus je jednom prilikom izjavio da bi i drugi otkrili isto što i on samo kada bi tako duboko i tako neprekidno radili kao što on radi.

Matematičko mišljenje u tesnoj je vezi sa stvaralačkim. Istraživanja Pijažea ukazuju međutim, da sposobnost stvaralačkog mišljenja kod dece opada sa uzrastom učenika. Mlađe dete pokazuje relativno veći stepen kreativnosti, dok je kod starijeg det po svojoj kreativnosti zaostaje za mlađim. Moglo bi se u tom kontekstu i razumeti zašto su mnogi čuveni matematičari (Paskal, Njutn, Lajbnic, Laplas, Gaus i drugi) svoje stvaralaštvo ispoljili još u ranoj mladosti. Međutim, to nije slučaj samo sa matematičarima. Mocart je u svojoj šestoj godini davao koncerte, Dante je u svojoj devetoj godini napisao sonet "Beatriči" itd.

Utvrđeno je takođe da stvaralačko mišljenje raste u periodu od prvog do trećeg razreda, zatim naglo pada oko početka četvrtog razreda, potom raste za vreme petog i šestog i ima još jedan pad negde oko početka sedmog razreda. Upravo je opadanje stvaralačkog mišljenja u tesnoj vezi sa matematičkim mišljenjem i načinom na koji učenici uče matematiku. Izbegavanjem logičkog razumevanja matematičkog gradiva i usvajanjem napamet naučenih algoritama za izradu zadataka deca onemogućavaju svoj stvaralački i kreativan razvoj. Matematika je jedan od retkih školskih predmeta koji ima višestruku zaslugu upravu u razvoju ovih crta ličnosti. Izgleda, međutim, da je ta uloga matematike odavno zaboravljena i iz tog razloga zanemarena. Malo je onih učitelja, nastavnika i profesora koji će svojim zalaganjem ići u susret novim i modernim generacijama i prezentovanjem matematičkih sadržaja negovati stvaralačku crtu koja je tako svojstvena matematici.

2.1. ORIGINALNOST

Na originalnost, koja ima značenje svežine, neponovljivosti, inventivnosti i jedinstvenosti, takođe se retko obraća pažnja, a ona je bitna specifičnost u rešavanju matematičkih zadataka. Svojstvo originalnosti se pripisuje onim produktima misaonih delatnosti kojima se dolazi do nečeg novog, neobičnog i retkog. Ovo svojstvo bi se trebalo primeniti i na postupak kojim se dolazi do rešenja, a koji znači bitan napredak u odnosu na postojeće postupke dolaženja do rešenja problema. Osnovna karakteristika originalnosti je iznalaženje rešenja koja prethodno nisu bila poznata. Takva rešenja se, međutim, relativno retko javljaju u procesu matematičkog obrazovanja, posebno u osnovnoj školi.

Većina pedagoga, psihologa i metodičara nastave matematike smatra da svaki normalno razvijen učenik može biti originalan, mada se stepen originalnosti razlikuje od jednog do drugog. Osim toga, za osnovni kriterijum originalnosti uzimaju se rešenja koja su nova za učenika, ali ne moraju biti nova i za druge. Važno je da rešenje, odnosno put dolaska do njega bude rezultat sopstvenih razmišljanja, a ne kopija tuđih ili svojih prethodnih rešenja. Trogodišnje dete koje otkriva šta se može uraditi sa komadima drveta, ili šestogodišnje dete koje pronalazi šta se može uraditi dodajući pet para i deset para, stvarno je pronalazač, mada to već svako drugi zna, ali to ne umanjuje istraživačke sposobnosti dece.

Originalnost u nastavi matematike danas se retko može sresti. Da li su učenici neopravdano prestrašeni matematikom koja za sobom nosi epitet "teška" i iz tog straha se ne upuštaju u inovacije prilikom rešavanja zadataka, ili je možda problem priroda le zahvata mlađe generacije? Originalnost u matematici se ne ispoljava samo iznalaženjem novih teorija, teorema, dokaza i slično, već i svaki samostalno i uspešno rešen zanimljiv matematički problem predstavlja stvaralaštvo koje se ne sme podceniti samo zato što su isto i drugi već uradili. U osnovnoj školi se kroz razne tipove zadataka- probleme koji se rešavaju pomoću jednačina, probleme kretanja itd. može razvijati ova sposobnost. Nerealno bi, takođe bilo očekivati da učenici ovog uzrasta svoju originalnost ispoljavaju u radu sa sadržajima koji su za njih novi i nepoznati, da otkrivaju nova pravila ili teoreme. Naprotiv, oni imaju više šanse da svoju originalnost u rešavanju zadataka ispoljavaju i primenjuju na sadržajima koje već poznaju. U takvoj situaciji originalnost se ispoljava u korišćenju poznatih sadržaja na nov i neobičan način, kao i dosetljivosti i duhovitosti u njihovom korišćenju. Mogućnosti ispoljavanja originalnosti u procesu matematičkog obrazovanja praktično su neograničene, a evo nekoliko primera kojima se može ilustrovati:

PRIMER:

Kojom cifrom se završava proizvod $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, u kome se broj 7 pojavljuje kao činilac 100 puta?

- Većina učenika, budući da raspolaže znanjima vezanim za množenje brojeva, ovaj zadatak će pokušati da reše tako što će redom množiti brojeve $7 \cdot 7 = 49$, $49 \cdot 7 = 343$, $343 \cdot 7 = \cdots$. Takav postupak je mukotrpan i spor, a praktično neizvodljiv u okviru vremena kojim učenici raspolažu.

Originalnost u rešavanju ovog zadatka ogleda se u tome da se uoči da među 100 sedmica ima 50 parova čiji je proizvod $7 \cdot 7 = 49$.

Slično tome može se obrazovati 25 parova ($49 \cdot 49 = 2401$), čiji se proizvod završava cifrom 1.

Proizvod 25 brojeva koji se završavaju cifrom 1 je, takođe, broj koji se završava cifrom 1. Pa se proizvod $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ završava cifrom 1.

PRIMER:

Odredi dvocifren broj koji se poveća 26 puta ako mu se sa leve stane dopiše cifra 7.

Rešenje:

-Ovde se učenik mora dosetiti da ako se dvocifrenom broju sa leve strane dopiše cifra 7, tada se taj broj uveća za 700 i iznosi *700 +x.* Kako je novodobijeni broj za 26 puta veći od poznatog dobijamo jednačinu *26x = 700+x,* čije rešavanje ne predstavlja poseban problem

(*x= 28*).

Ispoljena originalnost u rešavanju zadataka, kao što se iz navedenih primera vidi, ne može se poistovetiti sa nečim fantastičnim, nečim što nije svojstveno "običnim ljudima". Ona ne proizilazi iz sadržaja kojima učenik raspolaže rešavajući zadatak. Ti sadržaji su poznati svim učenicima. Ovde je u pitanju sposobnost učenika da poznate podatke koristi na nov i neuobičajen način. Takođe, originalnost rešenja nije umanjena činjenicom da je neko drugi pre učenika na isti način rešio zadatak. Bitno je da se učenik prvi put susreće, otkriva i primenjuje novi način rešavanja zadatka.

