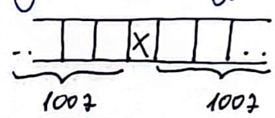
1. Вјежбе

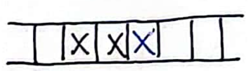
* Теорија игара *

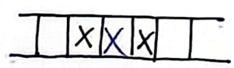
1. Дата је трака 2015×1 подијељена на јединичне квадратиће. Два играча наизмјенично уписују X у произвољан квадратић, под условом да он није већ попуњен. Добија први играч који постигне да након његовог потеза постоје бар 3 узастопна квадратића обиљежена словом X. Доказати да први играч има побједничку стратегију.

Треба да смислимо одређену тактику која ће првог играча сигурно довести до побједе. Први играч треба да прати сљедећу стратегију:

- у првом потезу упише X у централни квадратић 

- у сваком сљедећем, ако постоје 2 узастопна квадратића обиљежена са X или постоје 2 квадратића обиљежена са X између којих је тачно 1 неозначен квадратић, онда прави низ од 3 узастопна X-а и побјеђује.





- у супротном игра симетрично (у односу на централни квадрат) претходном потезу другог играча.

Да ли је ово заиста побједничка стратегија?

(Очигледно, након сваког (сем посљедњег) потеза првог играча се не може десити да нека 2 суједна поља буду означена са X, зато што први играч игра симетрично у односу на другог, па би то значило да је други играч већ одиграо тако да 2 суједна буду попуњена, па би онда први играч већ побиједио. Слично, не може се десити да након потеза првог играча остану 2 поља означена са X и једно неозначено између. Према томе, први играч након свог потеза никада неће оставити другом шансу да побједи.

$\boxed{2}$ Два играча А и Б играју сљедећу игру: дата је табла $3 \times n$, $n \geq 2$, која је на почетку игре празна. Играчи наизмјенично одабирају по једно празно поље и означавају празно поље словом X, уз услов да свако поље на рубу табле, означено или неозначено, може бити суседно највише једном означеном пољу (суседна поља су она која имају заједничку страницу). Побједник је онај играч послије чијег потеза наредни играч више не може одиграти потез. Играч А игра први. За које n играч А има побједничку стратегију, а за које n има играч Б?

• А има побједничку стратегију за све непарне n.
У првом потезу он одабира централно поље, а у сваком сљедећем потезу ће уписати X на поље које је централно симетрично (у односу на централни □) пољу које је ВБ претходно одиграо (у претходном потезу). Па тако, ако Б може да одигра потез, може и А сигурно, па ће Б у коначно много корака изгубити.

• Б има побједничку стратегију за све парне n.
На сваки потез играча А, сада играч Б одговара одабиром поља централносиметричног пољу које је играч А управо одабрао (централна сим. у односу на средину табле)

3. На столу се налази гомила са $2n, n \geq 1$ жетона. Два играча А и Б наизмјенично играју, при чему играч А игра први. У сваком потезу играч или узима 1 жетон са неке од гомила или дијели неку од гомила на неколико гомила (бар двије) са међусобно једнаким бројем жетона (ако играч узме посљедњи жетон са гомиле она престаје да постоји). Побједник је играч који узме посљедњи жетон са стола. Доказати да се игра завршава у коначно много корака и да А има побједничку стратегију.

Игра се завршава у коначно много корака зато што је сваки корак такав да се број жетона смањује за 1 или се број гомила повећава бар за 1. Али приметимо да је највећи број гомила $2n$ (свака би имала по 1 новчић).

Покажимо сада да А има чак 2 побједничке стратегије.

- Тривијална стратегија:

А у првом потезу подијели гомилу од $2n$ жетона на $2n$ гомила од по 1 жетон. Тада у сваком сљедећем потезу играчи наизмјенично узимају по 1 жетон, почевши од играча Б. А ће узети посљедњи жетон и побиједити.

- Нетривијална стратегија:

А у првом потезу подијели на 2 дијела, а на даље игра симетрично у односу на Б. Шта год Б уради са 1 гомилом, А ће урадити са другом. Овако ће А сигурно побиједити, јер послије сваког потеза играча Б, он може одиграти потез, а игра ће се у једном тренутку завршити и А ће одиграти посљедњи потез

4. Два играча А и Б играју следећу игру: На столу се налази гомила од n новчића, играчи наизмјенично узимају са гомиле 1, 2, 3 или 4 новчића, а побјеђује онај који узме посљедњи новчић са стола. Ако А игра први, за које n побјеђује Б?

Тврдимо да ће Б побиједити када год је $n \equiv 0 \pmod 5$.

Ако је $n=5$, онда колико год новчића А да узме, Б ће узети преостале и побиједити. Ако је $n=10$, тј. да играч А узима $i \in \{1,2,3,4\}$ новчића са гомиле. Тада ће Б узети $5-i$ новчића и остаће опет 5, а у том случају знамо да Б побјеђује...

Стога доказ можемо дати индукцијом, гдје смо базу за $n=5$ доказали. Зато претпоставимо да Б побјеђује за $\forall n' < n$ и $n' \equiv 0 \pmod 5$. Докажимо за n, гдје $n \equiv 0 \pmod 5$.

Нека А у првом потезу узме $i \in \{1,2,3,4\}$ новчића. Б ће у наредном потезу узети $5-i$ новчића, што нас оставља са $n-5$ новчића. Како је $n-5<n$ и $n-5 \equiv 0 \pmod 5$, важи индукцијска хипотеза па Б побјеђује.

5. Перо и Мика играју сљедећу игру: Наизмјенично уписују реалне бројеве на мјесто неког од до тада неуписаних коефицијената a, b, c једначине $ax^2+bx+c=0$.
Перо игра први и добија ако једначина има једно позитивно и једно негативно рјешење, а у супротном Мика добија. Ко има побједничку стратегију?

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Перо има побједничку стратегију. У првом потезу уписује $b=0$.
$\hookrightarrow ax^2=-c$
Мика тада има 2 могућности:

1° уписује $a=0$ v $c=0$:
б.у.о. уписује $a=0$
Тада и Перо уписује $c=0$, па једначина сада изгледа овако:
$0=0$, скуп рјешења је $\forall x\in\mathbb{R}$.

2° уписује $a\neq0$ $\wedge$ ~~b~~ $c\neq0$:
б.у.о. $a=m$
Тада је $mx^2=-c \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{m}$
Тада Перо уписује $c=-m$, па добија $x^2=1$
$\Rightarrow x_1=1,\ x_2=-1$
и Перо побјеђује

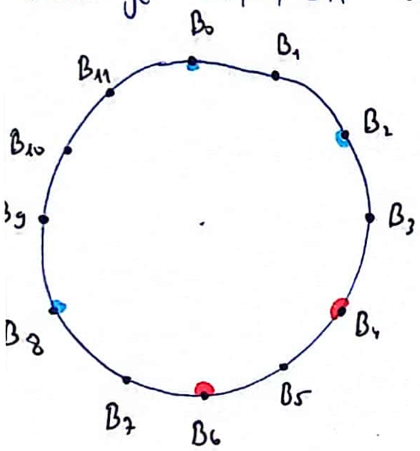
2 децембар

* Теорија игара - наставак *

1. На папиру је нацртана кружница. Аца и Воја наизмјенично бирају по једну тачку са кружнице, при чему Аца тачку увијек боји плавом, а Воја увијек црвеном бојом (свака тачка може бити одабрана највише једном). Аца игра први. У игри побјеђује играч који први оствари да неку тачака које је до тада обојио постоје 3 које чине тјемена једнакостраничног или тјемена једнакокрако правоуглог троугла. Да ли неки од играча има побједничку стратегију?

Идеја: Уписати правилан дванаестоугао у кружницу.

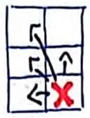
Нека је $B_0, \dots, B_{11}$ правилан дванаестоугао уписан у кружницу.



Доказаћемо да Аца има побједничку стратегију. Нека Аца прво одабере B_0. Тада Воја мора одабрати B_3, B_6 или B_9, јер би у супротном Аца одабрао B_6 у наредном потезу након чега би му остали B_3 или B_9, па би завршио игру. Нпр. да је Воја изабрао B_6. Онда у другом потезу Аца бира B_8. Тада Воја мора изабрати B_4. Затим Аца бира B_2. Шта год да Воја изабере, Аци на располагању остаје тачка B_{11} или B_5 и тиме Аца добија игру.

* Ако је Воја у првом потезу одабрао B_3 (аналогно за B_9), Аца у другом потезу бира B_4, а онда је Воја принуђен да бира B_8. Сада Аца бира тачку B_{10} и у наредном потезу добија формирајући једнакокрако правоугли Δ $B_4B_{10}B_1$ или $B_4B_{10}B_2$.

2. Шаховска фигура, коју зовемо слон, у једном потезу помјера се за једно поље лево, или за једно поље горе, или за једно или два поља укосо горе лево (под углом од 135°). Слон се налази на доњем десном пољу шаховске табле димензије 8×7. Два играча наизмјенично помјерају слона, а губи онај играч који први не може да одигра потез. Који играч има побједничку стратегију?

Слон се креће овако: 

Ако је слон на (1,1), очигледно побјеђује играч који није на потезу, па означимо то поље са 2.

За свако поље (i,j) урадимо следеће:

- Ако је бар 1 поље на које слон може да дође са поља (i,j) у једном потезу обиљежено са 2, обиљежимо (i,j) са 1;
- Ако су сва поља на која слон може доћи са поља (i,j) у једном потезу обиљежена са 1, обиљежимо поље са 2.

На овај начин добијамо да у сваком тренутку важи:

Ако се слон налази на пољу обиљеженом са 1 побјеђује играч који ~~може~~ је на потезу, а у супротном губи.

Добијамо да су поља означена овако:

8	2	1	2	1	2	1	2
7	1	1	1	1	1	1	1
6	2	1	2	1	2	1	2
5	1	1	1	1	1	1	1
4	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	1	2	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1
	A	B	C	D	E	F	G

→ 1. играч је побједник

3. На столу се налази 2014 картица на којима редом пишу бројеви:

$$2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2013}.$$

Аца и Бранко наизмјенично узимају по једну картицу са стола, а прву картицу узима Аца. Након што је узета и посљедња картица, Аца израчуна збир бројева који се налазе на картицама које је он изабрао, а Бранко уради исто са својим картицама. Обиљежимо са A и B збирове који су добили Аца и Бранко, редом. Уколико је $НЗД(A, B) > 1$ побиједио је Аца, а у супротном Бранко.

Ко има побједничку стратегију?

Доказаћемо да Аца има побједничку стратегију.

Аца је „у глави" подијелио картице на парове $(2^0, 2^{1007}), (2^1, 2^{1008}), \dots, (2^{1006}, 2^{2013})$ и његова стратегија је да из сваког пара изабере тачно 1 картицу (што он очигледно може учинити).

Сви парови у облику $(2^i, 2^{1007+i})$ за $i \in \{0, \dots, 1006\} = I$. Примијетимо да је

$$2^{1007+i} - 2^i = 2^i(2^{1007} - 1) \Rightarrow 2^{1007+i} \equiv 2^i \pmod{2^{1007}-1}, \text{ за } \forall i \in I.$$

Како Аца из сваког пара бира по једну картицу, имамо да је:

$$A \equiv 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{1006} \equiv 2^{1007} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{1007}-1}$$

(јер је $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$)

Како је $A \equiv B \pmod{2^{1007}-1}$

$$\Rightarrow НЗД(A, B) \geq 2^{1007} - 1.$$

4. Трговац преко реке мора да превезе: сир, миша, пауна, мачку, пса, вука и медведа. У чамцу има места за k од 7 објеката. Ако остави миша са сиром, миш ће га појести. Ако остави пауна са мишем и сиром, паун ће их појести. Ако остави мачку са мишем или пауном она ће их појести. Ако остави вука са псом или мачком, он ће их убити. Ако остави пса са пауном или мачком он ће их убити. Ако остави медведа са псом или вуком, он ће их убити. Трговац све ове догађаје спречава ако је присутан. Које је минимално k које гарантује да он може све артикле безбедно пребацити на другу страну реке?

