UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Samir Zahirović

STEPENE STRUKTURE I DOBRE FAKTOR RELACIJE

-master teza-

Novi Sad, 2013

Sadržaj

Predgovor

Stepenu strukturu dobijamo "podizanjem" strukture, koja postoji među elementima datog skupa, na nivo podskupova tog skupa. Sličnom konstrukcijom dobijaju se fazi stepene strukture: operacije i fazi relacije na X proširuju se na operacije i fazi relacije na skup $\mathcal{F}(X)$ fazi podskupova od X. Za datu algebru $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ konstruišemo stepenu algebru sa nosačem $\mathcal{F}(X)$ na dva načina: pomoću tenzorskog proizvoda konstruišući na taj način fazi stepenu strukturu $\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$, i pomoću Dekartovog proizvoda konstruišući stepenu strukturu $\mathcal{F}^+(\mathcal{X})$. Ovaj rad će se baviti obema ovim strukturama.

Prvo poglavlje sadrži definiciju reziduiranih mreža, kao i definicije nekih specijalnih klasa reziduiranih mreža. U ovom poglavlju dokazujemo neke osnovne osobine ovih struktura koje će nam biti od velike važnosti za proučavanje fazi struktura u nastavku ovog rada, i navodimo brojne primere.

U drugoj glavi definišemo neke od ključnih pojmova za ovaj rad: fazi podskupove i fazi relacije. U ovoj glavi takođe definišemo i osnovne osobine fazi relacija: refleksivnost, simetričnost i tranzitivnost, kao i fazi preduređenja. Ovoj klasi fazi relacija biće posvećena posebna pažnja u ovom radu. U ovoj glavi uvodimo i brojne druge pojmove koji će nam biti neophodni za proučavanje fazi struktura, i dokazujemo brojna tvrđenja.

U trećoj glavi, radi podsećanja, navodimo definicije "crisp" stepenih struktura čije su fazi stepene strukture uopštenje. Takođe definišemo i fazi stepene strukture - najpre fazi stepene algebre u poglavlju 2, a zatim i fazi relacijske strukture u poglavlju 3.

Četvrta glava bavi se fazi stepenim relacijama definisanim pomoću tenzorskog proizvoda. Ovde uvodimo definiciju dobre fazi relacije, Hoare dobre fazi relacije i Smyth dobre fazi relacije, i dokazujemo da su za svako fazi preduređenje R na X sledeća tvrđenja ekvivalentna:

- R je saglasna na $\mathcal{X}$;
- R je Hoare dobra na $\mathcal{X}$;
- R je Smyth dobra na $\mathcal{X}$,

pri čemu je saglasnost korišćena u ovoj glavi definisana putem multiplikacije reziduirane mreže.

Peta glava se bavi fazi stepenim strukturama definisanim pomoću Dekartovog proizvoda, i prilikom definisanja Hoare dobre fazi relacije i Smyth dobre fazi relacije koristimo $\wedge$-saglasnost (saglasnost definisana pomoću operacije $\wedge$ reziduirane mreže). Ovde uopštavamo rezultate Georgescua. Naime, pokazujemo da za svako fazi predurеđenje R i za svaku kompletnu reziduiranu mrežu $\mathcal{L}$ važi:

- Ako je R Smyth dobra na $\mathcal{X}$, tada je R $\wedge$-saglasna relacija na $\mathcal{X}$,

i ako je $\mathcal{L}$ Hejtingova algebra, tada za svako predurеđenje R važi:

- Ako je R $\wedge$-saglasna na $\mathcal{X}$, tada je R Hoare dobra na $\mathcal{X}$.

Na kraju želim da izrazim zahvalnost dr Ivici Bošnjaku i dr Petru Đapicu na savetima i korisnim sugestijama. Najveću zahvalnost dugujem svom mentoru, dr Rozáliji Madarász Szilágyi, kako na odabiru ovako zanimljive teme, tako i na ažurnosti i svesrdnoj pomoći.

Samir Zahirović

Uvod

Prema Birkhoffu, pojam stepene algebre potiče od Frobeniusa. On je za proizvoljnu grupu $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ konstruisao algebru $(\mathcal{P}(G), \circ)$, gde je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup skupa G, a operacija $\circ$ definisana sa $H \circ K = \{h \cdot k \mid h \in H, k \in K\}$, za $H, K \in \mathcal{P}(X)$. Ovakva definicija može se lako preneti i na algebre sa više operacija proizvoljne arnosti. Kako se podskup nosača grupe zove i kompleks, algebre konstruisane na ovakav način često se nazivaju "algebre kompleksa", a takođe se koristi i termin "global algebre".

Danas se konstrukcija stepene algebre koristi i u raznim drugim oblastima matematike. Na primer kod distributivnih mreža operacije među idealima su u stvari "stepeni" operacija same mreže. U intervalnoj aritmetici, u cilju analize grešaka kod numeričkih izračunavanja, operacije sa skupa realnih brojeva prenosimo na odgovarajuće intervale realnih brojeva.

Jedno od osnovnih pitanja teorije stepenih algebri jeste koje se osobine osnovne strukture prenose na odgovarajuću stepenu strukturu. Gautam je pedesetih godina dvadesetog veka dao prvi prilog ovoj temi: on je opisao sve varijetete definisane jednim identitetom koji su zatvoreni u odnosu na formiranje stepene algebre. Grätzer i Lakser s druge strane, daju odgovor na pitanje koji se sve identiteti prenose sa verijeteta na odgovarajući varijetet stepenih algebri i koriste taj rezultat da odrede sve varijetete određene stepenim algebrama grupa i mreža.

Prirodna generalizacija gore opisanih stepenih algebri jesu stepene algebre relacijskih struktura. Naime, svaka relacija na X arnosti $n + 1$ određuje $n + 1$ n-arnih operacija na $\mathcal{P}(X)$. Ovu konstrukciju upotrebljavaju Jónson i Tarski pri proučavanju Bulovih algebri sa operatorima.

Relaciji na skupu X možemo na više načina pridružiti odgovarajuću relaciju iste arnosti na $\mathcal{P}(X)$. Opštu definiciju "stepene relacije" dao je S. Whitney u svojoj doktorskoj tezi 1997. godine. Takođe, na drugačiji način, i G. Czédli i Pollák, za konačan parcijalno uređen skup $(X, \leq)$, definišu relaciju na $\mathcal{P}(X)$ na sledeći način: $A \leq^+ B$ akko postoji injekcija $\varphi : A \to B$ takva da važi $x \leq \varphi(x)$ za svako $x \in A$. Tako se postiže da $(\mathcal{P}(X), \leq^+)$ takođe bude parcijalno uređen skup.

Chris Brink je prvi autor koji je uvideo nedostatak jednog opštijeg prilaza ovoj tematici. On je posmatrao stepene konstrukcije kao celovitu oblast koja je vredna izučavanja sama po sebi.

Danas je podizanje matematičke strukture sa nosača X na partitivni skup $\mathcal{P}(X)$ jedna od klasičnih tema univerzalne algebre. Svaka algebra $\mathcal{X} = (X, \{f \in \mathbb{F}\})$ određuje stepenu algebru $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = (\mathcal{P}(X), \{f^+ \in \mathbb{F}\})$ istog tipa, i opštije: svaka struktura $\mathcal{X} = (X, \{f \in \mathbb{F}\}, \{R \in \mathbb{R}\})$ određuje stepenu strukturu $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = (\mathcal{P}(X), \{f^+ \in \mathbb{F}\}, \{R^+ \in \mathbb{R}\})$, pri čemu su f^+ i R^+ "stepena operacija" i "stepena relacija" određeni operacijom f i relacijom R na X, respektivno. Na ovakav način definisan je pojam stepene algebre, čija je svojstva Brink sistematično proučavao u svojim radovima [12] i [13]. Osobine struktura koje se mogu prenositi na njihove stepene strukture proučavane su u [10] i [11], kao i u [7], [8], i [9].

G. Georgescu je u [4] uopštavao rezultate Rozálije Madarász i Ivice Bošnjaka iz [10], [11], [7], [8] i [9] proučavajući fazi stepene strukture. On je kao fazi konjunkciju koristio neprekidnu t-normu, i, u nekim slučajevima, minimum t-normu. Fazi stepenu strukturu konstruisao je pomoću Dekartovog proizvoda fazi podskupova.

H. Lai i D. Zhang su u [5] takođe uopštavali rezultate Rozálije Madarász i Ivice Bošnjaka, ali koristeći proizvoljnu reziduiranu mrežu kao strukturu istinitosnih vrednosti, a fazi stepene strukture konstruisali su koristeći tenzorski proizvod fazi podskupova.

Reziduirane mreže uveli su Ward i Dilworth 1939. godine u [14]. Još je nekoliko naziva korišćeno za reziduirane mreže: Birkhoff je koristio naziv "integralni komutativni reziduirani l-monoid", Blyth i Janowitz su koristili su naziv "reziduirana Abelova semigrupa sa jedinicom", a Höhle je koristio naziv "semigrupa uređena kao komutativna kompletna mreža". Pojam BL-algebre uveo je Hájek u [15] 1998. godine (BL je skraćeno "basic logic") kao uopštenje Lukasiewicz, produkt i Gödel logike - logičkih sistema koji kao konjunkciju imaju tri osnovne t-norme. MV algebre uveo je Chang u [17] i [18] objavljenim 1958. i 1959. godine (MV je skraćeno "many valued"). Naša definicija MV-algebre je pojednostavljena verzija originalne Changove definicije, a koju je uveo Mundici 2000. godine u [19]. U ovom radu Mundici detaljno istražuje MV-algebre. Produkt algebre uvedene su 1996. godine u [16]. Gödelove algebre uveo je Gödel 1932. godine, a Heytingove algebre uveo je Heyting 1930. godine. Girardov (Žirarov) monoid, pojavljuje se u takozvanoj linearnoj logici 1987. godine, koji je od velikog značaja za kompjutersku nauku.

Pojam t-norme pojavio se prilikom proučavanja verovatnosnih metričkih prostora, koji su se do 1964. godine zvali statistički metrički prostori. T-norma je skraćeno "trougaona norma" ("traingular norm"). Metričke prostore verovatnoće uveo je Menger 1942. godine u radu "Statistical metrics" gde su se pojavili neki postulati slični onima od t-normi, a značajno su ih razradili Schweiger i Sklar. Upravo su Schweiger i Sklar uveli pojam t-norme 1960. godine u [20]. Primetimo da su u prvobitnom pristupu, vrednosti iz intervala $[0, 1]$ na kome je t-norma definisana bile tumačene kao verovatnoće, a ne kao istinitosne vrednosti. T-norme su dobro obrađene u [21]. Standardne algebre na $[0, 1]$ imaju sledeću značajnu osobinu: identitet je tačan u standardnoj Lukasiewitzevoj (produkt, Gödelovoj) algebri akko je on tačan na klasi svih MV-algebri (produkt, Gödelovih). Važi i analogno tvrđenje za BL-algebre: identitet je tačan u svim reziduiranim mrežama na $0, 1$ koju određuje neprekidna t-norma akko je tačan u svim BL-algebrama. Dok je upotreba t-norme kao viševrednosne konjunkcije više-manje standardna, postoje takođe i drugi pristupi viševrednosnim implikacijama osim reziduuma t-normi.

Glava 1

Reziduirane mreže

Definicija 1.1 Reziduirana mreža *je algebra* $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ *koja zadovoljava sledeće uslove:*

1. $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ *je ograničena mreža;*

2. $(L, *, 1)$ *je komutativan monoid;*

3. *Svojstvo adjungovanosti, odnosno:*

$$(\forall x, y, z \in L)(x * y \leq z \Leftrightarrow x \leq y \to z)$$

gde je $\leq$ *mrežno uređenje.*

Uređeni par $(*, \to)$ *nazivamo adjungovani par. Operaciju* $*$ *nazivamo* **multiplikacija**, *a* $\to$ *nazivamo* **reziduum**, *a takođe koristimo i izraz "implikacija".*
$\mathcal{L}$ *je* **kompletna reziduirana mreža** *ako je* $(L, \wedge, \vee)$ *kompletna mreža.*

Primer 1.2 *Neka je* $\mathcal{R} = (R, +, \cdot, 0, 1)$ *komutativni prsten sa jedinicom, i obeležimo sa* $\mathcal{I}(R)$ *skup svih ideala od* R. *Definišimo operacije* $*$ *i* $\to$ *na* $\mathcal{I}(R)$ *na sledeći način:*

$$I * J = \left\{ \sum_{k=1}^{n} i_k \cdot j_k \mid n \in \mathbb{N}, i_k \in I, j_k \in J \right\}$$

$$I \to J = \left\{ k \in R \mid i \cdot k \in J \textit{za svako } i \in I \right\}.$$

Tada je $(\mathcal{I}(R), \cap, \vee, *, \to, \{0\}, R)$ *kompletna reziduirana mreža.*

Dokaz. Poznato je da je $(\mathcal{I}(R), \cap, \vee, \{0\}, R)$ kompletna i ograničena mreža, gde je $I \vee J = I + J = \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$. Naime, ako su su I i J ideali prstena R, tada trivijalno važi da je $I \cap J$ takođe ideal prstena R, i da je to najveći podprsten sadržan u I i J. Dalje, poznato je da važi $I, J \trianglelefteq R \Rightarrow I + J \trianglelefteq R$, te trivijalno važi da je $I + J$ najmanji ideal koji sadrži I i J, odnosno $I + J = I \vee J$. Ovim smo pokazali da $(\mathcal{I}(R), \cap, \vee)$ jeste mreža. Kako za proizvoljnu familiju ideala $\{J_k \mid i \in I\}$ važi da je $\bigcap_{i \in I} J_i$ takođe ideal, sledi da je $(\mathcal{I}(R), \cap, \vee)$ kompletna mreža. Trivijalno važi da su $\{0\}$ i R najmanji i najveći element.

Pokažimo zatim da su operacije $*$ i $\to$ dobro definisane. Najpre, dokažimo ovo za $*$. Naime, ako $a, b \in I * J$, trivijalno važi $a + b \in I * J$, i $-a \in I * J$. Dalje, za $a \in I * J$ i za $r \in R$ važi $a \cdot r = \left(\sum_{k=1}^{n} i_k \cdot j_k\right) \cdot r = \sum_{k=1}^{n} \left((i_k \cdot j_k) \cdot r\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(i_k \cdot (j_k \cdot r)\right) \in I * J$, jer $j_k \cdot r \in J$ za svako $k \in \{1, ..., n\}$, zato što je J ideal. Kako je $\mathcal{R}$ komutativan prsten, sledi da i $r \cdot a \in I * J$. Ovim smo pokazali da $I * J$ jeste ideal.

Dokažimo da je i operacija $\to$ dobro definisana. Ako $a, b \in I \to J$ i $i \in I$, tada važi $i \cdot (a + b) = i \cdot a + i \cdot b \in J$, te da $a + b \in I \to J$. Trivijalno važi da ako $a \in I \to J$, tada važi $-a \in I \to J$. Dalje, neka $a \in I \to J$ i neka $r \in R$. Tada, za svako $i \in I$ važi $i \cdot (a \cdot r) = (i \cdot a) \cdot r = j \cdot r \in J$, jer je J ideal, te sledi $a \cdot r \in I \to J$. Analogno se pokazuje i da važi i $r \cdot a \in I \to J$, te sledi da $I \to J$ jeste ideal, te operacije $*$ i $\to$ jesu dobro definisane.

Kako je $\cdot$ komutativna i asocijativna operacija, sledi da je i $*$ komutativna i asocijativna, i lako se uočava i to da je R jedinični element u $(\mathcal{I}(R), *)$. Preostaje još da se pokaže da su $*$ i $\to$ adjungovane operacije. Neka su $I, J, K \trianglelefteq R$. Pretpostavimo da važi $I * J \leq K$ - tada sledi da za svako $i \in I$ i za svako $j \in J$ važi $j \cdot i = i \cdot j \in K$, zbog komutativnosti prstena R. Dakle, za svako $i \in I$ važi $i \in J \to K$, te sledi $I \subseteq J \to K$, odnosno $I \leq J \to K$. Pretpostavimo sada da važi $I \leq J \to K$, za neke $I, J, K \trianglelefteq R$. Odavde, za svako $i \in I$ i za svako $j \in J$ sledi $i \cdot j = j \cdot i \in K$. Tada, trivijalno za sve $i_1, ..., i_n \in I$ i za sve $j_1, ..., j_n \in J$ važi $\sum_{k=1}^{n} (i_k \cdot j_k) \in K$, čime je pokazano da $(\mathcal{I}(R), \cap, \vee, *, \to, \{0\}, R)$ jeste kompletna reziduirana mreža. $\square$

Primer 1.3 *Algebra* $([0,1], \wedge, \vee, 0, 1)$ *jeste ograničena kompletna mreža, gde je* $[0,1]$ *jedinični interval realnih brojeva, i* $a \wedge b = \min(a, b)$ *i* $a \vee b = \max(a, b)$. *Sledeće tri strukture jesu reziduirane mreže:*

1. $([0,1], \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$, *gde je:*
   - $a * b = \max(a + b - 1, 0)$;
   - $a \to b = \min(1 - a + b, 1)$;

   (Lukasijevičeva struktura)

2. $([0,1], \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$, *gde je:*
   - $a * b = \min(a, b)$;
   - $a \to b = 1$ *ako* $a \leq b$, *odnosno* $a \to b = b$ *ako* $a > b$;

   (Gedelova struktura)

3. $([0,1], \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$, *gde je:*
   - $a * b = a \cdot b$;
   - $a \to b = 1$ *ako* $a \leq b$, *odnosno* $a \to b = \frac{b}{a}$ *ako* $a > b$;

   (produkt struktura)

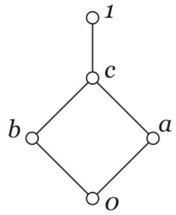
Primer 1.4 *Neka je* $L = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ *sa uređenjem* $0 = a_0 < a_1 < ... < a_n = 1$, *i važi* $a_i \wedge a_j = a_{\min(i,j)}$ *i* $a_i \vee a_j = a_{\max(i,j)}$. *Tada sledeći parovi* $*$ *i* $\to$ *determinišu reziduirane mreže:*

1. *Lukasijevičeva struktura:*
   - $a_i * a_j = a_{\max(i+j-n,0)}$;
   - $a_i \to a_j = a_{\min(n-i+j,1)}$;

2. *Gedelova struktura:*
   - $a_i * a_j = a_{\min(i,j)}$;
   - $a_i \to a_j = 1$ *ako* $i \leq j$, *odn.* $a_i \to a_j = a_j$ *ako* $i > j$;

Za $n = 1$ obe ove strukture jesu Bulova algebra.

Primer 1.5 *Neka je $L = \{0, a, b, c, 1\}$, i neka je $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ mreža sa slike. Neka je operacija $*$ na L data sa $x * y = x \wedge y$, i neka je $\rightarrow$ definisana na sledeći način: $x \rightarrow y = y$ za $x > y$, $x \rightarrow y = 1$ ako $x \leq y$, $a \rightarrow b = b$ i $b \rightarrow a = a$. Tada važi da je struktura*



$$\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$$

reziduirana mreža.

Lema 1.6 *U reziduiranoj mreži, operacija $*$ je jednoznačno određena operacijom $\rightarrow$. Takođe, operacija $\rightarrow$ je jednoznačno određena operacijom $*$.*

Drugim rečima, ukoliko je $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ ograničena mreža, i ukoliko je $\rightarrow$ operacija na L, tada postoji najviše jedna operacija $*$ na L takva da je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ reziduirana mreža. Takođe, ukoliko je $*$ operacija na L, tada postoji najviše jedna operacija $\rightarrow$ na L, takva da je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ reziduirana mreža. Dokažimo sada ovu lemu.

Dokaz. Pokažimo da je $\rightarrow$ jednoznačno određena operacijom $*$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za datu operaciju $*$ postoje dve različite operacije $\rightarrow_1$ i $\rightarrow_2$, koje obe zadovoljavaju uslove iz gornje definicije. Dakle, postoje $y, z \in L$ takvi da važi $x_1 = y \rightarrow_1 z$, $x_2 = y \rightarrow_2 z$ i $x_1 \neq x_2$. Međutim, kako su operacije $*$ i $\rightarrow$ adjungovane, za x_1 važi:

$$x_1 \leq y \rightarrow_1 z \text{ akko } x_1 * y \leq z \text{ akko } x_1 \leq y \rightarrow_2 z \text{ akko } x_1 \leq x_2,$$

i na analogan način pokažemo da je $x_2 \leq x_1$, a odakle sledi $x_1 = x_2$.

Na sličan način može da se pokaže i da je $*$ jedinstveno određena operacijom $\rightarrow$ - koristeći svojstvo adjungovanosti. □

Definicija 1.7 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \rightarrow, 0, 1)$ reziduirana mreža. Tada:*

1. *$\mathcal{L}$ zadovoljava* **aksiomu prelinearnosti** *ako zadovoljava identitet*

$$(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1;$$

2. *$\mathcal{L}$ je* **deljiva reziduirana mreža** *ako zadovoljava identitet*

$$x \wedge y = x * (x \rightarrow y);$$

3. *U $\mathcal{L}$ važi* **zakon dvojne negacije** *ako $\mathcal{L}$ zadovoljava identitet*

$$x = (x \rightarrow 0) \rightarrow 0;$$

4. *U $\mathcal{L}$ važi* **zakon idempotentnosti** *ako je operacija $*$ idempotentna na $\mathcal{L}$.*

U reziduiranoj mreži, operacija $\rightarrow$ determiniše unarnu operaciju $\neg$, gde je:

$$\neg a = a \rightarrow 0, a \in L$$

koja se zove **negacija**.

Definicija 1.8 *1.* **Integralni komutativni Žirardov monoid** *je reziduirana mreža u kojoj važi zakon dvojne negacije;*

2. **Hejtingova algebra** *je reziduirana mreža u kojoj važi*

$$x * y = x \wedge y;$$

3. **BL-algebra** *je deljiva reziduirana mreža u kojoj važi aksioma prelinearnosti;*

4. **MV-algebra** *je reziduirana mreža koja zadovoljava identitet:*

$$x \vee y = (x \to y) \to y;$$

5. **Π-algebra** *(ili produkt algebra) je BL algebra koja zadovoljava:*

$$(z \to 0) \to 0 \leq ((x * z) \to (y * z)) \to (x \to y),$$

$$x \wedge (x \to 0) = 0;$$

6. **G-algebra** *(ili* **Gedelova algebra***) je BL-algebra u kojoj važi zakon idempotentnosti.*

Definicija 1.9 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ reziduirana mreža. Binarna operacija $\leftrightarrow$ na L, gde je*

$$a \leftrightarrow b := (a \to b) \wedge (b \to a)$$

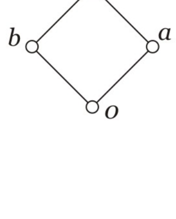
naziva se **bireziduum** *u $\mathcal{L}$.*

Lako se može primetiti da je $\leftrightarrow$ komutativna operacija na $\mathcal{L}$.

Sve reziduirane mreže iz primera 1.3 i 1.4 zadovoljavaju aksiomu prelinearnosti jer su u tim mrežama svaka dva elementa uporediva. Naime, kasnije ćemo pokazati da za sve $a, b \in L$ važi $a \leq b \Leftrightarrow a \to b = 1$. A kako u ovim mrežama za svaka dva elementa $a, b \in L$ važi $a \leq b$ ili $b \leq a$, trivijalno važi i $(a \to b) \vee (b \to a) = 1$. Sa druge strane, mreža iz primera 1.5 ne zadovoljava aksiomu prelinearnosti, jer važi $(a \to b) \vee (b \to a) = b \vee a = c \neq 1$. Videli smo da linearnost mreže koja je redukt reziduirane mreže, jeste dovoljan uslov da reziduirana mreža zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Međutim, to nije i potreban uslov, što ilustruje sledeći primer.

Primer 1.10 *Neka je $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ ograničena mreža čiji je Haseov dijagram prikazan na slici. Neka je $*$ operacija na L definisana sa $x * y = x \wedge y$, i neka je $\to$ definisana na sledeći način: $x \to y = 1$ ako $x \leq y$, a inače:*

$a \to 0 = b$	$b \to 0 = a$
$1 \to a = a$	$1 \to b = b$
$a \to b = b$	$b \to a = a$



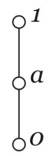
i neka je $1 \to 0 = 0$. Tada je struktura $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ reziduirana mreža.

Primetimo da mreža $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ nije linearna, tj L nije linearno uređen skup, ali reziduirana mreža $\mathcal{L}$ zadovoljava aksiomu prelinearnosti. Naime, elementi a i b nisu uporedivi, ali važi $(b \to a) \vee (a \to b) = a \vee b = 1$, a svi ostali elementi jesu uporedivi, te je za njih gornji izraz uvek jednak 1.

Gedelova struktura iz primera 1.3 jeste reziduirana mreža koja zadovoljava aksiomu deljivosti (odnosno, ona je deljiva reziduirana mreža). Naime, za $a, b \in L$ ako je $a \leq b$ važi $a * (a \to b) = a * 1 = a = a \wedge b$. Sa druge strane, ukoliko je $a > b$, tada važi $a * (a \to b) = a * b = a \wedge b$, te sledi da Gedelova struktura zaista zadovoljava aksiomu deljivosti. Reziduirana mreža iz primera 1.10 takođe zadovoljava aksiomu deljivosti.

Primer 1.11 *Neka je $(L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ struktura takva da je $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ ograničena mreža, gde je $L = \{0, a, 1\}$, i operacije $*$ i $\to$ definisane na sledeći način:*

- $x * y = 0$ *ako* $x, y \neq 1$, *i* $1 * x = x * 1 = x$ *za svako* $x \in L$;
- $x \to y = 1$ *ako* $x \leq y$, *a inače:* $a \to 0 = a$, $1 \to 0 = 0$ *i* $1 \to a = a$.



Tada je $(L, \wedge, \vee, *, \to, 0, 1)$ reziduirana mreža koja zadovoljava aksiomu prelinearnosti.

Primer 1.12 *U Gedelovoj, Lukasijevičevoj i produkt strukturi (iz primera 1.3) bireziduum je definisan na sledeće načine:*

- *Lukasijevičeva struktura:* $a \leftrightarrow b = 1 - |a - b|$;
- *Gedelova struktura: za* $a = b$ *važi* $a \leftrightarrow b = 1$, *i* $a \leftrightarrow b = \min(a, b)$ *inače;*
- *produkt struktura:* $a \leftrightarrow b = \frac{\min(a,b)}{\max(a,b)}$.

Primer 1.13 *U Gedelovoj, Lukasijevičevoj i produkt strukturi (iz primera 1.3) negacija je definisana na sledeće načine:*

- *Lukasijevičeva struktura:* $\neg a = 1 - a$;
- *Gedelova i produkt struktura:* $\neg 0 = 1$, *i* $\neg a = 0$ *za* $a \neq 0$.

Odavde jasno sledi da Lukasijevičeva struktura zadovoljava zakon dvojne negacije, dok kod Gedelove i produkt strukture to nije slučaj.

1.1 Osnovne osobine reziduiranih mreža

Lema 1.14 *U svakoj reziduiranoj mreži, za svako $a, b \in L$ važi:*

1. $a \to a = 1$;
2. $a * b \leq b$;
3. $a * (a \to b) \leq a \wedge b$;
4. $a \leq b$ *akko* $a \to b = 1$;
5. $1 \to a = a$;
6. $a \to 1 = 1$;
7. $b \leq a \to b$;
8. $b \leq a \to (a * b)$;
9. $0 * a = 0$;
10. $0 \to a = 1$.

Dokaz. (1) Kako je $(L, *, 1)$ monoid, sledi $1 * a = a$, što, na osnovu osobine adjungovanosti $*$ i $\to$, važi akko $1 \leq a \to a$, a kako je 1 najveći element mreže važi i suprotna nejednakost, te sledi $1 = a \to a$.