Naravno, znanje je neophodno za ispoljavanje originalnosti, ali bez obzira na kvantitet znanja, ono nije dovoljna garancija učenikove originalnosti. Takođe, ono što je bitno pomenuti je da đaci prilikom rešavanja zadataka ne pomišljaju na originalnost rešenja. Za njih je primarno da zadatak reše, a originalnost je u drugom planu i može se ispoljiti samo spontano.

Da bi se izbegla sve više prisutna rutina u rešavanju zadataka i učenje napamet određnih načina rešavanja pojedinih tipova zadataka potrebno je probuditi originalnost učenika. To je bitan zadatak današnjih pedagoga. Iznalaženjem rešenja učenici su prepušteni mišljenju i kreativnim idejama, što omogućava razvoj njihovog logičkog mišljenja koji je neophodan kako u daljem školskom napredovanju, tako i u životu uopšte.

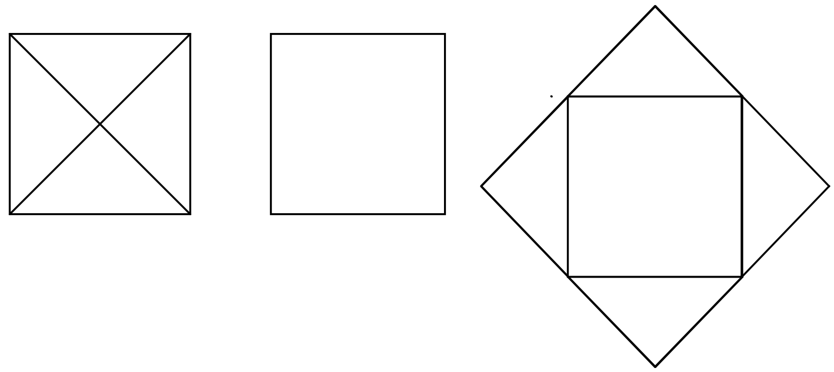
2.2. FLEKSIBILNOST

Fleksibilnost mišljenja je bitna pretpostavka uspešnog rešavanja matematičkog problema. Ona omogućava da ne padnemo pod uticaj stereotipnih rešenja, da ne prihvatamo ukalupljene oblike, jednom rečju- beg od rutne. Nju karakteriše sposobnost promene usmerenosti mišljenja, oslobađanje od šablonskog i stereotipnog načina rešavanja problema (koji je najčešći i najvažniji problem, opšte prisutan), prilagođavanje izmenjenim uslovima zadatka, iznalaženje novih puteva za njihovo rešavanje, jednom rečju – elastičniji pristup rešavanju datog zadatka.

PRIMER:

Data su dva podudarna kvadrata. Kako se rezanjem jednog i spajanjem sa drugim kvadratom može dobiti novi, treći kvadrat?

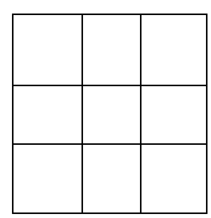
Rešenje:



Prvi pokušaji rezanja su obično rezanja kvadrata paralelno sa njegovim stranicama. Ispostavlja se, međutim, da se rešenje dobija jednostavno rezanjem po dijagonalama, čime se dobijaju četiri podudarna pravougla trougla. Spajanjem tih trouglova sa drugim kvadratom, dobija se novi, treći kvadrat čija stranica ima dužinu jednaku dužini dijagonale datih kvadrata (gornja slika).

PRIMER:

Koliko na datoj slici ima duži, a koliko kvadrata?



Rešenje:

Prilikom rešavanja ovog zadatka od strane nefleksibilnih učenika pažnja se koncentriše samo na duži i kvadrate određene susednim tačkama.

Fleksibilni učenici, pak, imaće elastičniji pristup u posmatranju datih elemenata i odmah uvideti činjenicu da duži i kvadrati mogu biti određeni i nesusednim tačkama. Osim toga, oni neće prebrojavati svaku duž pojedinačno, već će izbrojati duži na jednoj strani kvadrata (6), a kako ima 8 takvih duži to na slici ima ukupno $6 \cdot 8 = 48$ duži.

Oni će, takođe, uočiti da na slici postoji 9 kvadrata čija stranica ima dužinu jedne jedinične duži, 4 kvadrata čije stranice imaju dve jedinične duži i 1 kvadrat čija stranica ima dužinu tri jedinične duži, dakle, ukupno 14 kvadrata.

PRIMER:

Koliko cifara se upotrebi za numerisanje od prve do 567. stranice neke knjige?

Rešenje:

Fleksibilnost u rešavanju ovog zadatka ogleda se u uočavanju činjenice da među 567 brojeva ima 9 jednocifrenih, 90 dvocifrenih i 468 trocifrenih. Pa su potrebne:

$9 \cdot\ 1 + 90 \cdot 2 + 468\ \ \cdot 3 = 1593$ cifre.

Bitan cilj izučavanja matematike je i da se učenici osposobe za iznalaženje različitih puteva i metoda rešavanja zadataka. Međutim, u našoj školi se najčešće od učenika zahteva da zadatak određenog tipa rešava uz primenu tačno određenog postupka, odnosno obrasca, sve dok ne usvoji tehniku rešavanja. Na taj način učenike osposobljavamo da mehanički primenjuju metod, ali ih ne osposobljavamo da procene kada i u kojim uslovima taj metod treba primenjivati.

Zahtev da jedan zadatak bude rešen na različite načine sprečava fiksiranost mišljenja i onemogućava učvršćivanje jednog načina i metoda njegovog rešavanja.

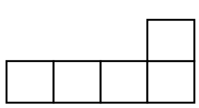
2.3. FLUENTNOST

Fluentnost u matematici predstavlja upravo spomenuto: iznalaženje većeg broja postupaka rešavanja istog zadatka. Njena suština je u tome da se na istom matematičkom sadržaju razvije što više ideja, odnosno rešenja. Ovde je kvantitet, a ne kvalitet rešenja u prvom planu. Neko je rekao: “Ni jedna ideja nije tako loša ako smo dovoljno kritični, loše je ako uopšte nemamo ideja”.

Pronalazeći što više rešenja istog zadatka, kod đaka se razvija sposobnost prebacivanja sa jednog na drugi misaoni tok i time razvija gipkost mišljenja.

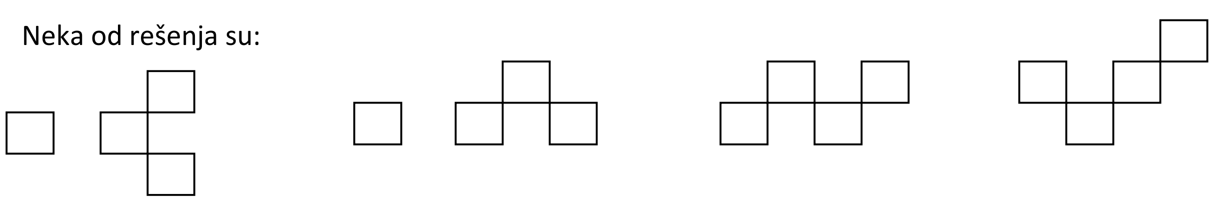
PRIMER:

Premestiti tri štapića tako da dobiješ 4 kvadrata.



Rešenja:

Neka od rešenja su:



PRIMER:

Treba napraviti železničku kompoziciju sa tri putnička i dva teretna vagona. Na koliko se načina može načiniti kompozicija ako se zna da teretni vagoni ne smeju biti jedan kraj drugog?