Означимо овако: сир -1 | i једе $i-1$ и $i-2$ за $2 \leq i \leq 7$

миш -2 | (ако су $i-1, i-2 > 0$)

паун -3

мачка -4

пас -5

вук -6

медвед -7

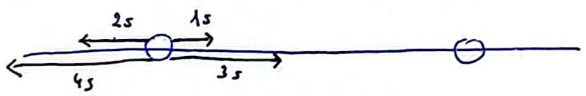
Лако уочавамо да $k \leq 3$ није довољно.
Приметимо да из сваког од скупова $\{1,2,3\}$ и $\{5,6,7\}$ морамо да узмемо бар по 2 елемента. Докажимо да је тражено k баш 4.

A		Б
миш, паун, пас, вук	$\longrightarrow$	миш, пас
паун, вук, мачка, сир	$\longrightarrow$	сир, мачка
		паун, вук, миш, пас
		миш и пас
миш, пас / паун, вук, медвед	$\longrightarrow$	медвед
паун, вук, миш, пас	$\longrightarrow$	све их истовари.

Стога је $k=4$ минимално које задовољава услове задатка.

5. Посејдон, грчки водени бог, окупио је 2016 чамџија и предложио им следећу игру. На почетку игре Посејдон ће изабрати двојицу и поставити их на 2 локације на бесконачно дугој реци. Чамџије потом треба да пронађу један другог (тј. да се сусретну на реци). Максимална брзина њихових чамаца је 1 m/s, и могу се кретати било узводно, било низводно. Сваки чамџија у сваком тренутку зна тачан положај свог чамца на реци у односу на своју почетну позицију, као и време протекло од почетка игре. Међутим, ниједан од изабраних чамџија не зна идентитет другог изабраног чамџије. Чамџије (свих 2016) имају могућност да заједнички осмисле стратегију пре почетка игре, али кад игра почне, никаква комуникација међу чамџијама није дозвољена. Доказати да чамџије могу осмислити стратегију која ће им гарантовати успех без обзира на то која двојица су изабрана и без обзира на њихове почетне положаје на реци.

Прво ћемо смислити стратегију за 2, па ћемо уопштити на 2016.
Нека се први креће брзином 1 m/s, а други 0.5 m/s. Треба да се крећу по следећем обрасцу: 1 s узводно, 2 s низводно, 3 s узводно, ...

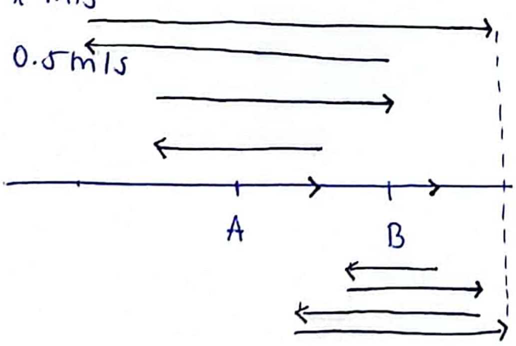


Тако покривају све већу површину, али ако би се кретали истом брзином, растојање би остало константно.

Илустрација за 2:

A : 1 m/s

B : 0.5 m/s



Стога је идеја да сваки чамџија добије своју брзину 1. : 1/2016 m/s, ..., 2016. : 2016/2016 m/s, и крећу се на описан начин. Идеја: поставимо референтни систем везан за једног од два изабрана чамца. У њему изабрани чамџија мирује, а други се креће константном брзином, мењајући смјер на описан начин. На основу овог обрасца, ма којом се брзином кретао други чамџија, он ће стићи до произвољне тачке на ријеци након коначног вре

3. вјежбе

* Теорија игара - наставак *

1. Стражар је окупио 3 затвореника и свакоме ставио на главу шешир бијеле или црне боје. На стражарев знак сваки затвореник мора да каже „бијели", „црни" или „даље" (сви говоре истовремено и сви виде све шешире сем свог). Затвореници побјеђују (као тим) ако је бар неко погодио боју свог шешира, а нико није промашио. Циљ им је да осмисле стратегију у којој ће побиједити у што већем броју случајева (тј. за што већи број комбинација шешира на њиховим главама).

Стратегија: Погледају другу двојицу и ако виђу исти шешир каже супротно, иначе даље.

Све могуће комбинације:

B B B → C C C ✗
B B C → D D C ✓
B C B → D C D ✓
C B B → C D D ✓
C C B → D D B ✓
C B C → D B D ✓
B C C → B D D ✓
C C C → B B B ✗

6 од 8 побједа

Домаћи: Доказати да је ово најбоља могућа стратегија.

$\boxed{2.}$ У чудој шуми живјело је 17 једнорога, 6 вукодлака и 55 паукова. Вукодлак може да поједе једнорога и паука, али не и другог вукодлака, паук може да поједе једнорога, али не и вукодлака и другог паука, а једнорог не може да поједе ни паука, ни вукодлака ни другог једнорога. Када год вукодлак поједе паука, претвара се у једнорога, а када год поједе једнорога, претвара се у паука. Такође, када паук поједе једнорога, постаје вукодлак. Колико највише створења може остати у шуми када више нико никог не буде могао да поједе?

Имамо: $\overset{6}{V}$ $\overset{17}{j}$ $\overset{55}{p}$

Шта раде:

V jede j $\longrightarrow$ p

V jede p $\longrightarrow$ j

p jede j $\longrightarrow$ V

Када:

V jede j	$V-1,\ j-1,\ p+1$
V jede p	$V-1,\ j+1,\ p-1$
p jede j	$V+1,\ j-1,\ p-1$

Дакле, при сваком једењу се једна врста повећа, а 2 се смање.

Из услова задатка видимо да на крају може остати само једна врста, јер се у једној врсти не једу међусобно.

После сваког корака „међусобне" парности се неће промијенити.

- Да ли на крају могу остати неки пауци?

Не, управо због посматраних парности.

Птс. Нико никог не може да једе, а имамо позитиван број паукова.

- Ако је број паукова паран, онда је број вукодлака непаран тј. >0, али онда вукодлак једе паука. ↯
- Ако је број паукова непаран, онда је и број једнорога непаран тј. >0, па паук једе једнорога. ↯

Дакле, број паукова је 0. За то је потребно бар 55 једења.

Дакле, могу остати највише 23 створења. Покажимо да ће остати баш 23 животиње.

Циљ: хоћемо да остане 23 вукодлака

17 p поједе све једнороге

v	j	p
23	0	38

19 v поједе 19p

v	j	p
4	19	19

19 p поједе 19j

v	j	p
23	0	0

Овим је доказ завршен.

(доказали смо да је бр. паукова 0, па и број једнорога мора бити паран, а број вукодлака непаран тј. ≥ 1, а горе смо описали како се долази до ове ситуације где остане 23 вукодлака)

3. Група разбојника скрива благо у 2011 пећина које су нумерисане бројевима 1, 2, ..., 2011. Преко дана они држе благо у једној од њих пећина, а ноћу га премјештају у једну од суседних пећина. Алибаба је сазнао ове информације и сваког дана у подне улази у једну од пећина. Да ли Алибаба има стратегију којом са сигурношћу може да пронађе благо у коначно много покушаја?

Претпоставимо да је првог дана благо у пећини са парним бројем. Алибаба прво провјерава 2010 пећину. Ако не нађе благо, онда је оно у парној пећини са бројем не већим од 2008, а наредног дана је у непарној пећини са бројем не већим од 2009. Зато Алибаба сутрадан улази у пећину 2009, ако опет не нађе благо, наредног дана ће ући у пећину 2008, ... док 2009-ог дана не провјери пећину 2. Ако још није нашао благо, то ће значити да је почетна претпоставка била погрешна и да је благо у почетку било у непарној пећини. Дакле, 2010.-ог дана благо јесте у парној пећини, па Алибаба може да понови своју стратегију и тако сигурно пронађе благо.

4. У болницу је доведено 10 оболелих особа. Међу 1000 флашица у магацину, само у једној се налази мијек. Уколико неко од тих особа попије макар и једну кап из флаше у којој се налази мијек, након 24h лекар ће примијетити симптоме оздрављења. Лекар има задатак да у року од 24h пронађе флашицу са мијеком, да би се приступило за предстојећу епидемију. Доказати да лекар може да обави свој задатак.

Нумерисаћемо људе бројевима 1,..,10, а флашице бројевима 0,..,999 бинарно.

Описаћемо стратегију на мањем примјеру. Рецимо да имамо 3 човјека и 8 флашица. Означимо људе бројевима 1,2,3, а флашице 0,..,7 бинарно:

0 - 000
1 - 001
2 - 010
3 - 011
4 - 100
5 - 101
6 - 110
7 - 111

за 1. човјека (ако из 1,3,5,7)
за другог човјека (ако из 2,3,6,7)
за 3. човјека (ако из 4,5,6,7)

Сада свака флашица има „код", гдје 1 стоји на ако је човјек пио из те флашице.

Након 24h декодирамо: нпр.
1 жив - 1
2 жив - 1
3 мртав - 0

→ 011 → у флашици 3 је мијек

Иста идеја само компликованији запис за 10 оболелих и 1000 флашица.

5. Бројеви од 1 до 100 су записани неким редом. У једном питању можемо да сазнамо међусобни редослијед произвољних 50 бројева. Доказати да помоћу 5 питања можемо да откријемо редослијед свих 100 бројева?

Подијелимо бројеве у групе A и B од по 50 бројева.
Прво питамо за редослијед бројева групе A, а затим за редослијед групе B. У ~~чет~~ 3. питању питамо за редослијед првих 25 бројева из групе A и првих 25 из групе B. У 4. питамо за редослијед посљедњих 25 из A и посљедњих 25 из B.
Тако сада знамо првих и посљедњих 25 бројева траженог редослиједа. У петом питању распоредимо преосталих 50 бројева.

6. Нека је $x>0$, реалан број. Одредити поредак бројева
$x, x^x, x^{x^x}, x^{x^{x^x}}, x^{x^{x^{x^x}}}$.

1° $x>1$, како је и написано

2° $0<x<1$

$x^0 > x^x > x^1$

$1 > x^x > x > 0$ (између 0 и 1 се мијења знак)

$x^1 < x^{x^x} < x^x < x^0$

$x^x > x^{x^{x^x}} > x^{x^x} > x$

$x^{x^x} < x^{x^{x^{x^x}}} < x^{x^{x^x}} < x^x$

Коначно: $\boxed{x < x^{x^x} < x^{x^{x^{x^x}}} < x^{x^{x^x}} < x^x}$

4. вјежбе

Функционалне једначине

$\boxed{1.}$ Нађи све ф-је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такве да за произвољне $x, y \in \mathbb{R}$ важи:

$$f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy.$$

Увијек прво пробамо наћи бар 1 рјешење. На примјер: $f(x) = x^2$

$(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$ ✓ то јесте рјешење.

Мора: $(\forall x, y)$ $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy.$

Идеја: Убацимо неке конкретне вриједности за x и y.