(2) Kako je $a \to a = 1$, i kako je 1 najveći element reziduirane mreže, sledi $a \leq 1 = b \to b$, što je na osnovu svojstva adjungovanosti ekvivalentno sa $a * b \leq b$, što je trebalo pokazati.

(3) Kako je $*$ komutativna operacija, iz nejednakosti (2) iz ove leme, sledi $a * (a \to b) \leq a$.

Takođe, kako je $a \to b \leq a \to b$, i na osnovu komutativnosti $*$, sledi $a * (a \to b) \leq b$.

Dakle, dobili smo da je $a * (a \to b)$ jedno donje ograničenje skupa $\{a, b\}$, te sledi

$$a * (a \to b) \leq a \wedge b.$$

(4) Kako je $(L, *, 1)$ monoid, važi $a \leq b$ akko $1 * a \leq b$ akko $1 \leq a \to b$, što, s obzirom na to da je 1 najveći element, važi akko $1 = a \to b$.

(5) Koristeći nejednakost (3) iz ove leme, dobijamo:

$$1 \to a = 1 * (1 \to a) \leq a \wedge 1 = a.$$

Dokažimo sada da važi i druga nejednakost. Naime, $a \leq a$, odnosno $a*1 \leq a$, što je ekvivalentno sa $a \leq 1 \to a$. Time smo dokazali dati identitet.

(6) Kako je 1 najveći element, važi $a \leq 1$, što je na osnovu identiteta (4) ove leme ekvivalentno sa $a \to 1 = 1$.

(7) Kako je $b * a \leq b$, sledi $b \leq a \to b$.

(8) Na osnovu komutativnosti, važi $b * a \leq a * b$, što je zbog osobine adjungovanosti ekvivalentno sa $b \leq a \to (a * b)$, što je trebalo dokazati.

(9) Kako je 0 najmanji element, trivijalno važi $0 * a \geq 0$.

Sa druge strane, na osnovu nejednakosti (2) iz ove leme, sledi $0*a \leq 0$ odakle sledi $0 * a = 0$

(10) Direktna posledica tvrđenja (4) ove leme, jer je 0 najmanji element. □

Lema 1.15 *U svakoj reziduiranoj mreži važi:*

1. *Operacija $*$ je izotona na $\mathcal{L}$;*

2. *Operacija $\to$ je antitona po prvom argumentu, a izotona po drugom argumentu.*

Dokaz. (1) Pretpostavimo da važi $x \leq y$, za neke $x, y \in L$, i neka $z \in L$.

Na osnovu nejednakosti (8) iz prethodne leme, kao i na osnovu pretpostavke, važi

$$x \leq y \leq z \to (z * y),$$

što je ekvivalentno sa $x * z \leq y * z$, što smo i želeli pokazati.

(2) Pokažimo najpre da za svako $x, y, z \in L$ važi sledeća nejednakost:

$$(x \to y) * (y \to z) \leq x \to z$$

To ćemo postići majorirajući izraz $x * (x \to y) * (y \to z)$, koristeći malopre dokazanu izotonost, i nejednakost $a * (a \to b) \leq b$:

$$x * (x \to y) * (y \to z) \leq y * (y \to z) \leq z,$$

a odakle na osnovu svojstva adjungovanosti operacija $\rightarrow$ i $*$ sledi da ova nejednakost važi.

Pokažimo sada antitonost operacije $\rightarrow$ po prvom argumentu. Pretpostavimo da su $x, y, z \in L$ takvi da važi $x \leq y$. Na osnovu stava (4) iz prethodne leme, sledi $x \rightarrow y = 1$. Sada je $y \rightarrow z = (x \rightarrow y) * (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z$, čime je pokazan prvi deo tvrđenja.

Pokažimo izotonost po drugom argumentu. Neka $x, y, z \in L$ i neka $x \leq y$ Na osnovu nejednakosti (3) prethodne leme sledi:

$$z * (z \rightarrow x) \leq x \leq y$$

što je ekvivalentno sa $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$, čime je i ovo tvrđenje pokazano. □

Primetimo da, ako važi $x_1 \leq x_2$ i $y_1 \leq y_2$, tada sledi $x_1 * y_1 \leq x_2 * y_2$, i analogno za svaki $n \in \mathbb{N}$: ako važi $(\forall i \in \{1, ..., n\}) x_i \leq y_i$, tada sledi $x_1 * ... * x_n \leq y_1 * ... * y_n$.

Lema 1.16 *U svakoj reziduiranoj mreži $\mathcal{L}$ važi:*

1. $(a \rightarrow b) * (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c$;
2. $(a \leftrightarrow b) * (b \leftrightarrow c) \leq a \leftrightarrow c$.

Dokaz. (1) Ova nejednakost je pokazana u dokazu prethodne leme.

(2) Iz definicije operacije $\leftrightarrow$, i kako je operacija $*$ izotona, sledi sledeća nejednakost:

$$(a \leftrightarrow b) * (b \leftrightarrow c) = ((a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)) * ((b \rightarrow c) \wedge (c \rightarrow b)) \leq$$

$$\leq (a \rightarrow b) * (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c,$$

a analogno se pokazuje i sledeće: $(a \leftrightarrow b) * (b \leftrightarrow c) \leq c \rightarrow a$, odakle sledi:

$$(a \leftrightarrow b) * (b \leftrightarrow c) \leq c \leftrightarrow a,$$

čime smo pokazali tvrđenje. □

Lema 1.17 *Ako je $\mathcal{L}$ reziduirana mreža, tada, za svako $a, b \in L$ važi:*

1. $a \rightarrow b = \max\{c \in L : a * c \leq b\}$;   2. $a * b = \min\{c \in L : a \leq b \rightarrow c\}$.

Dokaz. (1) Kako važi $a * (a \rightarrow b) \leq b$, sledi $a \rightarrow b \in \{c \in L : a * c \leq b\}$, te važi nejednakost $a \rightarrow b \leq \sup\{c \in L : a * c \leq b\}$.

Pokažimo da važi i suprotna nejednakost. Neka je $c \in L$, i neka ono zadovoljava nejednakost $a * c \leq b$. Ovo je ekvivalentno sa $c \leq a \rightarrow b$ na osnovu adjungovanosti operacija $\rightarrow$ i $*$. Iz ovoga sledi, da je $a \rightarrow b$ gornje ograničenje skupa $\{c \in L : a * c \leq b\}$, odnosno $a \rightarrow b \geq \sup\{c \in L : a * c \leq b\}$. Dakle, pokazali smo da je $a \rightarrow b = \sup\{c \in L : a * c \leq b\}$, a kako $a \rightarrow b \in \{c \in L : a * c \leq b\}$, sledi da je $a \rightarrow b$ i maksimum ovog skupa.

(2) Ovo se dokazuje analogno kao u dokazu stava (1) ove leme - koristeći se osobinom adjungovanosti. □

Lema 1.18 *U svakoj reziduiranoj mreži, ukoliko odgovarajući infimumi i supremumi postoje, važi:*

1. $x * \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I}(x * y_i)$; *4.* $x * \bigwedge_{i\in I} y_i \le \bigwedge_{i\in I}(x * y_i)$;

2. $x \to \bigwedge_{i\in I} y_i = \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i)$; *5.* $\bigvee_{i\in I}(x \to y_i) \le x \to \bigvee_{i\in I} y_i$;

3. $\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \to y = \bigwedge_{i\in I}(x_i \to y)$; *6.* $\bigvee_{i\in I}(x \to y_i) \le \left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) \to y$.

Dokaz. (1) Kako je $*$ izotona operacija, za svako $i_0 \in I$ važi: $x*\bigvee_{i\in I} y_i \ge x*y_{i_0}$. Kako ova nejednakost važi za svako $i_0 \in I$, sledi $x * \bigvee_{i\in I} y_i \ge \bigvee_{i\in I}(x * y_i)$.

Pokažimo i drugu stranu nejednakosti. Kako je $\to$ izotona po drugom argumentu, i kako u reziduiranoj mreži za svako $a, b \in L$ važi nejednakost $a \to (a * b) \ge b$, sledi $x \to \bigvee_{i\in I}(x * y_i) \ge x \to (x * y_{i_0}) \ge y_{i_0}$, za svako $i_0 \in I$. Kako ovo važi za svako $y_{i_0} \in I$ sledi $x \to \bigvee_{i\in I}(x * y_i) \ge \bigvee_{i\in I} y_i$, što je, na osnovu osobine adjungovanosti $*$ i $\to$, ekvivalentno sa $x*\bigvee_{i\in I} y_i \le \bigvee_{i\in I}(x*y_i)$.

Iz ove dve nejednakosti sledi $x * \bigvee_{i\in I} y_i = \bigvee_{i\in I}(x * y_i)$.

(2) Kako je $\to$ izotona po drugom argumentu, za svako $i_0 \in I$ sledi:

$$x \to \bigwedge_{i\in I} y_i \le x \to y_{i_0},$$

a kako ovo važi za svako $i_0 \in I$, sledi $x \to \bigwedge_{i\in I} y_i \le \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i)$.

Na osnovu izotonosti operacije $*$ za proizvoljno $i_0 \in I$ zaključujemo $x * \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i) \le x * (x \to y_0) \le y_0$. Kako ova nejednakost važi za svako $i_0 \in I$ sledi $x * \bigwedge_{i\in I}(x \to y_i) \le \bigwedge_{i\in I} y_i$, što je, zbog osobine adjungovanosti $\to$ i $*$ ekvivalentno sa:

$$\bigwedge_{i\in I}(x \to y_i) \le x \to \bigwedge_{i\in I} y_i,$$

čime smo dokazali datu jednakost.

(3) Kako je $\to$ antitona po prvom argumentu za proizvoljno $i_0 \in I$, sledi $\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \to y \le x_{i_0} \to y$, a kako ovo važi za svako i_0, sledi $\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \to y \le \bigwedge_{i\in I}(x_i \to y)$.

Dokažimo i suprotnu nejednakost. Na osnovu jednakosti (1) ove leme, i kako je $*$ izotona dobijamo: $\left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) * \bigwedge_{i\in I}(x_i \to y) = \bigvee_{j\in I}\left(x_j * \bigwedge_{i\in I}(x_i \to y)\right) \le \bigvee_{j\in I}(x_j * (x_j \to y)) \le y$. Ovo je ekvivalentno sa:

$$\bigwedge_{i\in I}(x_i \to y) \le \left(\bigvee_{i\in I} x_i\right) \to y,$$

čime smo dokazali i drugu stranu nejednakosti.

(4) Kako je $*$ izotona, za svako $i_0 \in I$ sledi $x * \bigwedge_{i\in I} y_i \le x * y_{i_0}$, a s obzirom da ovo važi za svako $i_0 \in I$, sledi $x * \bigwedge_{i\in I} y_i \le \bigwedge_{i\in I}(x * y_i)$.

(5) Pokažimo najpre da važi $x * \bigvee_{i\in I}(x \to y_i) \le \bigvee_{i\in I} y_i$. Naime, na osnovu jednakosti (1) ove leme, sledi $x * \bigvee_{i\in I}(x \to y_i) = \bigvee_{i\in I}(x * (x \to y_i)) \le \bigvee_{i\in I} y_i$. Ovo je ekvivalentno sa

$$\bigvee_{i\in I}(x \to y_i) \le x \to \bigvee_{i\in I} y_i.$$

(6) Na osnovu jednakosti (1) ove leme i izotonosti operacije $*$ sledi $\left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) * \bigvee_{i\in I}(x_i \to y) = \bigvee_{i\in I}\left(\left(\bigwedge_{j\in I} x_j\right) * (x_i \to y)\right) \leq \bigvee_{i\in I}(x_i * (x_i \to y)) \leq y$, što je ekvivalentno sa:

$$\bigvee_{i\in I}(x_i \to y) \leq \left(\bigwedge_{i\in I} x_i\right) \to y,$$

što je trebalo dokazati. □

Tvrđenje 1.19 *Klasa reziduiranih mreža je varijetet.*

Dokaz. Na osnovu Birkofove HSP teoreme važi da je klasa reziduiranih mreža varijetet akko je ona jednakosna klasa algebri, tj postoji skup identiteta Σ, takav da važi $\mathfrak{L} = Mod(\Sigma)$, gde smo sa $\mathfrak{L}$ označili klasu reziduiranih mreža. Drugim rečima, potrebno je pokazati da postoji skup identiteta koji definiše klasu reziduiranh mreža, odnosno, da postoji skup identiteta koji je ekvivalentan sa uslovima iz definicije 1.1. Iz tog razloga, pokazaćemo da su uslovi iz definicije 1.1 ekvivalentni sa sledećim identitima:

1. $(x * y) \to z = x \to (y \to z)$;
2. $(x * (x \to y)) \vee y = y$;
3. $x \to (x \vee y) = 1$;
4. identiteti koji definišu ograničenu mrežu $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$;
5. identiteti koji definišu komutativni monoid $(L, *, 1)$.

Pokažimo najpre da ovi identiteti važe u svakoj reziduiranoj mreži.

(1) Za svako $x, y, z \in \mathcal{L}$ na osnovu nejednakosti (3) iz leme 1.14 važi $(x * y) * ((x * y) \to z) \leq z$, a odakle na osnovu asocijativnosti i komutativnosti operacije $*$ sledi $y * (x * ((x * y) \to z)) \leq z$, što je na osnovu adjungovanosti operacija $\to$ i $*$ ekvivalentno sa $(x * y) \to z \leq x \to (y \to z)$.

Pokažimo i drugu nejednakost. Naime, sprovodeći sličan račun dobijamo $y * (x * (x \to (y \to z))) \leq y * (y \to z) \leq z$, što je ekvivalentno sa $x \to (y \to z) \leq (x * y) \to z$, čime je dokazana jednakost (1).

(2) Ovaj identitet ekvivalentan je sa nejednakošću $x * (x \to y) \leq y$ koja važi u svakoj reziduiranoj mreži.

(3) Kako je $x \leq x \vee y$ važi $x \to (x \vee y) = 1$.

Identiteti iz (4) i (5) važe po definiciji reziduirane mreže.

Pokažimo i suprotno - ako neka algebra zadovoljava ove identitete, onda je ona reziduirana mreža. Ovde je dovoljno pokazati da skup ovih identiteta implicira uslov (3) iz definicije reziduiranih mreža.

Najpre ćemo pokazati da iz gornjih identiteta sledi da važi: $a \leq b$ akko $a \to b = 1$.

Ako je $a \leq b$, tada na osnovu identiteta (3) sledi $a \to b = a \to (a \vee b) = 1$. Takođe, ako važi $a \to b = 1$, tada na osnovu identiteta (2) iz ove leme sledi $a \vee b = (a * 1) \vee b = (a * (a \to b)) \vee b = b$, odakle sledi $a \leq b$.

Dokažimo sada uslov (3) definicije 1.1. Na osnovu malo pre pokazanog, kao i na osnovu identiteta (1) u ovom tvrđenju sledi: $x * y \leq z$ akko $(x * y) \to z = 1$ akko $x \to (y \to z) = 1$ akko $x \leq y \to z$, čime je pokazano da gornji identiteti imliciraju uslov (3) iz definicije 1.1.

Uslovi (1) i (2) iz definicije 1.1 trivijalno važe. □

1.2 Reziduirane mreže i t-norme

Definicija 1.20 **t-norma** $*$ *je binarna operacija na* $[0,1]$*, tj.* $* : [0,1]^2 \to [0,1]$*, koja zadovoljava sledeće uslove:*

1. $*$ *je komutativna i asocijativna operacija*

2. $*$ *je izotona po oba argumenta, odnosno važi:*

$$(\forall x_1, x_2, y \in [0,1])(x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1 * y \leq x_2 * y)$$

$$(\forall x, y_1, y_2 \in [0,1])(y_1 \leq y_2 \Rightarrow x * y_1 \leq x * y_2.);$$

3. $1 * x = x$ *i* $0 * x = 0$.

t-norma je **neprekidna t-norma** *ako je* $* : [0,1]^2 \to [0,1]$ *neprekidno preslikavanje.*

Navedimo neke primere t-normi.

- Lukasijevičeva t-norma: $x *_L y = \max\{x + y - 1, 0\}$;
- Gedelova (minimum) t-norma: $x *_G y = \min\{x, y\}$;
- Produkt t-norma: $x *_\Pi y = x \cdot y$ (pri čemu je $\cdot$ proizvod realnih brojeva).

Primetimo i to da su sve tri gore navedene t-norme neprekidne.

Tvrđenje 1.21 *Neka je* $*$ *sleva neprekidna t-norma i neka je binarna operacija* $\to$ *definisana na sledeći način:*

$$a \to b = \sup\{c \mid a * c \leq b\}.$$

Tada je algebra $\mathcal{L} = ([0,1], \min, \max, *, \to, 0, 1)$ *kompletna reziduirana mreža.*

Važi i obrnuto: ako je $\mathcal{L} = ([0,1], \min, \max, *, \to, 0, 1)$ *kompletna reziduirana mreža, tada je* $*$ *sleva neprekidna t-norma.*

Tvrđenje 1.22 *Neka je* $*$ *proizvoljna t-norma. Tada važi:*
Algebra $\mathcal{L} = ([0,1], \min, \max, *, \to, 0, 1)$ *je BL-algebra akko je t-norma* $*$ *neprekidna.*

Glava 2

Fazi podskupovi i fazi relacije

Definicija 2.1 *Ako je L kompletna reziduirana mreža, tada* **fazi podskup** *skupa X jeste proizvoljno preslikavanje $A : X \to L$. Familiju svih fazi podskupova skupa X obeležavamo sa $\mathcal{F}(X)$.*

Definicija 2.2 *Za $A \in \mathcal{F}(X)$ kažemo da je* **podskup** *od $B \in \mathcal{F}(X)$ ako $(\forall x \in X)A(x) \leq B(x)$, što pišemo $A \subseteq B$ ili $A \leq B$.*

Neka je $\{A_i : i \in I\}$ familija fazi podskupova skupa X. **Unija** *ove familije fazi podksupova jeste preslikavanje $\bigcup_{i\in I} A_i : X \to L$, pri čemu za svako $x \in X$ važi $(\bigcup_{i\in I} A_i)(x) = \bigvee_{i\in I} A_i(x)$.*

Presek *familije fazi podskupova $\{A_i : i \in I\}$ definišemo kao preslikavanje $\bigcap_{i\in I} A_i : X \to L$, pri čemu za svako $x \in X$ važi $(\bigcap_{i\in I} A_i)(x) = \bigwedge_{i\in I} A_i(x)$.*

Za dati fazi podskup $A \in \mathcal{F}(X)$ i $b \in L$ definišemo fazi podskup $b * A$ od X, sa $(b * A)(x) = b * A(x)$ za svako $x \in X$, i analogno fazi podskup $b \to A$ od X sa $(b \to A)(x) = b \to A(x)$ za svako $x \in X$.

Primetimo da je prethodna definicija dobra, jer je L kompletna mreža, a na osnovu čega sledi i da je $(\mathcal{F}(X), \cup, \cap)$ takođe kompletna mreža.

Za dati crisp podskup A skupa X, njegovu karakterističnu funkciju ćemo obeležavati sa χ_A. Dakle, ako $x \in A$ tada je $\chi_A(x) = 1$, a ako $x \notin A$ tada važi $\chi_A(x) = 0$. Ako je podskup $A = \{x\}$, tada njegovu karakterističnu funkciju obeležavamo sa 1_x, a ako je podskup $A = \{x_1, ..., x_n\}$ - njegovu karakterističnu funkciju zapisujemo sa $1_{x_1,...,x_n}$. Jasno - karakteristična funkcija se može posmatrati kao preslikavanje $\chi_A : X \to L$, gde su 0 i 1 najmanji i najveći elementi kompletne reziduirane mreže. Na ovaj način, partitivni skup $\mathcal{P}(X)$ se može potopiti u skup fazi podskupova $\mathcal{F}(X)$, te $\mathcal{F}(X)$ sadrži izomorfnu kopiju od $\mathcal{P}(X)$. Iz ovog razloga, u daljem teksu, $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ ćemo posmatrati kao podmrežu od $(\mathcal{F}(X), \cap, \cup)$. Primetimo pritom da je, u ovom smislu, $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup)$ kompletna podmreža od $(\mathcal{F}(X), \cap, \cup)$.

Definicija 2.3 **Fazi relaciju** *R iz skupa X u skup Y definišemo kao preslikavanje $R : X \times Y \to L$.* **Inverzna fazi relacija** *od R je fazi relacija $R^{op} : Y \times X \to L$, takva da važi $R^{op}(y, x) = R(x, y)$, za svako $x \in X$ i za svako $y \in Y$. Ukoliko je R fazi relacija iz skupa X u skup X, kažemo da je R fazi relacija na skupu X.*

Definicija 2.4 *Neka je R fazi relacija na skupu X. Tada:*

- *R je* **simetrična** *ako važi $(\forall x, y \in X)R(x,y) = R(y,x)$,*
- *R je* **antisimetrična** *ako važi $R(x,y) = R(y,x) = 1 \Rightarrow x = y$,*
- *R je* **refleksivna** *ako važi $(\forall x \in X)R(x,x) = 1$,*
- *R je* **tranzitivna** *ako važi $(\forall x, y, z \in X)R(x,y) * R(y,z) \leq R(x,z)$.*

Definicija 2.5 **Fazi preduređenje** *na X je refleksivna i tranzitivna fazi relacija na X. Ako je R fazi preduređenje na X, onda za (X, R) kažemo da je* **fazi preduređen skup**

Fazi parcijalno uređenje *na X je antisimetrično fazi preduređenje na X. Dakle refleksivna, antisimetrična i tranzitivna fazi relacija na X.*

Fazi ekvivalencija *je simetrično fazi preduređenje na X, odnosno refleksivna, simetrična i tranzitivna fazi relacija na X.*

Fazi relacija jednakosti *je simetrično fazi parcijalno uređenje (refleksivna, simetrična, antisimetrična, i tranzitivina fazi relacija na X).*

Lema 2.6 *Ako je R fazi preduređenje, tada je fazi relacija na X definisana sa $E(x,y) = R(x,y) \wedge R(y,x)$ fazi ekvivalencija.*

Dokaz. Refleksivnost trivijalno važi, jer je $E(x,x) = R(x,x) \wedge R(x,x) = 1 \wedge 1 = 1$, za svako $x \in X$.

Takođe za svako $x, y \in X$ važi $E(x,y) = R(x,y) \wedge R(y,x) = R(y,x) \wedge R(x,y) = E(y,x)$, čime je dokazana simetričnost.

Preostaje još samo da se dokaže tranzitivnost! Neka $x, y, z \in X$, tada važi: $E(x,y) * E(y,z) = (R(x,y) \wedge R(y,x)) * (R(y,z) \wedge R(z,y))$. Kako je $*$ izotona operacija, i kako je R tranzitivna fazi relacija, važi: $(R(x,y) \wedge R(y,x)) * (R(y,z) \wedge R(z,y)) \leq R(x,y) * R(y,z) \leq R(x,z)$. Analogno se pokazuje i da je $E(x,y) * E(y,z) \leq R(z,x)$, te je $E(x,y) * E(y,z)$ donje ograničenje od $\{R(x,z), R(z,x)\}$, pa je $E(x,y) * E(y,z) \leq R(x,z) \wedge R(z,x) = E(x,z)$, čime je tranzitivnost dokazana. $\square$

Kanoničko fazi parcijalno uređenje na L je relacija $\rightarrow$ definisana sa $\rightarrow (a,b) = a \rightarrow b$. Na L takođe definišemo i relaciju $\leftrightarrow$ takvu da važi $\leftrightarrow (a,b) = a \leftrightarrow b$.

Lema 2.7 *$\rightarrow$ je fazi parcijalno uređenje na L, a $\leftrightarrow$ je fazi relacija jednakosti.*

Dokaz. Najpre pokažimo da je $\rightarrow$ parcijalno uređenje na L. Za svako $a \in L$ važi $\rightarrow (a,a) = a \rightarrow a = 1$, čime je pokazana refleksivnost.

Zatim, za svako $a, b \in L$ važi $\rightarrow (a,b) = \rightarrow (b,a) = 1$ akko $a \rightarrow b = b \rightarrow a = 1$ akko $a \leq b$ i $b \leq a$ odakle sledi da je $a = b$, čime je dokazana antisimetričnost.

Za svako $a, b, c \in L$ važi $\rightarrow (a,b) * \rightarrow (b,c) = (a \rightarrow b) * (b \rightarrow c) \leq a \rightarrow c = \rightarrow (a,c)$, čime je pokazano da je relacija $\rightarrow$ i tranzitivna, te smo dokazali i da je $\rightarrow$ fazi parcijalno uređenje na L.

Pokažimo sada da je $\leftrightarrow$ fazi relacija jednakosti! Za svako $a \in L$ važi $\leftrightarrow (a,b) = 1$ akko $a \leftrightarrow b = 1$ akko $(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a) = 1$ akko $a \rightarrow b = 1$ i $b \rightarrow a = 1$ akko $a \leq b$ i $b \leq a$ akko a=b, čime je pokazano da je $\leftrightarrow$ antisimetrična fazi relacija.

Takođe za svako $a, b, c \in L$ važi: $\leftrightarrow (a,b) * \leftrightarrow (b,c) = (a \leftrightarrow b) * (b \leftrightarrow c) \leq a \leftrightarrow c = \leftrightarrow (a,c)$, čime smo pokazali da je $\leftrightarrow$ tranzitivna fazi relacija.

Simetričnost fazi relacije $\leftrightarrow$ sledi iz komutativnosti operacije $\leftrightarrow$ na L. Kako važi $a \leftrightarrow a = 1$ za svako $a \in L$, refleksivnost takođe trivijalno važi. □

Definicija 2.8 *Relaciju S na skupu $\mathcal{F}(X)$ definisanu sa*

$$S(A,B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \to B(x))$$

nazivamo **stepen podskuposti** *fazi skupova A i B.*

Relaciju ε na skupu $\mathcal{F}(X)$ definisanu sa

$$\varepsilon(A,B) = \bigwedge_{x \in X} (A(x) \leftrightarrow B(x))$$

nazivamo **stepen jednakosti** *fazi skupova A i B.*

Primetimo da je $\varepsilon(A,B) = S(A,B) \wedge S^{op}(A,B)$. Naime:

$\varepsilon(A,B) = \bigwedge_{x \in X}(A(x) \leftrightarrow B(x)) = \bigwedge_{x \in X}((A(x) \to B(x)) \wedge (B(x) \to A(x))) = \bigwedge_{x \in X}((A(x) \to B(x)) \wedge \bigwedge_{x \in X}(B(x) \to A(x)) = S(A,B) \wedge S(B,A) = S(A,B) \wedge S^{op}(A,B)$ za svako $A, B \in \mathcal{F}(X)$.

Napomena: Ponekad ćemo stepen podskuposti obeležavati sa S_X ukoliko želimo da naznačimo na kom skupu je ova fazi relacija definisana, i analogno sa stepenom jednakosti - ukoliko želimo da naznačimo na kom skupu je definisan, obeležavaćemo ga sa ε_X. Dakle, S_X i ε_X su fazi relacije na $\mathcal{F}(X)$.

Lema 2.9 *S je fazi parcijalno uređenje na $\mathcal{F}(X)$, a ε je fazi relacija jednakosti na $\mathcal{F}(X)$.*

Dokaz. Trivijalno važi da je $S(A,A) = 1$.

Pokažimo da važi tranzitivnost. Neka $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$, i $x_0 \in X$. Tada, kako je $*$ izotona operacija, i kako u reziduiranoj mreži za sve $a, b, c \in L$ važi $(a \to b) * (b \to c) \leq a \to c$, sledi: $S(A,B) * S(B,C) = \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to B(x)) * \bigwedge_{x \in X}(B(x) \to C(x)) \leq (A(x_0) \to B(x_0)) * (B(x_0) \to C(x_0)) \leq A(x_0) \to C(x_0)$. Kako je x_0 proizvoljan element skupa X, sledi da je $S(A,B) * S(B,C)$ donje ograničenje skupa $\{A(x) \to C(x) \mid x \in X\}$, te je $S(A,B) * S(B,C) \leq \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to C(x)) = S(A,C)$, čime je tranzitivnost dokazana.