Rešenje:

Ako sa P označimo putnički, a sa T teretni vagon, imamo sledeća rešenja:

TPPPT, TPPTP, TPTPP, PTPTP, PPTPT, PTPPT.

Fluentnost se zasniva na činjenici da čovekov mozak raspolaže sa oko deset milijardi moždanih ćelija i oko $5 \cdot 10^9$ kortikalnih veza i da su njegove mogućnosti za različite kombinacije, rešenja i ideje prosto fantastične!

Nažalost, nastavnici retko postavljaju zadatke u kojima je potrebno i moguće pronaći više rešenja, i u onim slučajevima kada je moguće naći više rešenja, nastavnik se uglavnom zadovoljava samo jednim od njih. A mnogo je veći uspeh časa ukoliko nastavnik uradi jedan zadatak na tri načina na primer, nego tri zadatka čiji je postupak izrade sličan.

2.4. REDEFINICIJA

Redefinicija podrazumeva sposobnost učenika da date podatke u zadatku upotrebe na nov, drugačiji način, odnosno da osmisle jezičkom formom koja im je bliža i razumljivija i koja omogućava lakše rešavanje zadatka. Suština redefinisanja nije u novoj, bilo kakvoj jezičkoj formulaciji datog zadatka, već u misaonom procesu analiziranja zadatka.

PRIMER:

Učenik je pročitao jednu trećinu knjige i ostalo mu je da pročita još 60 stranica. Koliko stranica ima knjiga?

Rešenje:

Moguća redefinicija ovog zadatka bi glasila: Dve trećine knjige iznose 60 strana. Koliko stranica ima knjiga?

Navedenom redefinicijom u zadatak je uveden podatak dve trećine, koji u prvobitnom tekstu nije dat, ali koji bitno olakšava proces rešavanja postavljenog zadatka. Ako dve trećine knjige imaju 60 stranica, onda jedna trećina knjige (ponovo redefinicija) ima 30 strana, a cela knjiga $3 \cdot 30 = 90$ stranica.

PRIMER:

Koje ocene iz matematike su dobile Anka, Branka i Danka, ako Anka nema 3, Danka nema 3 i nema 5, a u odeljenju nema jedinica i dvojki i ako se zna da su sve tri dobile različite ocene?

Rešenje:

Ovde su učenici u situaciji da pronalaze različita značenja podataka datih u zadatku, a koja se iz navedene formulacije zadatka direktno ne vide. Na taj način problemska situacija se može sagledati u novom svetlu i na drugačiji način.

- "U odeljenju nema jedinica i dvojki" , znači da u odeljenju ima samo trojki, četvorki i petica
- "Danka nema 3 i nema 5", znači Danka ima 4.
- "Anka nema 3", znači da Anka ima 4 ili 5, ali kako Danka ima 4, to Anka mora imati 5.
- I na kraju- očigledno je da Branka ima ocenu 3.

2.5. ELABORACIJA

Elaboracija predstavlja sposobnost koja omogućava da se ideje date u zadatku razvijaju i postepeno dopunjavaju novim idejama i novim podacima i da se na toj osnovi pronalaze rešenja zadatka. Sposobnost elaboracije omogućava učenicima da pojedine matematičke zadatke rešavaju korak po korak i na taj način se sistematski i postepeno približavaju rešenju.

Elaboracija dolazi do izražaja u rešavanju logičkih zadataka, rešavanju zadataka pomoću jednačina, Venovih dijagrama, obima i površina kvadrata i pravougaonika, površine i zapremine kocke i kvadra i slično.

PRIMER:

Ako tri mačke ulove za tri dana tri miša, koliko će miševa uloviti 15 mačaka za 15 dana?

Rešenje:

I korak: Kako 3 mačke ulove 3 miša za tri dana, to znači da jedna mačka za tri dana ulovi jednog miša.

II korak: 15 mačaka za 3 dana ulove 15 miševa

III korak: Za 15 dana 15 mačaka će uloviti 75 miševa.

Usmeravajući učenike da zadatke rešavaju po određenom pravilu, redosledu, dolazi do uštede vremena i povećava se efikasnost nastave. Nevešti nastavnici, međutim, mogu stvoriti naviku od učenika da zadatke rešavaju mehanički, po određenom šablonu, po uzoru, bez razumevanja. Takav pristup rezultira površnim znanjima, odbojnim stavom prema matematici i neprijatnim sećanjem na “dresuru” čiji tragovi nestaju odmah po prelasku na sledeće sadržaje, dok će kreativni nastavnici uputiti učenike na sistematičan pristup matematičkim sadržajima, koji olakšava rešavanje naizgled složenih matematičkih zadataka.

Zanemarivanje logičkog mišljenja u nastavi matematike vodi njenim slabim rezultatima. Reč je o neispravnom vođenju učenika u razvijanju logičkog mišljenja. Nastavnici obično ne mogu te stvari da prilagode psihičkim sposobnostima učenika (ne poznaju ili ne znaju da odaberu adekvatne metode rada) ili svojim učenicima pružaju samo formalna znanja bez dovoljno razumevanja. Oni učenike ne osposobljavaju da misle, samostalno vrše misaone operacije, upoređuju matematičke objekte, sami otkrivaju međusobne veze između matematičkih pojmova. Nastavnici nedovoljno poznaju didaktičko metodičke postupke i često ih ne znaju prilagoditi pojedinim nastavnim situacijama.

3. LIČNOST NASTAVNIKA

Kako bi se kod učenika probudila radoznalost i aktivnost u učenju matematike, koja za sobom nosi niz pozitivnih osobina, potrebno je da nastavnik (čija je uloga presudna u približavanju matematičkih sadržaja) zauzme određen stav.

Da li dobar metod ima onaj nastavnik matematike koji odmah na početku školske godine počne da tvrdi kako je matematika vrlo težak predmet i kako oni koji misle da se provuku neće u tome uspeti?

Naime, od matematike prave bauka. Neki nastavnici čak idu na otvoreno zastrašivanje misleći da je to dobar način da se učenici prisile na intenzivniji rad. Oni nemaju dobar stav. Potrebno je razgovarati sa učenicima i ulivati im misao da oni mogu i da su dužni da uče matematiku, jer su znanja koja dobiju u školi iz tog predmeta vrlo potrebna u životu.

Kako će nastavnik odrediti svoj stav prema celom razredu, kao i prema pojedincu, zavisi od niza komponenti, koje on sam treba da uoči. Sve treba da je usmereno ka tome da ga učenici prihvate, da sarađuju sa njim i da zavole sam predmet. Da bi se to ostvarilo uvek treba voditi računa o stepenu razvijenosti učenika i o njihovom uzrastu kao i o karakteru pojedinca. Ceo razred zajedno sa nastavnikom matematike treba da oseti da im je čitav posao na času zajednički i da se zajedno potrude da savladaju sastavljeni zadatak. Ocena koju nastavnik daje samo je numerička registracija tog rada i ukoliko je ona slaba, ne sme se shvatiti kao kazna. Nastavnik je dužan da uveri učenika da je to ocena njegovog dotadašnjeg nedovoljnog zalaganja i znanja i da se ona može promeniti ako se ta zalaganja i znanja pojačaju.