- $y=0$ $\quad f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$
- $x=y$ $\quad f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$

$$0 = 2f(x) - 2x^2 \Rightarrow f(x) = x^2$$

Дакле, ако рјешење постоји мора да испуњава ова 2 услова, а како смо на почетку провјерили $f(x) = x^2$ заиста јесте рјешење.

2. Нађи све сурјективне ф-је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ за које важи:

$$f(f(x-y)) = f(x) - f(y)$$

Једно очигледно рјешење је $f = id$.

Тражимо да f буде „на" $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R} \ \exists a \in \mathbb{R} \ f(a) = x$

Сада: $f(x) = f(f(a)) = f(f(a-0)) = f(a) - f(0) = x - f(0)$

$\Rightarrow$ $f(x) = x - f(0)$ $\rightarrow$ линеарно ф-ја

Како наћи $f(0)$?

· $x = 0$ $\qquad f(0) = 0 - f(0)$

$\qquad 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

$\Rightarrow$ $f(x) = x$ је наша тражена ф-ја

3. Да ли постоји бијекција $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да важи:

$$f(f(x)) - f(x) = 56x + 2008 \,?$$

$f \neq const$ јер тражимо бијекцију

Испробавамо линеарне ф-је:

$f(x) = ax + b$ и $a \neq 0$

$$f(f(x)) = f(ax+b) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b$$

$$f(f(x)) - f(x) = a^2x + ab \cancel{+b} - ax \cancel{-b} = a^2x - ax + ab$$

$$(a^2 - a)x + ab = 56x + 2008$$

$\Rightarrow \quad a^2 - a = 56 \qquad a(a-1) = 56 \quad \Rightarrow \boxed{a = 8}$

$b = \dfrac{2008}{8} = 251 \qquad \boxed{b = 251}$

$\Rightarrow \quad f(x) = 8x + 251$

Постоји јер смо нашли једну такву ф-ју!

4. Нека је $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ бијекција таква да за све $m, n \in \mathbb{N}$ из

$$m < n \Rightarrow m + f(m) < n + f(n).$$

Доказати да за важи $f(n) = n$ (тј. $f = id$).

Идеја: Када $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ можемо користити индукцију!

Б.И.: $n = 1$ т.ј. $f(1) = 1$.

Пп. $f(1) \neq 1 \Rightarrow f(1) > 1$ (јер $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$)

Како је f „на" $\exists m > 1$ тако је $f(m) = 1$.

$$\underbrace{m-1}_{\in \mathbb{N}} > 0 \qquad m-1 < m$$

$$m-1 < m \Rightarrow m-1 + f(m-1) < m + f(m) = m+1$$

- $f(m-1) \geq 2$ јер је $f(m) = 1$ и f „1-1"!

$\Rightarrow$ $m+1 \leq m-1 + f(m-1) < m+1$ ↯ Тиме је база доказана.

И.Х. Пп. да за све $n < k$ $f(n) = n$. (потпуно инд.)

И.К. Докажимо за k $f(k) = k$.

Пп. $f(k) \neq k$ $\Rightarrow$! $\boxed{f(k) > k}$ јер ако је $f(k) = l < k$
$f(k) = f(l) = l$ ↯ са „1-1"

$\Rightarrow \exists\, s > k$ т.д. $f(s) = k$
(из „на")

$$s + k = s - 1 + k + 1 \leq s - 1 + f(s-1) < s + f(s) = s + k \quad ↯$$

(f је „1-1" $\Rightarrow f(s-1) \geq k+1$)

$f(s-1) \neq k$ јер $f(s) = k$

Али $f(s-1) \neq k-1$, ни ништа мање, јер $f(k-1) = k-1, \ldots$

5\. Дата је ф-ја $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ т.д. за свако x и y важи:

$f(x f(y)) = y f(x)$. Доказати да је $f(xy) = f(x) f(y)$

- $f \equiv 0$ ✓
- $f \not\equiv 0 \Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}$ т.д. $f(a) \neq 0$.

Показаћемо да је f „1-1".

Пп. $f(x_1) = f(x_2)$

$$a f(x_1) = a f(x_2) \quad / f$$

$$f(a f(x_1)) = f(a f(x_2))$$

$$x_1 \cdot \cancel{f(a)} = x_2 \cancel{f(a)} \quad \text{(може јер } f(a) \neq 0)$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad f \text{ је „1-1"}$$

- $x = 1$ добијемо: $f(1) = f(f(1)) \Rightarrow \boxed{f(1) = 1}$

Посматрајмо:

$$f(f(x)) = f(1 \cdot f(x)) \overset{\text{услов задатка}}{=} x \cdot f(1) = x \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(f(x)) = x}$$

Сада из

$$f(xy) = f(x \underbrace{f(f(y))}_{y}) \overset{\text{услов задатка}}{=} f(y) \cdot f(x)$$

Што је и требало доказати!

$\boxed{6.}$ Одредити све ф-је $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ такве да је

$$f(f(x)+y+1) = x + f(y) + 1$$

за $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

- $x = 0$

$$f(f(0)+y+1) = f(y)+1$$

Сада имамо:

$$\cancel{x} + f(y) + \cancel{1} = f(f(x)+y+1) = f[(f(x)+1)+y] = f[f(f(0)+x+1)+(y-1)+1]$$

$$= f(0) + \cancel{x} + \cancel{1} + f(y-1) + 1 \quad \Rightarrow \quad f(y) = f(0) + f(y-1) + 1$$

- Индукцијом се добија да је $f(n) = f(0) + n(f(0)+1)$ 1) за $\forall n \in \mathbb{Z}$.

- $y = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(-1) = -1}$

Ставимо сада $y=-1$ у полазну ј-ну: $\boxed{f(f(x)) = x}$

$$f(n) = f(0) + n(f(0)+1) \quad / f$$

$$n = \underbrace{f(0) + [f(0) + n(f(0)+1)](f(0)+1)}_{= f(f(0)+n(f(0)+1)) \text{ из деф } 1)}$$

$$n = f(0) + f^2(0) + f(0) + n f(0)(f(0)+1) + n(f(0)+1)$$

$$n = f(0)(f(0)+2) + n(f^2(0) + 2f(0) + 1)$$

$$n = f(0)(f(0)+2) + n(f(0)+1)^2$$

Важи ако:

1) $f(0) = 0$ $\Rightarrow f(n) = n$

2) $f(0) = -2$ $\Rightarrow f(n) = -n-2$

Да ли за довољавају услов задатка?

1) $f(f(x)+y+1) = f(x)+y+1 = x+y+1 = x+f(y)+1$ ✓

2) $f(f(x)+y+1) = -f(x)-y-1-2 = -(-x-2)-y-3 = x-y-1$

$= x-y-2+1 = x+f(y)+1$

8. 2004. (стр. 51 ч.)

7. Наћи све „1-1" ф-је $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које задовољавају услове:

1° $f(f(m)+f(n)) = f(f(m))+f(n)$,

2° $f(1)=2$,

3° $f(2)=4$.

Ако замијенимо m и n добијемо:

$f(f(n)+f(m)) = f(f(n))+f(m) = f(f(m))+f(n)$

$\Rightarrow f(f(m))-f(f(n)) = f(m)-f(n)$

Даље, ако са S означимо скуп слика $f(s_1)-f(s_2) = s_1-s_2$, односно

$f(s) = s+c$. (1)

Како $2 \in S$ и $f(2)=2+2=4 \Rightarrow \boxed{c=2}$

Одатле добијамо да је $f(2n)=2n+2$ (индукцијом).

Како је f 1-1, слике непарних бројева морају бити непарни бројеви.

Нека је $2p+1$ најмањи непаран у S.

За $2s+1 \geq 2p+1$ је из (1) $f(2s+1)=2s+3$, па је

$2p+1$ слика неког мањег непарног броја.

Доказаћемо да је $2p+1=5$.

Како је $2p+1$ најмањи непаран број у S, а f 1-1, онда $p-1$ бројева $3, 5, \ldots, 2p-1$ морају да се сликају у неке од $p+1$ бројева $1, 3, \ldots, 2p+1$. Одатле слиједи да је

$$2p+1=5 \quad \text{и} \quad f(3)=5$$

($f(3)=1$ је контрадикција са $1 \in S$ и (1)).

Једини кандидат који испуњава услове је:

$f(1)=2, \quad f(n)=n+2, \quad n>1$ и лако се провјерава да он испуњава услове.

6.

$\boxed{8.}$ Ф-ја $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је таква да је $x+f(x)=f(f(x))$ за $\forall x \in \mathbb{R}$.

Наћи сва рјешења ј-не $f(f(x))=0$.

$$x+f(x)=f(f(x)) \Rightarrow f(f(x))-f(x)=x$$

Пт. $\quad f(x_1)=f(x_2) \quad /f$

$$f(f(x_1))=f(f(x_2))$$

$$f(f(x_1))-f(x_1)=f(f(x_2))-f(x_2)$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ је } „1-1"$$

- $x=0 \quad 0+f(0)=f(f(0)) \Rightarrow f(f(0))=f(0) \Rightarrow f(0)=0$ и $f(f(0))=0$

Дакле, једно рјешење је $x=0$.

Ако је $x \neq 0$ и $f(f(x))=0=f(f(0)) \overset{1-1}{\Rightarrow} f(x)=f(0) \overset{1-1}{\Rightarrow} x=0$ $\not\downarrow$.

Дакле, $x=0$ је једино рјешење

9. Да ли постоји фја $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ тку је $f(f(x)) = x^2 - 2$ за $\forall x \in \mathbb{R}$?

Означимо $g(x) = x^2 - 2$. Ова фја има 2 фиксне тачке, а $g \circ g$ чак 4.

Докажимо да не постоји фја f тку је $f \circ f = g$. Пп с.

Нека су a, b ф.т. од g, а a, b, c, d ф.т. од $g \circ g$.

Нека је $g(c) = y$, $y \neq c$ $\Rightarrow$ $c = g(g(c)) = g(y)$. Тада је $g(g(y)) = g(c) = c$.

$\Rightarrow$ y је једна од ф.т. $g \circ g$.

• Пп. $y = a$ $\Rightarrow$ $a = g(a) = g(y) = c$ ↯ $\quad y \neq a$

слично $y \neq b$

$\Rightarrow y = d \Rightarrow g(c) = d$ и $g(d) = c$.

Даље је $g(f(x)) = f \circ f\,(f(x)) = f(f(f(x))) = f(g(x))$.

Нека $x_0 \in \{a, b\}$ $\Rightarrow$ $f(x_0) = f(g(x_0)) = g(f(x_0))$ $\Rightarrow$ $f(x_0) \in \{a, b\}$. (2)

Слично, ако $x_1 \in \{a, b, c, d\}$ $\Rightarrow$ $f(x_1) \in \{a, b, c, d\}$.

Докажимо да ово није могуће.

Пп. $f(c) = a$. Тада $f(a) = f(f(c)) = g(c) = d$ ↯ са (2)

$\Rightarrow$ ~~$f(f(a) = f(d)$~~

Слично $f(c) \neq b$ и $f(c) \neq c$ (јер је тада $g(c) = c$) $\Rightarrow$ $f(c) = d$.

Међутим тада је: $f(d) = f(f(c)) = g(c) = d$ ↯ (јер је тада $g(d) = d$)

Овим је доказано да тражено фја не постоји.

Вјежбе 5

1. Нека је задата операција $*$ на скупу $G=\{1,2,\dots,2016\}$, таблицом доле. Испитати њену асоцијативност.