Neophodno je još dokazati i antisimetričnost. Neka $A, B \in \mathcal{F}(X)$, i neka važi $S(A,B) = S(B,A) = 1$. Tada:

$$\bigwedge_{x \in X} (A(x) \to B(x)) = 1 \Leftrightarrow (\forall x \in X) A(x) \leq B(x) \Leftrightarrow A \leq B.$$

Analogno pokazujemo da je $B \leq A$, te dobijamo da je $A = B$.

Pokažimo sad da je ε relacija jednakosti na $\mathcal{F}(X)$. Refleksivnost ε trivijalno važi. Simetričnost sledi iz komutativnosti operacije $\leftrightarrow$. Dokaz tranzitivnosti i antisimetričnosti fazi relacije ε analogan je dokazu tranzitivnosti i antisimetričnosti fazi relacije S. □

Lema 2.10 *Ako je relacija R fazi preduređenje, tada je i R^{op} fazi preduređenje.*

Dokaz. Iz refleksivnosti R trivijalno sledi i refleksivnost R^{op}.

Pokažimo da važi tranzitivnost. Neka $x, y, z \in X$. Tada sledi: $R^{op}(x,y) * R^{op}(y,z) = R(y,x) * R(z,y) \leq R(z,x) = R^{op}(x,z)$, čime je i tranzitivnost dokazana, te sledi da je R^{op} takođe fazi preduređenje na X. □

Lema 2.11 *Neka $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$. Tada:*

1. $A \subseteq B$ akko $S(A,B)$=1;

2. A=B akko $\varepsilon(A,B) = 1$;

3. $\varepsilon(A,B) * S(A,C) \leq S(B,C)$;

4. $S(A, A \cap B) = S(A,B)$;

5. $S(A \cup B, C) = S(A,C) \wedge S(B,C)$;

6. $S(A, B \cap C) = S(A,B) \wedge S(A,C)$.

Dokaz. (1) $A \subseteq B$ akko $(\forall x \in X) A(x) \leq B(x)$ akko $(\forall x \in X)((A(x) \to B(x)) = 1)$ akko $\bigwedge_{x \in X}(A(x) \to B(x)) = 1$ akko $S(A,B) = 1$.

(2) $A = B$ akko $(\forall x \in X) A(x) = B(x)$ akko $(\forall x \in X)((A(x) \leftrightarrow B(x)) = 1)$ akko $\bigwedge_{x \in X}(A(x) \leftrightarrow B(x)) = 1$ akko $\varepsilon(A,B) = 1$.

(3) Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljni fazi podskupovi od X. Kako je $*$ izotona operacija na L, i kako je relacija S tranzitivna na $\mathcal{F}(X)$ važi:

$\varepsilon(A,B) * S(A,C) = (S(A,B) \wedge S(B,A)) * S(A,C) \leq S(B,A) * S(A,C) \leq S(B,C)$, čime je dokazano tvrđenje.

(4) Za svako $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$$S(A, A \cap B) = \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to (A \cap B)(x)) = \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to (A(x) \wedge B(x)) =$$

$$= \bigwedge_{x \in X}((A(x) \to A(x)) \wedge (A(x) \to B(x))) = \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to B(x)) = S(A,B),$$

jer u reziduiranoj mreži važi $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$ za sve $a, b, c \in L$, te je i ovo tvrđenje dokazano.

(5) Za svako $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$$S(A \cup B, C) = \bigwedge_{x \in X}((A \cup B)(x) \to C(x)) = \bigwedge_{x \in X}((A(x) \vee B(x)) \to C(x)) =$$

$$= \bigwedge_{x \in X}((A(x) \to C(x)) \wedge (B(x) \to C(x))) =$$

$$= \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to C(x)) \wedge \bigwedge_{x \in X}(B(x) \to C(x)) = S(A,C) \wedge S(B,C),$$

jer u reziduiranoj mreži za sve $a, b, c \in L$ važi $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (b \to c)$.

(6) Kako u reziduiranoj mreži za sve $a, b, c \in L$ važi $a \to (b \wedge c) = (a \to b) \wedge (a \to c)$, za proizvoljne $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$$S(A, B \cap C) = \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to (B \cap C)(x)) = \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to (B(x) \wedge C(x))) =$$

$$\bigwedge_{x \in X}\Big((A(x) \to B(x)) \wedge (A(x) \to C(x))\Big) =$$

$$\bigwedge_{x \in X}(A(x) \to B(x)) \wedge \bigwedge_{x \in X}(A(x) \to C(x)) = S(A,B) \wedge S(A,C),$$

čime je ovo tvrđenje dokazano. □

Neka je R fazi relacija na X. Fazi relaciju R^n na skupu X^n definišemo sa

$$R^n((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) = R(x_1, y_1) * ... * R(x_n, y_n)$$

$$x_i, y_i \in X, i \in \{1, ..., n\}.$$

Lema 2.12 *Ako je R fazi preduređenje na skupu X, tada je R^n takođe fazi preduređenje na skupu X^n.*

Dokaz. Obeležimo sa $\overline{x}$ uređenu n-torku $(x_1, ..., x_n)$, i analogno $\overline{y}$ uređenu n-torku $(y_1, ..., y_n)$.

Trivijalno, važi $R(\overline{x}, \overline{x}) = 1$. Pokažimo tranzitivnost. Neka $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in X^n$. Tada, kako je R tranzitivna fazi relacija, važi $R(\overline{x}, \overline{y}) * R(\overline{y}, \overline{z}) = R(x_1, y_1) * ... * R(x_n, y_n) * R(y_1, z_1) * ... * R(y_n, z_n) = R(x_1, y_1) * R(y_1, z_1) * ... * R(x_n, y_n) * R(y_n, z_n) \leq R(x_1, z_1) * ... * R(x_n, z_n) = R(\overline{x}, \overline{z})$, jer je $*$ asocijativna i komutativna operacija na L, čime je tranzitivnost fazi relacije R^n dokazana. □

Lema 2.13 *Neka je (X, R) fazi preduređen skup, i neka je dato preslikavanje $f : Y \to X$. Tada, $P : Y \times Y \to L$, takvo da važi $P(x, y) = R(f(x), f(y))$, jeste fazi preduređenje na Y.*

Dokaz. Za svako $x \in X$ važi $P(x, x) = R(f(x), f(x)) = 1$, te je relacija P refleksivna.

Neka su $x, y, z \in X$. Tada, $P(x, y) * P(y, z) = R(f(x), f(y)) * R(f(y), f(z)) \leq R(f(x), f(z)) = P(x, z)$, čime je pokazana i tranzitivnost. □

Fazi preduređenje P na Y iz prethodne leme naziva se **nasleđeno uređenje** iz (X, R) putem preslikavanja $f : Y \to X$. Ukoliko je $Y \subseteq X$, injekcija $Y \hookrightarrow X$ određuje fazi preduređenje P koje je upravo restrikcija od R.

Neka je R fazi relacija iz X u Y. Tada R indukuje dva preslikavanja:

1. $s : Y \to \mathcal{F}(X)$, takvo da $y \mapsto y/R$,
2. $r : X \to \mathcal{F}(Y)$, takvo da $x \mapsto x/R^{op}$.

Fazi podskup y/R definisan je putem jednakosti $(y/R)(x) = R(x, y)$. Jasno važi $(x/R^{op})(y) = R^{op}(y, x) = R(x, y)$.

Definicija 2.14 *Ako je $R : X \times Y \to L$ fazi relacija iz X u Y, tada ona indukuje sledeće dve fazi relacije $\sigma(R) : Y^2 \to L$ i $\rho(R) : X^2 \to L$, definisane na sledeći način:*

$$\sigma(R)(y_1, y_2) = S(s(y_1), s(y_2)) = \bigwedge_{z \in X} (R(z, y_1) \to R(z, y_2))$$

$$\rho(R)(x_1, x_2) = S^{op}(r(x_1), r(x_2)) = \bigwedge_{z \in X} (R(x_2, z) \to R(x_1, z)).$$

Lema 2.15 *Neka je R proizvoljna relacija na X. Tada su relacije $\sigma(R)$ i $\rho(R)$ preduređenja na X.*

Dokaz. Kako smo fazi relaciju $\sigma(R)$ definisali putem jednakosti $\sigma(R)(y_1, y_2) = S(s(y_1), s(y_2))$, relacija σ, na osnovu leme 2.13, nasleđuje preduređenje sa parcijalno uređenog skupa $(\mathcal{F}(X), S)$ putem preslikavanja s.

Analogno se pokazuje i da je $\rho(R)$ preduređenje. $\square$

Neka je $\{h_t\}_{t\in T}$ familija fazi podskupova skupa X. Primetimo da ova familija fazi podskupova određuje fazi relaciju $H : X \times T \to L$, sa $H(x,t) = h_t(x)$.

Tvrđenje 2.16 *Neka je R fazi relacija na X. Tada je R fazi preduređenje na X akko postoji familija $\{h_t : t \in T\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ takva da*

$$R(x, y) = \bigwedge_{t\in T} (h_t(y) \to h_t(x)).$$

Dokaz. $(\Rightarrow)$

Uzmimo da je $h_t = t/R$, i $T = X$. Kako je R tranzitivna relacija, sledi $R(x, y) * R(y, t) \le R(x, t)$, odakle dobijamo $R(x, y) \le R(y, t) \to R(x, t)$, za sve $x, y, t \in X$. Odatle važi $R(x, y) \le \bigwedge_{t\in X}(R(y, t) \to R(x, t)) = \bigwedge_{t\in X}((t/R)(y) \to (t/R)(x))$

Takođe, kako je R refleksivna relacija, dobijamo:

$R(x, y) = R(y, y) \to R(x, y) \ge \bigwedge_{t\in X}(R(y, t) \to R(x, t)) = \bigwedge_{t\in X}((t/R)(y) \to (t/R)(x))$. Odavde sledi jednakost.

$(\Leftarrow)$

Lako se pokazuje da je relacija R refleksivna. Naime $R(x, x) = \bigwedge_{t\in T}(h_t(x) \to h_t(x)) = 1$, jer u reziduiranoj mreži, za svako $a \in L$ važi $a \to a = 1$.

Preostaje još da se pokaže tranzitivnost. Za svako $x, y, z \in X$ i $t_0 \in T$ važi:

$$R(x, y) * R(y, z) = \left(\bigwedge_{t\in T} (h_t(y) \to h_t(x))\right) * \left(\bigwedge_{t\in T} (h_t(z) \to h_t(y))\right) \le$$

$$\le (h_{t_0}(y) \to h_{t_0}(x)) * (h_{t_0}(z) \to h_{t_0}(y)) \le h_{t_0}(z) \to h_{t_0}(x),$$

jer $(\forall a, b, c \in L)((a \to b) * (b \to c) \le (a \to c))$ (lema 1.16). Kako ovo važi za svako $t_0 \in T$, sledi:

$$R(x, y) * R(y, z) \le \bigwedge_{t\in T} (h_t(z) \to h_t(x)) = R(x, z)$$

$\square$

Primetimo da smo u prethodnom dokazu pokazali i to da ako je relacija R fazi preduređenje, da važi $\rho(R) = R$.

Kompoziciju fazi relacija Q i R definišemo kao

$$(Q \circ R)(x, y) = \bigvee_{z\in X} (Q(x, z) * R(z, y)).$$

Lema 2.17 *Neka je data fazi relacija $R : X \times Y \to L$ iz X u Y. Tada je:*

1. *$\sigma(R)$ najveća fazi relacija Q na Y takva da je $R \circ Q \le R$,*

2. *$\rho(R)$ najveća fazi relacija Q na X takva da je $Q \circ R \leq R$.*

Dokaz. (1)

Pokažimo najpre da $\sigma(R)$ zadovoljava nejednačinu $R \circ Q \leq R$ po Q. Kako za sve $a, b \in L$ važi $a * (a \to b) \leq b$, za proizvoljne $x \in X$ i $y \in Y$ sledi:

$$(R \circ \sigma(R))(x,y) = \bigvee_{z \in y} \left(R(x,z) * \bigwedge_{t \in X} (R(t,z) \to R(t,y)) \right) \leq$$

$$\leq \bigvee_{z \in Y} (R(x,z) * (R(x,z) \to R(x,y))) \leq R(x,y)$$

Neka je sada Q proizvoljna fazi relacija na Y koja zadovoljava nejednačinu, i neka $z \in X$ i $y \in Y$. Tada važi: $(R \circ Q)(z,y) \leq R(z,y)$ akko $\bigvee_{x \in Y}(R(z,x) * Q(x,y)) \leq R(z,y)$. Odavde sledi da za svako $x \in Y$ važi $R(z,x) * Q(x,y) \leq R(z,y)$, iz čega sledi $Q(x,y) \leq R(z,x) \to R(z,y)$, na osnovu osobine adjungovanosti operacija $*$ i $\to$. Kako ova nejednakost važi za svako $z \in X$, sledi:

$$Q(x,y) \leq \bigwedge_{z \in X} (R(z,x) \to R(z,y)) = \sigma(R)(x,y)$$

čime je tvrđenje dokazano.

(2)

Analogno dokazu od (1). □

Lema 2.18 *Za svaku fazi relaciju $R : X \times Y \to L$ važi $\rho(R)^{op} = \sigma(R^{op})$.*

Dokaz. Za svako $R : X \times Y \to L$ i za sve $x, y \in X$ važi

$$\sigma(R^{op})(x,y) = \bigwedge_{t \in Y} (R^{op}(t,x) \to R^{op}(t,y)) =$$

$$= \bigwedge_{t \in Y} (R(x,t) \to R(y,t)) = \rho(R)(y,x) = \rho(R)^{op}(x,y)$$

□

Proizvoljna fazi relacija R na X određuje relaciju $\varepsilon(R)$ na sledeći način:

$$\varepsilon(R)(x,y) = \bigwedge_{z \in X} (R(z,x) \leftrightarrow R(z,y)),$$

za svako $x, y \in X$. Primetimo da važi i $\varepsilon(R) = \sigma(R) \wedge \sigma(R)^{op}$.

Lema 2.19 *Za svaku relaciju R na X, relacija $\varepsilon(R)$ je fazi ekvivalencija.*

Dokaz. Direktna posledica leme 2.6 i leme 2.15. □

Lema 2.20 *Neka je R fazi relacija na X. Tada, za svako $a, b \in X$ važi:*

1. *$\sigma(R)(a,b) = 1$ akko $a/R \leq b/R$;*

2. *$\varepsilon(R)(a,b) = 1$ akko $a/R = b/R$.*

Dokaz. (1) Neka je $R : X^2 \to L$ fazi relacija na X, i neka $a, b \in L$. Tada, po definiciji $\sigma(R)$ važi: $\sigma(R)(a,b) = \bigwedge_{c\in X}(R(c,a) \to R(c,b)) = \bigwedge_{c\in X}((a/R)(c) \to (b/R)(c)) = S(a/R, b/R)$. Dakle, $\sigma(R)(a,b) = 1$ akko $S(a/R, b/R) = 1$, a što, na osnovu leme 2.11, važi akko $a/R \leq b/R$, čime smo pokazali tvrđenje.

(2) Kako je $\varepsilon(R) = \sigma(R) \wedge \sigma(R)^{op}$, na osnovu stava (1) ove leme, sledi $a/R \leq b/R$ i $b/R \leq a/R$, što je ekvivalentno sa $a/R = b/R$. □

Primetimo da smo u prethodnoj lemi takođe pokazali i tvrđenja iz sledeće leme.

Lema 2.21 *Ako je R fazi relacija na X, za svako $a, b \in X$ važi:*

1. $\sigma(R)(a,b) = S(a/R, b/R)$;
2. $\varepsilon(R)(a,b) = \varepsilon(a/R, b/R)$.

Dokaz. Direktno po definiciji $\sigma(R)$, odnosno $\varepsilon(R)$, i x/R, gde $x \in X$. □

Lema 2.22 *Fazi relacija $\varepsilon(R)$ je najveća simetrična fazi relacija S na X, koja zadovoljava nejednačinu $R \circ S \leq R$.*

Dokaz. $\varepsilon(R)$ jeste simetrična i zaista zadovoljava datu nejednačinu. Naime:

$$\varepsilon(R) \leq \sigma(R)$$

te odatle za svako $x, y \in X$ važi $(R \circ \varepsilon(R))(x,y) = \bigvee_{z\in X}(R(x,z) * \varepsilon(R)(z,y)) \leq \bigvee_{z\in X}(R(x,z) * \sigma(R)(z,y)) = (R \circ \sigma(R))(x,y) \leq R(x,y)$

Posmatrajmo sada proizvoljnu simetričnu relaciju S, takvu da važi $R \circ S \leq R$. Na osnovu leme 2.17, sledi $S \leq \sigma(R)$, kao i da je $S^{op} \leq \sigma(R)$, jer je S simetrična. Druga nejednakost ekvivalenta je sa $S \leq \sigma(R)^{op}$, a odakle sledi:

$$S \leq \sigma(R) \wedge \sigma(R)^{op} = \varepsilon(R)$$

čime je ova lema dokazana. □

Definicija 2.23 *(1) Neka su (X, R_X) i (Y, R_Y) fazi preduređeni skupovi. Preslikavanje $f : X \to Y$ je* **homomorfizam** *iz (X, R_X) u (Y, R_Y) ako važi:*

$$(\forall x, y \in X) R_X(x,y) \leq R_Y(f(x), f(y)).$$

(2) **Gornji fazi podskup** *od fazi preduređenog skupa (X, R) jeste homomorfizam $A : (X, R) \to (L, \to)$.*

(3) **Donji fazi podskup** *od fazi preduređenog skupa (X, R) jeste homomorfizam $A : (X, R^{op}) \to (L, \to)$.*

Kategorija fazi preduređenih skupova i homomorfnih preslikavanja obeležava se sa $\mathbf{L-PrOrd}$.

Definicija 2.24 *Neka je R fazi relacija iz X u Y. Preslikavanja $R^{\uparrow} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ i $R^{\downarrow} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ data su na sledeći način:*

$$R^{\uparrow}(A)(y) = \bigvee_{x\in X}(A(x) * R(x,y));$$

$$R^{\downarrow}(A)(x) = \bigvee_{y\in Y}(A(y) * R(x,y)).$$

Tvrđenje 2.25 *Neka je R fazi relacija iz X u Y. Tada:*

1. $R^{\uparrow} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ *je homomorfizam iz* $(\mathcal{F}(X), S_X)$ *u* $(\mathcal{F}(Y), S_Y)$*;*
2. $R^{\uparrow}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} R^{\uparrow}(A_i)$ *za sve* $A_i \in \mathcal{F}(X)$*;*
3. $R^{\uparrow}(b * A) = b * R^{\uparrow}(A)$*, za svako* $A \in \mathcal{F}(X)$ *i za svako* $b \in L$*;*
4. $R^{\downarrow} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ *je homomorfizam iz* $(\mathcal{F}(Y), S_Y)$ *u* $(\mathcal{F}(X), S_X)$*;*
5. $R^{\downarrow}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} R^{\downarrow}(A_i)$ *za sve* $A_i \in \mathcal{F}(Y)$*;*
6. $R^{\downarrow}(b * A) = b * R^{\downarrow}(A)$*, za svako* $A \in \mathcal{F}(Y)$ *i za svako* $b \in L$*;*

Dokaz. (1) Neka $y \in Y$. Tada, kako je $*$ izotona operacija na L, kako za sve $a, b \in L$ važi $a * (a \to b) \leq b$, i kako za sve $a, b_i \in L$ za sve $i \in I$ važi $a * \bigvee_{i\in I} b_i = \bigvee_{i\in I}(a * b_i)$, sledi:

$$\bigwedge_{z\in X}(A(z) \to B(z)) * \bigvee_{x\in X}(A(x) * R(x,y)) =$$

$$= \bigvee_{x\in X}\left(\left(\bigwedge_{z\in X}(A(z) \to B(z))\right) * (A(x) * R(x,y))\right) \leq$$

$$\leq \bigvee_{x\in X}((A(x) \to B(x)) * A(x) * R(x,y)) \leq \bigvee_{x\in X}(B(x) * R(x,y))$$

Ovo je ekvivalentno sa:

$$\bigwedge_{z\in X}(A(z) \to B(z)) \leq \bigvee_{x\in X}(A(x) * R(x,y)) \to \bigvee_{x\in X}(B(x) * R(x,y))$$

što je isto što i:

$$S(A,B) \leq R^{\uparrow}(A)(y) \to R^{\uparrow}(B)(y).$$

Kako ova nejednakost važi za svako $y \in Y$, sledi:

$$S(A,B) \leq \bigwedge_{y\in Y}(R^{\uparrow}(A)(y) \to R^{\uparrow}(B)(y)) = S(R^{\uparrow}(A), R^{\uparrow}(B))$$

što je trebalo dokazati.

(2) Za proizvoljino $y \in Y$ važi:

$$R^{\uparrow}\left(\bigvee_{i\in I}(A_i)\right)(y) = \bigvee_{x\in X}\left(\bigvee_{i\in I} A_i(x) * R(x,y)\right) =$$

$$= \bigvee_{i\in I}\left(\bigvee_{x\in X}(A_i(x) * R(x,y))\right) = \bigvee_{i\in I}(R^{\uparrow}(A_i)(y)) = \left(\bigvee_{i\in I} R^{\uparrow}(A_i)\right)(y)$$

Kako ova jednakost važi za svako $y \in Y$, sledi $R^{\uparrow}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup R^{\uparrow}(A_i)$

(3) Neka $y \in Y$. Tada:

$$R^{\uparrow}(b * A)(y) = \bigvee_{x\in X}(b * A(x) * R(x,y)) =$$

$$b * \bigvee_{x \in X} (A(x) * R(x,y)) = b * R^{\uparrow}(A)(y) = (b * R^{\uparrow}(A))(y)$$

Kako ova jednakost važi za proizvoljno $y \in Y$, tvrđenje je dokazano.
(4), (5) i (6) se dokazuju analogno. □

Proizvoljna funkcija $f : X \to Y$ određuje fazi relaciju R_f iz X u Y takvu da je $R_f(x,y) = 1$ ako je $f(x) = y$, i $R_f(x,y) = 0$ ako je $f(x) \neq y$. Koristeći relaciju R_f definisaćemo, za datu funkciju $f : X \to Y$, preslikavanje $f^{\to} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ na sledeći način:

$$f^{\to}(A)(y) = (R_f)^{\uparrow}(A)(y) = \bigvee_{x \in X} (A(x) * R_f(x,y)) = \bigvee_{f(x)=y} A(x).$$

Tvrđenje 2.26 *Za proizvoljnu fazi relaciju R na X sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *R je fazi preduređenje;*
2. *$R^{\uparrow} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ zadovoljava uslove:*
   (a) *$A \subseteq R^{\uparrow}(A), A \in \mathcal{F}(X)$,*
   (b) *$R^{\uparrow}(A) = R^{\uparrow}(R^{\uparrow}(A))$;*
3. *$R^{\downarrow} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(X)$ zadovoljava uslove:*
   (a) *$A \subseteq R^{\downarrow}(A), A \in \mathcal{F}(X)$,*
   (b) *$R^{\downarrow}(A) = R^{\downarrow}(R^{\downarrow}(A))$.*

Dokaz. Dokazaćemo da važi (1) $\Leftrightarrow$ (2), ekvivalencija (1) $\Leftrightarrow$ (3) se analogno pokazuje.
(1) $\Rightarrow$ (2)
Pokažimo najpre da važi (a). Neka $x \in X$ i $A \in \mathcal{F}(X)$.

$$A(x) = A(x) * R(x,x) \leq \bigvee_{y \in X} (A(y) * R(y,x)) = R^{\uparrow}(A)(x),$$

čime smo pokazali da važi $A \subseteq R^{\uparrow}(A)$.

Pokažimo sada da važi i (b). Najpre dokažimo da za svako $z, x \in X$ važi jednakost $\bigvee_{y \in X}(R(z, y * R(y,x))) = R(z,x)$.

Za svako $x, y, z \in X$ iz tranzitivnosti R važi $R(z,y)*R(y,x) \leq R(z,x)$. Kako ova nejednakost važi za svako $y \in X$ sledi $\bigvee_{y \in X}(R(z,y) * R(y,x)) \leq R(z,x)$.

Takođe, pošto je R refleksivna imamo da za svako $z, x \in X$ važi $R(z,x) = R(z,x) * R(x,x) \leq \bigvee_{y \in X}(R(z,y) * R(y,x))$. Dobili smo da važi:

$$\bigvee_{y \in X} (R(z, y * R(y,x))) = R(z,x)$$

Na osnovu dobijene jednakosti sledi:

$$R^{\uparrow}(R^{\uparrow}(A))(x) = \bigvee_{y \in X} (R^{\uparrow}(A)(y) * R(y,x)) =$$

$$= \bigvee_{y\in X}\left(\bigvee_{z\in X}(A(z) * R(z,y)) * R(y,x)\right) = \bigvee_{y\in X}\bigvee_{z\in X}(A(z) * R(z,y) * R(y,x)) =$$

$$= \bigvee_{z\in X}\left(A(x) * \bigvee_{y\in X}(R(z,y) * R(y,x))\right) = \bigvee_{z\in X}(A(z) * R(z,x)) = R^{\uparrow}(A)(x)$$

čime je dokazana implikacija (1) $\Rightarrow$ (2)

(2) $\Rightarrow$ (1)

Pokažimo najpre refleksivnost. Za svako $x \in X$ važi $R(x,x) = 1_x(x) * R(x,x) = \bigvee_{y\in X}(1_x(y) * R(y,x)) = R^{\uparrow}(1_x)(x) \geq 1_x(x) = 1$.

Preostalo je još da se pokaže da je relacija R tranzitivna. Koristeći osobine (a) i (b) dobijamo:

$$\bigvee_{z\in X}(1_x(z) * R(z,y)) = R^{\uparrow}(1_x)(y) = R^{\uparrow}(R^{\uparrow}(1_x))(y) =$$

$$\bigvee_{t\in X}\left(\left(\bigvee_{z\in X}(1_x(z) * R(z,t))\right) * R(t,y)\right) = \bigvee_{t\in X}\bigvee_{z\in X}(1_x(z) * R(z,t) * R(t,y)) =$$

$$\bigvee_{z\in X}\left(1_x(z) * \bigvee_{t\in X}(R(z,t) * R(t,y))\right)$$

Za $z = x$ dobijamo $R(x,y) = \bigvee_{t\in X}(R(x,t) * R(t,y))$, te važi za proizvoljno $s \in X$:

$$R(x,s) * R(s,y) \leq \bigvee_{t\in X}(R(x,t) * R(t,y)) = R(x,y),$$

jer za $z \neq x$ važi $1_x(z) = 0$. Ovim je pokazana tranzitivnost, jer su $x, s, y \in X$ proizvoljni elementi. □

Posledica 2.27 *Za proizvoljnu fazi relaciju R na X sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *R je preduređenje;*
2. *$R^{\uparrow}$ je operator zatvaranja;*
3. *$R^{\downarrow}$ je operator zatvaranja.*

Dokaz. Neka su $A, B \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljni fazi podskupovi od X. Na osnovu tvrđenja 2.25 važi: ako je $A \subseteq B$, tada je $R^{\uparrow}(A) \subseteq R^{\uparrow}(B)$; te važi uslov:

- $A \subseteq B \Rightarrow R^{\uparrow}(A) \subseteq R^{\uparrow}(B)$

Dalje, ako je R preduređenje, na osnovu tvrđenja 2.26, za svako $A \in \mathcal{F}(X)$ važe uslovi:

- $A \subseteq R^{\uparrow}(A)$;
- $R^{\uparrow}(A) = R^{\uparrow}(R^{\uparrow}(A))$;

te sledi da je je $R^{\uparrow}$ operator zatvaranja.