Matematika je po svojoj suštini posebna egzaktna nauka u kojoj se ne razvijaju samo konkretna logička mišljenja i zaključivanja nego i moć usvajanja apstraktnih pojmova. Zato je svaki nastavnik matematike dužan da prema uzrastu učenika, prema društvenoj sredini i čitavom ambijentu, kao i prema nastavnoj materiji odabere sistem stimulativnih mera koje će biti najefikasnije u nastavi.

Svaka greška, svaki propust u nepravilnom postavljanju vlastite ličnosti odražava se u svesti učenika mnogo intenzivnije i izaziva unutrašnje, a katkad i otvorene reakcije.

Nastavnik uvek treba da bude spreman da pruži odgovor na pitanja koja učenik postavlja. Dešava se da učenik postavi pitanje kada se govori o nekoj drugoj materiji. Međutim, ako je pitanje dobronamerno postavljeno, učenika nikada ne treba potpuno odbiti. Ako je nastavnik tog momenta sprečen da se angažuje oko odgovora na to pitanje, on će staviti do znanja učeniku da mu to napomene drugi put. Odbijanje odgovora može učenika postaviti u nezgodnu situaciju – učenik može pomisliti da pitanje nije dobro postavio ili da je glupo, da se meša u ono što ne zna samo da bi se pokazao itd., pa se mnogi osećaju postiđenima u sebi i pred drugima. Nastavnik će zapamtiti to pitanje, imati ga u vidu, naročito ako je logički postavljeno i važno, s obzirom na to da većina učenika odustaje od ponovnog traženja odgovora.

Iako nastavnik treba da razvije potrebnu prisnost sa učenicima, ne treba zaboraviti da ona treba da ostane u određenim pedagoškim okvirima. Ne sme preći ni u patetiku, jer se učenici mogu smejati takvom držanju. Isto tako, prisnost ne sme imati formu familijarnosti, čak ni sa najboljim učenikom, jer to može ugroziti dostojanstvo ostalih učenika. Najbitnije je da nastavnik što pre upozna imena svih učenika, upamti njihov lik, i oslovljava sve imenom. Ne bi valjalo da nekima zna ime, nekima ne. Svojim stavom, držanjem i ubeđivanjem nastavnik je dužan da u svest učenika ulije shvatanje da matematika nije ni teška ni nemoguća nauka, kao što je to i ranije rečeno.

Svoju brigu nastavnik je dužan da usmeri na ceo razred, na sve učenike bez obzira na njihovo znanje matematike. Potrebno je da podstiče bolje učenike, a da ohrabruje one čija su znanja oskudna.

Kroz ovako pravilan pristup matematika se može savladati sa velikom dozom interesovanja i odlučnosti.

4. NEKAD I SAD

Postoji još jedan problem. Da li ste se ikada zapitali zašto je obrazovanje u Srbiji trenutno u krizi, dok ranije to nije bio slučaj?

Ne tako davno, đaci su odrastali u nekim drugim životnim uslovima. Većina đaka su bili paorska deca- učenik je radio od malih nogu, čuvao stoku, kupio seno i obavljao druge poslove koji su rađeni u porodici. O mobilnim telefonima niko nije ni sanjao. Đaci su nekada kroz igru i rad u prirodi nesvesno izuzetno razvijali i predstavu i pažnju i mišljenje i druge procese. Mnogo je bilo lakše učiti nego raditi navedene poslove pa su se učenici priklanjali učenju. Učenik se kao ličnost formirao u porodici gde je roditelj bio organizator svih aktivnosti, a samim tim i veliki autoritet u porodici. Roditelji tada nisu bili otuđeni od dece.

Istina je i da je prosvetni radnik bio autoritet u očima učenika. On je bio jedina ili skoro jedina osoba obučena gospodski. Tada je profesor izazivao strahopoštovanje.

Međutim, danas se sve promenilo. Današnji učenici imaju mobilni telefon, kompjuter, televiziju, razne igrice koje oduzimaju učeniku mnogo, mnogo vremena. Klubovi su otvoreni do zore. Učenik je ostao otuđen. Sa roditeljima nema više zajedničkih poslova oko kojih bi izgrađivali tople odnose.

Uslovi iz prethodnog načina života kada je svaki rad bio teži od učenja sada su se okrenuli protiv učenja. Savremeni gradski način života sa novonastalom tehnologijom nudi elemente života koji su lakši i "slađi" od učenja. Dok je pre prosvetni radnik bio gospodin koji se morao uvažavati, sada ima dosta učenika koji u školu dolaze sa najskupljim modelima novog automobila, obučeni najmodernije, i zauzimaju stav kojim sebe postavljaju u centar sveta.

Da ne bismo izazivali žal za nekim davnim vremenima, moramo prihvatiti vreme u kome živimo i shvatiti borbu matematike i nove tehnologije koje se jedna drugoj suprotstavljaju. Borba nije jednostavna. Da bi se interesovanje za jednu nauku u ovakvim uslovima života probudilo, potrebno je raznim zabavnim sadržajima izazvati pažnju.

Da li bi pojam beskonačnosti fascinirao đake više od neke igrice ili fejsbuka? Moguće. Samo treba odabrati pravi način.

5. PRIČE O BESKONAČNOSTI

Priče o beskonačnosti su mnogima zanimljive. Prezentovanjem takvih priča na času matematike učenici se mogu zainteresovati, mogu čak i upotrebiti internet da "proguglaju" ove interesantne paradokse.

Stari Grci su o problemu beskonačnosti razmišljali u filozofsko- matematičkom smislu. Tim problemom se bavio i Anaksagora (oko 500- 428 g p.n.e.) rekavši da između malih veličina nema najmanje, smanjivanje ide neprekidno, a slično da "od velikog postoji veće".

Zenonovi paradoksi

Zenon je bio Elejski filozof koji je živeo oko V veka pre n.e. On se takođe bavio pitanjem beskonačnosti. Zenon je izveo par dokaza protiv kretanja, koji su prozvani "Zenonovim paradoksima", a koji nose određene nazive:

5.1. *Dihotomija (deljenje na pola)*

Zenon tvrdi da nema kretanja i to dokazuje na sledeći način:

Da bi ono što se kreće iz tačke A došlo u tačku B, dužno je da pređe $\frac{1}{2}$ tog rastojanja. Recimo da je polovina duži AB tačka C. Dalje, da bi stigao u tačku C treba preći polovinu rastojanja AC, tj. $\frac{1}{4}$ od AB i tako redom $\frac{1}{8}, \frac{1}{16},$ … Ova deoba na polovine može se produžiti do beskonačnosti, što znači da ono što se kreće iz tačke A nikada neće stići u tačku B.

5.2. *Ahil i kornjača*

Ako je kornjača malo ispred brzonogog Ahila, on ne može nikada da je stigne, tvrdi Zenon.

Neka Ahil daje 100 metara prednosti kornjači i neka trči 10 puta brže od kornjače. Zenon kaže da kada Ahil pretrči 100m dolazi u tačku u kojoj je bila kornjača na početku trke. Kako je i kornjača trčala u međuvremenu, i s' obzirom da trči deset puta sporije preći će desetinu Ahilovog puta i biće 10 metara ispred njega. Ahil pretrčava i ovih deset metara, no u međuvremenu kornjača prelazi desetinu tog puta i dalje je ispred Ahila 1 metar. Da bi je Ahil sustigao prelazi i ovaj metar, no kornjača prelazi desetinu manje od Ahila, tj. kada Ahil bude prešao jedan metar ona će biti ispred njega deseti deo od metra. Ahil prelazi i ovu desetinu metra, a kornjača je i dalje u vođstvu, jer prelazi desetinu od desetine metra. Koliko god da se Ahil približio kornjači ona mu za dlaku izmiče i tako do u beskonačnost.