$*$	1	2	3	4	…	2016
1	5	5	5	5	…	5
2	1	2	5	5	…	5
3	4	3	5	5	…	5
4	5	5	5	5	…	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
2016	5	5	5	5	…	5

$\forall x,y,z \in G \quad x*(y*z)=(x*y)*z$

- $\forall x,y,z \geq 4$ ✓ добијемо $5=5$
- $x=1$ ✓

  $x*(y*z) \stackrel{?}{=} (x*y)*z$

  $5 = 5$ ✓
- $z=3$ ✓

  $x*(y*z) \stackrel{?}{=} (x*y)*z$

  $5 = 5$ ✓

Остаје ручно испитати случајеве:

$x=2,3 \qquad y=1,2,3 \qquad z=1,2$ \qquad укупно: $2\cdot 3\cdot 2 = 12$ случајева!

(домаћи)

* Примјена анализе у „класичним" алгебарским проблемима *

2. Наћи скуп вриједности израза $\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}$ уз ограничење $x,y,z>0$ и $x\cdot y\cdot z=1$.

Скуп вриједности ф-је је скуп на који је ф-ја „на".

$$\frac{\overset{>0}{xy}+\overset{>0}{xz}+\overset{>0}{yz}}{x+y+z}>0 \qquad \text{јер } x,y,z>0.$$

$$f(x,y,z)=\frac{xy+xz+yz}{x+y+z}$$

Ставимо $x=y=t>0$

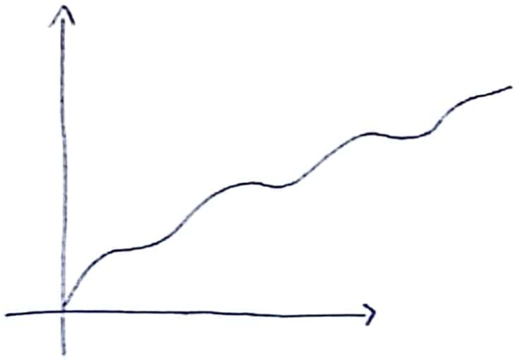
$x\cdot y\cdot z=t\cdot t\cdot z=1 \Rightarrow z=\frac{1}{t^2}$

Сада је $f\left(t,t,\frac{1}{t^2}\right)=\dfrac{t^2+\frac{1}{t}+\frac{1}{t}}{t+t+\frac{1}{t^2}}=\dfrac{\frac{t^4+2t}{t^2}}{\frac{2t^3+1}{t^2}}=\dfrac{t^4+2t}{2t^3+1}=F(t)$

Сада имамо $F(t)=\dfrac{t^4+2t}{2t^3+1}$ – која је непрекидна

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^4+2t}{2t^3+1}=0$$

$$\lim_{t\to +\infty}F(t)=\lim_{t\to +\infty}\frac{t^4+2t}{2t^3+1}=+\infty$$



Коначно, скуп вриједности $F(t)$ је $\mathbb{R}^+$.

Скуп вриједности ф-је f је подскуп од $\mathbb{R}^+$, а надскуп од скупа вриједности ф-је F.

$$\left.\begin{array}{l}\text{range}(F(t))=\mathbb{R}^+\\ \text{range}(f)\subseteq\mathbb{R}^+\\ \text{range}(F(t))\subseteq\text{range}(f)\end{array}\right\}\Rightarrow \text{range}(f)=\mathbb{R}^+.$$

$\boxed{3.}$ Наћи све тројке позитивних реалних бројева (a,b,c) таквих да ј-на $a^x+b^x+c^x=3$ има бар 3 различита рјешења у скупу $\mathbb{R}$.

$a^x+b^x+c^x=3$, $a,b,c>0$

1° $(a,b,c)=(1,1,1)$

$1^x+b^x+c^x=3$

$3=3$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$, па има и бар 3 различита рјешења...

2° Нпр. $(a,b,c)\neq(1,1,1)$

$a^x+b^x+c^x=3 \iff a^x+b^x+c^x-3=0$

$f(x)=a^x+b^x+c^x-3$

Питамо се за које a,b,c ова фја има бар 3 нуле?

$f'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln b$

$f''(x)=a^x\ln^2 a+b^x\ln^2 b+c^x\ln^2 b>0 \Rightarrow f$ је конвексна $\cup$

Конвексна фја има највише 2 нуле ↯

Не постоје $(a,b,c)\neq(1,1,1)$ који задовољавају услов.

* Доказ да конвексна фја има највише 2 нуле.

$f''(x)>0 \Rightarrow f'$ је растућа $\Rightarrow f'$ има највише 1 нулу

1° f' нема нула $\Rightarrow f$ је монотона $\Rightarrow f$ има највише 1 нулу

2° f' има 1 нулу $\Rightarrow f$ има 1 минимум $\Rightarrow f$ има највише 2 нуле.

4. Колико нула има фја $f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-a_i}$, гдје су $a_1<a_2<\ldots<a_n$ произвољни реални бројеви?

$$f(x)=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n}$$

$D: \mathbb{R}\setminus\{a_1,\ldots,a_n\}$

В.А.: $\lim\limits_{x\to a_i^{\pm}} f(x)=\pm\infty$ $\forall i \Rightarrow f$ има В.А. у свакој тачки a_i $1\le i\le n$.
$x=a_i$

Х.А: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$ $\Rightarrow f$ има хоризонталну асимптоту $y=0$.

Монотоност: $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}-\frac{1}{(x-a_i)^2}$ $\Rightarrow f$ је опадајућа на сваком од

интервала (a_i,a_{i+1}), $1\le i\le n-1$

Према Болцано-Кошијевој Т. има тачно 1 нулу на сваком

од ових интервала.

$\Rightarrow f$ има тачно $n-1$ нулу.

$\boxed{5}$ Нека је $f(x)=x^2+(a+1)x+1$. Одредити све вриједности реалног параметра a, тако да за све x важи $\left|\frac{f(x)}{x^2+x+1}\right|<3$.

Како је $x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x^2+x+1}\right|<3 \Leftrightarrow -3x^2-3x-3 < f(x) < 3x^2+3x+3$$

1° $-3x^2-3x-3 < x^2+(a+1)x+1$

$\Leftrightarrow 4x^2+(a+4)x+4>0$

$D = b^2-4ac = (a+4)^2-4\cdot4\cdot4 = (a+4)^2-64<0$

$\Rightarrow -8<a+4<8$

$\Rightarrow \boxed{-12<a<4}$

2° $x^2+(a+1)x+1 < 3x^2+3x+3$

$\Leftrightarrow 2x^2+(2-a)x+2>0$

$D_2 = (2-a)^2-16<0$

$-4<2-a<4$

$-6<-a<2$

$\boxed{-2<a<6}$

Рјешење је интервал $(-2,4)$.

6. Ријешити ј-ну $x + \sqrt{3+\sqrt{x}} = 3.$

- $x = 1$ $\quad 1 + \sqrt{3+1} = 1+2 = 3$ ✓
- $x > 1$ $\quad x + \sqrt{3+\sqrt{x}} > 1 + \sqrt{4} = 1+2=3$ $\Downarrow$ нема рј.
- $x < 1$ $\quad x + \sqrt{3+\sqrt{x}} < 1 + \sqrt{4} = 3$ $\Downarrow$ нема рј.

7. Одредити све комплексне бројеве z који задовољавају сљедеће 2 једнакости:

$$z^{2015} + z^{2014} + |z| = 3$$

$$3z^{2015} - |z|^{2014} - z = 1.$$

$z = a + bi$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Једнакост важи акко $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ и $z_1, z_2 > 0$.

1° $|z| < 1$

$$3 = |z^{2015} + z^{2014} + |z|| \leq |z^{2015}| + |z^{2014}| + ||z|| = |z|^{2015} + |z|^{2014} + ||z||$$

$$< 1 + 1 + 1 < 3 \quad \Downarrow$$

2° $|z| > 1$

$|z|^{2015} > 1$

$|z|^{2015} > |z|^{2014}$

$3z^{2015} = 1 + |z|^{2014} + z \quad / | \, |$

$$3|z|^{2015} = |1 + |z|^{2014} + z| \leq 1 + |z|^{2014} + |z| < 1 + |z|^{2014} + |z|^{2015}$$

$$3|z|^{2015} = |z|^{2015} + |z|^{2015} + |z|^{2015} > 1 + |z|^{2014} + |z|^{2015}$$

$\Bigg\} \Downarrow$

Једина опција $\Rightarrow$ $|z| = 1$.

Онда је:

$$3 = |z^{2015} + z^{2014} + |z|| \leq |z|^{2015} + |z|^{2014} + ||z|| = 3$$

$$\Rightarrow |z^{2015} + z^{2014} + |z|| = |z^{2015}| + |z^{2014}| + |z|$$

$$\Rightarrow z^{2015}, z^{2014} \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow z = \frac{z^{2015}}{z^{2014}} \in \mathbb{R}^+$$

Сада $z \in \mathbb{R}^+$ и $|z| = 1$

$\hookrightarrow z = a > 0$

$|z| = a = 1$

$\Rightarrow$ $z = 1$ је коначно рјешење.

Вјежбе 6

Задаци са полинома

1 Наћи све природне бројеве n за које је полином $(x+1)^n - x^n - 1$ дјељив полиномом x^2+x+1.

Тражимо све $n \in \mathbb{N}$ за које $x^2+x+1 \mid (x+1)^n - x^n + 1$.

Пп. да је ε нула полинома x^2+x+1. Онда то мора бити нула и полинома $(x+1)^n - x^n + 1$.

Даље, $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon + 1 = -\varepsilon^2$

и $(\varepsilon+1)^n - \varepsilon^n - 1 = 0$ (1)

Даље, како је $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$ имамо да је:

$$\varepsilon^3 - 1 = (\varepsilon-1)(\varepsilon^2+\varepsilon+1) = (\varepsilon-1)\cdot 0 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1$$

Дакле, ако $3 \mid n \Rightarrow \varepsilon^n = 1$.

Из (1) $\Rightarrow$

$$(\varepsilon+1)^n - \varepsilon^n - 1 = 0$$
$$(-\varepsilon^2)^n - \varepsilon^n - 1 = 0$$
$$(-1)^n \cdot \varepsilon^{2n} - \varepsilon^n - 1 = 0$$

1° $3 \mid n$

$(-1)^n \cdot (\varepsilon^n)^2 - \varepsilon^n - 1 = 0$ $\quad (-1)^n \cdot 1 - 1 - 1 = (-1)^n - 2 = 0$ ↯ Не постоји такво n.

2° $3 \nmid n$

$$(-1)^n \cdot (\varepsilon^n)^2 - \varepsilon^n - 1 = (-1)^n \varepsilon^{2n} \overset{\pm\varepsilon^{2n}}{+ \varepsilon^{2n} - \varepsilon^{2n}} - \varepsilon^n - 1 =$$
$$= (1 + (-1)^n) \cdot \varepsilon^{2n} - \underbrace{(\varepsilon^{2n} + \varepsilon^n + 1)}_{0 \ \to \text{ доказати}} =$$
$$= (1 + (-1)^n) \cdot \varepsilon^{2n} = 0$$

Ово важи за $\forall$ непарно $n \in \mathbb{N}$. Коначно: $x^2+x+1 \mid (x+1)^n - x^n - 1$ када $3 \nmid n$ и $2 \nmid n$ (за $n \equiv \pm 1 \pmod 6$)

Зашто је $\varepsilon^{2n}+\varepsilon^{n}+1=0$, ако знамо да је $\varepsilon^{2}+\varepsilon+1=0$ и

знамо $\varepsilon^{3}=1$.