Takođe, ako važe tri gornja uslova, važe i drugi i treći, te na osnovu prethodnog tvrđenja sledi da je R preduređenje. Ovim smo pokazali ekvivalenciju (1) $\Leftrightarrow$ (2), a ekvivalencija (1) $\Leftrightarrow$ (3) analogno se dokazuje. □

Tvrđenje 2.28 *Neka je R fazi predurеđenje na X, i neka $A \in \mathcal{F}(X)$. Tada je $R^{\uparrow}(A)$ najmanji gornji fazi podskup od X koji sadrži A. Dualno $R^{\downarrow}(A)$ je najmanji donji fazi podksup od X koji sadrži A.*

Dokaz. Pokažimo da je $R^{\uparrow}(A)$ najmanji nadskup skupa A, koji je gornji fazi podskup od X. Tvrđenje za $R^{\downarrow}$ se dokazuje analogno.

Da $R^{\uparrow}(A)$ jeste nadskup od A, znamo na osnovu prethodnog tvrđenja. Dokažimo da $R^{\uparrow}(A)$ jeste gornji skup, za proizvoljan fazi podskup A od X.

Kako je R tranzitivna relacija, važi:

$$R(x,y)*\bigvee_{z\in X}(A(z)*R(z,x)) = \bigvee_{z\in X}(R(x,y)*A(z)*R(z,x)) \leq \bigvee_{z\in X}(A(z)*R(z,y))$$

Međutim, ovo važi akko

$$R(x,y) \leq \bigvee_{z\in X}(A(z)*R(z,x)) \to \bigvee_{z\in X}(A(z)*R(z,y))$$

odnosno

$$R(x,y) \leq R^{\uparrow}(A)(x) \to R^{\uparrow}(A)(y) = \to (R^{\uparrow}(A)(x), R^{\uparrow}(A)(y))$$

čime je pokazano da je $R^{\uparrow}(A)$ zaista gornji fazi podskup od X.

Preostaje još samo da pokažemo da je $R^{\uparrow}(A)$ i najmanji nadskup od A, koji je gornji fazi podskup od X.

Posmatrajmo proizvoljan gornji fazi podskup U, takav da važi $A \subseteq U$. Kako je U gornji, za svako $x,y \in X$ važi $R(x,y) \leq U(x) \to U(y)$. Odavde sledi $U(x) * R(x,y) \leq U(y)$, za svako $x,y \in X$.

Kako je $*$ izotona operacija, imamo $A(x) * R(x,y) \leq U(x) * R(x,y) \leq U(y)$, za svako $x,y \in X$.

Kako gornja nejednakost važi za svako $x \in X$ dobijamo:

$$R^{\uparrow}(A)(y) = \bigvee_{x\in X}(A(x) * R(x,y)) \leq U(y)$$

a pošto ova nejednakost važi za svako $y \in X$ sledi

$$R^{\uparrow}(A) \subseteq U$$

čime je tvrđenje dokazano. □

Lema 2.29 (Yoneda lema) *Neka je R fazi predurеđenje na X. Tada:*

1. *$A(x) = S(x/R, A)$ za svako $x \in X$ i za svaki donji fazi podskup A od (X,R);*
2. *$B(x) = S(x/R^{op}, B)$ za svako $x \in X$ i za svaki gornji fazi podskup B od (X,R).*

Dokaz. Pokažimo (1), a (2) se dokazuje analogno.

Najpre pokažimo da je $\bigwedge_{y\in X}(R(y,x) \to A(y)) = A(x)$. Naime, na osnovu refleksivnosti R važi

$$A(x) = R(x,x) \to A(x) \geq \bigwedge_{y\in X}(R(y,x) \to A(y))$$

Pokažimo i suprotnu stranu nejednakosti. Kako je A donji fazi podskup od (X,R), važi $R^{op}(x,y) \leq A(x) \to A(y)$, što je ekvivalentno sa $R(y,x) \leq A(x) \to A(y)$. Odavde sledi:

$$A(x) * R(y,x) = R(y,x) * A(x) \leq A(y)$$

što je ekvivalentno sa $A(x) \leq R(y,x) \to A(y)$.

Kako gornja nejednakost važi za svako $y \in X$, važi:

$$A(x) \leq \bigwedge_{y\in X}(R(y,x) \to A(y))$$

te smo dokazali i drugu stranu jednakosti $\bigwedge_{y\in X}(R(y,x) \to A(y)) = A(x)$.

Ostao je samo račun

$$S(x/R, A) = \bigwedge_{y\in X}((x/R)(y) \to A(y)) = \bigwedge_{y\in X}(R(y,x) \to A(y)) = A(x)$$

čime je dokazano tvrđenje. □

Tvrđenje 2.30 *Neka je R fazi relacija na X. Sledeća tri uslova su ekvivalentna:*

1. *R je preduređenje;*
2. *$R = \sigma(R)$*
3. *$R = \rho(R)$*

Dokaz. (1) ⇒ (2)

Neka je R fazi preduređenje. Pošto je R tranzitivna, važi $R(x,y) * R(z,x) \leq R(z,y)$ za svako $x,y,z \in X$, što je ekvivalentno sa $R(x,y) \leq R(z,x) \to R(z,y)$ za svako $x,y,z \in X$. Kako prethodna nejednakost važi za svako $z \in X$ sledi

$$R(x,y) \leq \bigwedge_{z\in X}(R(z,x) \to R(z,y)) = \sigma(R)(x,y).$$

Takođe, na osnovu refleksivnosti, važi

$$R(x,y) = R(x,x) \to R(x,y) \geq \sigma(R)(x,y)$$

te važi i jednakost $R(x,y) = \sigma(R)(x,y)$ za svako $x,y \in X$, tj $R = \sigma(R)$.

(2) ⇒ (1)

Neka važi $R = \sigma(R)$.

Tada, kako u reziduiranoj mreži za svako $a \in L$ važi $a \to a = 1$, sledi $R(x,x) = \bigwedge_{z\in X}(R(z,x) \to R(z,x)) = 1$ čime je pokazana refleksivnost. Pokažimo da važi i tranzitivnost. Za svako $x,y \in X$ važi $R(x,y) = \bigwedge_{z\in X}(R(z,x) \to$

$R(z,y))$, te za svako $x,y,z \in X$ važi $R(x,y) \leq R(z,x) \to R(z,y)$, što je ekvivalentno sa:

$$R(z,x) * R(x,y) \leq R(z,y), \quad x,y,z \in X$$

čime je i tranzitivnost pokazana, te je R fazi preduređenje na X.

Dakle važi (1) $\Leftrightarrow$ (2), a ekvivalencija (1) $\Leftrightarrow$ (3) se dokazuje analogno. $\square$

Glava 3

Fazi stepene strukture

3.1 Stepene strukture

U ovoj glavi ćemo se baviti fazi stepenim strukturama. Međutim, kako bismo bolje razumeli fazi stepene strukture, najpre ćemo reći nekoliko reči o stepenim strukturama, čije su fazi stepene strukture uopštenje.

Definišimo najpre stepenu algebru.

Definicija 3.1 *Neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra. Njena* **stepena algebra** $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ *je algebra istog tipa kao $\mathcal{X}$ sa nosačem $\mathcal{P}(X)$, sa skupom fundamentalnih operacija $\{f^+ | f \in \mathbb{F}\}$, koje su definisane na sledeći način:*

- *ako je $ar(f) = n \geq 1$, onda $ar(f^+) = n$, i za sve $A_1, ..., A_n \in \mathcal{P}(X)$*

$$f^+(A_1, ..., A_n) = \{f(x_1, ..., x_n) | (\forall i \in \{1, ..., n\}) x_i \in A_i\};$$

- *ako je $ar(f) = 0$, tj, ako je $f : X^0 \to X$ konstanta, onda $f^+ : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ tako da*

$$f^+(\emptyset) = \{f(\emptyset)\}.$$

Drugim rečima, ako je $c \in X$ konstanta algebre $\mathcal{X}$, onda je $c^+ = \{c\}$ odgovarajuća konstanta stepene algebre $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Primetimo da ovako definisana stepena algebra sadrži izomorfnu kopiju algebre $\mathcal{X}$ - to je podalgebra koja za nosač ima skup svih singltona iz $\mathcal{P}(X)$.

Definišimo operacije i relacije koje relacija R nad skupom X determiniše nad skupom $\mathcal{P}(X)$.

Definicija 3.2 *1. Ako je R n-arna relacija na X, odnosno $R \subseteq A^n$, tada R za proizvoljno $k \in \{1, ..., n\}$ određuje operaciju arnosti $n-1$, $R_k^{\uparrow} : \mathcal{P}(X)^{n-1} \to \mathcal{P}(X)$ sa:*

$$R_k^{\uparrow}(A_1, ..., A_{k-1}, A_{k+1}, ..., A_n) =$$

$$= \{x \in X \mid (\exists x_1 \in A_1)...(\exists x_{k-1} \in A_{k-1})(\exists x_{k+1} \in A_{k+1})(\exists x_n \in A_n)$$

$$(x_1, ...x_{k-1}, x, x_{k+1}, ..., x_n) \in R\}$$

za sve $A_1, ..., A_{k-1}, A_{k+1}, ..., A_n \subseteq X$.

2. *Ako je* $R \subseteq X^n$ *relacija, definišemo relaciju* R^+ *na sledeći način: ako su* $A_1, ..., A_n$ *podskupovi od* X*, tada* $(A_1, A_2, ..., A_n) \in R^+$ *ako:*

$$A_1 \subseteq R_1^{\uparrow}(A_2, ..., A_n)$$

$$A_2 \subseteq R_2^{\uparrow}(A_1, A_3..., A_n)$$

$$...$$

$$A_n \subseteq R_n^{\uparrow}(A_1, ..., A_{n-1}).$$

3. *Ako je* $\mathcal{X} = (X, \mathbb{R})$ *relacijska struktura, odgovarajuća* **(relacijska) stepena struktura** *jeste* $\mathcal{P}(\mathcal{X}) = (\mathcal{P}(X), \{R^+ | R \in \mathbb{R}\})$.

4. *Ako je* R *binarna relacija na* X*. Tada su relacije* $R^{\rightarrow}$ *i* $R^{\leftarrow}$ *na* $\mathcal{P}(X)$ *definisane sa:*

   - $R^{\rightarrow}(A, B)$ *akko* $(\forall x \in A)(\exists y \in B)R(x, y)$*;*
   - $R^{\leftarrow}(A, B)$ *akko* $(\forall y \in B)(\exists x \in A)R(x, y)$.

Primetimo da, ukoliko je R binarna relacija, važi $R^+ = R^{\rightarrow} \wedge R^{\leftarrow}$.

Definicija 3.3 *Ako je* $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F}, \mathbb{R})$*, odgovarajuća* **stepena struktura** *je*

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}) = (\mathcal{P}(X), \mathbb{F}^+, \mathbb{R}^+).$$

3.2 Fazi stepene strukture

U prethodnom poglavlju smo za datu algebru $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ definisali njenu stepenu algebru konstruišući za svaku njenu n-arnu operaciju $f : X^n \to X$, n-arnu operaciju na $\mathcal{P}(X)$. Primetimo da tako definisanu operaciju f^+ možemo razložiti na kompoziciju dva preslikavanja:

$$f^+ = k \circ \mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X)^n \to_k \mathcal{P}(X^n) \to_{\mathcal{P}(f)} \mathcal{P}(X)$$

gde je:

- k preslikavanje $\mathcal{P}(X)^n \to \mathcal{P}(X^n)$ takvo da $k : (A_1, ..., A_n) \mapsto A_1 \times ... \times A_n$, za sve $A_1, ..., A_n \subseteq X$.

- $\mathcal{P}$: **Sets** $\to$ **Sets** funktor koji proizvoljnoj funkciji $g : X \to Y$ pridružuje preslikavanje $\mathcal{P}(g) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ definisano sa:

$$\mathcal{P}(g)(A) = \{g(x) | x \in A\}$$

Kako bismo definisali fazi stepene strukture, najpre ćemo uvesti sledeće oznake i pojmove:

- preslikavanje $k : \mathcal{F}(X)^n \to \mathcal{F}(X^n)$ jeste proizvod fazi podskupova od X. Postoje dva prirodna proizvoda fazi podskupova $A_1, ..., A_n$ od X. Jedan je Dekartov proizvod, definisan na sledeći način:

$$\prod_{i=1}^{n} A_i : X^n \to L, \quad (x_1, ..., x_n) \mapsto A_1(x_1) \wedge ... \wedge A_n(x_n),$$

a drugi je tenzorski definisan sa:

$$\bigotimes_{i=1}^{n} A_i : X^n \to L, \quad (x_1, ..., x_n) \mapsto A_1(x_1) * ... * A_n(x_n),$$

gde je L kompletna reziduirana mreža.

- $\mathcal{F}$: **Sets** $\to$ **Sets** jeste funktor koji proizvoljnoj funkciji $g : X \to Y$ dodeljuje preslikavanje $\mathcal{F}(g) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ definisano na sledeći način:

  $$\Big(\mathcal{F}(g)(A)\Big)(y) = \bigvee_{g(x)=y} A(x) = \bigvee_{x \in A} \Big(A(x) * \Delta(g(x), y)\Big),$$

  pri čemu sa Δ označavamo dijagonalu fazi relaciju[1].

Za datu n-arnu operaciju f na skupu X definišemo n-arnu operaciju f^+ na $\mathcal{F}(X)$ definišemo kao kompoziciju:

$$k \circ \mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X)^n \to_k \mathcal{F}(X^n) \to_{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(X).$$

Dakle, svaku operaciju f na X možemo preneti na $\mathcal{F}(X)$ na dva načina - koristeći Dekartov proizvod:

$$f^+(A_1, ..., A_n) = \mathcal{F}(f) \left(\prod_{i=1}^{n} A_i \right)$$

dobijajući pritom fazi stepenu algebru $\mathcal{F}^+(\mathcal{X}) = (\mathcal{F}(X), \{f^+\}_{f \in \mathbb{F}})$, i koristeći tenzorski proizvod:

$$f^*(A_1, ..., A_n) = \mathcal{F}(f) \left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i \right)$$

dobijajući na takav način fazi stepenu algebru $\mathcal{F}^*(\mathcal{X}) = (\mathcal{F}(X), \{f^*\}_{f \in \mathbb{F}})$.

3.3 Relacijske fazi stepene strukture

Definicija 3.4 *Neka je R binarna fazi relacija na X. Tada, ona determiniše sledeće tri fazi relacije na $\mathcal{F}(X)$:*

$$R^{\to}(A, B) = S(A, R^{\downarrow}(B)) = \bigwedge_{x \in X} \left(A(x) \to \bigvee_{y \in X} (B(y) * R(x, y)) \right)$$

$$R^{\leftarrow}(A, B) = S(B, R^{\uparrow}(A)) = \bigwedge_{x \in X} \left(B(x) \to \bigvee_{y \in X} (A(y) * R(y, x)) \right)$$

$$R^{+}(A, B) = R^{\to}(A, B) \wedge R^{\leftarrow}(A, B)$$

[1] Dijagonalna fazi relacija $\Delta : X^2 \to L$ jeste karakteristična funkcija dijagonalne (crisp) relacije. Dakle $\Delta(x, y) = 1$ ako važi $x = y$, i $\Delta(x, y) = 0$ ako važi $x \neq y$, za svako $x, y \in X$.

Lema 3.5 *Neka je R fazi relacija na X, $A, B \in \mathcal{F}(X)$ i $M, N \in \mathcal{P}(X)$. Tada važe sledeće jednakosti:*

1. $R^{\rightarrow}(\chi_M, B) = \bigwedge_{x\in M} \bigvee_{y\in X}(B(y) * R(x,y))$;
2. $R^{\rightarrow}(A, \chi_N) = \bigwedge_{x\in X} \big(A(x) \to \bigvee_{y\in N} R(x,y)\big)$;
3. $R^{\rightarrow}(\chi_M, \chi_N) = \bigwedge_{x\in M} \bigvee_{y\in N} R(x,y)$;
4. $R^{\leftarrow}(\chi_M, B) = \bigwedge_{y\in X} \big(B(y) \to \bigvee_{x\in M} R(x,y)\big)$;
5. $R^{\leftarrow}(A, \chi_N) = \bigwedge_{y\in N} \bigvee_{x\in X}(A(x) * R(x,y))$;
6. $R^{\leftarrow}(\chi_M, \chi_N) = \bigwedge_{y\in N} \bigvee_{x\in M} R(x,y)$.

Dokaz. (1) Neka je $R \in \mathcal{F}(X^2)$ fazi relacija na X, i neka $M \in \mathcal{P}(X)$, i $B \in \mathcal{F}(X)$.

Neka je M neprazan skup. Kako u svakoj reziduiranoj mreži važe identiteti $1 \to a = 1$ i $0 \to a = 1$, sledi:

$R^{\rightarrow}(\chi_M, B) = \bigwedge_{x\in X} \Big(\chi_M(x) \to \bigvee_{y\in X}(B(y) * R(x,y))\Big)$
$= \bigwedge_{x\in M} \bigvee_{y\in X}(B(y) * R(x,y))$.

Dalje, neka je $M = \emptyset$. Tada je $\chi_M(x) = 0$ za svako $x \in X$, te važi:

$R^{\rightarrow}(\chi_M, B) = \bigwedge_{x\in X} \Big(\chi_M(x) \to \bigvee_{y\in X}(B(y) * R(x,y))\Big) = 1$,

a kako je infimum praznog skupa 1, sledi:

$\bigwedge_{x\in M} \bigvee_{y\in X}(B(y) * R(x,y)) = 1$.

(2) Neka je $R \in \mathcal{F}(X^2)$, $A \in \mathcal{F}(X)$, i $N \in \mathcal{P}(X)$.

Neka je N neprazan skup. Tada kako važi $0 * a = 0$ i $1 * a = a$ sledi:

$R^{\rightarrow}(A, \chi_N) = \bigwedge_{x\in X} \Big(A(x) \to \bigvee_{y\in X}(\chi_N(y) * R(x,y))\Big)$
$= \bigwedge_{x\in X} \Big(A(x) \to \bigvee_{y\in N} R(x,y)\Big)$.

Pretpostavimo sada da je $N = \emptyset$. Tada je $\chi_N(y) = 0$ za svako $y \in X$, te sledi:

$R^{\rightarrow}(A, \chi_N) = \bigwedge_{x\in X} \Big(A(x) \to \bigvee_{y\in X}(\chi_N(y) * R(x,y))\Big)$
$= \bigwedge_{x\in X} \big(A(x) \to 0\big)$,

a kako je supremum praznog skupa 0, sledi $\bigvee_{y\in N} R(x,y) = 0$, te važi:

$\bigwedge_{x\in X} \Big(A(x) \to \bigvee_{y\in N} R(x,y)\Big) = \bigwedge_{x\in X} \big(A(x) \to 0\big)$.

(3) Ovo je direktna posledica jednakosti (1) i (2). □

Primetimo da na osnovu prethodne leme sledi da se definicija relacija $R^{\rightarrow}$, $R^{\leftarrow}$ i R^{+} na fazi stepenoj strukturi slaže sa definicijom relacija $R^{\rightarrow}$, $R^{\leftarrow}$ i R^{+} na crisp stepenoj strukturi.

Naime, ako je $R \subseteq X^2$ neka crisp relacija na X, njenu karakterističnu funkciju obeležavamo sa $\chi_R : X^2 \to \{0,1\}$. Tada važi sledeća lema:

Lema 3.6 *Neka je R crisp relacija na skupu X. Tada za sve $M, N \in \mathcal{P}(X)$ važi:*

1. $(\chi_R)^{\rightarrow}(\chi_M, \chi_N) = \chi_{R^{\rightarrow}}(\chi_M, \chi_N)$;

2. $(\chi_R)^{\leftarrow}(\chi_M, \chi_N) = \chi_{R^{\leftarrow}}(\chi_M, \chi_N)$*;*

3. $(\chi_R)^{+}(\chi_M, \chi_N) = \chi_{R^{+}}(\chi_M, \chi_N)$*.*

Dokaz. (1) Neka su $M, N \in \mathcal{P}(X)$, i neka je R crisp relacija na X. Tada važi: $\chi_{R^{\rightarrow}}(\chi_M, \chi_N) = 1$ akko $(M, N) \in R^{\rightarrow}$ akko $(\forall x \in M)(\exists y \in N)R(x, y)$ akko $\bigwedge_{x\in M} \bigvee_{y\in N} \chi_R(x, y) = 1$ akko $(\chi_R)^{\rightarrow}(\chi_M, \chi_N) = 1$.

(2) Neka su $M, N \in \mathcal{P}(X)$, i neka je R crisp relacija na X. Tada važi: $\chi_{R^{\leftarrow}}(\chi_M, \chi_N) = 1$ akko $(M, N) \in R^{\leftarrow}$ akko $(\forall y \in N)(\exists x \in M)R(x, y)$ akko $\bigwedge_{y\in X} \bigvee_{x\in X} R(x, y) = 1$ akko $(\chi_R)^{\leftarrow}(\chi_M, \chi_N)$.

(3) Ovo je posledica prva dva. Naime, ako $M, N \in \mathcal{P}(X)$, tada važi:

$$\chi_{R^{+}}(\chi_M, \chi_N) = \chi_{R^{\rightarrow}\cap R^{\leftarrow}}(\chi_M, \chi_N) = \chi_{R^{\rightarrow}}(\chi_M, \chi_N) \wedge \chi_{R^{\leftarrow}}(\chi_M, \chi_N) =$$

$$(\chi_R)^{\rightarrow}(\chi_M, \chi_N) \wedge (\chi_R)^{\leftarrow}(\chi_M, \chi_N) = (\chi_R)^{+}(\chi_M, \chi_N),$$

čime je ovo tvrđenje dokazano. □

Definicija 3.7 *Neka je R binarna fazi relacija na X. Ona determiniše tri fazi relacije na $\mathcal{P}(X)$, kao podmreži od $\mathcal{F}(X)$:*

1. $\mathfrak{R}^{\rightarrow} = R^{\rightarrow} \restriction_{\mathcal{P}(X)}$*;* *2.* $\mathfrak{R}^{\leftarrow} = R^{\leftarrow} \restriction_{\mathcal{P}(X)}$*;* *3.* $\mathfrak{R}^{+} = R^{+} \restriction_{\mathcal{P}(X)}$*.*

gde $\restriction$ označava restrikciju relacije.

Dakle, za svako $A, B \in \mathcal{P}(X)$ važi:

1. $\mathfrak{R}^{\rightarrow}(A, B) = R^{\rightarrow}(\chi_A, \chi_B) = \bigwedge_{x\in A} \bigvee_{y\in B} R(x, y)$;
2. $\mathfrak{R}^{\leftarrow}(A, B) = R^{\leftarrow}(\chi_A, \chi_B) = \bigwedge_{x\in B} \bigvee_{y\in A} R(y, x)$;
3. $\mathfrak{R}^{+}(A, B) = \mathfrak{R}^{\rightarrow}(A, B) \wedge \mathfrak{R}^{\leftarrow}(A, B)$.

Lema 3.8 *Neka je $A \in \mathcal{F}(X)$ fazi podskup od X, i neka je S stepen podskuposti. Tada važi:*

1. A/S *je donji fazi podskup od* $(\mathcal{F}(X), S)$*;*

2. A/S^{op} *je gornji fazi podskup od* $(\mathcal{F}(X), S)$*.*

Dokaz. (1) Neka $A \in \mathcal{F}(X)$ i neka je S stepen podskuposti. Potrebno je pokazati da za proizvoljne $D, E \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$$S^{op}(D, E) \leq (A/S)(D) \rightarrow (A/S)(E).$$

Sprovedimo sledeći račun:

$$(A/S)(D) \rightarrow (A/S)(E) = S(D, A) \rightarrow S(E, A) =$$
$$\Big(\bigwedge_{x\in X} \big(D(x) \rightarrow A(x)\big)\Big) \rightarrow \Big(\bigwedge_{x\in X} \big(E(x) \rightarrow A(x)\big)\Big).$$

Na osnovu ovoga i osobine adjungovanosti, dobijamo da je polazna nejednakost ekvivalentna sa:

$$S^{op}(D, E) * \Big(\bigwedge_{x\in X} \big(D(x) \rightarrow A(x)\big)\Big) \leq \bigwedge_{x\in X} \big(E(x) \rightarrow A(x)\big).$$

Kako je $*$ monotona operacija na L, i kako u svakoj reziduiranoj mreži važi nejednakost $(a \to b) * (b \to c) \leq a \to c$ za svako $a, b, c \in L$, za svako X_0 sledi:

$$S^{op}(D,E) * \Big(\bigwedge_{x\in X} \big(D(x) \to A(x)\big)\Big) = \Big(\bigwedge_{x\in X} \big(E(x) \to D(x)\big)\Big) *$$
$$\Big(\bigwedge_{x\in X} \big(D(x) \to A(x)\big)\Big) \leq \big(E(x_0) \to D(x_0)\big) * \big(D(x_0) \to A(x_0)\big) \leq$$
$$E(x_0) \to A(x_0),$$

a kako ova nejednakost važi za svako $x_0 \in X$, važi:

$$S^{op}(D,E) * \Big(\bigwedge_{x\in X} \big(D(x) \to A(x)\big)\Big) \leq \bigwedge_{x\in X} \big(E(x) \to A(x)\big),$$

što je, na osnovu osobine adjungovanosti operacija $*$ i $\to$ bilo dovoljno dokazati.

(2) Neophodno je pokazati da za proizvoljne $F, G \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$$S(F,G) \leq \big(A/S^{op}\big)(F) \to \big(A/S^{op}\big)(G),$$

što je ekvivalentno sa $S(F,G) * \big(A/S^{op}\big)(F) \leq \big(A/S^{op}\big)(G)$. Pokažimo poslednju nejednakost. Kako u reziduiranoj mreži za svako $a, b, c \in L$ važi $(a \to b) * (b \to c) \leq a \to c$, za svako $x_0 \in X$ važi:

$$S(F,G) * \big(A/S^{op}\big)(F) = \left(\bigwedge_{x\in X} (F(x) \to G(x))\right) * S^{op}(F,A) =$$
$$\left(\bigwedge_{x\in X} (F(x) \to G(x))\right) * \left(\bigwedge_{x\in X} (A(x) \to F(x))\right) \leq$$
$$\big(F(x_0) \to G(x_0)\big) * \big(A(x_0) \to F(x_0)\big) \leq A(x_0) \to G(x_0),$$

a kako ova nejednakost važi za svako $x_0 \in X$, sledi:

$$S(F,G) * \big(A/S^{op}\big)(F) \leq \bigwedge_{x\in X} (A(x) \to G(x)) = S^{op}(G,A) = \big(A/S^{op}\big)(G),$$

što je ekvivalentno sa $S(F,G) \leq \big(A/S^{op}\big)(F) \to \big(A/S^{op}\big)(G)$, odakle sledi da je A/S^{op} gornji fazi podskup od $(\mathcal{F}(X), S)$. □

Tvrđenje 3.9 *Neka je R fazi relacija na X. Tada za sve $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi:*

1. $\sigma(R^{\to})(A,B) = S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B))$;
2. $\varepsilon(R^{\to})(A,B) = \varepsilon(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B))$;
3. $S(A,B) \leq \sigma(R^{\to})(A,B)$;
4. $S(A,B) \leq \sigma(R^{\leftarrow})(B,A)$;
5. $\varepsilon(A,B) \leq \varepsilon(R^{\to})(A,B)$;
6. $\varepsilon(A,B) \leq \varepsilon(R^{\leftarrow})(B,A)$.