Zenonu i njegovim savremenicima je bilo jasno da će Ahil da stigne kornjaču, no gde su grešili, ako je sve bilo logički dokazano?

Diogen je opovrgnuo Zenonovo tvrđenje da nema kretanja, krećući se okolo svog bureta u kom je živeo.

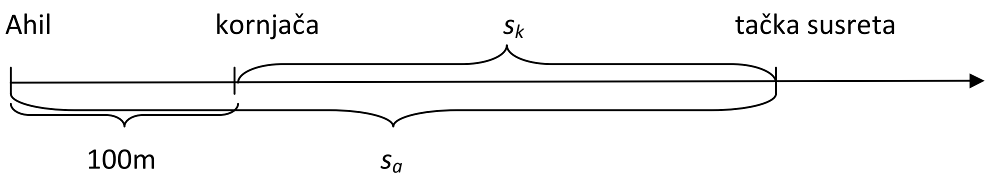
Demokrit je iskazao ideju o tome da odnos malih odsečaka puta sa malim odsečcima vremena predstavlja brzinu kretanja, a čim postoji brzina, mora postojati i kretanje. Njegova teorija je atomistička. Pristalice ove teorije su smatrale da se sve geometrijske figure sastoje od konačnog broja sitnih nedeljivih čestica- atoma. Po ovoj teoriji lako je otkloniti Zenonove paradokse, jer ovde deljenje odsečaka ne ide do beskonačnosti, već samo do nedeljivih atoma. No, i ova teorija nailazi na teškoće. Na primer, sa njihovim shvatanjem da se duž sastoji iz konačnog broja čestica atoma zaključuje se da ona ne može da se podeli na dva jednaka dela ako se sastoji od neparnog broja čestica. Krug se ne može podeliti na dva jednaka dela, jer je centar nedeljiv, pa će da pripadne jednom ili drugom delu.

Današnje objašnjenje Ahila i kornjače može se rešiti jednostavno korišćenjem elementarnih formula iz fizike, a može i matematički- svođenjem na geometrijsku progresiju.

Prvi način:

Ako sa v označimo brzinu kornjače, a sa v_a brzinu Ahila, pošto je brzina Ahila 10 puta veća od brzine kornjače, to je $v_a = 10\,v$.

Kako nam je poznato iz fizike $v = \frac{s}{t}$, a otuda $s = v \cdot t$. Tačka u kojoj će se kornjača i Ahil sresti predstavljena je jednakošću $s_a = s_k + 100$ (*) , pri čemu s_a predstavlja dužinu puta koji će Ahil preći do tačke susreta, a s_k dužinu puta koji će kornjača preći do tačke susreta.



$s_a = t \cdot v_a = \; t \cdot 10\,v$

$s_k = t \cdot v$

Kada to ubacimo u jednakost (*) dobijamo:

$t \cdot 10\,v = t \cdot v + 100$

$t \cdot 10\,v - \; t \cdot v = 100$

$9v \cdot t = 100$, pa je vreme u kome Ahil stiže kornjaču

$t = \frac{100}{9v}$

Svođenjem na geometrijsku progresiju dobijamo isti rezultat:

Ako sa t' označimo vreme potrebno Ahilu da pretrči prvih 100m razlike, ono će biti jednako $t' = 100/v_a = \frac{100}{10v} = \frac{10}{v}$ (**) , narednu razliku od 10m Ahil će pretrčati za $\frac{t'}{10}$ itd. Dakle, vreme potrebno Ahilu za stizanje kornjače svodi se na zbir

$t' + \frac{t'}{10} + \frac{t'}{100} + \ldots + \frac{t'}{10^n}$, a taj zbir je zapravo jednak

$t' \cdot \frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{t'}{9}\left(10 - \frac{1}{10^n}\right)$, što za $n \to \infty$ daje $\frac{10t'}{9}$, a zamenom jednakosti (**) dobijamo da je vreme u kome Ahil stiže kornjaču jednako $\frac{100}{9v}$, kao u prvom sličaju.

Zenon je osmislio još dva paradoksa pod nazivima “Strela” i “Stadion” i u mnogome liče na prva dva.

Brojna su pitanja koja su se javljala u istoriji matematike, budile su se inovativne ideje i logička misao je toliko snažna da nikada ne miruje.

6. ZABLUDE O MATEMATIČARIMA I JOŠ NEKI ISTORIJSKI PROBLEMI

Rasprostranjena je i misao među đacima da su matematičari ljudi posebnih psihičko-mentalnih sposobnosti – zanesenjaci i usamljenici, a njihove formule i obrasci da čine poseban svet stvari i pojava kojima se oni bave- kao neki srednjovekovni magovi ili alhemičari.

Istina je, međutim da su matematičari ipak samo ljudi, doduše sa veoma istančanim smislom za ramišljanje. Onaj ko nikada nije poznavao nekog profesionalnog matematičara može se malo iznenaditi kada upozna nekog. Samo posmatrajući kakva su vrsta ljudi bili neki od velikih matematičara i načina na koji su živeli možemo videti smešnu neistinu tradicionalnog tumačenja ličnosti matematičara.

Koliko god to bilo čudno, nisu svi veliki matematičari bili profesori na višim školama. Pojedinci su bili profesionalni vojnici, neki su ušli u matematiku iz teologije, neki su se bavili medicinom ili pravima. Nekolicina je bila čak i bez zanimanja. Jednako je čudno i to što nisu svi profesori matematike bili matematičari.

Međutim, njihovi načini života podsećaju nas na to da matematičar može biti ljudsko biće kao i svako drugi. Naravno, postoje čudaci i u matematici, ali ima ih i u drugim profesijama. Veliki matematičari bili su obični ljudi, svestrano sposobni, pažljivi, zainteresovani i za stvari izvan matematike. Oni su bili genijalni i razlikovali su se od ostalih samo zbog svoje neobuzdane strasti prema matematici. Takva strast matematičara je strast prema problemu, prema doslednosti mišljenja. Zainteresovanost, u neku ruku i zanesenost nije lišila matematičare života kakve vodi i ostatak sveta.

Zabavimo se sada jednim srednjovekovnim zadatkom o prelazu bračnih parova preko reke. Ovaj zadatak primamljivog karaktera upoznaće učenike sa veoma dugom istorijom problema koji su okupirali ljude, a u isto vreme kroz ideju o rešenju upoznaće se sa tadašnjim načinom razmišljanja koji nije ništa drugačiji od današnjeg.

Približiti istoriju znači upoznati matematiku.

Ovaj problem se pripisuje Alkuinu iz Jorka (8. vek) i poznatom italijanskom matematičaru Nikoli Tartalji (1550 - 1557).