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon \\ \varepsilon^{2} \\ \varepsilon^{3}=1 \\ \varepsilon^{4}=\varepsilon \\ \varepsilon^{5}=\varepsilon^{2} \\ \varepsilon^{6}=1 \\ \vdots\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}\varepsilon^{3k}=1 \\ \varepsilon^{3k+1}=\varepsilon \\ \varepsilon^{3k+2}=\varepsilon^{2}\end{array}$$

Сада нека је $n=3k+1$ нпр, онда је:

$$\varepsilon^{2(3k+1)}+\varepsilon^{3k+1}+1=(\varepsilon^{3k+1})^{2}+\varepsilon^{3k+1}+1=\varepsilon^{2}+\varepsilon+1=0.$$

2. Доказати да за непаран q полином $p(x)=x^{3}+3x+q$ нема нула у $\mathbb{Z}$.

Пп. да је q непаран. Онда како $x_0 \mid q \Rightarrow x_0$ је непарно.

Али тада је $x_0^{3}+3x_0+q\equiv 1 \pmod 2$ па никада није једнако 0!

3. Нека су x_1,x_2,x_3 коријени полинома $x^{3}+mx+n$ $(n\in\mathbb{Z})$.

Доказати да је $x_1^{3}+x_2^{3}+x_3^{3}$ цијели број дјељив са 3.

Вијетове формуле: $x_1+x_2+x_3=0$ $\left(-\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$ $a_{n-1}\to 0$, $a_n\to 1$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\cancel{3}m$ $\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)$ $a_{n-2}\to m$, $a_n\to 1$

$x_1\cdot x_2\cdot x_3=(-1)n=-n$ $(-1)^{n}\cdot\frac{a_0}{a_n}$

Сада је:

$$x_1^{3}+x_2^{3}+x_3^{3}=(x_1+x_2+x_3)(x_1^{2}+x_2^{2}+x_3^{2})-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

$$+3x_1x_2x_3=0+0-3x_1x_2x_3=-3n$$

$$\Rightarrow 3 \mid x_1^{3}+x_2^{3}+x_3^{3}$$

4. Ако су x_i ($i=1,2,\dots,48$) нуле полинома $P(x)=18x^{48}+3x+2006$, израчунати $\sum_{i=1}^{48}\frac{x_i}{1+x_i}$

Користићемо да је $\frac{x_i}{1+x_i}=\frac{1}{1+x_i^{-1}}$ ($x_i \notin \{0,1\}$ па нема проблема).

Даље, користимо да:

а) Ако су $y_i \neq 0$ нуле полинома $A(x)$ n-тог степена, онда су y_i^{-1} нуле полинома $x^n A(x^{-1})$;

(нпр. $p(x) = x^4+3x^2+7$ → $\underset{\neq 0}{y}$ је нула $\to y^4+3y^2+7=0$, онда је y^{-1} нула за $q(x)=x^4 p(x^{-1})$ $\cancel{= x^4(1+3}$ јер $q(y^{-1}) = y^{-4}\cdot p(y)=0$)

б) Ако су y_i нуле полинома $A(x)$, онда су y_i+1 нуле полинома $A(x-1)$.

Сада из а) x_i су нуле полинома $P(x)$ 48. степена

$\Rightarrow$ x_i^{-1} су нуле полинома $x^{48}P(x^{-1}) = Q(x)$.

Из б) $1+x_i^{-1}$ су нуле полинома $Q(x-1) = \quad = R(x)$

Коначно, из а) $\frac{1}{1+x_i^{-1}}$ су нуле полинома $x^{48}\cdot R(x^{-1})$.

Дакле $\frac{1}{1+x_i^{-1}}$ су нуле полинома:

$$x^{48}R(x^{-1}) = x^{48}\cdot Q(x^{-1}-1) = x^{48}\cdot(x^{-1}-1)^{48}\cdot P\left((x^{-1}-1)^{-1}\right) =$$

$$= x^{48}\cdot\left(\frac{1-x}{x}\right)^{48}\cdot P\left(\left(\frac{1-x}{x}\right)^{-1}\right) = \frac{\cancel{x^{48}}}{\cancel{x^{48}}}\cdot(1-x)^{48}\cdot P\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$= (1-x)^{48}\left(18\,\frac{x^{48}}{(1-x)^{48}} + 3\cdot\frac{x}{1-x} + 2006\right) =$$

$$= 18\,x^{48} + 3x(1-x)^{47} + 2006(1-x)^{48} = (18-3+2006)\cdot x^{48} + \left(3\cdot\binom{47}{46} + 2006\cdot\binom{48}{47}\right)\dots + 200$$

Сада нам Вијетове формуле дају одговор да је тражена сума

нула $- \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{96\,147}{2021}$.

5. Наћи све полиноме облика $x^n \pm x^{n-1} \pm x^{n-2} \pm \dots \pm x \pm 1$ који имају све корјене реалне.

- $n=1$ $\quad x \pm 1 \to \pm 1$ су 2 реална рјешења
- $n>1$ $\quad$ Користећи Вијетове формуле, имамо да је:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2 - 2\,(x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n)$$

$$= \left(\frac{-a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\,\frac{a_{n-2}}{\underbrace{a_n}_{1}} = 1 \pm 2$$

Како тражимо да сви корјени буду реални, мора:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 3 \quad \to a_{n-2} = -1.$$

Слично, $\quad x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot x_3^2 \cdots x_n^2 = \left((-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n}\right)^2 = a_0^2 = 1$

Сада, можемо искористити неједнакост између аритметичке и геометријске средине

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}\,(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq \sqrt[n]{x_1^2 \cdots x_n^2} = 1 \quad \Rightarrow \frac{3}{n} \geq 1 \quad \Rightarrow \boxed{n \leq 3}$$

- $n=3$ $\quad x_1^2 = x_2^2 = x_3^2 = 1$ $\overset{\wedge}{\text{ако}}$ $\xrightarrow{\text{2 полинома}}$ $(x^2-1)(x \pm 1)$

(не може $(x-1)^3$ нити $(x+1)^3 \to$ њихови коеф. нису ± 1)

- $n=2$ $\quad x^2 \pm x - 1$ $\quad$ (јер $x^2 \pm x + 1$ нема реалних рј.)
- $n=1$ $\quad x \pm 1$

↳ укупно 6 полинома!

6. Доказати да постоји полином облика $x^n + 2007x^{n-1} + \dots$ који дијели полином $x^m - 1$ за неко $m \in \mathbb{N}$.

Нека је p прост дјелилац броја m. Онда $x^p - 1 \mid x^m - 1$.

Како је $x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1)$ слиједи да

$x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + 1 \mid x^m - 1$.

Ми можемо тачније изабрати m тако да то буде производ неких 2007 простих бројева, тј. $m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_{2007}$.

Тада сваки $P_i(x) = x^{p_i-1} + x^{p_i-2} + \dots + 1 \mid \cancel{p}\, x^m - 1$ за $\forall i\ 1 \le i \le 2007$.

Али како су ови полиноми узајамно прости, тј. сви имају различите нуле, нуле i-тог су p-ти корijени из $1, \dots$, онда и производ ових полинома дијели $x^m - 1$. Даље, $P_1(x) P_2(x) \dots P_{2007} \mid x$.

Водећи коефицијент овог полинома је 1, а следећи коефицијент је баш једнак 2007. Тиме смо нашли наш полином.

{7. вјежбе}

* Теорија бројева *

$\boxed{1.}$ Доказати да не постоје $m, n \in \mathbb{Z}$ т.к.д. је $(m+n+2)^2 = 3(mn+1)$.

Прет. $\exists m,n \in \mathbb{Z}$ да $(m+n+2)^2 = 3(mn+1)$

$\Rightarrow 3 \mid (m+n+2)^2$

$\Rightarrow 3 \mid m+n+2 \quad (*)$

$\Rightarrow 9 \mid (m+n+2)^2$

$\Rightarrow 3 \mid mn+1$

1° Пр. $3 \mid m \vee 3 \mid n$

Онда $3 \nmid mn+1$.

2° Пр. $m \equiv n \equiv 1 \pmod 3$, онда $mn+1 \equiv 2 \pmod 3$

Пр. $m \equiv n \equiv 2 \pmod 3$, онда $mn+1 \equiv 2 \pmod 3$

$\Rightarrow$ б.у.о. $m = 3k+1$ и $n = 3l+2$

Тада је:

$m+n+2 = 3k+1+\cancel{2k+1}\ 3l+2+2 = 3(k+l+1)+2$

Односно $m+n+2 \equiv 2 \pmod 3$ $\lightning$ са $(*)$

2. Да ли постоји бесконачно много природних бројева m за које постоје $a_1, ..., a_{2014} \in \mathbb{N}$ такви да је $a_1! + ... + a_{2014}! = m!$?

$a_i \leq m-1$

Сада је

$m! = a_1! + .. + a_{2014}! \leq 2014\,(m-1)! \implies m \leq 2014$

Не, јер је број m ограничен!

3. Дати су полиноми $p(x) = x^3 + x^2 + x + 2$ и $q(x) = x^3 - x + 3$.
Да ли постоји $m \in \mathbb{Z}$ т.д. је $q(m) \mid p(m)$?

Пп. да постоји.

$q(m) = m^3 - m + 3 = m(m^2-1) + 3 = \underbrace{(m-1)m(m+1)}_{\text{3 узастопна броја} \to \text{1 је дјељив са 3}} + 3$

$\implies 3 \mid q(m) \implies 3 \mid p(m)$

$\implies 3 \mid q(m) - p(m)$, али даље $3 \mid p(m) - q(m) = m^2 + 2m - 1$

Сада раздвајамо на случајеве:

1° $m \equiv 0 \pmod 3$

$m^2 + 2m - 1 \equiv -1 \pmod 3$ ↯

2° $m \equiv 1 \pmod 3$

$m^2 + 2m - 1 \equiv 2 \pmod 3$ ↯

3° $m \equiv 2 \pmod 3$

$m^2 + 2m - 1 \equiv 1 \pmod 3$ ↯

$\implies$ Такво m не постоји!

4. За свако $n \in \mathbb{N}$ број X_n је настао узастопним дописивањем квадрата првих n природних бројева. Доказати да постоји бесконачно много природних бројева n таквих да X_n није потпун степен.

$X_1 = 1 \quad X_2 = 14 \quad X_3 = 149 \quad X_4 = 14916 \quad \dots$

Трик: Када желимо да покажемо да нешто није потпун квадрат, онда нађемо p прост тако да $p \mid n$ али $p^2 \nmid n$.

Уводимо фју $S(n)$ – која рачуна збир цифара броја n.
Због критеријума дјељивости са 3 и 9 знамо да је

$n \equiv S(n) \quad (\text{mod } 3 \text{ или } 9)$

$$X_n \equiv S(X_n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \pmod 9$$

Узмемо $n = 9k$ нису дјељиви са 3

$$X_n \equiv \frac{9k(9k+1)(9k\cdot 2+1)}{6} \pmod 9$$

$\frac{9k}{6}$ је дјељиво са 3, а није са 9

За $n = 9k$ је X_{9k} дјељиво са 3, али није са 9, за свако $k \in \mathbb{N}$.
Стога X_{9k} не може бити потпун степен.

5 Да ли постоји број n такав да декадни запис броја $n!$ има облик $n! = \ldots 2012\underbrace{0\ldots0}_{k}$ за неко $k \in \mathbb{N}$?

Пп. да такво n постоји.

Нека је a највећи експонент двојке који дијели $n!$ $\to 2^a \mid n!$, али $2^{a+1} \nmid n!$.

Нека је b највећи експонент петице који дијели $n!$ $\to 5^b \mid n!$, али $5^{b+1} \nmid n!$.