Dokaz. (1) *Prvi način*: Kako je, na osnovu prethodne leme, $R^{\downarrow}(A)/S_X$ donji fazi podskup od $(\mathcal{F}(X), S_X)$, po definiciji $\sigma(R^{\to})$ i $R^{\to}$, koristeći Yoneda lemu (lema 2.29), za proizvoljne $A, B \in \mathcal{F}(X)$ dobijamo:

$$\sigma(R^{\to})(A,B) = \bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} (R^{\to}(C,A) \to R^{\to}(C,B)) =$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} (S_X(C,R^{\downarrow}(A)) \to S_X(C,R^{\downarrow}(B))) =$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} ((R^{\downarrow}(A)/S_X)(C) \to (R^{\downarrow}(B)/S_X)(C)) =$$

$$S_{\mathcal{F}(X)}\big(R^{\downarrow}(A)/S_X, R^{\downarrow}(B)/S_X\big) = \big(R^{\downarrow}(B)/S_X\big)(R^{\downarrow}(A)) = S_X(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)),$$

čime je tvrđenje dokazano. Primetimo da su relacija S iz postavke tvrđenja i S_X jedna ista relacija - u dokazu je korišćena drugacija oznaka S_X, kako bi se ova relacija razlikovala od $S_{\mathcal{F}(X)}$, koja je takođe stepen podskuposti, ali na drugom skupu - na $\mathcal{F}(\mathcal{F}(X))$.

Drugi način: Malo pre smo dokazali tvrđenje koristeći Yoneda lemu. Ovo međutim može da se dokaže i direktno.

Naime, za proizvoljne $A, B \in \mathcal{F}(X)$, kako u svakoj reziduiranoj mreži važi $1 \to a = a$ za svako $a \in L$, važi sledeće:

$$\sigma(R^{\to})(A,B) = \bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \big(R^{\to}(C,A) \to R^{\to}(C,B)\big) =$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \big(S(C,R^{\downarrow}(A)) \to S(C,R^{\downarrow}(B))\big) \leq$$

$$S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(A)) \to S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)) = S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)),$$

čime smo pokazali jednu nejednakost. Pokažimo sada da važi i suprotna nejednakost. Neka je $C \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljan fazi podskup skupa X. Kako je stepen podskuposti tranzitivna relacija, za sve $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$$S(C,R^{\downarrow}(A)) * S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)) \leq S(C,R^{\downarrow}(B)),$$

što je na osnovu osobine adjungovanosti ekvivalentno sa:

$$S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)) \leq S(C,R^{\downarrow}(A)) \to S(C,R^{\downarrow}(B)),$$

a kako gornja nejednakost važi za svako $C \in \mathcal{F}(X)$, sledi:

$$S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)) \leq \bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \big(S(C,R^{\downarrow}(A)) \to S(C,R^{\downarrow}(B))\big) =$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \big(R^{\to}(C,A) \to R^{\to}(C,B)\big) = \sigma(R^{\to})(A,B),$$

čime smo dokazali i drugu nejednakost.

(2) Ovaj stav je direktna posledica malo pre dokazanog. Naime, za svako $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$\varepsilon(R)(A,B) = \sigma(R)(A,B) \wedge \sigma^{op}(R)(A,B) = \sigma(R)(A,B) \wedge \sigma(R)(B,A) = S\big(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)\big) \wedge S\big(R^{\downarrow}(B), R^{\downarrow}(A)\big) = S\big(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B) \wedge S^{op}\big(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)\big) = \varepsilon(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B))$, čime je i ovo tvrđenje pokazano.

(3) Ranije smo u tvrđenju 2.25 pokazali, da je $R^{\downarrow}$ homomorfizam. Koristeći ovu činjenicu, kao i jednakost (1) ovog tvrđenja, lako dobijamo da važi nejednakost:

$$S(A,B) \leq S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)) = \sigma(R^{\to})(A,B).$$

(4) *Prvi način*: Neka su $A, B \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljni fazi podskupovi od X. Koristeći Yoneda lemu (lema 2.29), kao i to da je A/S_X^{op} gornji fazi podskup, dobijamo:

$$\sigma(R^{\leftarrow})(B,A) = \bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \Big(R^{\leftarrow}(C,B) \to R^{\leftarrow}(C,A)\Big) =$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \Big(S(B,R^{\uparrow}(C)) \to S(A,R^{\uparrow}(C))\Big) \geq \bigwedge_{D\in\mathcal{F}(X)} \Big(S_X(B,D) \to S_X(A,D)\Big) =$$

$$\bigwedge_{D\in\mathcal{F}(X)} \Big(B/S_X^{op}(D) \to A/S_X^{op}(D)\Big) =$$

$$S_{\mathcal{F}(X)}\big(B/S_X^{op}, A/S_X^{op}\big) = \big(A/S_X^{op}\big)(B) = S_X^{op}(B,A) = S_X(A,B),$$

čime smo pokazali tvrđenje.

Drugi način: Neka su $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljni fazi podskupovi. Kako je S tranzitivna relacija važi $S(A,B) * S(B,R^{\uparrow}(C)) \leq S(A,R^{\uparrow}(C))$, a ovo je na osnovu osobine adjungovanosti operacija $*$ i $\to$ ekvivalentno sa:

$$S(A,B) \leq S(B,R^{\uparrow}(C)) \to S(A,R^{\uparrow}(C)),$$

a kako ova nejednakost važi za svako $C \in \mathcal{F}(X)$, sledi:

$$S(A,B) \leq \bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \big(S(B,R^{\uparrow}(C)) \to S(A,R^{\uparrow}(C))\big) =$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \big(R^{\leftarrow}(C,B) \to R^{\leftarrow}(C,A)\big) = \sigma(R^{\leftarrow})(B,A),$$

čime smo dokazali tvrđenje.

(5) Koristeći nejednakost (3) ovog tvrđenja, za proizvoljne $A, B \in \mathcal{F}(X)$ dobijamo:

$$\varepsilon(A,B) = S(A,B) \wedge S^{op}(A,B) \leq \sigma(R^{\to})(A,B) \wedge \sigma(R^{\to})^{op}(A,B) = \varepsilon(R^{\to})(A,B),$$

što je trebalo pokazati.

(6) Kako važi nejednakost (4) iz ovog tvrđenja, i kako je $\varepsilon(R)$ simetrična za svaku fazi relaciju R , za proizvoljne $A, B \in F(X)$ dobijamo $\varepsilon(A,B) = S(A,B) \wedge S^{op}(A,B) \leq \sigma(R^{\leftarrow})(B,A) \wedge \sigma(R^{\leftarrow})^{op}(B,A) = \varepsilon(R^{\leftarrow})(B,A) = \varepsilon(R^{\leftarrow})(A,B)$, što je trebalo dokazati. □

Tvrđenje 3.10 *Neka je R fazi relacija na X. Tada za sve $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi:*

1. $\sigma(R^{\to})(A,B) = \varepsilon(R^{\to})(A \cup B, B)$;
2. $\sigma(R^{\leftarrow})(A,B) = \varepsilon(R^{\leftarrow})(A \cup B, B)$;
3. $\sigma(R)^{\to}(A,B) \leq \sigma(R^{\to})(A,B)$.

Dokaz. (1) Kako je $S(A,B)=1$ akko $A\subseteq B$, i kako $R^{\downarrow}(A\cup B)=R^{\downarrow}(A)\cup R^{\downarrow}(B)$, kao i $\sigma(R^{\rightarrow})(A,B)=S(R^{\downarrow}(A),R^{\downarrow}(B))$, sledi:

$$\varepsilon(R^{\rightarrow})(A\cup B,B)=\sigma(R^{\rightarrow})(A\cup B,B)\wedge\sigma(R^{\rightarrow})(B,A\cup B)=$$

$$S\big(R^{\downarrow}(A\cup B),R^{\downarrow}(B)\big)\wedge S\big(R^{\downarrow}(B),R^{\downarrow}(A\cup B)\big)=$$

$$S\big(R^{\downarrow}(A)\cup R^{\downarrow}(B),R^{\downarrow}(B)\big)\wedge S\big(R^{\downarrow}(B),R^{\downarrow}(A)\cup R^{\downarrow}(B)\big)=$$

$$S\big(R^{\downarrow}(A)\cup R^{\downarrow}(B),R^{\downarrow}(B)\big)\wedge 1=S\big(R^{\downarrow}(A)\cup R^{\downarrow}(B),R^{\downarrow}(B)\big),$$

a kako za sve $A,B,C\in\mathcal{F}(X)$ važi $S(A\cup B,C)=S(A,C)\wedge S(B,C)$, i na osnovu jednakosti (1) iz prethodnog tvrđenja, sledi:

$$S\big(R^{\downarrow}(A)\cup R^{\downarrow}(B),R^{\downarrow}(B)\big)=S(R^{\downarrow}(A),R^{\downarrow}(B))\wedge S(R^{\downarrow}(B),R^{\downarrow}(B))=$$

$$S(R^{\downarrow}(A),R^{\downarrow}(B))=\sigma(R^{\rightarrow})(A,B),$$

što je trebalo dokazati.

(2) Neka $A,B\in\mathcal{F}(X)$, i neka je R fazi relacija na X. Pokažimo najpre da je $S(A\cup B,R^{\uparrow}(C))\rightarrow S(A,R^{\uparrow}(C))=1$. Kako u reziduiranoj mreži za svako $a,b,c\in L$ važi jednakost $(a\vee b)\rightarrow c=(a\rightarrow c)\wedge(b\rightarrow c)$, sledi:

$$S(A\cup B,R^{\uparrow}(C))=\bigwedge_{x\in X}\big((A\cup B)(x)\rightarrow\big(R^{\uparrow}(C)\big)(x)\big)$$

$$=\bigwedge_{x\in X}\big(\big(A(x)\vee B(x)\big)\rightarrow\big(R^{\uparrow}(C)\big)(x)\big)=$$

$$\bigwedge_{x\in X}\Big(\big(A(x)\rightarrow\big(R^{\uparrow}(C)\big)(x)\big)\wedge\big(B(x)\rightarrow\big(R^{\uparrow}(C)\big)(x)\big)\Big)\leq$$

$$\bigwedge_{x\in X}\big(A(x)\rightarrow\big(R^{\uparrow}(C)\big)(x)\big)=S(A,R^{\uparrow}(C)),$$

što je ekvivalentno sa $S(A\cup B,R^{\uparrow}(C))\rightarrow S(A,R^{\uparrow}(C))=1$.

Kako za sve $A,B,C\in\mathcal{F}(X)$ važi $S(A\cup B,C)=S(A,C)\wedge S(B,C)$, i kako za sve $a,b,c\in L$ važi $a\rightarrow(b\wedge c)=(a\rightarrow b)\wedge(a\rightarrow c)$, i na osnovu malo pre dobijene jednakosti, sledi:

$$\varepsilon(R^{\leftarrow})(A,A\cup B)=\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)}\Big(R^{\leftarrow}(C,A)\leftrightarrow R^{\leftarrow}(C,A\cup B)\Big)=$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)}\Big(S(A,R^{\uparrow}(C))\rightarrow S(A\cup B,R^{\uparrow}(C))\Big)=$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}}\Big(S(A,R^{\uparrow}(C))\rightarrow\big(S(A,R^{\uparrow}(C))\wedge S(B,R^{\uparrow}(C))\big)\Big)=$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)}\Big(S(A,R^{\uparrow}(C))\rightarrow S(B,R^{\uparrow}(C))\Big)=$$

$$\bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)}\Big(R^{\leftarrow}(C,A)\rightarrow R^{\leftarrow}(C,A)\Big)=\sigma(R^{\leftarrow})(A,B),$$

čime je tvrđenje pokazano.

(3) Pokažimo najpre sledeće: ako su P i Q fazi relacije na Y takve da važi $P \leq Q$, tada važi $P^{\downarrow} \leq Q^{\downarrow}$. Naime, kako je operacija $*$ izotona, za proizvoljno $A \in \mathcal{F}(Y)$ važi $P^{\downarrow}(A)(x) = \bigvee_{y\in Y} \big(A(y) * P(x,y)\big) \leq \bigvee_{y\in Y} \big(A(y) * Q(x,y)\big) = Q^{\downarrow}(A)(x)$.

Na osnovu leme 2.17 sledi da je $\sigma(R^{\rightarrow})$ najveća fazi relacija S na $\mathcal{F}(X)$ takva da zadovoljava nejednačinu $R^{\rightarrow} \circ S \leq R^{\rightarrow}$, pa je prema tome, dovoljno pokazati da $\sigma(R)^{\rightarrow}$ zadovoljava datu nejednačinu.

Neka su $A, B \in \mathcal{F}(X)$ fazi podskupovi od X, i neka je R fazi relacija na X. Kako je $R^{\downarrow}$ homomorfizam, i kako je S tranzitivna relacija na $\mathcal{F}(X)$, sledi:

$$\big(R^{\rightarrow} \circ \sigma(R)^{\rightarrow}\big)(A,B) = \bigvee_{C\in\mathcal{F}(X)} \Big(R^{\rightarrow}(A,C) * \sigma(R)^{\rightarrow}(C,B)\Big) =$$

$$\bigvee_{C\in\mathcal{F}(X)} \Big(S(A, R^{\downarrow}(C)) * S(C, \big(\sigma(R)^{\downarrow}\big)(B))\Big) \leq$$

$$\bigvee_{C\in\mathcal{F}(X)} \Big(S(A, R^{\downarrow}(C)) * S\Big(R^{\downarrow}(C), R^{\downarrow}\big(\sigma(R)^{\downarrow}(B)\big)\Big)\Big) \leq$$

$$S\Big(A, R^{\downarrow}\big(\sigma(R)^{\downarrow}(B)\big)\Big).$$

Međutim, kako u reziduiranoj mreži za svako $a \in L$ i za sve $b_i \in L$ za svako $i \in I$ važi $\bigvee_{i\in I}(a * b_i) = x * \bigvee_{i\in I} b_i$, sledi:

$$R^{\downarrow}\big(\sigma(R)^{\downarrow}(B)\big)(x) = \bigvee_{y\in X} \Big(\big(\sigma(R)^{\downarrow}\big)(B)(y) * R(x,y)\Big) =$$

$$\bigvee_{y\in X} \left(\left(\bigvee_{z\in X} \big(B(z) * \sigma(R)(y,z)\big)\right) * R(x,y)\right) =$$

$$\bigvee_{y\in X} \left(\bigvee_{z\in X} \Big(B(z) * \sigma(R)(y,z) * R(x,y)\Big)\right) =$$

$$\bigvee_{z\in X} \left(B(z) * \bigvee_{y\in X} \Big(R(x,y) * \sigma(R)(y,z)\Big)\right) =$$

$$\bigvee_{z\in X} \Big(B(z) * \big(R \circ \sigma(R)\big)(x,z)\Big) = \big(R \circ \sigma(R)\big)^{\downarrow}(B)(x),$$

te dobijamo

$$S\big(A, R^{\downarrow}\big(\sigma(R)^{\downarrow}(B)\big)\big) = S\big(A, \big(R \circ \sigma(R)\big)^{\downarrow}(B)\big) = \big(R \circ \sigma(R)\big)^{\rightarrow}(A,B),$$

čime je ovo tvrđenje dokazano. □

Tvrđenje 3.11 *Neka je R fazi relacija na X. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *R je fazi preduređenje na X;*

2. $R^{\to}(A,B) = S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B))$ *za sve* $A, B \in \mathcal{F}(X)$;

3. $R^{\leftarrow}(B,A) = S(R^{\uparrow}(A), R^{\uparrow}(B))$, *za sve* $A, B \in \mathcal{F}(X)$;

4. $R^{\to}$ *je fazi predurećenje na* $\mathcal{F}(X)$;

5. $R^{\leftarrow}$ *je fazi predurećenje na* $\mathcal{F}(X)$;

6. $\mathfrak{R}^{\to}$ *je fazi predurećenje na* $\mathcal{P}(X)$

7. $\mathfrak{R}^{\leftarrow}$ *je fazi predurećenje na* $\mathcal{P}(X)$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2)

Kako je R fazi predurećenje, $R^{\downarrow}$ je operator zatvaranja, pa prema tome, za svako $D \in \mathcal{F}(X)$ važi $D \leq R^{\downarrow}(D)$, odnosno važi $S(D, R^{\downarrow}D) = 1$. Na osnovu ovoga, i kako je S predurećenje, koristeći nejednakost $a * b \leq a$ koja važi u svakoj reziduiranoj mreži za svako $a, b \in L$, za svako $A, B \in \mathcal{F}(X)$ dobijamo da važi $S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)) = S(A, R^{\downarrow}(A)) * S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)) \leq S(A, R^{\downarrow}(B)) = R^{\to}(A,B)$. $\square$

Takođe, kako je $R^{\downarrow}$ operator zatvaranja, i kako je $R^{\downarrow}$ homomorfizam, za svako $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi $R^{\to}(A,B) = S(A, R^{\downarrow}(B)) \leq S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(R^{\downarrow}(B))) = S(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B))$, čime je ova implikacija pokazana.

(2) $\Rightarrow$ (4)

Pokažimo najpre da važi refleksivnost. Naime, direktno iz uslova (2), za svako $A \in \mathcal{F}(X)$ sledi $R^{\to}(A,A) = S(^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(A)) = 1$, čime je refleksivnost dokazana.

Pokažimo sada i tranzitivnost. Kako je S tranzitivna relacija na $\mathcal{F}(X)$, i iz uslova (2), za svako $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ sledi $R^{\to}(A,B) * R^{\to}(B,C) = S(A, R^{\downarrow}(B)) * S(R^{\downarrow}(B), R^{\downarrow}(C)) \leq S(A, R^{\downarrow}(C)) = R^{\to}(A,C)$, čime je tranzitivnost pokazana.

(4) $\Rightarrow$ (6)

Ova implikacija trivijalno važi, jer je $\mathfrak{R}^{\to}$ restrikcija relacije $R^{\to}$.

(6) $\Rightarrow$ (1)

Pokažimo najpre da za svako $x, y \in X$ važi $R(a,b) = \mathfrak{R}^{\to}(\{a\},\{b\})$. Po definiciji $\mathfrak{R}^{\to}$ sledi $R(a,b) = \bigwedge_{x\in\{a\}} \bigvee_{y\in\{b\}} R(x,y) = \mathfrak{R}^{\to}(\{a\},\{b\})$, jer za svako $z \in X$ važi $\inf\{z\} = \sup\{z\} = z$.

Pokažimo da je R refleksivna. Naime, kako je $\mathfrak{R}^{\to}$ refleksivna, za svako $x \in X$ važi $R(x,x) = \mathfrak{R}(\{x\},\{x\}) = 1$. Tranzitivnost pokazujemo analogno. Kako je $\mathfrak{R}^{\to}$ tranzitivna relacija na $\mathcal{P}(X)$, za proizvoljne $x, y, z \in X$ važi $R(x,y) * R(y,z) = \mathfrak{R}^{\to}(\{x\},\{y\}) * \mathfrak{R}^{\to}(\{y\},\{z\}) \leq \mathfrak{R}^{\to}(\{x\},\{z\}) = R(x,z)$, čime smo pokazali i ovu implikaciju.

Na ovaj način, pokazali smo implikacije (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1), a implikacije (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (7) $\Rightarrow$ (1) se pokazuju analogno, čime je ovo tvrđenje dokazano.

Lema 3.12 *Ako je* R *simetrična fazi relacija, tada za svako* $A \in \mathcal{F}(X)$ *važi* $R^{\uparrow}(A) = R^{\downarrow}(A)$, *i važi* $R^{\to} = (R^{\leftarrow})^{op}$.

Dokaz. Neka je $A \in \mathcal{F}(X)$ fazi podskup od X, i neka $x \in X$. Tada, kako je R simetrična relacija, sledi $\big(R^{\uparrow}(A)\big)(x) = \bigvee_{y\in X}\big(A(y) * R(y,x)\big) = \bigvee_{y\in X}\big(A(y) * R(x,y)\big) = \big(R^{\downarrow}(A)\big)(x)$, a kako je x prozivoljan element skupa X sledi da za za svaki fazi podskup $A \in \mathcal{F}(X)$ važi jednakost $R^{\uparrow}(A) = R^{\downarrow}(A)$.

Pokažimo sada da važi $R^{\rightarrow} = (R^{\leftarrow})^{op}$. Naime, koristeći malo pre dobijenu jednakost, za proizvoljne $A, B \in \mathcal{F}(X)$ dobijamo $R^{\rightarrow}(A,B) = S(A, R^{\downarrow}(B)) = S(A, R^{\uparrow}(B)) = R^{\leftarrow}(B,A) = (R^{\leftarrow})^{op}(A,B)$, čime smo dokazali tvđenje. □

Posledica 3.13 *Ako je R fazi ekvivalencija na X, tada je i R^{+} fazi ekvivalencija na $\mathcal{F}(X)$, i važi*

$$R^{+} = R^{\rightarrow} \wedge (R^{\rightarrow})^{op}.$$

Dokaz. Kako je R fazi ekvivalencija, ona je i preduređenje, pa su na osnovu tvrđenja 3.11 i $R^{\rightarrow}$ i $R^{\leftarrow}$ fazi preduređenja, te je i R^{+} fazi preduređenje. Naime, za sve $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$ važi $R^{+}(A,B) * R^{+}(B,C) \leq R^{\rightarrow}(A,B) * R^{\rightarrow}(B,C) \leq R^{\rightarrow}(A,C)$, i analogno važi $R^{+}(A,B) * R^{+}(B,C) \leq R^{\leftarrow}(A,C)$, te sledi $R^{+}(A,B) * R^{+}(B,C) \leq R^{\rightarrow}(A,C) \wedge R^{\leftarrow}(A,C) = R^{+}(A,C)$. Refleksivnost trivijalno važi. Ostaje jos da se pokaze simetričnost, međutim, na osnovu leme 3.12 trivijalno važi $R^{+} = R^{\rightarrow} \wedge R^{\leftarrow} = R^{\rightarrow} \wedge (R^{\rightarrow})^{op}$, pa sledi da je R^{+} simetrična relacija, odnosno da je R^{+} fazi ekvivalencija na $\mathcal{F}(X)$. □

Glava 4

Fazi stepene strukture konstruisane tenzorskim proizvodom

Podsetimo se - ako je $\{A_i \mid i \in \{1, ..., n\}\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ konačan skup fazi podskupova od X, tenzorski proizvod ovih fazi podskupova je $\bigotimes_{i=1}^n A_i : X^n \to L$, definisan sa:

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)(x_1, ..., x_n) = A_1(x_1) * ... * A_n(x_n).$$

Takođe, za dato preslikavanje $f : X \to Y$ definisali smo $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(X) \to F(Y)$, na sledeći način:

$$\Big(\big(\mathcal{F}(f)\big)(A)\Big)(y) = \bigvee \big\{A(x) \mid x \in X, f(x) = y\big\} = \bigvee_{x \in X} \Big(A(x) * \Delta(f(x), y)\Big),$$

pri čemu $\mathcal{F}(f)$ takođe obeležavamo sa $f^{\rightarrow}$.

Ako je f n-arna operacija na X, operaciju f^* na $\mathcal{F}(X)$ arnosti n definisali smo sa:

$$f^*(A_1, ..., A_n) = f^{\rightarrow}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right).$$

Dakle, za proizvoljno $y \in Y$ važi:

$$\begin{aligned} f^*(A_1, ..., A_n)(y) &= \bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \left(\Big(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\Big)(x_1, ..., x_n) * \Delta\big(f(x_1, ...x_n), y\big)\right) \\ &= \bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \Big(A_1(x_1) * ... * A_n(x_n) * \Delta\big(f(x_1, ..., x_n), y\big)\Big). \end{aligned}$$

Tvrđenje 4.1 *Za svaki prirodni broj n,*

$$\bigotimes_{i=1}^{n} : \mathcal{F}(X)^n \to \mathcal{F}(X^n)$$

je homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n, S_X^n)$ *u* $(\mathcal{F}(X^n), S_{X^n})$.

Dokaz. Neka je $\overline{x} = (x_1, ..., x_n) \in X^n$ uređena n-torka elemenata iz X, i neka su $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$ fazi podskupovi od X. Neka je $\overline{A} = (A_1, ..., A_n)$ i neka je $\overline{B} = (B_1, ..., B_n)$. Tada, kako u reziduiranoj mreži za sve $a, b \in L$ važi $a * (a \to b) \le b$, i kako je $*$ izotona, sledi:

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)(\overline{x}) * S_X^n(\overline{A}, \overline{B}) =$$

$$A_1(x_1) * ... * A_n(x_n) * S_X(A_1, B_1) * ... * S_X(A_n, B_n) =$$

$$A_1(x_1) * ... * A_n(x_n) * \bigwedge_{x \in X} (A_1(x) \to B_1(x)) * ... * \bigwedge_{x \in X} (A_n(x) \to B_n(x)) \le$$

$$A_1(x_1) * ... * A_n(x_n) * (A_1(x_1) \to B_1(x_1)) * ... * (A_n(x_n) \to B_n(x_n)) \le$$

$$B_1(x_1) * ... * B_n(x_n) = \left(\bigotimes_{i=1}^{n} B_i\right)(\overline{x}),$$

što je na osnovu osobine adjungovanosti operacija $\to$ i $*$ ekvivalentno sa:

$$S_X^n(\overline{A}, \overline{B}) \le \left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\right)(\overline{x}) \to \left(\bigotimes_{i=1}^{n} B_i\right)(\overline{x}).$$

Kako ovo važi za svako $\overline{x} \in X^n$, sledi:

$$S_X^n(\overline{A}, \overline{B}) \le \bigwedge_{\overline{x} \in X^n} \left(\Big(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\Big)(\overline{x}) \to \Big(\bigotimes_{i=1}^{n} B_i\Big)(\overline{x})\right) = S_{X^n}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i, \bigotimes_{i=1}^{n} B_i\right),$$

čime je tvrđenje pokazano. □

Tvrđenje 4.2 *Neka su $A_i, i \in \{1, ..., n\}$ fazi podskupovi od X, i neka je R fazi relacija iz X u Y. Tada važi:*

1. $\bigotimes_{i=1}^{n} R^{\uparrow}(A_i) = (R^n)^{\uparrow}(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i)$;
2. $\bigotimes_{i=1}^{n} R^{\downarrow}(A_i) = (R^n)^{\downarrow}(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i)$.

Dokaz. (1) Neka su $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljni fazi podskupovi od X, i neka $R : X \times Y \to L$. Tada za proizvoljno $\overline{x} \in X^n$ važi:

$$\left(\bigotimes_{i=1}^{n} R^{\uparrow}(A_i)\right)(\overline{x}) = R^{\uparrow}(A_1)(x_1) * ... * R^{\uparrow}(A_n)(x_n) =$$

$$\left(\bigvee_{y_1 \in X} \Big(A_1(y_1) * R(y_1, x_1)\Big)\right) * ... * \left(\bigvee_{y_n \in X} \Big(A_n(y_n) * R(y_n, x_n)\Big)\right) =$$

$$\bigvee_{y_1 \in X} ... \bigvee_{y_n \in X} \Big(A_1(y_1) * ... * A_n(y_n) * R(y_1, x_1) * ... * R(y_n, x_n)\Big) =$$

$$\bigvee_{(y_1, ..., y_n) \in X^n} \left(\Big(\bigotimes_{i=1}^{n} A_i\Big)(y_1, ..., y_n) * R^n((y_1, ..., y_n), (x_1, ..., x_n))\right) =$$

$$\bigvee_{\overline{y}\in X^n}\left(\Big(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\Big)(\overline{y})*R^n(\overline{y},\overline{x})\right)=R^{\uparrow}\Big(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\Big)(\overline{x}).$$

Kako ova jednakost važi za svako $\overline{x}\in X^n$, sledi $\bigotimes_{i=1}^{n}R^{\uparrow}(A_i)=R^{\uparrow}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\right)$, čime smo pokazali tvrđenje.