Tri muškarca i njihove lepe supruge na svom putovanju došli su do reke. Preko reke je moguće preći u malom čamcu za dvoje. Dodatni problem stvorili su ljubomorni muževi; naime, nijedan od njih ne dozvoljava da se njegova supruga nađe u društvu jednog ili dvojice muškaraca bez njegovog prisustva, ni u čamcu, ni na obali. Na koji način će ova tri para da pređu reku u najmanjem broju prelaženja pod navedenim uslovima, podrazumevajući da i žene umeju da upravljaju čamcem?

Rešenje:

Jedno rešenje sa jedanaest prelazaka dao je Alkuin iz Jorka (8. vek). Ako označimo velikim slovima A, B, C muškarce, a malim slovima a, b, c njihove supruge, pri čemu isto slovo označava jedan bračni par, rešenje je predstavljeno sledećom tabelom:

	polazna obala	veslač(i)	dolazna obala
	ABCabc	–	–
1.	BCbc	→Aa	Aa
2.	ABCbc	←A	a
3.	ABC	→bc	abc
4.	ABCa	←a	bc
5.	Aa	→BC	BCbc
6.	ABab	←Bb	Cc
7.	ab	→AB	ABCc
8.	abc	←c	ABC
9.	c	→ab	ABCab
10.	Cc	←C	ABab
11.	–	→ Cc	ABCabc

Kroz ovakve i slične priče koje datiraju iz prošlosti deci se može objasniti i nastanak matematičke teorije. Priče iz prošlosti i problemi koji su mučili ljude od davnina imaju često interesantan sklop i jedinstvene ideje:

6.1. PROSTI BROJEVI I ERATOSTENOVO SITO

Najzanimljiviji deo iz teorije brojeva upravo se bavi izučavanjem prostih brojeva. Pri prvom susretu i pomenu prostih brojeva u školi, učenicima možemo pokazati kako da otkriju proste brojeve zanimljivom metodom starom vekovima.

Izdvajanje prostih brojeva iz skupa (ili nekog velikog inicijalnog segmenta) prirodnih brojeva najefikasnije je ako se primeni Eratostenovo sito. Tako se, naime, naziva drevni metod određivanja prostih brojeva koji je prvi primenio aleksandrijski matematičar Eratosten još u III veku pre nove ere. U napisanom nizu datih prirodnih brojeva treba, kao što je poznato, počinjući od broja 2, precrtati svaki drugi broj i tako eliminisati sve sadržaoce broja dva; pa onda, počinjući od prvog narednog neprecrtanog broja, tj. od broja 3, precrtati svaki još neprecrtani treći broj i tako eliministi i sve one sadržaoce broja 3 koji prethodno, zbog toga što nisu i sadržaoci broja 2, nisu bili eliminisani itd. sve dok se ne precrtaju svi složeni brojevi. Neprecrtani brojevi su traženi prosti brojevi.

Američki matematičar S. M. Ulam je u proizvoljno polje (kvadratić) kvadratne mreže upisao broj 1. Posle toga je, krećuči se po spirali, u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, u kvadratiće redom upisivao brojeve 2, 3, 4 itd.

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

Zatim je, da bi odvojio proste brojeve od složenih, šrafirao kvadratiće sa prostim brojevima. Tako nastala spirala je dobila naziv Ulamova spirala, koja je data na slici:

Sa slike lako se mogu uočiti sledeće zanimljivosti:

1) Označeni kvadratići na Ulmanovoj spirali javljaju se duž pravih.
2) Na Ulmanovoj spirali nema dva šrafirana kvadratića koji imaju zajedničku stranicu, osim kvadratića sa brojem 2 i dva njemu susedna kvadratića.
3) Na Ulmanovoj spirali osim kvadratića sa brojem 12, nema ni jednog kvadratića koji se dodiruje sa više od 4 šrafirana kvadratića.

A kada smo kod prostih brojeva , prirodno se nameće pitanje:

Koliko ima prostih brojeva, odnosno da li postoji najveći prost broj?

Pretpostavimo da postoji najveći prost broj, recimo n, i da je svaki broj veći od n složen.

Kada proizvod svih prostih brojeva od 2 do n uvećamo za 1, onda prema navedenoj pretpostavci dobijamo neki složen broj $k= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n+1$, koji mora biti deljiv bar jednim prostim brojem. Međutim pri deljenju broja k ma kojim prostim brojem od 2 do n dobija se ostatak 1. Otuda broj k, ako je zaista složen, mora biti deljiv nekim prostim brojem većim od n, a takav broj po našoj pretpostavci ne postoji, pa iz toga sledi da ta pretpostavka nije istinita.

Prema tome, skup prostih brojeva ima beskonačno mnogo elemenata, što je još u III veku pre n.e. dokazao grčki matematičar Euklid.

7. DOKAZIVANJE TEOREMA NA VIŠE NAČINA

Poznato je da se mnoge geometrijske teoreme mogu dokazati na više načina. Tako se već zna da je za Pitagorinu teoremu nađeno više od 100 dokaza. Za utvrđivanje tačnosti jedne teoreme nije neophodno da bude dokazana na više načina, jer čim je ona dokazana na jedan način njena tačnost je nesumnjiva. Međutim, dokazivanje na više načina istinitosti ili neistinitosti nekog tvrđenja je interesantno i ima posebnu vrednost: teorema se duže pamti i ne svodi se samo na njeno mehaničko zapamćivanje, već pomaže i u drugim prilikama da se logički korektno i naučno zasnovano izgrađuju i dokazuju tvrđenja koja se ističu. Na primeru ćemo pokazati kako se to može učiniti:

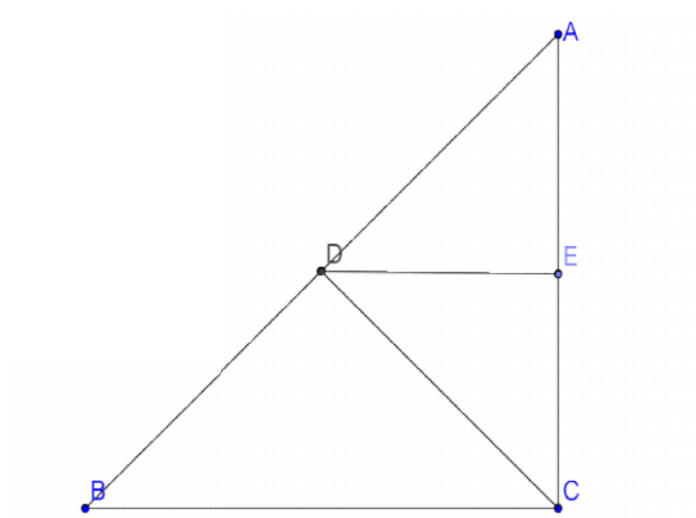
Teorema 1. Ako je trougao pravougli, težišna linija koja je povučena iz temena pravog ugla do hipotenuze jednaka je polovini hipotenuze.

Pretpostavka: Trougao ABC je pravougli, a CD je težišna linija koja odgovara hipotenuzi AB.

Treba dokazati da je AB = 2CD.