Лежандрова формула: Нека је n природан број и p прост број.

Тада уколико је α највећи број такав да $p^\alpha \mid n!$, важи:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor .$$

Стога је:

$$\left.\begin{aligned} a &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \ldots \\ b &= \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^3} \right\rfloor + \ldots \end{aligned}\right\} \quad a > b$$

Како $10^k \mid n!$, али $10^{k+1} \nmid n!$ $\Rightarrow$ $\boxed{k = b}$

Даље, шта можемо рећи о a? Посматрајмо $\dfrac{n!}{10^k} = \ldots 2012$

$\Rightarrow 2^2 \mid \dfrac{n!}{10^k}$, али $2^3 \nmid \dfrac{n!}{10^k}$ $\Rightarrow$ $\boxed{a = k+2}$. Сада је:

$$2 = a - b \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - b$$

$$\left(b = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{5^2} \right\rfloor + \ldots \leq \frac{n}{5} + \frac{n}{5^2} + \ldots = \frac{n}{5}\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right) = \frac{n}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{n}{5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{n}{4} \right.$$

$$2 = a - b \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \frac{n}{4} \geq \frac{n-1}{2} - \frac{n}{4} = \frac{2n-2-n}{4} = \frac{n-2}{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad n - 2 \leq 8 \Rightarrow n \leq 10 \\ &\text{Како } n! \text{ има бар 5 цифара} \Rightarrow n \geq 8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow n = 8 \lor n = 9 \lor n = 10$$

$8! = 40320$

$9! = 362880$ $\quad\Rightarrow$ Дакле, такво n не постоји!

$10! = 3628800$

6. Наћи сва рјешења (p, q, a, m) једначине $p^2 + 4^a q^2 = m^2$.

$p^2 = m^2 - 2^{2a} q^2 = (m - 2^a q)(m + 2^a q)$

Није могуће да $p = m - 2^a q$ и $p = m + 2^a q$ $\Rightarrow$ једина могућност је да је

$m + 2^a q = p^2 \land m - 2^a q = 1$

Ако их одузмемо, добијемо $2^{a+1} q = (p-1)(p+1)$.

Како је и q прост, постоје 2 могућности:

1) $p+1 = 2^l q$ и $p-1 = 2^{a+1-l}$ $\Rightarrow$ $2 = 2^l q - 2^{a+1-l}$

2) $p+1 = 2^l$ и $p-1 = 2^{a+1-l} q$ $\overset{\text{одузимање}}{\Rightarrow}$ $2 = 2^l - 2^{a+1-l} q$

1) Уколико је $2 = 2^l q - 2^{a+1-l}$ и $q \neq 2$.

Тада, како не могу оба степена двојке на десној стр. да буду већа од 2, добијамо $l = 1$ или $l = a$.

Ако је $q = 2$, тада дијељењем са 2 добијамо $1 = 2^l - 2^{a-l} \Rightarrow l = 1$.

Дакле, разликујемо 2 случаја:

а) $l = 1$ и б) $l = a$

а) За $l = 1$ је $2 = 2q - 2^a \;/ : 2 \Rightarrow 1 = q - 2^{a-1} \Rightarrow q = 2^{a-1} + 1$

Такође, у овом случају је $p = 2^{a+1-l} + 1 = 2^a + 1$.

Очигледно, ни $a-1$ ни a не смију имати непарних фактора.

Према томе, могуће је само $a = 1$ и $a = 2$

Добијамо: $(p, q, a, m) \in \{(3, 2, 1, 5), (5, 3, 2, 13)\}$

б) За $l = a$ је $1 = 2^{a-1} q - 1 \Rightarrow 2^{a-1} q = 2 \Rightarrow a = 1, q = 2$,

тј. опет добијамо рјешење $(p, q, a, m) = (3, 2, 1, 5)$.

2) Ако је $q = 2^l - 2^{a+1-l} q$ и $q=2$, поново $\to$ $(p,q,a,m)=(3,2,1,5)$;

Пп. да $q \neq 2$ и онда је једина могућност $l=a$.

$\Rightarrow 1 = 2^{a-1} - q$, тј. $q = 2^{a-1}-1$, а одатле и $p = 2^l - 1 = 2^a - 1$.

Закључујемо да и a и $a-1$ морају бити прости, па добијамо и $(p,q,a,m)=(7,3,3,25)$.

Дакле, укупно имамо 3 рјешења:

$(p,q,a,m) \in \{(3,2,1,5),(5,3,2,13),(7,3,3,25)\}$.

$\boxed{7.}$ За сваки природан број n, доказати да је $A = n + 3n^3 + 7n^7 + 9n^5$ дјељиво са

Довољно је показати да је посматрани број $A \equiv 0 \pmod 2$ и $A \equiv 0 \pmod 5$.

- n парно $\to$ $A \equiv 0 \pmod 2$ ✓
- n непарно $\to$ $n, 3n^3, 7n^7, 9n^5$ су сви непарни, па је A паран ✓
- $n \equiv 0 \pmod 5$ $\Rightarrow$ $A \equiv 0 \pmod 5$
- $5 \nmid n$

Онда је по малој Фермаовој $n^4 \equiv 1 \pmod 5$

$\hookrightarrow$ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ $\quad p \nmid a$, $a \in \mathbb{Z}$, p прост

$n + 3n^3 + 7n^7 + 9n^5 \equiv n + 3n^3 + 7n^3 + 9n = 10n + 10n^3 \equiv 0 \pmod 5$.

8. вјежбе

1. На табли је на почетку записан број 1. У n-том кораку спроводи се сљедећи поступак: сваки број на табли се обрише и умјесто њега се запише низ бројева, и то тако што се, уколико је обрисан број i, умјесто њега напише низ $1, 2, \dots, i-1$ (специјално, ако је обрисан број 1, умјесто њега се у овом моменту не уписује ништа); потом се додатно на таблу допише број $n+1$. Одредити колико ће бројева бити на табли након 2015 оваквих корака.

корак 0: 1
корак 1: 2
корак 2: 1 3
корак 3: 1 2 4
корак 4: 1 1 2 3 5
корак 5: 1 1 2 1 2 3 4 6
корак 6: 1 1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 5 7
корак 7: 1 1 1 2 1 1 2 1 2 3 1 2 3 4 1 2 3 4 5 6 8

У кораку 5: $\underline{3}\times 1$ $\underline{2}\times 2$ 1×3 1×4 0×5 1×6

У кораку 6: $\underline{5}\times 1$ $\underline{3}\times 2$ 2×3 1×4 1×5 0×6 1×7.

У кораку 7: $\underline{8}\times 1$ $\underline{5}\times 2$ 3×3 2×4 1×5 1×6 $\underline{0}\times 7$ $\underline{1}\times 8$

Подсјетимо се Фибоначијевог низ: $F_1 = F_2 = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + 1$

То је низ: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13$

Доказаћемо сљедећу лему:

Лема: У n-том кораку имамо:

$F_{n-1}\times 1,\ F_{n-2}\times 2,\ \dots,\ F_1\times(n-1),\ 0\times n$ и $1\times n+1$.

Доказ: Индукцијом по n.

Б.И. $n=3$ ✓

И.Х. Пт. да лема важи за n.

И.К. Докажимо да важи за n+1.

Пошто у кораку n имамо:

$F_{n-1}\times 1,\ F_{n-2}\times 2,\ \dots,\ F_1\times n-1,\ 0\times n,\ 1\times n+1$

Онда у n+1 кораку имамо:

$F_{n-2}+F_{n-3}+\dots+F_1+1 \overset{\text{зашто}}{=} F_n$ јединица

$F_{n-3}+F_{n-4}+\dots+F_1+1 = F_{n-1}$ двојки

⋮

$0\times n+1$ и $1\times n+2$

Стога треба показати да је

$1+F_1+\dots+F_k=F_{k+2}$ → једноставно се добија инд. по k.

Пт. да важи за k и докажимо за k+1.

$1+F_1+\dots+F_k+F_{k+1}=F_{k+1}+F_{k+2}=F_{k+3}$ ✓.

Након 2015 корака на табли имамо:

$F_{2014}\times 1,\ F_{2013}\times 2,\ \dots,\ F_1\times 2014,\ 0\times 2015,\ 1\times 2016$

Укупно: $1+F_1+F_2+\dots+F_{2014} = F_{2016}$.

Дакле, након 2015 корака на табли има F_{2016} цифара.

2. На одбојкашком турниру учествовало је 10 екипа. Свака од њих одиграла је по једну утакмицу са сваком од преосталих екипа. Након турнира, i-та екипа имала је x_i побједа и y_i пораза. Доказати да је $x_1^2+\dots+x_{10}^2 = y_1^2+\dots+y_{10}^2$.

· i-та екипа је играла оволико мечева

$$x_i + y_i = 9$$

$$\sum_{i=1}^{10} (y_i)^2 = \sum_{i=1}^{10} (9-x_i)^2 = \sum_{i=1}^{10} (81 - 18x_i + x_i^2) =$$

$$= 10\cdot 81 - 18\sum_{i=1}^{10} x_i + \sum_{i=1}^{10} x_i^2$$

$$= 10\cdot 81 - 18\cdot 45 + \sum_{i=1}^{10} x_i^2 = \sum_{i=1}^{10} x_i^2$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = \binom{10}{2} = 45$$

$\Downarrow$

јер је укупан број побједа једнак броју мечева који су одиграни

3. У низу је дато 3k сијалица. Изнад сваке сијалице се налази прекидач који контролише ту сијалицу и њене суседе. Доказати да без обзира на почетно стање сијалице у коначно много корака можемо постићи да у све сијалице упаљене.

O - упаљено

X - угашено

_ - тај прекидач стискамо

$\underline{x}\,x\,0000 \to 000000$

$x\,\underline{x}\,0000 \to 00x000$

$0\,0\,00x\underline{0} \to 00000x$

Доказ дајемо индукцијом по k:

Б.И. Имамо 3 сијалице

$x\underline{x}x \to 000$

$0x\underline{x} \to 000$

$x0\underline{x} \to \underline{x}x0 \to 000$

$\underline{x}x0 \to 000$

$\underline{0}0x \to x\underline{x}x \to 000$

$0x\underline{0} \to \underline{0}0x \to x\underline{x}x \to 000$

$x0\underline{0} \to x\underline{x}x \to 000$ Па тврђење важи за 3 сијалице.

000 ✓

И.Х. Нп. да тврђење важи за 3k сијалица.

И.К. Докажимо да тврђење важи за 3(k+1) сијалица. Посматрам 3k+3 сијалице и из Б.И. знамо да можемо направити да прве 3 буду угашене xxx.

$xxx \mid \underbrace{\text{неки распоред } x \text{ и } 0}_{3k}$

Примијенимо их на 3k сијалица и знамо да њих можемо све да упалимо. Успут је могло да се деси да ће покварити $x\,x\,x \mid_{3k}$ ова ц.

Добијамо 2 могућности:

1° $x\underline{x}x \mid \underbrace{00\ldots0}_{3k} \to \underbrace{00\ldots0}_{3(k+1)}$

2° $\underline{x}x0 \mid \underbrace{00\ldots0}_{3k} \to \underbrace{00\ldots0}_{3(k+1)}$

У оба случаја смо успјели да угасимо све сијалице!

4. Колико се највише подскупова скупа $N_n=\{1,\ldots n\}$ може изабрати тако да је унија свака два изабрана скупа једнака скупу N_n.

$N_n=\{1,2,\ldots,n\}$

Тражимо $\mathcal{F}=\{A\subseteq N_n\}$ тд $\forall A,B\in\mathcal{F},\ A\neq B \Rightarrow A\cup B=N_n$.