Jednakost (2) pokazuje se analogno jednakosti (1) ovog tvrđenja. □

Lema 4.3 *Ako je $f:X^n\to X$ n-arna operacija na X, tada važi da je n-arna operacija $f^*:\mathcal{F}(X)^n\to\mathcal{F}(X)$ homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n,S_{\mathcal{F}(X)^n})$ u $(\mathcal{F}(X),S_{\mathcal{F}(X)})$.*

Dokaz. Na osnovu tvrđenja 4.1 znamo da je tenzorski proizvod fazi podskupova od X homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n,S_{\mathcal{F}(X)^n})$ u $(\mathcal{F}(X^n),S_{\mathcal{F}(X^n)})$. Preslikavanje $f^{\rightarrow}$ definisali smo sa $f^{\rightarrow}=(R_f)^{\uparrow}$, gde je $R_f:X^n\times X\to L$ fazi relacija iz X^n u X, takva da važi $R_f(\overline{x},y)=1$ ako $f(\overline{x})=f(x_1,...,x_n)=y$, i $R_f(\overline{x},y)=0$ ako $f(\overline{x})=f(x_1,...,x_n)\neq y$. Na osnovu tvrđenja 2.25 sledi da je $(R_f)^{\uparrow}$ homomorfizam, te zaključujemo da je f^* takođe homomorfizam kao kompozicija dva homomorfna preslikavanja. Naime, za proizvoljne $\overline{A},\overline{B}\in\mathcal{F}(X)^n$ važi:

$$S_X^n(\overline{A},\overline{B})\leq S_{X^n}\left(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i,\bigotimes_{i=1}^{n}B_i\right)\leq S_X\left((R_f)^{\uparrow}\Big(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\Big),(R_f)^{\uparrow}\Big(\bigotimes_{i=1}^{n}B_i\Big)\right)=$$

$$S_X\left(f^{\rightarrow}\Big(\bigotimes_{i=1}^{n}A_i\Big),f^{\rightarrow}\Big(\bigotimes_{i=1}^{n}B_i\Big)\right)=S_X(f^*(\overline{A}),f^*(\overline{B}))$$

□

Definicija 4.4 *Za proizvoljnu fazi relaciju R na algebri $\mathcal{X}=(X,\mathbb{F})$ kažemo da je* **saglasna** *ako za svako $f\in\mathbb{F}$ i za sve $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n\in X$ važi*

$$R(x_1,y_1)*...*R(x_n,y_n)\leq R(f(x_1,...,x_n),f(y_1,...,y_n)).$$

Saglasna fazi ekvivalencija na $\mathcal{X}$ jeste **kongruencija** *na $\mathcal{X}$.*

Primetimo da je R saglasna na $\mathcal{X}$ akko je svako $f\in\mathbb{F}$ homomorfizam iz (X^n,R^n) u (X,R).

Definicija 4.5 *Neka je $\mathcal{X}=(X,\mathbb{F})$ algebra, i neka je R fazi relacija na X. Tada:*

1. *R je* **dobra** *ako je $\varepsilon(R)$ kongruencija na $\mathcal{X}$;*
2. *R je* **Hoare dobra** *(ili* **H-dobra***) na $\mathcal{X}$ ako je $R^{\rightarrow}$ dobra na $\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$;*
3. *R je* **Smyth dobra** *(ili* **S-dobra***) na $\mathcal{X}$ ako je $R^{\leftarrow}$ dobra na $\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$.*

Tvrđenje 4.6 *Neka je $\mathcal{X}=(X,\mathbb{F})$ algebra, i neka je R fazi relacija na X. Tada važi:*

1. *R je Hoare dobra akko za svako $f\in\mathbb{F}$ arnosti n važi da je preslikavanje $f^*:\mathcal{F}(X)^n\to\mathcal{F}(X)$ homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n,\sigma(R^{\rightarrow})^n)$ u $(\mathcal{F}(X),\sigma(R^{\rightarrow}))$;*

2. *R je Smyth dobra akko za svako* $f \in \mathbb{F}$ *arnosti* n *važi da je preslikavanje* $f^* : \mathcal{F}(X)^n \to \mathcal{F}(X)$ *homomorfizam iz* $(\mathcal{F}(X)^n, \sigma(R^{\leftarrow}))$ *u* $(\mathcal{F}(X), \sigma(R^{\leftarrow}))$*;*

3. $\mathfrak{R}^{\rightarrow}$ *je dobra na* $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ *akko za svako* $f \in \mathbb{F}$ *arnosti* n *važi da je preslikavanje* $f^* : \mathcal{P}(X)^n \to \mathcal{P}(X)$ *homomorfizam iz* $(\mathcal{P}(X)^n, \sigma(\mathfrak{R}^{\rightarrow})^n)$ *u* $(\mathcal{P}(X), \sigma(\mathfrak{R}^{\rightarrow}))$*;*

4. $\mathfrak{R}^{\leftarrow}$ *je dobra na* $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ *akko za svako* $f \in \mathbb{F}$ *arnosti* n *važi da je preslikavanje* $f^* : \mathcal{P}(X)^n \to \mathcal{P}(X)$ *homomorfizam iz* $(\mathcal{P}(X)^n, \sigma(\mathfrak{R}^{\leftarrow}))$ *u* $(\mathcal{P}(X)^n, \sigma(\mathfrak{R}^{\leftarrow}))$*.*

Dokaz. Pokazaćemo stav (1), preostala tri se dokazuju slično.

(1) ($\Leftarrow$)

Za svaku fazi relaciju T relacija $\varepsilon(T)$ jeste fazi relacija ekvivalencije, te je dovoljno pokazati da je $\varepsilon(R^{\rightarrow})$ saglasna na $\mathcal{F}(\mathcal{X})$. Kako je f^* homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n, \sigma(R^{\rightarrow})^n)$ u $(\mathcal{F}(X), \sigma(R^{\rightarrow}))$ sledi da za sve $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$ važi

$$\sigma(R^{\rightarrow})(A_1, B_1) * ... * \sigma(R^{\rightarrow})(A_n, B_n) \leq \sigma(R^{\rightarrow})(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ...B_n)).$$

Po definiciji $\varepsilon(R^{\rightarrow})$ sledi:

$$\begin{gathered}
\varepsilon(R^{\rightarrow})(A_1, B_1) * ... * \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_n, B_n) \leq \\
\Big(\sigma(R^{\rightarrow})(A_1, B_1) * ... * \sigma(R^{\rightarrow}(A_n, B_n))\Big) \wedge \\
\Big(\sigma(R^{\rightarrow})(B_1, A_1) * ... * \sigma(R^{\rightarrow}(B_n, A_n))\Big) \leq \\
\sigma(R^{\rightarrow})(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)) \wedge \\
\sigma(R^{\rightarrow})(f^*(B_1, ..., B_n), f^*(A_1, ..., A_n)) = \\
\varepsilon(R^{\rightarrow})(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)),
\end{gathered}$$

čime je ovaj smer pokazan.

($\Rightarrow$)

Kako je f^* homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n, S_{X^n})$ u $(\mathcal{F}(X), S_X)$, važi:

$$S_{X^n}\big((A_1, ..., A_n), (B_1, ..., B_n)\big) \leq S_X\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big),$$

za sve $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$, što je ekvivalentno sa

$$S_X(A_1, B_1) * ... * S_X(A_n, B_n) \leq S_X\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big).$$

Odavde sledi: ako važi $(\forall i \in \{1, ..., n\}) A_i \subseteq B_i$ tada je $f^*(A_1, ..., A_n) \subseteq f^*(B_1, ..., B_n)$.

Kako je R po pretpostavci Hoare dobra, sledi da je $\varepsilon(R^{\rightarrow})$ saglasna na $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, te za sve $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$ važi

$$\begin{gathered}
\varepsilon(R^{\rightarrow})(A_1 \cup B_1, B_1) * ... * \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_n \cup B_n, B_n) \leq \\
\varepsilon(R^{\rightarrow})\big(f^*(A_1 \cup B_1, ..., A_n \cup B_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big).
\end{gathered}$$

Obeležimo opet sa $\overline{Z}$ uređenu n-torku proizvoljnih fazi podskupova $Z_1, ..., Z_n$. Na osnovu do sad rečenog, i kako za sve $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi $\varepsilon(R^{\rightarrow})(A \cup B, B) = \sigma(R^{\rightarrow})(A, B)$ (tvrđenje 3.10), sledi:

$$\sigma(R^{\rightarrow})(A_1, B_1) * ... * \sigma(R^{\rightarrow})(A_n, B_n) =$$
$$\varepsilon(R^{\rightarrow})(A_1 \cup B_1, B_1) * ... * \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_n \cup B_n, B_n) \leq$$
$$\varepsilon(R^{\rightarrow})\left(f^*(\overline{A \cup B}), f^*(\overline{B})\right) = \sigma(R^{\rightarrow})\left(f^*(\overline{A \cup B}), f^*(\overline{B})\right) =$$
$$\sigma(R^{\rightarrow})\left(f^*(\overline{A}), f^*(\overline{A \cup B})\right) * \sigma(R^{\rightarrow})\left(f^*(\overline{A \cup B}), f^*(\overline{B})\right).$$

Poslednja jednakost važi, jer je $\overline{A} \leq \overline{A \cup B}$, pa je i $f^*(\overline{A}) \leq f^*(\overline{A \cup B})$, a na osnovu tvrđenja 3.9 $\left(S(A, B) \leq \sigma(R^{\rightarrow})(A, B),\ A, B \in \mathcal{F}(X)\right)$ sledi da je $\sigma(R^{\rightarrow})\left(f^*(\overline{A}), f^*(\overline{A \cup B})\right) = 1$. Dalje, kako je $\sigma(R^{\rightarrow})$ tranzitivna relacija, sledi:

$$\sigma(R^{\rightarrow})\left(f^*(\overline{A}), f^*(\overline{A \cup B})\right) * \sigma(R^{\rightarrow})\left(f^*(\overline{A \cup B}), f^*(\overline{B})\right) \leq$$
$$\sigma(R^{\rightarrow})\left(f^*(\overline{A}), f^*(\overline{B})\right) = \sigma(R^{\rightarrow})\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big),$$

čime smo pokazali i drugu implikaciju. □

Lema 4.7 *Neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra, i neka $f \in \mathbb{F}$ n-arna operacija na X. Tada je f^* homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n, S^n)$ u $(\mathcal{F}(X), S)$, gde je S stepen podskuposti.*

Dokaz. Neka su $A_1, B_1, ..., A_n, B_n$ fazi podskupovi skupa X, i neka $y_0 \in X$. Tada važi sledeće:

$$\begin{aligned}
& f^*(A_1, ..., A_n)(y_0) * S(A_1, B_1) * ... * S(A_n, B_n) \\
& \leq \bigvee_{x_1, ..., x_n \in X} \Big(A_1(x_1) * ... * A_n(x_n) * \Delta(f(x_1, ..., x_n), y_0)\Big) \\
& * S(A_1, B_1) * ... * S(A_n, B_n) \\
& = \bigvee_{x_1, ..., x_n \in X} \Bigg(A_1(x_1) * ... * A_n(x_n) * \Delta(f(x_1, ..., x_n), y_0) \\
& * \Big(\bigwedge_{x \in X} A_1(x) \to B_1(x)\Big) * ... * \Big(\bigwedge_{x \in X} A_n(x) \to B_n(x)\Big)\Bigg) \\
& \leq \bigvee_{x_1, ..., x_n} \Bigg(A_1(x_1) * \big(A_1(x_1) \to B_1(x_1)\big) * ... * A_n(x_n) * \big(A_n(x_n) \to B_n(x_n)\big) \\
& * \Delta(f(x_1, ..., x_n), y_0)\Bigg) \\
& \leq \bigvee_{x_1, ..., x_n \in X} \Big(B_1(x_1) * ... * B_n(x_n) * \Delta(f(x_1, ..., x_n), y_0)\Big) \\
& = f^*(B_1, ..., B_n)(y_0).
\end{aligned}$$

Ova nejednakost je na osnovu osobine adjungovanosti ekvivalentna sa:

$$S(A_1, B_1) * ... * S(A_n, B_n) \leq f^*(A_1, ..., A_n)(y_0) \to f^*(B_1, ..., B_n)(y_0),$$

a kako ovo važi za svako $y_0 \in X$ sledi:

$$S^n\big(\overline{A}, \overline{B}\big) = S(A_1, B_1) * ... * S(A_n, B_n) \leq$$
$$\bigwedge_{y \in X} \Big(f^*(A_1, ..., A_n)(y) \to f^*(B_1, ..., B_n)(y)\Big) = S(f^*(\overline{A}), f^*(\overline{B})).$$

$\square$

Lema 4.8 *Neka su R i P binarne relacije na skupovima X i Y respektivno, i neka je $f : X \to Y$ preslikavanje takvo da važi $R(x, y) \leq P(f(x), f(y))$ za sve $x, y \in X$. Tada za svako $A \in \mathcal{F}(X)$ važi:*

$$f^{\to}\left(R^{\downarrow}(A)\right) \leq P^{\downarrow}\left(f^{\to}(A)\right)$$

Dokaz. Pokažimo najpre da za svako $y \in Y$ važi:

$$\bigvee_{z \in X} \Big(A(z) * P\big(y, f(z)\big)\Big) = \bigvee_{t \in Y} \left(\Big(\bigvee_{t = f(z)} A(z)\Big) * P(y, t)\right).$$

Neka $y \in Y$. Polazeći od izraza $\bigvee_{z \in X} \big(A(z) * P(y, f(z))\big)$, i uvodeći smenu $t = f(z)$, dobijamo $\bigvee_{z \in X} \big(A(z) * P(y, f(z))\big) = \bigvee_{z \in X} \bigvee_{t = f(z)} \big(A(z) * P(y, t)\big)$ koristeći činjenicu da je supremum jednočlanog skupa upravo taj njegov element (za proizvoljno $z \in X$ postoji tačno jedno $t \in Y$, takvo da je $t = f(z)$). Dalje,

$$\bigvee_{z \in X} \bigvee_{t = f(z)} \Big(A(z) * P(y, t)\Big) = \bigvee_{z \in X} \bigvee_{t \in Y} \Big(A(z) * P(y, t) * \Delta\big(f(z), t\big)\Big) =$$

$$\bigvee_{t \in Y} \bigvee_{z \in X} \Big(\Big(A(z) * \Delta(f(z), t)\Big) * P(y, t)\Big) =$$

$$\bigvee_{t \in Y} \left(\Big(\bigvee_{z \in X} \big(A(z) * \Delta(f(z), t)\big)\Big) * P(y, t)\right) = \bigvee_{t \in Y} \left(\Big(\bigvee_{t = f(z)} A(z)\Big) * P(y, t)\right),$$

čime smo dokazali jednakost.

Neka $A \in \mathcal{F}(X)$, i neka $y \in Y$. Tada, koristeći malo pre pokazanu jednakost, sledi da važi:

$$f^{\to}\left(R^{\downarrow}(A)\right)(y) = \bigvee_{y = f(x)} \left(R^{\downarrow}(A)\right)(x) = \bigvee_{y = f(x)} \bigvee_{z \in X} \Big(A(z) * R(x, z)\Big) \leq$$

$$\bigvee_{y = f(x)} \bigvee_{z \in X} \Big(A(z) * P\big(f(x), f(z)\big)\Big) = \bigvee_{z \in X} \Big(A(z) * P\big(y, f(z)\big)\Big) =$$

$$\bigvee_{t \in Y} \left(\Big(\bigvee_{t = f(z)} A(z)\Big) * P(y, t)\right) = \bigvee_{t \in Y} \Big(\big(f^{\to}(A)\big)(t) * P(y, t)\Big) = R^{\downarrow}\big(f^{\to}(A)\big)(y),$$

čime je ova lema dokazana. $\square$

Tvrđenje 4.9 *Neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra, i neka je R binarna fazi relacija na X. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

1. *R je saglasna na $\mathcal{X}$;*
2. *$R^{\rightarrow}$ je saglasna na $\mathcal{F}(\mathcal{X})$;*
3. *$R^{\leftarrow}$ je saglasna na $\mathcal{F}(\mathcal{X})$;*
4. *$\mathfrak{R}^{\rightarrow}$ je saglasna na $\mathcal{P}(\mathcal{X})$;*
5. *$\mathfrak{R}^{\leftarrow}$ je saglasna na $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2)

Potrebno je pokazati da za sve $f \in \mathbb{F}$ i za sve $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$$R^{\rightarrow}(A_1, B_1) * ... * R^{\rightarrow}(A_n, B_n) \leq R^{\rightarrow}(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)),$$

odnosno da važi:

$$S(A_1, R^{\downarrow}(B_1)) * ... * S(A_n, R^{\downarrow}(B_n)) \leq S\big(f^*(A_1, ..., A_n), R^{\downarrow}(f^*(B_1, ..., B_n))\big).$$

Na osnovu leme 4.7 f^* je homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n, S^n)$ u $(\mathcal{F}(X), S)$, te važi:

$$S(A_1, R^{\downarrow}(B_1)) * ... * S(A_n, R^{\downarrow}(B_n)) \leq$$
$$S(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(R^{\downarrow}(B_1), ..., R^{\downarrow}(B_n))).$$

Dalje, prema tvrđenju 4.2 i lemi 4.8 sledi:

$$f^*(R^{\downarrow}(B_1), ..., R^{\downarrow}(B_n)) = f^{\rightarrow}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} R^{\downarrow}(B_i)\right) = f^{\rightarrow}\left((R^n)^{\downarrow}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} B_i\right)\right) \leq$$

$$R^{\downarrow}\left(f^{\rightarrow}\left(\bigotimes_{i=1}^{n} B_i\right)\right) = R^{\downarrow}\big(f^*(B_1, ..., B_n)\big).$$

Odavde sledi:

$$S\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(R^{\downarrow}(B_1), ..., R^{\downarrow}(B_n))\big) \leq$$

$$S\big(f^*(A_1, ..., A_n), R^{\downarrow}(f^*(B_1, ..., B_n))\big),$$

čime je ova implikacija dokazana.

(2) $\Rightarrow$ (4)
Ovo trivijalno važi, jer je $\mathfrak{R}^{\rightarrow}$ restrikcija relacija $R^{\rightarrow}$.

(4) $\Rightarrow$ (1)
Pretpostavimo da je $\mathfrak{R}^{\rightarrow}$ saglasna na $\mathcal{P}(\mathcal{X})$. Kako za proizvoljne crisp podskupove $A, B \in \mathcal{P}(X)$ važi:

$$\mathfrak{R}^{\rightarrow}(A,B) = R^{\rightarrow}(\chi_A, \chi_B) = S(\chi_A, R^{\downarrow}(\chi_B)),$$

i kako je $\mathfrak{R}^{\rightarrow}$ saglasna na $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ za proizvoljne $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{P}(X)$ sledi:

$$S(\chi_{A_1}, R^{\downarrow}(\chi_{B_1})) * ... * S(\chi_{A_n}, R^{\downarrow}(\chi_{B_n})) \leq$$
$$S\big(f^*(\chi_{A_1}, ..., \chi_{A_n}), R^{\downarrow}\big(f^*(\chi_{B_1}, ..., \chi_{B_n})\big)\big).$$

Ako uzmemo da je $A_i = \{x_i\}$ i $B_i = \{y_i\}$, koristeći da za sve $x_1, ..., x_n \in X$ važi $f^*(1_{x_1}, ..., 1_{x_n}) = 1_{f(x_1,..,x_n)}$, što se trivijalno dokazuje, sledi:

$$R(x_1, y_1) * ... * R(x_n, y_n) = S\big(1_{x_1}, R^{\downarrow}(1_{y_1})\big) * ... * S\big(1_{x_n}, R^{\downarrow}(1_{y_n})\big) \leq$$
$$S\big(f^*(1_{x_1}, ..., 1_{x_n}), R^{\downarrow}\big(f^*(1_{y_1}, ..., 1_{y_n})\big)\big) =$$
$$S(1_{f(x_1,...,x_n)}, R^{\downarrow}(1_{f(y_1,...,y_n)})) = R\big(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)\big),$$

čime je pokazana i ova implikacija.

Slično se pokazuju i implikacije (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1). □

Teorema 4.10 *Neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra, i neka je R fazi preduređenje na X. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

1. *R je saglasna na $\mathcal{X}$;*
2. *$R^{\rightarrow}$ je dobra na $\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$, odnosno R je Hoare dobra;*
3. *$R^{\leftarrow}$ je dobra na $\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$, odnosno R je Smyth dobra;*
4. *$\mathfrak{R}^{\rightarrow}$ je dobra na $\mathcal{P}(\mathcal{X})$;*
5. *$\mathfrak{R}^{\leftarrow}$ je dobra na $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2)
Neka je R fazi preduređenje, i neka je R saglasna fazi relacija na $\mathcal{X}$. Na osnovu tvrđenja 3.11 sledi da je $R^{\rightarrow}$ takođe preduređenje. Dalje, na osnovu tvrđenja 2.30 sledi da je $\sigma(R^{\rightarrow}) = R^{\rightarrow}$. Takođe, kako je R saglasna na $\mathcal{X}$, na osnovu tvrđenja 4.9 sledi da je i $R^{\rightarrow}$ saglasna fazi relacija na $\mathcal{F}(\mathcal{X})$, a ovo važi akko za svako $f \in \mathbb{F}$ važi da je f^* homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n, (R^{\rightarrow})^n$ u $(\mathcal{F}(X), R^{\rightarrow})$. Kako je $R^{\rightarrow} = \sigma(R^{\rightarrow})$, sledi da prethodni uslov važi akko za svako $f \in \mathbb{F}$ važi da je f^* homomorfizam iz $(\mathcal{F}(X)^n, \sigma(R^{\rightarrow})^n)$ u $(\mathcal{F}(X), \sigma(R^{\rightarrow}))$. Na osnovu trvđenja 4.6 (1) sledi da je R Hoare dobra na $\mathcal{F}(\mathcal{X})$.

(2) $\Rightarrow$ (4)
Ova implikacija trivijalno važi, jer je $\mathfrak{R}^{\rightarrow}$ restrikcija relacije $R^{\rightarrow}$.

(4) $\Rightarrow$ (1)

Za sve $a, b \in X$ važi $R(a,b) = \bigvee_{y\in\{b\}} R(a,y) = \bigwedge_{x\in\{a\}} \bigvee_{y\in\{b\}} R(x,y) = \mathfrak{R}^{\rightarrow}(\{a\},\{b\}) = R^{\rightarrow}(1_a, 1_b)$. Takođe, za proizvoljno $f \in \mathbb{F}$ i za proizvoljne $x_1, ..., x_n \in X$ važi $1_{f(x_1,...,x_n)} = f^*(1_{x_1}, ..., 1_{x_n})$. Kako je $\mathfrak{R}^{\rightarrow}$ saglasna na $\mathcal{P}(\mathcal{X})$, za sve $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in X$ sledi $R^{\rightarrow}(1_{x_1}, 1_{y_n}) * ... * R^{\rightarrow}(1_{x_n}, 1_{y_n}) \leq R^{\rightarrow}\big(f^*(1_{x_1}, ..., 1_{x_n}), f^*(1_{y_1}, ..., 1_{y_n})\big) = R^{\rightarrow}(1_{f(x_1,...,x_n)}, 1_{f(y_1,...,y_n)})$, a ovo je ekvivalentno sa:

$$R(x_1, y_1) * ... * R(x_n, y_n) \leq R\big(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)\big),$$

čime je i ova implikacija dokazana.

Slično se pokazuju i implikacije (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1), čime je ova teorema dokazana. □

Teorema 4.11 *Neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra i neka je R fazi kongruencija na $\mathcal{X}$. Tada je relacija R^+ fazi kongruencija na $\mathcal{F}^*(\mathcal{X})$.*

Dokaz. Na osnovu leme 3.13 zaključujemo da je R^+ fazi ekvivalencija. Na osnovu tvrđenja 4.9 zaključujemo da su $R^{\rightarrow}$ i $R^{\leftarrow}$ saglasne na $\mathcal{F}(\mathcal{X})$. Po definiciji R^+, za proizvoljne $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$ i za proizvoljno $f \in \mathbb{F}$ važi:

$$R^+(A_1, B_1) * ... * R^+(A_n, B_n) =$$

$$\big(R^{\rightarrow}(A_1, B_1) \wedge R^{\leftarrow}(A_1, B_1)\big) * ... * \big(R^{\rightarrow}(A_n, B_n) \wedge R^{\leftarrow}(A_n, B_n)\big) \leq$$

$$R^{\rightarrow}(A_1, B_1) * ... * R^{\rightarrow}(A_n, B_n) \leq R^{\rightarrow}\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big).$$

Analogno se pokazuje da važi i:

$$R^+(A_1, B_1) * ... * R^+(A_n, B_n) \leq R^{\leftarrow}\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big),$$

te sledi:

$$R^+(A_1, B_1) * ... * R^+(A_n, B_n) \leq$$

$$\big(R^{\rightarrow}\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big)\big) \wedge \big(R^{\leftarrow}\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big)\big) =$$

$$R^+\big(f^*(A_1, ..., A_n), f^*(B_1, ..., B_n)\big),$$

čime smo pokazali tvrđenje. □

Glava 5

Fazi stepene strukture konstruisane Dekartovim proizvodom

Ako je $\{A_i \mid i \in \{1, ..., n\}\} \subseteq \mathcal{F}(X)$ skup fazi podskupova od X, njihov Dekartov proizvod jeste preslikavanje $\prod_{i=1}^{n} A_i : X^n \to L$ definisano sa:

$$\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)(x_1, ..., x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i).$$

Ukoliko je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra, koristeći Dekartov proizvod fazi podskupova, za proizvoljnu n-arnu operaciju $f \in \mathbb{F}$ definišemo $f^+ : \mathcal{F}(X)^n \to \mathcal{F}(X)$ kao kompoziciju:

$$f^+(A_1, ..., A_n) = f^{\rightarrow}\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Dakle, za proizvoljno $y \in X$ važi:

$$\big(f^+(A_1, ..., A_n)\big)(y) = \bigvee_{y=f(x_1,...,x_n)} \left(\Big(\prod_{i=1}^{n} A_i\Big)(x_1, ..., x_n)\right) =$$

$$\bigvee_{y=f(x_1,...,x_n)} \left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\right) = \bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\right) * \Delta(y, f(x_1, ..., x_n))\right)$$

Definicija 5.1 *Neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra, i neka je R fazi relacija na X. R je* **$\wedge$-saglasna** *na X ako za sve $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in X$ i za sve $f \in \mathbb{F}$ važi:*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} R(x_i, y_i) \leq R\big(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)\big)$$

Fazi $\wedge$-kongruencija *na $\mathcal{X}$ je fazi relacija ekvivalencije na X koja je $\wedge$-saglasna na $\mathcal{X}$*

Definicija 5.2 *Neka je R binarna fazi relacija na X i neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra. Tada:*

- *Fazi relacija R je* **$\wedge$-dobra** *ako je $\varepsilon(R)$ $\wedge$-kongruencija na $\mathcal{X}$;*
- *Relacija R je* **Hoare dobra** *ako je $R^{\rightarrow}$ $\wedge$-dobra na $\mathcal{F}^+(\mathcal{X})$;*
- *Relacija R je* **Smyth dobra** *ako je $R^{\leftarrow}$ $\wedge$-dobra na $\mathcal{F}^+(\mathcal{X})$.*

Napomena: Primetimo da se gornje definicije Hoare dobre i Smyth dobre relacije razlikuju od onih iz prethodne glave (definicija 4.5), a koje smo koristili pri proučavanju stepenih struktura definisanih tenzorskim proizvodom.