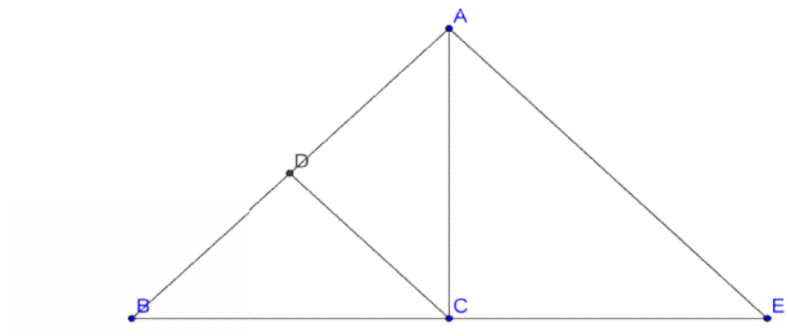
Dokaz 1. Neka je E sredina stranice AC (slika 1). Tada je DE srednja linija trougla ABC, pa je

$DE \parallel BC$ i $DE \perp AC$. Na osnovu toga je ΔADE ΔCDE (pošto su katete jednog od ova dva trougla jednake katetama drugog) i AD = CD, odnosno AB = 2CD, što je i trebalo dokazati.



Slika 1

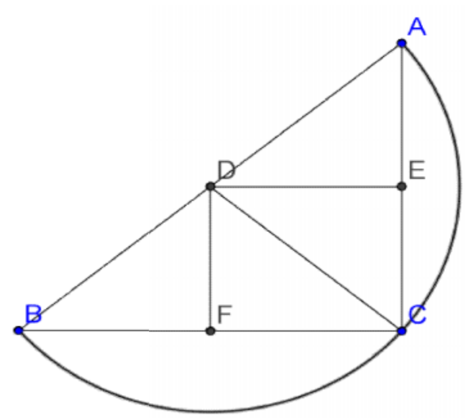
Dokaz 2. Odredimo tačku E simetričnu tački B u odnosu na AC (slika 2). Tada je AB = AE. Iz činjenice da je AE =2CD (jer je CD srednja linija trougla ABE) sledi i AB = 2CD, kako se to i



tvrdilo.

Slika 2

Dokaz 3. Kod pravouglog trougla simetrale kateta poklapaju se sa dvema srednjim linijama trougla, što znači da se njihov presek- a samim tim i centar opisanog kruga oko trougla- nalazi u središtu hipotenuze (slika 3).Opisani krug prolazi kroz sva tri temena trougla, te je zato AD=BD=CD AB = 2CD.



Slika 3

Teorema 2. Ako je jedna težišna linija u trouglu polovina stranice na koju je povučena, onda je ugao naspram te stranice prav, a trougao je pravougli.

Dokaz 1. Ako je E sredina stranice AC (slika 1), onda su tačke D i E na simetrali stranice AC (pošto je svaka od njih jednako udaljena od A i C), pa je ugao DEA prav. Duž DE je srednja linija trougla ABC, usled čega je DEII BC, pa je BC$\perp$AC, tj. trougao ABC je pravougli.

Dokaz 2. Produžimo BC preko C do E, tako da je BC = CE (slika 2). Spajanjem A i E dobijamo trougao ABE kod koga je AB = AE. Po pretpostavci je AB=2CD, a CD je srednja linija trougla ABE po konstrukciji. Trouglovi ABC i AEC su podudarni (3. Pravilo podudarnosti). Kako je ugao BCA jednak uglu ECA, a sem toga je sa njim suplementan, to je ugao BCA prav.

Dokaz 3. Pošto je po pretpostavci, AD= BD= CD, to tačke A, B i C pripadaju krugu čiji je centar D (slika 3). Periferijski ugao ACB je polovina centralnog ugla ADB, jer su nad istim lukom kruga, a kako je ugao ADB ravan, to je ugao ACB prav.

Napomenimo još, na kraju, da su Teorema 1 i Teorema 2 dve međusobno obratne teoreme. Naime, pretpostavka prve teoreme je zaključak druge i obratno.

8. MATEMATIKA U ŠKOLAMA = MEMORISANJE, IMA LEKA!

Izučavanje matematike kao nauke u školama svodi se na rešavanje zadataka (ukoliko i teoreme posmatramo kao jedinstvene zadatke) i stoga je osposobljavanje učenika za kvalitetno rešavanje matematičkih zadataka i glavni cilj nastave matematike i predstavlja osnovu matematičke pismenosti i obrazovanja.

Podaci OECD-a [4] govore da će narednih dvadeset godina 80% zanimanja zahtevati bar elementarni nivo naučno-tehnološke pismenosti, što znači da je matematika potrebna svima. Nezavisno od posla ona je opšte prisutna u svakodnevnom životu. Kako kaže Thomas Garrity- We should use mathematcal maturity to shape our teaching, our children and our careers. (videti [5])

Ali, iz nekog razloga učenici se uglavnom žale na matematiku. U čemu je problem? Da li se nedovoljno insistira na razumevanju gradiva? Prijemni iz matematike za upis u srednje škole govori dovoljno. Sveska sa oko 400 zadataka od kojih se na prijemnom dobije oko 20 izabranih, a i pored te činjenice rezultati prijemnih ispita su više nego loši?! Kako je to moguće? Ostaju upamćeni lakši zadaci i oni uglavnom i bivaju rešeni na prijemnom ispitu, dok za teže nije bilo „mesta u memoriji" i stoga đaci ne umeju da ih reše. Noviji zakon čak ne uključuje postupak u pregledanje, gleda se samo krajnji rezultat. 2011. godine od 18 zadataka za nih 14 nije potreban postupak izrade! Kako onda uopšte znati da đak ume da reši zadatak? Insistirali su da ne priznaju rešenja zadataka koji su bili ispisani olovkom, a prihvatali su rezultate koji su bili tačni iako je sam postupak bio netačan ili ga uopšte nije bilo! O kakvom obrazovanju je ovde reč?!

Budimo interesantni. Naučimo učenike da razmišljaju i birajmo zadatke koje će zavoleti!

Mi smo "u jednačinama", aktuelna godina je 2012. Zašto onda ne bismo napravili idealan spoj?

[4] Organisation for Econmic Co-operation and Development

PRIMER:

Ako je x^2+x +1 = 0, odrediti vrednost izraza

M(x) = $x^{-2012} + x^{-2011} + x^{2011} + x^{2012}$

Rešenje:

Iz jednakosti $x^2 + x$ +1 = 0 , sledi da je

$x^2 + x$ = -1 i (x - 1) · ($x^2 + x$ +1)= x^3 -1 = 0

Odavde sledi da je

M(x) = $x^{-2012} + x^{-2011} + x^{2011} + x^{2012}$

= $(x^3)^{-671} \cdot x + (x^3)^{-671} \cdot x^2 + (x^3)^{670} \cdot x + (x^3)^{670} \cdot x^2$.

Kako je x^3 -1 = 0, tj. x^3 = 1, sledi da je

M(x) = $x^{-2012} + x^{-2011} + x^{2011} + x^{2012} = x + x^2 + x + x^2$ = - 2.

Brojni su načini da se časovi matematike učine zanimljivim.Takođe, nastavnik treba da podstiče učenike na samostalan rad i aktivnost u rešavanju matematičkih zadataka, da sami dolaze do zaključaka i rešenja.