Примјер: $N_3=\{1,2,3\}$

$\mathcal{F}=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$N_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$

$\mathcal{F}=\{N_n,\{2,3,\ldots,n\},\{1,3,\ldots,n\},\ldots,\{1,2,\ldots,n-1\}\}$.

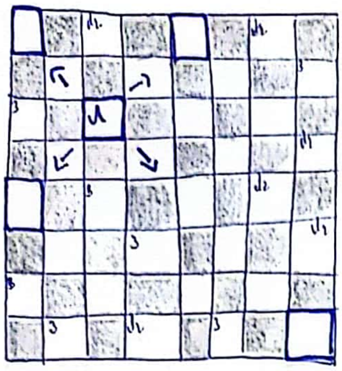
Тврдимо да је $|\mathcal{F}|=n+1$.

Пп. $\exists\ \mathcal{F}$ тд је $|\mathcal{F}|=n+2$. (не мора $\geq n+2$, јер ако је још већа избацимо неке скупове тако да буде $=n+2$)

Знамо да постоји бар $n+1$ скупова у $\mathcal{F}$, различитих од N_n, тако да им фали бар 1 елемент.

Како имамо n елемената, с $n+1$ скупова, из Дирихлеовог принципа постоје бар 2 скупа којима фали исти елементи. Рецимо A и B. Али тада $A\cup B\neq N_n$.

5. Доказати да се на стандардну шаховску таблу не може поставити 7, а може поставити 8 ловаца тако да нападају сва поља табле.



Ловац није ограничен у раздаљини кретања, али може да се креће само дијагонално напријед и назад.

8 можемо поставити тако што их све ставимо у исту колону или врсту, онда су им сва поља дохватљива.

Докажимо да 7 не може. Пп. да 7 ловаца може да се постави тако да нападају сва поља. Посматрајмо ивицу табле. На њој имамо 14 црних и 14 бијелих поља.

Један ловац напада искључиво 1 боју. Из Дирихлеовог принципа једна боја је нападнута са највише 3 ловца, још сваки ловац може да нападне највише 4 ивична поља.

$\Rightarrow$ 3 ловца нападају највише $3\cdot 4 = 12 < 14$ ивичних поља једне боје ↯.

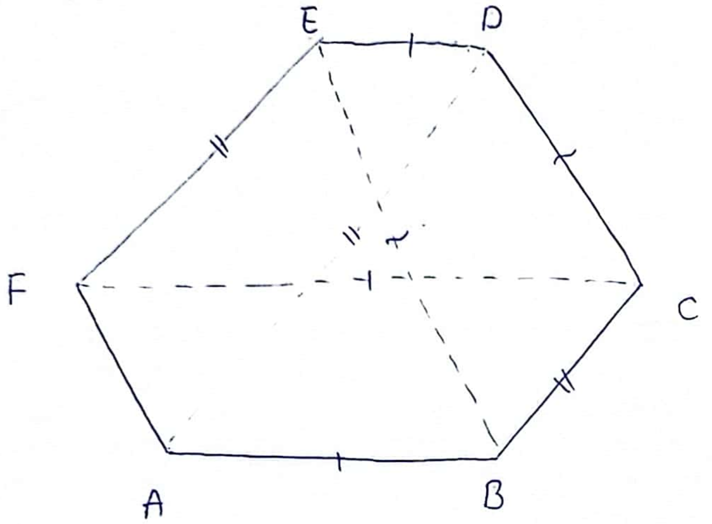
(14 бијелих ивичних може да нападне највише ~~4~~ 3 ловца)

(3 ловца на бијелим покривају $3\cdot 4 = 12 < 14$ ивичних бијелих, зато нам треба 4 ловца на бијелим, а из истог разлога 4 ловца на црним) ↯

Вјежбе 9

* Геометрија *

1. У конвексном шестоуглу ABCDEF важи: $AB \parallel FC \parallel DE$ и $BC \parallel AD \parallel EF$ и $CD \parallel BE$. Доказати да је $BE \parallel FA$.



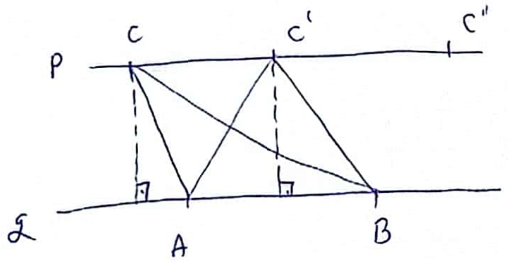
$AB \parallel FC \parallel DE$

$BC \parallel AD \parallel EF$

$CD \parallel BE$

Доказати: $BE \parallel FA$

Трик:



$p \parallel q$

$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABC'} = P_{\Delta ABC''}$

Зато је:

$P_{\Delta BCA} = P_{\Delta BCD}$

$P_{\Delta BCD} = P_{\Delta CDE}$

$P_{\Delta CDE} = P_{\Delta EDF}$

$P_{\Delta EDF} = P_{\Delta EFA}$

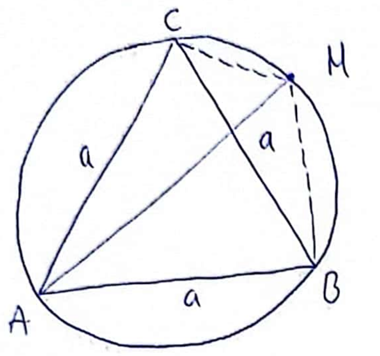
$\boxed{P_{\Delta EFA} = P_{\Delta FAB}}$ → ово добијамо транзитивно из свих осталих

ово тамо $P_{\Delta FAB} = P_{\Delta ABC}$

⇒ висина из F на $p(B,E)$ је исте дужине као висина из A на $p(B,E)$

⇒ $AF \parallel BE$ што је и требало доказати

2. Око једнакостраничног $\triangle ABC$ описана је кружница. Нека је M тачка која припада луку BC те кружнице, којем не припада тјеме A. Доказати да је $MA = MB + MC$.



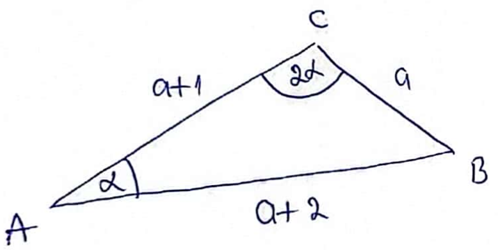
Птоломејева Т. на $ABMC$: (за тетивне четв.)

$$d_1 \cdot d_2 = AB \cdot MC + MB \cdot AC$$

$$a \cdot AM = a \cdot MC + MB \cdot AC$$

$$\Rightarrow MA = MB + MC.$$

3. Нека је дат $\triangle$ чије су дужине страница 3 узастопна природна броја и највећи угао је два пута већи од најмањег. Доказати да је такав троугао јединствен.



$$a,\ a+1,\ a+2 \in \mathbb{N}$$

1° синусна теорема:

$$\frac{a}{\cancel{\sin\alpha}} = \frac{a+2}{\sin 2\alpha} = \frac{a+2}{2\cancel{\sin\alpha}\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow 2a = \frac{a+2}{\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{a+2}{2a}} \le 1$$

$$a+2 \le 2a \Rightarrow \boxed{a \ge 2}$$

2° косинусна теорема:

$$a^2 = (a+1)^2 + (a+2)^2 - 2(a+1)(a+2)\cos\alpha = (a+1)^2 + (a+2)^2 - \cancel{2}(a+1)(a+2)^2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}a}$$

$$= a^2 + 2a + 1 + a^2 + 4a + 4 - \left(1 + \frac{1}{a}\right)(a^2 + 4a + 4) =$$

$$= 2a^2 + 6a + 5 - a^2 - 4a - 4 - a - 4 - \frac{4}{a} = a^2 + a - 3 - \frac{4}{a}$$

$$\Rightarrow a - 3 - \frac{4}{a} = 0 \quad /\cdot a \qquad a^2 - 3a - 4 = 0 \qquad a^2 - 4a + a - 4 = a(a-4) + 1(a-4) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 4} \lor \cancel{a = -1}$$

Странице троугла су $4, 5, 6$.

4. Нека је $X = \{ f_a(x) = x^2 + ax - 2a - 5 \}$ скуп парабола.

Одредити ј-ну ГМТ тјемена свих ових парабола.

$$T = \left(-\frac{b}{2a},\ f_a\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) \rightarrow \text{ово } a \text{ је из } \quad ax^2 + bx + c = 0$$

$$T = \left(-\frac{a}{2},\ \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} - 2a - 5\right)$$

$$T = \left(-\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4} - 2a - 5\right)$$

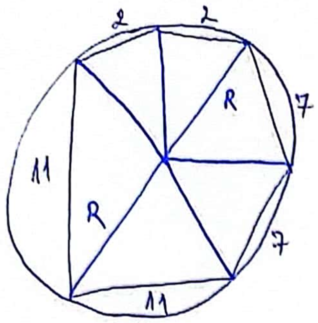
$$y\Big(\underbrace{-\frac{a}{2}}_{x}\Big) = -\frac{a^2}{4} - 2a - 5$$

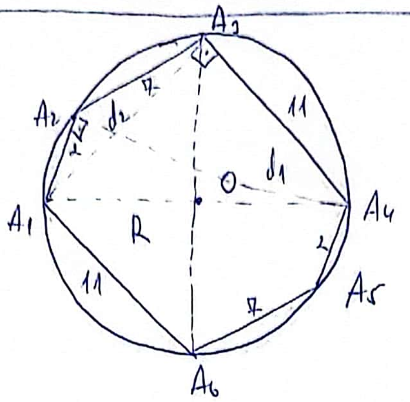
$$-\frac{a}{2} = x \Rightarrow \boxed{a = -2x}$$

$$y(x) = -\frac{\cancel{4}x^2}{\cancel{4}} + 2 \cdot 2x - 5 = -x^2 + 4x - 5$$

$y(x) = -x^2 + 4x - 5$ → тражени ГМТ је парабола

5. Конвексан шестоугао уписан је у кружницу k. Његове узастопне странице су дужине 2,2,7,7,11,11. Нађи полупречник кружнице k.

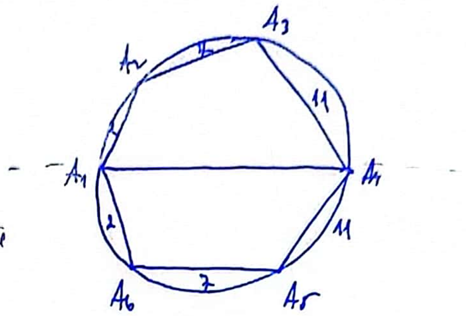




осно симетрична фигура

трик:

(испремјештано дужи)



осно симетрична фигура

Због осне симетрије је A_1A_4 пречник R.