Lema 5.3 *Neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra. Stepen podskuposti je $\wedge$-saglasna relacija na $\mathcal{F}^+(\mathcal{X})$.*

Dokaz. Neka su $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljni fazi podskupovi od X, i neka $y \in X$. Tada, koristeći izotonost operacije $*$, uslove iz leme 1.18, kao i nejednakost $a * (a \to b) \leq b$ koja važi u reziduiranoj mreži za sve $a, b \in L$, dobijamo sledeće:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} S(A_i, B_i)\Big) * f^+\big(A_1, ..., A_n\big)(y) =$$

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} S(A_i, B_i)\Big) * \bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \left(\Big(\bigwedge_{j=1}^{n} A_j(x_j)\Big) * \Delta\big(f(x_1, ..., x_n, y)\big)\right) =$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \left(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} (S(A_i, B_i))\Big) * \Big(\bigwedge_{j=1}^{n} A_j(x_j)\Big) * \Delta\big(f(x_1, ..., x_n), y\big)\right) \leq$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \left(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} S(A_i, B_i)\Big) * A_j(x_j)\right) * \Delta\big(f(x_1, ..., x_n), y\big)\right) \leq$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \left(S(A_j, B_j) * A_j(x_j)\right) * \Delta\big(f(x_1, ..., x_n), y\big)\right) \leq$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \left(\bigwedge_{j=1}^{n} \left(\big(A_j(x_j) \to B_j(x_j)\big) * A_j(x_j)\right) * \Delta\big(f(x_1, ..., x_n), y\big)\right) \leq$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \left(\Big(\bigwedge_{j=1}^{n} B_j(X_j)\Big) * \Delta\big(f(x_1, ..., x_n), y\big)\right) = f^+\big(B_1, ...B_n\big)(y),$$

što je zbog osobine adjungovanosti $\to$ i $*$ ekvivalentno sa:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} S(A_i, B_i) \leq f^+\big(A_1, ..., A_n\big)(y) \to f^+\big(B_1, ...B_n\big)(y).$$

Kako ova nejednakost važi za svako $y \in X$ sledi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} S(A_i, B_i) \leq \bigwedge_{y \in X} \Big(f^+\big(A_1, ..., A_n\big)(y) \to f^+\big(B_1, ...B_n\big)(y) \Big) =$$

$$S\big(f^+(A_1, ..., A_n), f^+(B_1, ..., B_n)\big)$$

čime smo dokazali lemu. □

Lema 5.4 *Neka su $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$. Ako za svako $i \in \{1, ..., n\}$ važi $A_i \subseteq B_i$, važi*

$$f^+(A_1, ..., A_n) \subseteq f^+(B_1, ..., B_n).$$

Dokaz. Na osnovu leme 2.11 (1) za proizvoljno $i \in \{1, ..., n\}$ važi $A_i \subseteq B_i$ akko $S(A_i, B_i) = 1$. Sledi da za svako $i \in \{1, ..., n\}$ važi $S(A_i, B_i) = 1$, što implicira da je $1 = \bigwedge_{i=1}^{n} S(A_i, B_i) \leq S(f^+(A_1, ..., A_n), f^+(B_1, ..., B_n))$. Sledi $S(f^+(A_1, ..., A_n), f^+(B_1, ..., B_n)) = 1$, te da je $f^+(A_1, ..., A_n) \subseteq f^+(B_1, ..., B_n)$, što je trebalo dokazati. □

Lema 5.5 *Neka je $\mathcal{X} = (X, \mathbb{F})$ algebra. Tada, za sve $x_1, ..., x_n \in X$ i za svako $f \in \mathbb{F}$ važi $f^+(1_{x_1}, ..., 1_{x_n}) = 1_{f(x_1, ..., x_n)}$.*

Dokaz. Neka $f \in \mathbb{F}$, i neka $x_1, ..., x_n \in X$. Po definiciji f^+, za proizvoljno $y \in X$ sledi:

$$f^+\big(1_{x_1}, ..., 1_{x_n}\big)(y) = \bigvee_{y_1, ..., y_n \in X} \Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} 1_{x_i}(y_i) \Big) * \Delta(y, f(y_1, ..., y_n)) \Big)$$

Kako $1_{x_i}(y_i)$ uzima samo vrednosti 0 ili 1, sledi da i $\bigwedge_{i=1}^{n} \big(1_{x_i}(y_i)\big)$ uzima samo vrednosti 0 ili 1, pri čemu važi $\bigwedge_{i=1}^{n} \big(1_{x_i}(y_i)\big) = 1$ akko $(\forall i \in \{1, ..., n\}) x_i = y_i$. Ako važi $y = f(x_1, ..., x_n)$, tada sledi $f^+\big(1_{x_1}, ..., 1_{x_n}\big)(y) = \big(\bigwedge_{i=1}^{n} 1_{x_i}(y_i) \big) * \Delta(y, f(x_1, ..., x_n)) = 1$. Ako važi $y \neq f(x_1, ..., x_n)$, na osnovu gornje analize trivijalno sledi $f^+(1_{x_1}, ..., 1_{x_n}) = 0$, čime je tvrđenje dokazano. □

Tvrđenje 5.6 *Neka je R fazi relacija na X, i neka je $f \in \mathbb{F}$ n-arna operacija na X. Ako je R Hoare dobra na $\mathcal{X}$, tada za sve $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \mathcal{F}(X)$ važi:*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} S\big(A_i/R^{\to}, B_i/R^{\to}\big) \leq S\big(f^+(A_1, ..., A_n)/R^{\to}, f^+(B_1, ..., B_n)/R^{\to}\big).$$

Dokaz. Kako za sve $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi $\varepsilon(R^{\to})(A, B) = \varepsilon\big(R^{\downarrow}(A), R^{\downarrow}(B)\big)$ (tvrđenje 3.9), za sve $i \in \{1, ..., n\}$ važi $S\big(R^{\downarrow}(A_i), R^{\downarrow}(B_i)\big) = \varepsilon\big(R^{\downarrow}(A_i) \cup R^{\downarrow}(B_i), R^{\downarrow}(B_i)\big) = \varepsilon\big(R^{\downarrow}(A_i \cup B_i), R^{\downarrow}(B_i)\big) = \varepsilon(R^{\to})(A_i \cup B_i, B_i)$. Dalje važi:

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i=1}^{n} S(A_i/R^{\to}, B_i/R^{\to}) = \bigwedge_{i=1}^{n} S\big(R^{\downarrow}(A_i), R^{\downarrow}(B_i)\big) = \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\to})(A_i \cup B_i, B_i) \leq \\ \varepsilon(R^{\to})\big(f^+(A_1 \cup B_1, ..., A_n \cup B_n), f^+(B_1, ..., B_n)\big) = \\ \varepsilon\big(f^+(A_1 \cup B_1, ..., A_1 \cup B_1)/R^{\to}, f^+(B_1, ..., B_n)/R^{\to})\big).\end{aligned}$$

Kako važi $f^{+}(A_1, ..., A_n) \subseteq f^{+}(A_1 \cup B_1, ..., A_n \cup B_n)$, i kako važi $S(A, B) \leq \sigma(R^{\rightarrow})(A, B) = S(A/R^{\rightarrow}, B/R^{\rightarrow})$ za sve $A, B \in \mathcal{F}(X)$ (tvrđenje 3.9), sledi:

$$S\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\rightarrow}, f^{+}(A_1 \cup B_1, ..., A_n \cup B_n)/R^{\rightarrow}\big) = 1,$$

što implicira

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i=1}^{n} S\big(A_i/R^{\rightarrow}, B_i/R^{\rightarrow}\big) =\\ \varepsilon\big(f^{+}(A_1 \cup B_1, ..., A_n \cup B_n)/R^{\rightarrow}, f^{+}(B_1, ..., B_n)/R^{\rightarrow}\big) *\\ S\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\rightarrow}, f^{+}(A_1 \cup B_1, ..., A_n \cup B_n)/R^{\rightarrow}\big) \leq\\ S\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\rightarrow}, f^{+}(B_1, ..., B_n)/R^{\rightarrow}\big),\end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano. □

Tvrđenje 5.7 *Neka je R fazi relacija na X, i neka je $f \in \mathbb{F}$ n-arna operacija na X. Ako je R Smyth dobra na $\mathcal{X}$, tada za sve $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \mathcal{F}(X)$ važi:*

$$\bigwedge_{i=1}^{n} S\big(A_i/R^{\leftarrow}, B_i/R^{\leftarrow}\big) \leq S\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\leftarrow}, f^{+}(B_1, ..., B_n)/R^{\leftarrow}\big).$$

Dokaz. Dokažimo najpre da za sve $A, B \in \mathcal{F}(X)$ važi $(A \cup B)/R^{\leftarrow} = (A/R^{\leftarrow}) \cap (B/R^{\leftarrow})$. Neka je $C \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljno. Tada važi:

$$\begin{aligned}(A \cup B)/R^{\leftarrow}(C) = R^{\leftarrow}(C, A \cup B) =\\ \bigwedge_{x \in X}\Big(\big(A(x) \vee B(x)\big) \rightarrow \bigvee_{y \in X}\Big(C(y) * R(x, y)\Big)\Big) =\\ \bigwedge_{x \in X}\Bigg(\Big(A(x) \rightarrow \bigvee_{y \in X}\Big(C(y) * R(x, y)\Big)\Big) \wedge \Big(B(x) \rightarrow \bigvee_{y \in X}\Big(C(y) * R(x, y)\Big)\Big)\Bigg) =\\ \bigwedge_{x \in X}\Big(A(x) \rightarrow \bigvee_{y \in X}\Big(C(y) * R(x, y)\Big)\Big) \wedge \bigwedge_{x \in X}\Big(B(x) \rightarrow \bigvee_{y \in X}\Big(C(y) * R(x, y)\Big)\Big) =\\ R^{\leftarrow}(C, A) \wedge R^{\leftarrow}(C, B) = (A/R^{\leftarrow})(C) \wedge (B/R^{\leftarrow})(C)\end{aligned}$$

čime smo pokazali gornju jednakost.

Dalje, na osnovu malopre dokazane jednakosti, i kako je R Smyth dobra na $\mathcal{X}$ sledi:

$$\begin{aligned}\bigwedge_{i=1}^{n} S(A_i/R^{\leftarrow}, B_i/R^{\leftarrow}) = \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(A_i/R^{\leftarrow}, A_i/R^{\leftarrow} \cap B_i/R^{\leftarrow}) =\\ \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(A_i/R^{\leftarrow}, (A_i \cup B_i)/R^{\leftarrow}) \leq\\ \varepsilon\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\leftarrow}, f^{+}(A_1 \cup B_1, ..., A_n \cup B_n)/R^{\leftarrow}\big) \leq\\ S\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\leftarrow}, f^{+}(A_1 \cup B_1, ..., A_n \cup B_n)/R^{\leftarrow}\big) \leq\\ S\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\leftarrow}, \big(f^{+}(A_1, ..., A_n) \cup f^{+}(B_1, ..., B_n)\big)/R^{\leftarrow}\big) =\\ S\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\leftarrow}, f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\leftarrow} \cap f^{+}(B_1, ..., B_n)/R^{\leftarrow}\big) =\\ S\big(f^{+}(A_1, ..., A_n)/R^{\leftarrow}, f^{+}(B_1, ..., B_n)/R^{\leftarrow}\big),\end{aligned}$$

što je trebalo dokazati. □

Teorema 5.8 *Neka je* $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ *Hejtingova algebra. Ako je* θ *fazi* $\wedge$*-kongruencija na* $\mathcal{X}$*, tada je* θ^+ *takođe fazi* $\wedge$*-kongruencija na* $\mathcal{F}^+(\mathcal{X})$.

Dokaz. Kako je θ fazi ekvivalencija na X, na osnovu posledice 3.13 sledi da je i θ^+ fazi ekvivalencija na $\mathcal{F}(X)$. Dakle, ostaje da se pokaže da je θ^+ $\wedge$-saglasna na $\mathcal{F}(\mathcal{X})$. Neka je $f \in \mathbb{F}$ n-arna operacija na X, i neka su $A_1, ..., A_n, B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljni fazi podskupovi od X. Potrebno je pokazati da važi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \theta^+(A_i, B_i) \leq \theta^+\big(f^+(A_1, ..., A_n), f^+(B_1, ..., B_n)\big)$$

Pokažimo najpre da za sve $x, v_1, ..., v_n \in X$ važi:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\right) \wedge \theta\big(x, f(v_1, ..., v_n)\big) \leq \bigvee_{y \in X} \left(f^+\big(B_1, ..., B_n\big)(y) \wedge \theta(x, y)\right) \quad (5.1)$$

Naime, za proizvoljne $x, v_1, ..., v_n \in X$ važi:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\right) \wedge \theta\big(x, f(v_1, ..., v_n)\big) =$$

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\right) \wedge \Delta\big(f(v_1, ..., v_n), f(v_1, ..., v_n)\big) \wedge \theta\big(x, f(v_1, ..., v_n)\big) \leq$$

$$\bigvee_{y, y_1, ..., y_n \in X} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\right) \wedge \Delta\big(f(y_1, ..., y_n), y\big) \wedge \theta(x, y)\right) =$$

$$\bigvee_{y \in X} \left(\left(\bigvee_{y_1, ..., y_n \in X} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\right) \wedge \Delta\big(f(y_1, ..., y_n), y\big)\right)\right) \wedge \theta(x, y)\right) =$$

$$\bigvee_{y \in X} \left(f^+\big(B_1, ..., B_n\big)(y) \wedge \theta(x, y)\right),$$

čime smo pokazali nejednakost (5.1).

Pokažimo sada da za proizvoljne $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \mathcal{F}(X)$ i proizvoljne $x_1, ..., x_n, x \in X$ važi nejednakost:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\right) \wedge \Delta\big(x, f(x_1, ..., x_n)\big) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \theta^+(A_i, B_i)\right) \leq$$
$$\bigvee_{v_1, ..., v_n \in X} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(x_i)\right) \wedge \theta\big(x, f(v_1, ..., v_n)\big)\right) \quad (5.2)$$

Neka $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \mathcal{F}(X)$, i neka $x_1, ..., x_n, x \in X$. Tada, kako je

$\theta^{+} \leq \theta^{\rightarrow}$ važi:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge \Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \theta^{+}(A_i,B_i)\Big) \leq$$

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge \Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\Big(\bigwedge_{u_i\in X}\Big(A_i(u_i) \to \bigvee_{v_i\in X}\Big(B_i(v_i) \wedge \theta(u_i,v_i)\Big)\Big)\Big) = \Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge$$

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\Big(A_i(x_i) \wedge \bigwedge_{u_i\in X}\Big(A_i(u_i) \to \bigvee_{v_i\in X}\Big(B_i(v_i) \wedge \theta(u_i,v_i)\Big)\Big)\Big)$$

$$\leq \Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\Big(A_i(x_i) \wedge \Big(A_i(x_i) \to \bigvee_{v_i\in X}\Big(B_i(v_i) \wedge \theta(x_i,v_i)\Big)\Big)\Big) \leq$$

$$\Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\bigvee_{v_i\in X}\Big(B_i(v_i) \wedge \theta(x_i,v_i)\Big),$$

pri čemu smo ovde koristili jednakost $a * (a \to b) \leq b$ koja za sve $a, b \in L$ važi u reziduiranoj mreži. Kako je $\mathcal{L}$ Hejtingova algebra, važi $\bigwedge_{i=1}^{n}\bigvee_{v_i\in X}\big(B_i(v_i) \wedge \theta(x_i,v_i)\big) = \big(\bigvee_{v_1\in X}\big(B_1(v_1) \wedge \theta(x_1,v_1)\big)\big) * ... * \big(\bigvee_{v_n\in X}\big(B_n(v_n) \wedge \theta(x_n,v_n)\big)\big) = \bigvee_{v_1\in X}\big(\big(B_1(v_1) \wedge \theta(x_1,v_1)\big) * \bigvee_{v_2\in X}\big(B_2(v_2) \wedge \theta(x_2,v_2)\big) * ... * \bigvee_{v_n\in X}\big(B_n(v_n) \wedge \theta(x_n,v_n)\big)\big) = ... = \bigvee_{v_1,...,v_n\in X}\big(\big(B_1(v_1) \wedge \theta(x_1,v_1)\big) * ... * \big(B_n(v_n) \wedge \theta(x_n,v_n)\big) = \bigvee_{v_1,...,v_n\in X}\big(\big(B_1(v_1) \wedge \theta(x_1,v_1)\big) \wedge ... \wedge \big(B_n(v_n) \wedge \theta(x_n,v_n)\big)$, te važi jednakost $\bigwedge_{i=1}^{n}\bigvee_{v_i\in X}\big(B_i(v_i) \wedge \theta(x_i,v_i)\big) = \bigvee_{v_i\in X}\bigwedge_{i=1}^{n}\big(B_i(v_i) \wedge \theta(x_i,v_i)\big)$. Odavde sledi:

$$\Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}\bigvee_{v_i\in X}\Big(B_i(v_i) \wedge \theta(x_i,v_i)\Big) =$$

$$\Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \bigvee_{v_1,...,v_n\in X}\bigwedge_{i=1}^{n}\Big(B_i(v_i) \wedge \theta(x_i,v_i)\Big) =$$

$$\Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \bigvee_{v_1,...,v_n\in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\theta(x_i,v_i)\Big)\Big) \leq$$

$$\Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \bigvee_{v_1,...,v_n\in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\Big) \wedge \theta\big(f(x_1,...,x_n), f(v_1,...,v_n)\big)\Big)$$

$$= \bigvee_{v_1,...,v_n\in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\Big) \wedge \Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \theta\big(f(x_1,...,x_n), f(v_1,...,v_n)\big)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{v_1,...,v_n\in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(v_i)\Big) \wedge \theta\big(x, f(v_1,...,v_n)\big)\Big),$$

čime smo pokazali nejednakost (5.2).

Dalje, iz nejednakosti (5.1) i (5.2) sledi da važi:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge \Delta\big(x, f(x_1,...,x_n)\big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \theta^{+}(A_i,B_i)\Big) \leq$$

$$\bigvee_{y\in X}\Big(f^+\big(B_1,...,B_n\big)(y)\wedge\theta(x,y)\Big).$$

Koristeći gornju nejednakost dobijamo:

$$f^+\big(A_1,...,A_n\big)(x)\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\theta^+(A_i,B_i)\Big)=$$

$$\Big(\bigvee_{x_1,...,x_n\in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}A_i(x_i)\Big)\wedge\Delta\big(f(x_1,...,x_n),x\big)\Big)\Big)\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\theta^+(A_i,B_i)\Big)=$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n\in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}A_i(x_i)\Big)\wedge\Delta\big(f(x_1,...,x_n),x\big)\wedge\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\theta^+(A_i,B_i)\Big)\Big)\leq$$

$$\bigvee_{y\in X}\Big(f^+\big(B_1,...,B_n\big)(y)\wedge\theta(x,y)\Big).$$

Zbog osobine adjungovanosti, dalje sledi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\theta^+(A_i,B_i)\leq f^+\big(A_1,...,A_n\big)(x)\to\bigvee_{y\in X}\Big(f^+\big(B_1,...,B_n\big)(y)\wedge\theta(x,y)\Big).$$

Kako gornja nejednakost važi za svako $x\in X$, sledi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\theta^+(A_i,B_i)\leq\bigwedge_{x\in X}\Big(f^+\big(A_1,...,A_n\big)(x)\to\bigvee_{y\in X}\Big(f^+\big(B_1,...,B_n\big)(y)\wedge\theta(x,y)\Big)\Big)$$

$$=\theta^{\to}\big(f^+(A_1,...,A_n),f^+(B_1,...,B_n)\big).$$

Kako su θ i θ^+ simetrične relacije, važi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\theta^+(A_i,B_i)=\bigwedge_{i=1}^{n}\theta^+(B_i,A_i)\leq\theta^{\to}\big(f^+(B_1,...,B_n),f^+(A_1,...,A_n)\big)=$$

$$(\theta^{\to})^{op}\big(f^+(A_1,...,A_n),f^+(B_1,...,B_n)\big)=\theta^{\leftarrow}\big(f^+(A_1,...,A_n),f^+(B_1,...,B_n)\big),$$

te sledi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\theta^+(A_i,B_i)\leq\theta^{\to}\big(f^+(A_1,...,A_n),f^+(B_1,...,B_n)\big)\wedge$$

$$\theta^{\leftarrow}\big(f^+(A_1,...,A_n),f^+(B_1,...,B_n)\big)=\theta^+\big(f^+(A_1,...,A_n),f^+(B_1,...,B_n)\big),$$

što je trebalo dokazati. □

Tvrđenje 5.9 *Neka je R fazi preduređenje na X. Tada, ako je R $\wedge$-saglasna na $\mathcal{X}$, R je $\wedge$-dobra na $\mathcal{X}$.*

Dokaz. Neka je f n-arna operacija na X, i neka su $a_1,...,a_n,b_1,...,b_n\in X$ proizvoljni elementi skupa X. Da bismo dokazali da je R $\wedge$-dobra na $\mathcal{X}$, treba pokazati da važi $\bigwedge_{i=1}^{n}\varepsilon\big(R\big)(a_i,b_i)\leq\varepsilon\big(R\big)\big(f(a_1,...,a_n),f(b_1,...,b_n)\big)$. Naime, za svako: $i\in\{1,...,n\}$ važi

$$\varepsilon\big(R\big)(a_i,b_i)=\bigwedge_{x\in X}\big(R(x,a_i)\leftrightarrow R(x,b_i)\big)\leq R(a_i,a_i)\leftrightarrow R(a_i,b_i),$$

a kako je R refleksivna, važi $R(a_i, a_i) = 1$, i kako u reziduiranoj mreži za svako $l \in L$ važi $l \to 1 = 1$ i $1 \to l = l$, sledi da je desna strana gornje nejednakosti jednaka $R(a_i, b_i)$, te da je $\varepsilon\big(R\big)(a_i, b_i) \leq R(a_i, b_i)$. Kako je R $\wedge$-saglasna sledi da važi $\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon\big(R\big)(a_i, b_i) \leq \bigwedge_{i=1}^{n} R(a_i, b_i) \leq R\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big)$.

Neka $y \in X$. Kako je R tranzitivna fazi relacija na X, sledi:

$$R\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big) * R\big(y, f(a_1, ..., a_n)\big) \leq R\big(y, f(b_1, ..., b_n)\big),$$

a zbog osobine adjungovanosti operacija $*$ i $\to$, sledi:

$$R\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big) \leq R\big(y, f(a_1, ..., a_n) \to R\big(y, f(b_1, ..., b_n)\big),$$

te da je $\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon\big(R\big)(a_i, b_i) \leq R\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big) \leq R\big(y, f(a_1, ..., a_n) \to R\big(y, f(b_1, ..., b_n)\big)$.

Kako je y proizvoljan element iz X, sledi da važi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon\big(R\big)(a_i, b_i) \leq \bigwedge_{y \in X} \Big(R\big(y, f(a_1, ..., a_n)\big) \to R\big(y, f(b_1, ..., b_n)\big)\Big) =$$

$$\sigma\big(R\big)\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big).$$

Kako je $\varepsilon(R)$ simetrična relacija, sledi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon\big(R\big)^{op}(a_i, b_i) \leq \sigma\big(R\big)\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big),$$

a ovo je ekvivalentno sa:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon\big(R\big)(a_i, b_i) \leq \sigma\big(R\big)^{op}\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big).$$

Dalje, na osnovu dve dobijene nejednakosti, zaključujemo:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon\big(R\big)(a_i, b_i) \leq \sigma\big(R\big)\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big) \wedge$$

$$\sigma\big(R\big)^{op}\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big) = \varepsilon\big(R\big)\big(f(a_1, ..., a_n), f(b_1, ..., b_n)\big),$$

čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Lema 5.10 *Neka je $\mathcal{L}$ Hejtingova algebra, i neka je R binarna fazi relacija na X. Tada za sve $C, A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}(X)$ i za svako $z \in X$ važi nejednakost:*

$$R^{\to}\big(C, f^{+}(A_1, ..., A_n)\big) \leq$$

$$C(z) \to \bigvee_{x_1, ..., x_n \in X} \Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big)\Big) \quad (5.3)$$

Dokaz. Neka su $y, z, x_1, ..., x_n \in X$ proizvoljni elementi skupa X. Kako važi:

$$\Delta\big(f(x_1, ..., x_n), y\big) \wedge R(z, y) \leq R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big),$$

sledi:

$$f^+\big(A_1,...,A_n\big)(y) \wedge R(z,y) =$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n\in X} \bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge \Delta\big(f(x_1,...,x_n),y\big) \wedge R(z,y)\bigg) \leq$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n\in X} \bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge R\big(z,f(x_1,...,x_n)\big)\bigg),$$

a kako ova nejednakost važi za svako $y \in X$, sledi:

$$\bigvee_{y\in X} \Big(f^+\big(A_1,...,A_n\big)(y) \wedge R(z,y)\Big) \leq$$

$$\bigvee_{x_1,...,x_n\in X} \bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge R\big(z,f(x_1,...,x_n)\big)\bigg).$$

Kako je operacija $\to$ izotona po drugom argumentu na L, na osnovu gornje nejednakosti, dobijamo:

$$R^{\to}\big(C,f^+(A_1,...,A_n)\big) = \bigwedge_{x\in X} \bigg(C(x) \to \bigvee_{y\in X} \Big(f^+(A_1,...,A_n)(y) \wedge R(x,y)\Big)\bigg) \leq$$

$$C(z) \to \bigvee_{y\in X} \Big(f^+(A_1,...,A_n)(y) \wedge R(z,y)\Big) \leq$$

$$C(z) \to \bigvee_{x_1,...,x_n\in X} \bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge R\big(z,f(x_1,...,x_n)\big)\bigg),$$

čime smo nejednakost (5.3) dokazali. □

Lema 5.11 *Neka je $\mathcal{L}$ Hejtingova algebra, i neka je R binarna fazi relacija na X. Tada za svako $x \in X$ za sve $A,B \in \mathcal{F}(X)$ važe nejednakost:*

$$R^{\to}(1_{x_i},A_i) \wedge \varepsilon(R^{\to})(A_i,B_i) \leq R^{\to}(1_{x_i},B_i). \tag{5.4}$$

i jednakost:

$$R^{\to}(1_x,A) = \bigvee_{y\in X} \Big(A(y) \wedge R(x,y)\Big). \tag{5.5}$$

Ako je R refleksivna relacija, važi i nejednakost:

$$A(x) \leq R^{\to}(1_x,A). \tag{5.6}$$

Dokaz. Pokažimo sada da za sve $x_1,...,x_n \in X$, i za bilo koje $i \in \{1,...,n\}$ važi nejednakost (5.4).

Naime, koristeći nejednakost $a*(a \to b) \leq b$ koja važi u reziduiranoj mreži za svako $a,b \in L$, sledi: $R^{\to}(1_{x_i},A_i)\wedge\varepsilon(R^{\to})(A_i,B_i) \leq R^{\to}(1_{x_i},A_i)\wedge(R(1_{x_i},A_i) \to R(1_{x_i},B_i)) \leq R(1_{x_i},B_i)$, što je trebalo dokazati.

Pokažimo dalje jednakost (5.5). Neka $A \in \mathcal{F}(X)$, i neka $x \in X$. Tada važi: $R^{\to}(1_x,A) = \bigwedge_{u\in X} \big(1_x(u) \to \bigvee_{y\in X} \big(A(y)\wedge R(u,y)\big)\big) = \bigvee_{y\in X} \big(A(y)\wedge R(x,y)\big)$, čime je ova jednakost dokazana.

Preostalo je još da dokažemo i nejednakost (5.6). Kako je R refleksivna fazi relacija na X, za $A \in \mathcal{F}(X)$ i $x \in X$, važi: $A(x) = A(x) \wedge R(x,x) \leq \bigvee_{y\in X}\big(A(y) \wedge R(x,y)\big) = R^{\to}(1_x, A)$, čime je i ova nejednakost dokazana. $\square$

Lema 5.12 *Neka je $\mathcal{L}$ Hejtingova algebra, i neka je R $\wedge$-saglasna fazi relacija na X, i fazi predurеđenje. Tada za svako $z \in X$ i za sve $A_1, B_1, ..., A_n, B_n, C \in \mathcal{F}(X)$, važi:*

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\to})(A_i, B_i)\Big) \wedge R^{\to}\big(C, f^{+}(A_1, ..., A_n)\big) \leq$$
$$C(z) \to \bigvee_{y_1,...,y_n \in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(y_i)\Big) \wedge R\big(z, f(y_1, ..., y_n)\big)\Big) \tag{5.7}$$

Dokaz. Neka $z \in X$, i neka $A_1, B_1, ..., A_n, B_n \in \mathcal{F}(X)$. Tada važi:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\to})(A_i, B_i)\Big) \wedge R^{\to}\big(C, f^{+}(A_1, ..., A_n)\big) \leq \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\to})(A_i, B_i)\Big) \wedge$$
$$\Big(C(z) \to \bigvee_{x_1,...,x_n \in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big)\Big)\Big) \leq$$
$$C(z) \to \Big(\Big(\varepsilon(R^{\to})(A_i, B_i)\Big) \wedge \bigvee_{x_1,...,x_n \in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big)\Big)\Big),$$

pri čemu je poslednja nejednakost posledica nejednakosti $a \wedge (b \to c) \leq b \to (a \wedge c)$, za koju se lako pokazuje da važi u Hejtingovoj algebri za sve $a, b, c \in L$. Naime, ova nejednakost, zbog osobine adjungovanosti $\to$ i $*$ ekvivalentna je sa nejednakošću $a \wedge b \wedge (b \to c) \leq a \wedge c$, koja jeste tačna.