Naime, potrebno je kod učenika probuditi određen interes i razviti određene misaone operacije koje bi omogućile učeniku opšti pristup problemu, a ne pristup isključivo vezan za odgovarajuću rutinu ili šablon (što je čest slučaj u današnjem školovanju). Da bi se interesovanje učenika pobudilo, potrebno je da nastavnik:

- ukaže na širinu primene matematike, da pokaže učenicima u kojim se naukama i područijima ljudske delatnosti primenjuje matematika i to korišćenjem primera iz raznih oblasti; to može da pobudi interesovanje za matematiku kod učenika, a naročito ako se uzimaju primeri iz onih oblasti za koje učenici pokazuju posebno interesovanje.
- pokaže korist i prednost matematike u rešavanju konkretnih problema; može se naći veliki broj primera u kojima se primenom matematike jednostavnije i uspešnije rešavaju određene problemske situacije.
- ukaže na vrednost matematike u vaspitanju, u formiranju pozitivnih crta ličnosti; posebno se to može postići konkretnim ukazivanjem na ulogu matematike u izgradnji logički korektnog načina mišljenja, uočavanja funkcionalnih veza, sposobnosti kombinovanja i predstavljanja u prvom redu sposobnosti prostornog predstavljanja, apstrahovanja, generalizovanja itd.

- izabere postupke koji bude interesovanje kod učenika; matematički postupci sami u sebi sadrže mnoge za učenike privlačne ishode, kao što su u prvom redu mogućnosti-racionalizacije, sistematičnosti, tačnosti, preglednosti itd.
- izabere sadržaje koji privlače pažnju učenika i u stanju su da ih zainteresuju.

Sve to zajedno znači da je u cilju postizanja željenog uspeha u nastavi matematike potrebno pre svega stvoriti kod učenika interesovanje i **ljubav prema matematici**.

9. RECITE NAM SADA- ZAŠTO MATEMATIKA?

Morate priznati da je ovo najučestalije pitanje među školskom decom. Oni pitaju nas, a odgovor su dali "veliki" ljudi:

Priroda je ogromna knjiga u kojoj je napisana nauka. Ona je stalno otvorena pred našim očima, ali je čovek ne može razumeti ukoliko prethodno ne nauči jezik i slova kojim je napisana. A napisana je jezikom matematike.

Galio Galilej

Matematika je ključ za celokupno ljudsko znanje.

Leonard Ojler

Nadahnuće je potrebno u poeziji kao i u geometriji.

Aleksandar Puškin

Najveće zadovoljstvo u proučavanje matematike jeste razumevanje, bez njega znanje malo znači.

Leopold Infeld

Mi nikada ne postajemo matematičari, čak i ako naučimo napamet sve tuđe dokaze, ako naš um nije osposobljen da samostalno rešava postavljene probleme.

Rene Dekart

Matematičke formule više ne opisuju prirodu već naše poznavanje prirode.

Verner Hajzenberg

Matematika- to je jezik kojim govore sve prirodne nauke. Ne postoji ni jedna matematička oblast, ma kako ona apstrakta bila, koja se ne bi mogla primeniti na pojave realnog sveta.

Nikolaj Lobačevski

LITERATURA:

[1]Andrew, H., *Is Algebra Necessary?*, July 28, 2012., www.nytimes.com

[2]Anić, I., *Kognitivni procesi u rešavanju matematičkih problema u realnom kontekstu*, doktorska disertacija, Novi Sad, 2011.

[3]Baucal, A., Pavlović, B.D., *Nauči me da mislim, nauči me da učim*, 2009., www.pisaserbia.org

[4]Dejić, M., Dejić B., *Zanimljivi svet matematike*, Nolit, Beograd, 1995.

[5]Garrity, I., *Using Maths*, Notices of the American Mathematical Society, December 2011., 1592- 1593.

[6]Maroti, M., *Mozgonetke*, Mladinska knjiga, Beograd, 2011.

[7]Milovanović, J., *Uloga matematičkih zadataka u nastavi matematike*,Lotospros, Šabac, 2008.

[8]Miočinović, Lj., *Pijažeova teorija intelektualnog razvoja*, Institut za pedagoška istraživanja, Beograd, 2002.

[9]Nikolić, M., *Vaspitanje u nastavi matematike u osnovnoj školi*, Naučna knjiga, Beograd, 1969.

[10]Petković, M., *Zanimljivi matematički problemi velikih matematičara*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2008.

[11]Petrović, N., Pinter, J., *Metodika nastave matematike*, Minerva, Subotica 2006.

[12]Romano, D., *O motivima izučavanja matematičkog mišljenja*, Nastava matematike, broj 53, 2008., 1-11

[13]Simić, B., Milošević, D., *Zanimljiva matematika*, Arhimedes, Beograd, 2005.

[14]Smijanović, D., Vesić, N., *Zanimljivi algebarski zadaci sa brojem 2012* , Nastava matematike, broj 57, 2012., 45-51 str.

[15]Trninić, M., *Logičko zaključivanje u nastavi matematike*, Art print, Banja Luka, 2000.

BIOGRAFIJA:

Mirčov Milena rođena je 01.11.1986. godine u Zrenjaninu. Osnovnu školu „Uroš Predić“ završila je u Orlovatu sa odličnim rezultatom i Vukovom diplomom. 2001. godine upisala je „Zrenjaninsku gimnaziju“ prirodno- matematički smer i završila je 2005. godine sa odličnim uspehom. Iste godine upisala se na Departman za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, smer profesor matematike. Položila je sve ispite predviđene planom i programom i tako stekla uslov za odbranu diplomskog rada.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Diplomski rad

VR

Autor: Mirčov Milena

AU

Mentor: dr Rozalija Madaras- Silađi

MN

Naslov rada: Razvijanje sposobnosti logičkog rezonovanja kroz rešavanje matematičkih zadataka

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski

JI

Zemlja publikacije: Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2012.

GO

Izdavač: autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

MA

Fizički opis rada: (9/38/4/2/5/0/0)

(broj poglavlja/ strana/ lit. citata/ tabela/ slika/ grafika/ priloga)

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina:

ND

Ključne reči: PISA test, matematičko mišljenje, rešavanje matematičkih zadataka, izučavanje matematike u školama, paradoksi, teoreme, dokazi.

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku

Prirodno-matematički fakultet,

Novi Sad

Važna napomena: Nema

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 9. 7. 2012.

DP

Datum odbrane: 14. 9. 2012.

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr. Milan Grulović, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Član: dr. Dragoslav Herceg, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

Mentor: dr. Rozalija Madaras-Silađi, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORD DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph documentation

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Contents code: Graduation thesis

CC

Author: Mirčov Milena

AU

Mentor: Ph.D Rozalija Madaras-Silađi,

Full profesor

Title: Developing of the Ability of Logical Reasoning Through the Mathematical Problem Solving

TI

Language of the text: Serbian (latin)

LT

Language of the abstract: English

LA

Country of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2012.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Novi Sad, Trg D. Obradovića 4

PP

Physical description: (9/38/4/2/5/0/0)

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientific discipline:

SD

Subject Key words: mathematical thinking, PISA tests, teaching of mathematics, problem solving, paradoxes, theorems, proofs.

SKW

UC

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

AB

Accepted on Scientific board on: 9. 7. 2012

Defended: 14. 9. 2012

DE

Thesis Defend board:

President: Ph.D. Milan Grulović,

Full profesor, PMF, Novi Sad

Member: Ph.D. Dragoslav Herceg,

Full profesor, PMF, Novi Sad

Mentor: Rozalija Madaras- Silađi,

Full profesor, PMF, Novi Sad