Dalje, na osnovu nejednakosti (5.3), (5.4) i (5.6), sledi:

$$C(z) \to \Big(\Big(\varepsilon(R^{\to})(A_i, B_i)\Big) \wedge \bigvee_{x_1,...,x_n \in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)\Big) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big)\Big)\Big)$$
$$\leq C(z) \to \Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\to})(A_i, B_i)\Big) \wedge \bigvee_{x_1,...,x_n \in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} R^{\to}(1_{x_i}, A_i)\Big) \wedge$$
$$R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big)\Big)\Big) = C(z) \to \bigvee_{x_1,...,x_n \in X}\Big(\bigwedge_{i=1}^{n}\Big(\varepsilon(R^{\to})(A_i, B_i) \wedge$$
$$R^{\to}(1_{x_i}, A_i)\Big) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big)\Big) \leq$$
$$C(z) \to \bigvee_{x_1,...,x_n \in X}\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} R^{\to}(1_{x_i}, B_i)\Big) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big)\Big) =$$

$$C(z) \to \bigvee_{x_1,...,x_n \in X} \Bigg(\bigg(\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{y_i \in X} \Big(B_i(y_i) \wedge R(x_i, y_i) \Big) \bigg) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big) \Bigg).$$

Kako je $\mathcal{L}$ Hejtingova algebra, važi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{y_i \in X} \Big(B_i(y_i) \wedge R(x_i, y_i) \Big) = \bigvee_{y_1,...,y_n \in X} \bigwedge_{i=1}^{n} \Big(B_i(y_i) \wedge R(x_i, y_i) \Big),$$

a na osnovu ovoga, sledi:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_i, B_i) \Big) \wedge R^{\rightarrow}\big(C, f^{+}(A_1, ..., A_n)\big) \leq C(z) \to$$

$$\bigvee_{x_1,y_1,...,x_n,y_n \in X} \Bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(x_i) \Big) \wedge \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} R(x_i, y_i) \Big) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big) \Bigg).$$

Kako je R tranzitivna fazi relacija i $\wedge$-saglasna na $\mathcal{X}$, sledi:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} R(x_i, y_i) \Big) \wedge R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big) \leq R\big(f(x_1, ..., x_n), f(y_1, ..., y_n)\big) \wedge$$

$$R\big(z, f(x_1, ..., x_n)\big) \leq R\big(z, f(y_1, ..., y_i)\big),$$

pa prema tome, važi da je:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_i, B_i) \Big) \wedge R^{\rightarrow}\big(C, f^{+}(A_1, ..., A_n)\big) \leq$$

$$C(z) \to \bigvee_{x_1,y_1,...,x_n,y_n \in X} \bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(y_i) \Big) \wedge R\big(z, f(y_1, ..., y_n)\big) \bigg) =$$

$$C(z) \to \bigvee_{y_1,...,y_n \in X} \bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(y_i) \Big) \wedge R\big(z, f(y_1, ..., y_n)\big) \bigg),$$

te smo dokazali nejednakost (5.7). $\square$

Lema 5.13 *Neka je $\mathcal{L}$ Hejtingova algebra, i neka je R $\wedge$-saglasna fazi relacija na X, i fazi preduređenje. Tada za svako $z \in X$ i za sve $B_1, ..., B_n \in \mathcal{F}(X)$ važi:*

$$\bigvee_{y_1,...,y_n \in X} \bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(y_i) \Big) \wedge R\big(z, f(y_1, ..., y_n)\big) \bigg) \leq$$

$$\bigvee_{y \in X} \Big(f^{+}(B_1, ..., B_n)(y) \to R(z, y) \Big) \quad (5.8)$$

Dokaz. Za sve $z, y_1, ..., y_n \in X$ važi:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(y_i)\Big) \wedge R\big(z, f(y_1, ..., y_n)\big) = \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(y_i)\Big) \wedge$$

$$\Delta\big(f(y_1, ..., y_n), f(y_1, ..., y_n)\big) \wedge R\big(z, f(y_1, ..., y_n)\big) \leq$$

$$\bigvee_{z_1,...,z_n \in X} \left(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} B_i(z_i)\Big) \wedge \Delta\big(f(z_1, ..., z_n), f(y_1, ..., y_n)\big) \wedge R\big(z, f(y_1, ..., y_n)\big)\right) \leq$$

$$\bigvee_{y \in X} \left(\bigvee_{z_1,...,z_n \in X} \left(\Big(\bigwedge_{1=1}^{n} B_i(z_i)\Big) \wedge \Delta\big(f(z_1, ..., z_n), y\big)\right) \wedge R(z, y)\right) =$$

$$\bigvee_{y \in X} \Big(f^+(B_1, ..., B_n)(y) \wedge R(z, y)\Big),$$

čime smo dokazali nejednakost (5.8). □

Teorema 5.14 *Neka je $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ Hejtingova algebra i neka je R fazi preduređenje na X. Ako je R $\wedge$-saglasna na algebri $\mathcal{X}$, tada je R Hoare dobra fazi relacija na $\mathcal{X}$.*

Dokaz. Na osnovu nejednakosti (5.7) i (5.8) i kako je operacija $\rightarrow$ izotona po drugom argumentu, dobijamo:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_i, B_i)\Big) \wedge R^{\rightarrow}\big(C, f(A_1, ..., A_n)\big) \leq$$

$$C(z) \rightarrow \bigvee_{y \in X} \Big(f^+(B_1, ..., B_n)(y) \wedge R(z, y)\Big)$$

Kako prethodna nejednakost važi za svako $z \in X$, sledi:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_i, B_i)\Big) \wedge R^{\rightarrow}\big(C, f^+(A_1, ..., A_n)\big) \leq$$

$$\bigwedge_{z \in X} \left(C(z) \rightarrow \bigvee_{y \in X} \Big(f^+(B_1, ..., B_n)(y) \wedge R(z, y)\Big)\right) =$$

$$R^{\rightarrow}\big(C, f^+(B_1, ..., B_n)\big).$$

Na osnovu osobine adjungovanosti, ova gornja nejednakost je ekvivalentna sa:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_i, B_i) \leq R^{\rightarrow}\big(C, f^+(A_1, ..., A_n)\big) \rightarrow R^{\rightarrow}\big(C, f^+(B_1, ..., B_n)\big),$$

a kako ova nejednakost važi za svako $C \in \mathcal{F}(X)$, sledi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_i, B_i) \leq \bigwedge_{C \in \mathcal{F}(X)} \Big(R\big(C, f^+(A_1, ..., A_n)\big) \rightarrow R^{\rightarrow}\big(C, f^+(B_1, ..., B_n)\big)\Big)$$

$$= \sigma(R^{\rightarrow})\big(f^{+}(A_1,...,A_n), f^{+}(B_1,...,B_n)\big).$$

Kako je $\varepsilon(R)$ simetrična relacija, sledi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_i,B_i) = \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(B_i,A_i) \le$$

$$\sigma(R^{\rightarrow})\big(f^{+}(B_1,...,B_n), f^{+}(A_1,...,A_n)\big)$$
$$= \sigma(R^{\rightarrow})^{op}\big(f^{+}(A_1,...,A_n), f^{+}(B_1,...,B_n)\big),$$

te da je:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\rightarrow})(A_i,B_i) = \sigma(R^{\rightarrow})\big(f^{+}(A_1,...,A_n), f^{+}(B_1,...,B_n)\big)$$

$$\wedge \sigma(R^{\rightarrow})^{op}\big(f^{+}(A_1,...,A_n), f^{+}(B_1,...,B_n)\big) =$$
$$\varepsilon(R^{\rightarrow})\big(f^{+}(A_1,...,A_n), f^{+}(B_1,...,B_n)\big),$$

čime smo dokazali teoremu. □

Teorema 5.15 *Neka je R preduređenje na X. Ako je R Smyth dobra na $\mathcal{X}$, tada je ona $\wedge$-saglasna na $\mathcal{X}$.*

Dokaz. Prema hipotezi, za svaku n-arnu operaciju $f \in \mathbb{F}$ na X, i za sve $A_1,...,A_n,B_1,...,B_n \in \mathcal{F}(X)$ važi:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\leftarrow})(A_i,B_i) \le \varepsilon(R^{\leftarrow})\big(f^{+}(A_1,...,A_n), f^{+}(B_1,...,B_n)\big).$$

Neka je $f \in \mathbb{F}$ proizvoljno i neka $x_1,...,x_n,y_1,...,y_n \in X$. Potrebno je pokazati da važi

$$\bigwedge_{i=1}^{n} R(x_i,y_i) \le R\big(f(x_1,...,x_n), f(y_1,...,y_n)\big).$$

Pokažimo najpre da za svako $C \in \mathcal{F}(X)$, i za sve $i \in \{1,...,n\}$ važi:

$$(1_{x_i}/R^{\leftarrow})(C) = R^{\leftarrow}(C,1_{x_i}) = \bigvee_{x\in X}\Big(C(x) * R(x,x_i)\Big). \tag{5.9}$$

Naime, po definiciji $R^{\leftarrow}$, dobijamo sledeće: $R^{\leftarrow}(C,1_{x_i}) = \bigwedge_{y\in X}\big(1_{x_i}(y) \to \bigvee_{x\in X}\big(C(x) * R(x,y)\big)\big)$. Kako u reziduiranoj mreži, za svako $a \in L$ važi $1 \to a = a$ i $0 \to a = 1$, sledi da je $\bigwedge_{y\in X}\big(1_{x_i}(y) \to \bigvee_{x\in X}\big(C(x) * R(x,y)\big)\big) = 1_{x_i}(x_i) \to \bigvee_{x\in X}\big(C(x) * R(x,x_i)\big) = \bigvee_{x\in X}\big(C(x) * R(x,x_i)\big)$, čime smo pokazali da važi jednakost (5.9).

Dalje, pokažimo da za svako $C \in \mathcal{F}(X)$ važe jednakosti:

$$(1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow})(C) = R^{\leftarrow}(C,1_{x_i,y_i}) =$$

$$\bigwedge_{y\in X}\Big(1_{x_i,y_i}(y) \to \bigvee_{x\in X}\Big(C(x) * R(x,y)\Big)\Big) =$$

$$\bigvee_{x\in X}\Big(C(x) * R(x,x_i)\Big) \wedge \bigvee_{x\in X}\Big(C(x) * R(x,y_i)\Big) \tag{5.10}$$

Slično kao malopre, koristeći jednakost $0 \to a = 1$, koja važi u reziduiranoj mreži za svako $a \in L$, dobijamo $\bigwedge_{y\in X} \big(1_{x_i,y_i}(y) \to \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,y)\big)\big) = \bigwedge_{y\in X} \big((1_{x_i} \cup 1_{y_i})(y) \to \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,y)\big)\big) = \bigwedge_{y\in X} \big(\big(1_{x_i}(y) \vee 1_{y_i}(y)\big) \to \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,y)\big)\big)$, a na osnovu jednakosti $(a \vee b) \to c = (a \to c) \wedge (a \to b)$, koja u reziduiranoj mreži važi za sve $a,b,c \in L$, ovo je jednako sa: $\bigwedge_{y\in X} \big(1_{x_i}(y) \to \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,y)\big)\big) \wedge \bigwedge_{y\in X} \big(1_{y_i}(y) \to \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,y)\big)\big) = \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,x_i)\big) \wedge \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,y_i)\big)$, čime je i ova jednakost pokazana.

Dokažimo sada da za svako $i \in \{1,...,n\}$ važi:

$$R(x_i,y_i) \leq S\big(1_{x_i}/R^{\leftarrow}, 1_{y_i}/R^{\leftarrow}\big) \tag{5.11}$$

Neka je $C \in \mathcal{F}(X)$ proizvoljno. Tada, koristeći jednakost (5.9), i to da je R tranzitivna, dobijamo:

$$R(x_i,y_i) * R^{\leftarrow}(C,1_{x_i}) = R(x_i,y_i) * \bigvee_{x\in X} \Big(C(x) * R(x,x_i)\Big) =$$

$$\bigvee_{x\in X} \Big(R(x_i,y_i) * R(x,x_i) * C(x)\Big) \leq \bigvee_{x\in X} \Big(C(x) * R(x,y_i)\Big) = R^{\leftarrow}(C,1_{y_i}),$$

te za svako $C \in \mathcal{F}(X)$ važi $R(x_i,y_i) \leq R^{\leftarrow}(C,1_{x_i}) \to R^{\leftarrow}(C,1_{y_i})$, a ovo implicira $R(x_i,y_i) \leq \bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \big(R^{\leftarrow}(C,1_{x_i}) \to R^{\leftarrow}(C,1_{y_i})\big) = S\big(1_{x_i}/R^{\leftarrow}, 1_{y_i}/R^{\leftarrow}\big)$, čime je ova nejednakost dokazana.

Iz jednakosti (5.9) i (5.10) sledi $(1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow})(C) = \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,x_i)\big) \wedge \bigvee_{x\in X} \big(C(x) * R(x,y_i)\big) = (1_{x_i}/R^{\leftarrow})(C) \wedge (1_{y_i}/R^{\leftarrow})(C)$, za svako $i \in \{1,...,n\}$. Odavde sledi jednakost:

$$1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow} = 1_{x_i}/R^{\leftarrow} \cap 1_{y_i}/R^{\leftarrow} \tag{5.12}$$

Pokažimo dalje da za svako $i \in \{1,...,n\}$ važi jednakost:

$$R(x_i,y_i) \leq \varepsilon(1_{x_i}/R^{\leftarrow}, 1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow}) \tag{5.13}$$

Kako važe nejednakosti (5.11) i (5.12), sledi: $R(x_i,y_i) \leq S\big(1_{x_i}/R^{\leftarrow}, 1_{y_i}/R^{\leftarrow}\big) = S\big(1_{x_i}/R^{\leftarrow}, 1_{x_i}/R^{\leftarrow} \cap 1_{y_i}/R^{\leftarrow}\big) = S\big(1_{x_i}/R^{\leftarrow}, 1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow}\big)$. Takođe, na osnovu jednakosti (5.12) zaključujemo da je $1_{x_i,y_i} \subseteq 1_{x_i}$, pa prema tome, za svako $C \in \mathcal{F}(X)$ važi $\big(1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow}\big) \to \big(1_{x_i}/R^{\leftarrow}\big) = 1$. Odavde sledi:

$$\begin{aligned} R(x_i,y_i) \leq S\big(1_{x_i}/R^{\leftarrow}, 1_{y_i}/R^{\leftarrow}\big) &= \\ \bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \Big((1_{x_i}/R^{\leftarrow})(C) \to (1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow})(C)\Big) &= \\ \bigwedge_{C\in\mathcal{F}(X)} \Big((1_{x_i}/R^{\leftarrow})(C) \leftrightarrow (1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow})(C)\Big) &= \\ \varepsilon(1_{x_i}/R^{\leftarrow}, 1_{x_i,y_i}/R^{\leftarrow}) = \varepsilon(R^{\leftarrow})(1_{x_i}, 1_{x_i,y_i})&. \end{aligned}$$

Na osnovu nejednakosti (5.13), sledi:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1}^{n} R(x_i,y_i) \leq \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon(R^{\leftarrow})(1_{x_i}, 1_{x_i,y_i}) &\leq \\ \varepsilon(R^{\leftarrow})\big(f^{+}(1_{x_1},...,1_{x_n}), f^{+}(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})\big) &= \\ \varepsilon\big(f^{+}(1_{x_1},...,1_{x_n})/R^{\leftarrow}, f^{+}(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})/R^{\leftarrow}\big)& \end{aligned} \tag{5.14}$$

Kako je R predurešenje, i $R^{\leftarrow}$ je predurešenje, te je $R^{\leftarrow}$ refleksivno. Na osnovu refleskivnosti $R^{\leftarrow}$, i kako je $1_{f(x_1,\ldots,x_n)} = f^+(1_{x_1},...,1_{x_n})$, sledi:

$$R^{\leftarrow}(1_{f(x_1,\ldots,x_n)}, f^+(1_{x_1},...,1_{x_n})) = 1. \tag{5.15}$$

Pokažimo sada da važi sledeća nejednakost:

$$R^{\leftarrow}\big(1_{f(x_1,\ldots,x_n)}, f^+(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})\big) \le R\big(f(x_1,...,x_n), f(y_1,...,y_n)\big) \tag{5.16}$$

Naime, za svako $x_1, y_1, ..., x_n, y_n \in X$ važi:

$$\begin{aligned}
&R^{\leftarrow}\big(1_{f(x_1,\ldots,x_n)}, f^+(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})\big) = \\
&\bigwedge_{z\in X}\Bigg(f^+(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})(z) \to \bigvee_{u\in X}\Big((1_{f(x_1,\ldots,x_n)}(u) * R(u,z)\Big)\Bigg) = \\
&\bigwedge_{z\in X}\Big(f^+(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})(z) \to R\big(f(x_1,...,x_n),z\big)\Big) \le \\
&\big(f^+(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})\big)\big(f(y_1,...,y_n)\big) \to R\big(f(x_1,...,x_n), f(y_1,...,y_n)\big) \le \\
&\bigvee_{z_1,\ldots,z_n\in X}\Bigg(\Bigg(\Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} 1_{x_i,y_i}(z_i)\Big) * \Delta\big(f(z_1,...,z_n), f(y_1,...,y_n)\big)\Bigg) \to \\
&\qquad R\big(f(x_1,...,x_n), f(y_1,...,y_n)\big)\Bigg) \le \\
&\Bigg(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} 1_{x_i,y_i}(y_i)\Big) * \Delta\big(f(y_1,...,y_n), f(y_1,...,y_n)\big)\Bigg) \to \\
&R\big(f(x_1,...,x_n), f(y_1,...,y_n)\big) = R\big(f(x_1,...,x_n), f(y_1,...,y_n)\big),
\end{aligned}$$

čime smo pokazali nejednakost (5.16). Dalje, na osnovu (5.14), (5.15) i (5.16), sledi:

$$\begin{aligned}
&\bigwedge_{i=1}^{n} R(x_i,y_i) \le \varepsilon\big(f^+(1_{x_1},...,1_{x_n})/R^{\leftarrow}, f^+(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})/R^{\leftarrow}\big) \le \\
&R^{\leftarrow}\big(1_{f(x_1,\ldots,x_n)}, f^+(1_{x_1},...,1_{x_n})\big) \to R^{\leftarrow}\big(1_{f(x_1,\ldots,x_n)}, f^+(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})\big) = \\
&R^{\leftarrow}\big(1_{f(x_1,\ldots,x_n)}, f^+(1_{x_1,y_1},...,1_{x_n,y_n})\big) \le R\big(f(x_1,...,x_n), f(y_1,...,y_n)\big),
\end{aligned}$$

čime smo dokazali teoremu. $\square$

Glava 6

Zaključak

Postoje dva prirodna proizvoda fazi podskupova skupa X. Jedan je Dekartov proizvod, a drugi je tenzorski proizvod. Ova dva proizvoda vode do dve teorije fazi stepenih struktura koje proširuju matematičku strukturu na skupu X do matematičke strukture na skupu fazi podskupova skupa X. U ovom radu proučavamo obe stepene strukture: bazirane na tenzorskom proizvodu fazi podskupova, i bazirane na Dekartovom proizvodu fazi podskupova. Glavni rezultati u vezi su sa proširenjima fazi relacija na skup fazi podskupova.

Za datu binarnu fazi relaciju R na X, postoje prirodna proširenja $R^{\to}$, $R^{\leftarrow}$ i R^{+} sa X na $\mathcal{F}(X)$ skup fazi podskupova od X. Pomoću ove dve relacije definisali smo pojmove Hoare dobrih relacija i Smyth dobrih relacija. Pokazano je da, u slučaju fazi stepenih struktura konstruisanih tenzorskim proizvodom, važi da je fazi preduređenje R saglasna relacija na $\mathcal{X}$ akko je R Smyth dobra na $\mathcal{X}$ akko je R Hoare dobra na $\mathcal{X}$, pri čemu smo saglasnost fazi relacije definisali pomoću operacije $*$ - multiplikacije reziduirane mreže.

U slučaju fazi stepene strukture konstruisane Dekartovim proizvodom, kada je saglasnost fazi relacije definisana pomoću operacije $\wedge$ reziduirane mreže ($\wedge$-saglasnost), pokazano je da važi: ako je preduređenje R Smyth dobra relacija na $\mathcal{X}$, tada je R $\wedge$-saglasna na $\mathcal{X}$; i ako za strukturu istinitosne vrednosti uzmemo Hejtingovu algebru, tada važi: ako je preduređenje R $\wedge$-saglasna relacija na $\mathcal{X}$, tada je R Hoare dobra na $\mathcal{X}$.

Među najbitnijim pitanjima koja nam se sama nameću jesu ona u vezi sa fazi stepenim strukturama konstruisanim pomoću Dekartovog proizvoda, i to su sledeća dva:

- Ako za strukturu istinitosnih vrednosti uzimamo reziduiranu mrežu, da li za svako preduređenje R na X, važi: ako je R $\wedge$-saglasna na $\mathcal{X}$, tada je R Hoare dobra na $\mathcal{X}$?

- Ako za strukturu istinitosnih vrednosti uzimamo reziduiranu mrežu, da li za svako preduređenje R na X, važi: ako je R Hoare dobra na $\mathcal{X}$, tada je R Smyth dobra na $\mathcal{X}$?

Takođe je otvoreno pitanje i sledeće:

- Ako za strukturu istinitosnih vrednosti uzimamo reziduiranu mrežu, da li za svaku fazi relaciju θ na X, važi: ako je θ $\wedge$-kongruencija na $\mathcal{X}$, tada je i θ^{+} fazi $\wedge$-kongruencija na $\mathcal{F}^{+}(\mathcal{X})$?

Literatura

[1] Bošnjak, I., *O algebrama kompleksa*, doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2002.

[2] Madarász, Sz. R., *Od skupova do univerzalnih algebri*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2006.

[3] Bradić, M., *O reziduiranim mrežama*, seminarski rad, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 2011.

[4] Georgescu, G., *Fuzzy power structures*, Springer-Verlag, Bucharest 2008.

[5] Lai, H., Zhang, D. *Good fuzzy preorders on fuzzy power structures*, Springer-Verlag, Chengdu, 2011.

[6] Bělohlávek, R. *Fuzzy Relational Systems.* Kluwer, Dordrecht, 2002.

[7] Bošnjak, I., Madarász, R. *Power algebras and generalized quotient algebras.* Algebra Universalis 45, 179189, 2001.

[8] Bošnjak, I., Madarász, R. *Good quotient algebras and power algebras.* Novi Sad J. Math. 29, 7184, 1999.

[9] Bošnjak, I., Madarász, R. *On some classes of good quotient relations.* Novi Sad J. Math. 32, 131140, 2002.

[10] Madarász, R. *Generalized factor algebras.* Matem. Bilten 18, 2938, 1994.

[11] Madarász, R. *Remarks on power structures.* Algebra Universalis 34, 179184, 1995.

[12] Brink, C. *Power structures.* Algebra Universalis 30, 177216, 1993.

[13] Brink, C., Rewitzki, I. *A Paradigm for Program Semantics.* Power Structures and Duality. CSLI Publications, Stanford, 2001.

[14] Ward, M., Dilworth, R. P. *Residuated lattices.* Trans. Amer. Math. Soc. 45, 335-354, 1939.

[15] Hájek, P. *Metamathematics of Fuzzy Logic.* Kluwer, Dordrecht, 1998.

[16] Hájek, P., Godo, L., Esteva, F. *A complete many-valued logic with product conjunction* East-West Fuzzy Logic Days, Zittau, 2000.

[17] Chang, C. C. *Algebraic analysis of many-valued logics.* Trans. Amer. Math. Soc. 88, 467-490, 1958.

[18] Chang, C. C. *A new proof of completeness of the Lukasiewicz's axioms* Trans. Amer. Math. Soc. 93, 74-80, 1966.

[19] Cignoli, R., D'Ottaviano, I.M.L., Mundici, D. *Algebraic Foundations of many-valued reasoning.* Kluwer, Dordrecht, 2000.

[20] Schweiger, B., Sklar, A. *Statistical metrics.* Pac J. Math. 10, 313-334, 1960.

[21] Klement, E. P., Mesiar, R., Pap., E. *Triangular norms* Kluwer, Dordrecht, 2000.

Biografija

Samir Zahirović rođen je 18. januara 1989. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Jožef Atila" završio je 2004. godine. Godine 2008. završava gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj" i iste godine upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer matematika (M1). Godine 2011. upisao je master studije na istom fakultetu, smer matematika (MA), Položio je sve ispite predviđene nastavnim planom i programom i time stekao pravo na odbranu ovog rada.

u Novom Sadu, dana 20. juna 2013.

Samir Zahirović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Master rad

Autor: (AU): Samir Zahirović

Mentor: (MN): Rozália Sz. Madarász

Naslov rada: (NR): Stepene strukture i dobre faktor relacije

Jezik publikacije: (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski i engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): Srbija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2013.

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Novi Sad, Departman za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4

Fizički opis rada: (FO): 5/71/21/0/3/0/0

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Algebra

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): stepene strukture, stepene algebre, dobre faktor relacije, fazi relacije, dobre fazi relacije, fazi preduređenja, fazi stepene strukture

UDK:

Čuva se: (ČU): Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): Ovaj rad se bavi fazi stepenim strukturama, i dobrim fazi relacijama. Kao strukturu istinitosnih vrednosti koristimo reziduiranu mrežu, te dokazujemo osnovne osobine reziduiranih mreža. U radu predstavljamo fazi stepene strukture konstruisane putem tenzorskog proizvoda fazi podskupova, i putem Dekartovog proizvoda fazi podskupova. U oba slučaja definišemo pojam dobre relacije, Hoare dobre relacije i Smyth dobre relacije, i u prvom slučaju dokazujemo da je predurеđenje saglasna relacija akko je ona Smyth dobra akko je Hoare dobra. U drugom slučaju dokazujemo da: ako predurеđenje Smyth dobra relacija, onda je ona saglasna; i ako uzmemo Hejtingovu algebru za strukturu istinitosnih vrednosti: da ako je predurеđenje saglasna, da je Hoare dobra.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP):

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Petar Đapić, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monographic documentation

Type of record: (TR): Textual printed matter

Contents code: (CC): Master's thesis

Author: (AU): Samir Zahirović

Mentor: (MN): Rozália Sz. Madarász

Title: (TI): Power structures and good factor relations

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): Serbia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2013.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4

Physical description: (PD): 5/71/21/0/3/0/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Algebra

Subject/Key words: (SKW): power structures, power algebras, good factor relations, fuzzy relations, good fuzzy relations, fazzy preorders, fazzy power structures

UC:

Holding data: (HD): The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad

Note: (N):

Abstract: (AB): This theses deals with power structures and good fuzzy relations. As structure of truth values we use residuated lattices, so in the first section we prove some basic properties of residuated lattices. In this paper we present fazzy power structures constructed using tensor and Cartesian product of fuzzy sets. In both cases we define notions of good, Hoare good, and Smyth good fuzzy relations, and in the first case we prove that a fuzzy preorder is compatible iff it is Hoare good iff it is Smyth good. In the second case we prove: if a preorder is Smyth good, then it is compatible; and if the truth value structure is Heyting algebra: if a preorder is compatible, then it is Hoare good.

Accepted by the Scientific Board on: (ASb):

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Ivica Bošnjak, associate professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Rozália Sz. Madarász, full professor, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Petar Đapić, docent, Faculty of Science and Mathematics, University of Novi Sad