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{R^2-4} \\ d_2 &= \sqrt{R^2-121} \end{aligned}\right\}$$ Питагорина Т. (угао над пречником је прав)

Сада из Птоломејеве Т. имамо да је:

$$d_1 \cdot d_2 = 7R + 22$$

$$\sqrt{R^2-4}\,\sqrt{R^2-121} = 7R + 22 \quad /^2$$

$$(R^2-4)(R^2-121) = 49R^2 + 2\cdot 7\cdot 22\cdot R + 22^2$$

$$R^4 - 125R^2 + \cancel{484} = 49R^2 + 308R + \cancel{484}$$

$$R^4 - 174R^2 - 308R = 0$$

$$R(R^3 - 174R - 308) = 0$$

$$R\,\underbrace{(R-14)}\,\underbrace{(R^2+14R+22)}_{D=-24<0} = 0$$

нема реалних нула

$$\Downarrow$$

$$\boxed{R=14}$$

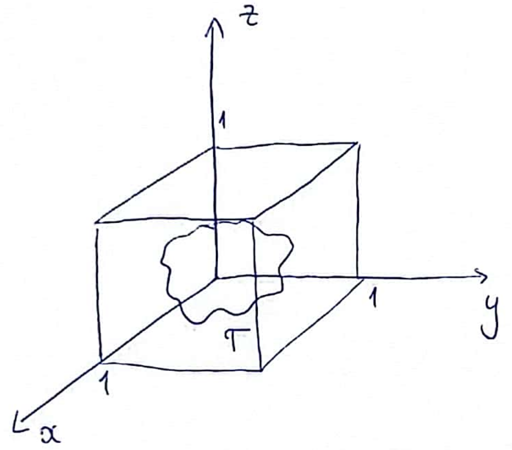
$$\Downarrow$$

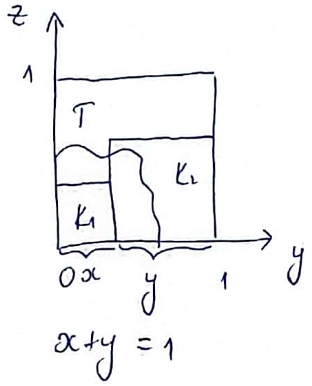
$$\boxed{r=7}$$

6. Тијело T запремине $\alpha \in (0,1)$ садржано је у јединичној коцки I.

Доказати да постоје коцке K_1 и K_2 за које важи:

- $K_1, K_2 \subseteq I$;
- K_1 и K_2 немају заједничких унутрашњих тачака;
- збир дужина ивица коцака K_1 и K_2 је 1;
- запремина дијела тијела T које се налази у коцки K_1 једнака је запремини дијела тијела који се налази у K_2.





$V(T) = \alpha$

- дужина стр. K_1 је x
- дужина стр. K_2 је $1-x$

Дефинишимо фју f : $f(x) = V(T \cap K_1) - V(T \cap K_2)$ – непрекидна фја

обоје су фје од x

$f(0) = 0 - V(T \cap I) = -V(T) = -\alpha < 0$

$f(1) = V(T \cap I) - 0 = \alpha$

$f(0) = -\alpha < 0$, $f(1) = \alpha > 0$

$\Rightarrow \exists x \in (0,1)$ тд је $f(x) = 0$

За то x је $V(T \cap K_1) = V(T \cap K_2)$.

K_1 је коцка странице x, а K_2 коцка стр. $1-x$ и оне испуњавају све критеријуме.

10. вјежбе

* Геометрија *

1. За углове ΔABC важи:

$$tg\alpha : tg\beta : tg\gamma = 1:2:3. \quad (1)$$

Израчунати обим овог Δ, ако је страница наспрам $\sphericalangle\gamma$ једнака $AB = 3$.

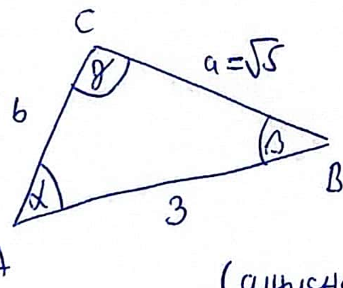
Из (1) $\rightarrow$ сви углови су истог „типа" (због знака тангенса), па је ΔABC оштроугли. Како је

$$tg\gamma = tg(\pi-(\alpha+\beta)) = -tg(\alpha+\beta) = -\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma = tg\alpha\cdot tg\beta\cdot tg\gamma} \ (2) \quad \text{(у произв. неправоуглом } \Delta)$$

Означимо $tg\alpha = k$, онда је $tg\beta = 2k$ и $tg\gamma = 3k$. Сада је (2)

$$6k = 6k^3 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow tg\alpha = 1,\ tg\beta = 2,\ tg\gamma = 3.$$
(јер $k>0$) $\quad \Downarrow \ \alpha = 45^\circ$



$$\sin\alpha = \frac{\sqrt2}{2}$$

$$\sin\gamma = \frac{tg\gamma}{\sqrt{1+tg^2\gamma}} = \frac{3}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

(синусна т.)

Сада је $\frac{3}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\cancel{3}}{\frac{\cancel{3}\sqrt{10}}{10}} = \frac{a}{\frac{\sqrt2}{2}} \Rightarrow a\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt2}{2} \ /\cdot 10$

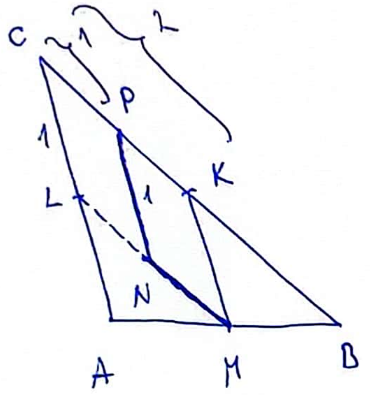
$$a\cdot\sqrt5 = 5 \qquad \boxed{a=\sqrt5}$$

$$\sin\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}} = \frac{2}{\sqrt5}$$

$$O = 3+\sqrt5+2\sqrt2$$

$$\frac{b}{\frac{2}{\sqrt5}} = \frac{\sqrt5}{\frac{\sqrt2}{2}} \Rightarrow b\cdot\frac{\sqrt2}{2} = \cancel{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt5}} \Rightarrow b = \frac{\cancel{4}\,2}{\cancel{\sqrt2}}\cdot\frac{\sqrt2}{\cancel{\sqrt2}} = 2\sqrt2$$

2. Нека је ΔABC такав да је $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 2$. Наћи изломљену линију XYZ са крајевима X, Z на рубу ΔABC, такву да је $XY = YZ = 1$ и која дијели ΔABC на 2 дијела једнаких површина.



$AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 2$

Нека су K, L, M средишта страница BC, CA, AB редом. Нека је N средиште ML, а P средиште CK. Тада је $LA \cong KM$ (средња линија) и $MB \cong MA$ и $LA \parallel KM \Rightarrow \measuredangle LAM = \measuredangle KMB$

$\Rightarrow \Delta LAM \cong \Delta KMB$ (СУС).

Примијетимо да је $CL = PN = 1$, $LN = CP = 1$ и $LN \parallel CP$ и $LC \parallel PN$

$\Rightarrow$ $CLNP$ је ромб странице 1, као и $PNMK$, слично се доказује.

Ако узмемо изломљену линију MN и NP, она задовољава услов задатка (оба дијела садрже по 1 подударан Δ и по 1 исти ромб).

3. Нека су E и F, редом, средишта страница AB и CD четвороугла ABCD. Ако су средишта дужи AF, CE, BF, DE неколинеарне тачке, доказати да чине темена паралелограма.

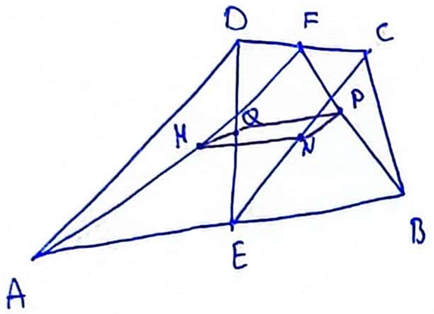
$\vec{a} = \overrightarrow{DA}$

$\vec{b} = \overrightarrow{DB}$

$\vec{c} = \overrightarrow{DC}$

Нека су M, N, P, Q средишта AF, EC, BF, DE, редом и нека су $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ дати мјесо

Тада је:



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}(\vec{c} + \overrightarrow{DE}) - \frac{1}{2}(\vec{a} + \overrightarrow{DF}) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{\vec{c}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{DN} = \vec{c} + \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EN}$$

$$2\overrightarrow{DN} = \vec{c} + \overrightarrow{DE}$$

$$(*)\ \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \overrightarrow{DE})$$

Аналогно, имамо да је:

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \overrightarrow{DF}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}\right) - \frac{1}{2}\,\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} =$$

$$= \frac{1}{4}(2\vec{b} + \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}) =$$

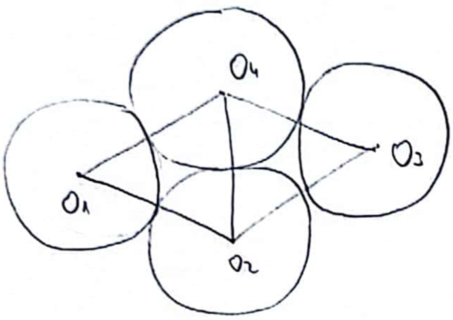
$$= \frac{1}{4}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow MN \cong QP \wedge MN \parallel QP \Rightarrow MNPQ$ је паралелограм $\blacksquare$

4. Да ли се у равни може конструисати

(а) 2007; б) 2008;

подударних кружница, тако да свака од њих додирује тачно 3 кружнице и никоје 2 кружнице се не сијеку?



Нека је K број кружница које задовољавају услове задатка.

Како свака кружница додирује тачно 3 друге кружнице и како свака додирна тачка припада тачно двјема кружницама, укупан број додирних тачака је $\frac{3K}{2}$ $\Rightarrow$ K мора бити парно.

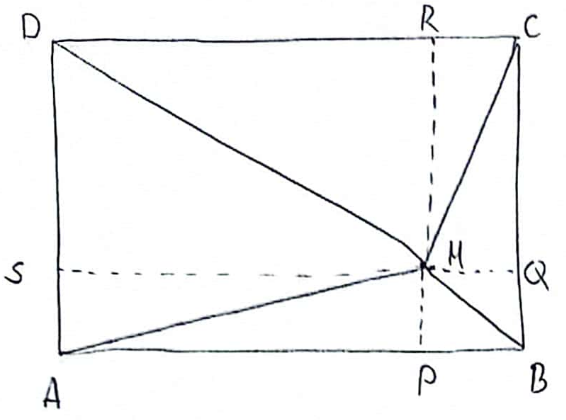
$\Rightarrow$ а) Не може.

(такав тетиван четвороугао постоји)

б) Конструишемо тетиван многоугао $A_1A_2\ldots A_{1004}$, тако да је $A_{2k}A_{2k+1}=2$, ($A_{1005}=A_1$), за $\forall k \in \{1,2,\ldots,502\}$ и $A_{2k-1}A_{2k}=\sqrt{3}$ за $\forall k \in \{1,2,\ldots,502\}$.

Ако се над сваком страницом дужине $\sqrt{3}$ овог многоугла конструише фигура подударна са фигуром са слике (O_1 и O_2 се поклапају са тјеменима многоугла, $O_1O_3=\sqrt{3}$), добија се конфигурација која задовољава услове задатка са $4\cdot 502 = 2008$ кружница.

5. Нека је дат правоугаоник $ABCD$ и тачка M у његовој равни. Ако важи $AM=40$, $BM=5$, $CM=21$, одредити дужину DM.



Нека су P, Q, R, S пројекције тачке M на AB, BC, CD, DA редом. Користећи Питагорину теорему, добијамо:

$$AM^2 = \overset{= MP^2}{AS^2} + SM^2$$
$$BM^2 = QM^2 + PM^2$$
$$CM^2 = MR^2 + MQ^2$$
$$DM^2 = SM^2 + RM^2$$

$$AM^2 + CM^2 = \overset{MP^2}{\cancel{AS}^2} + \underline{SM^2} + MR^2 + MQ^2$$
$$BM^2 + DM^2 = QM^2 + \underline{PM^2} + \underline{SM^2} + RM^2$$

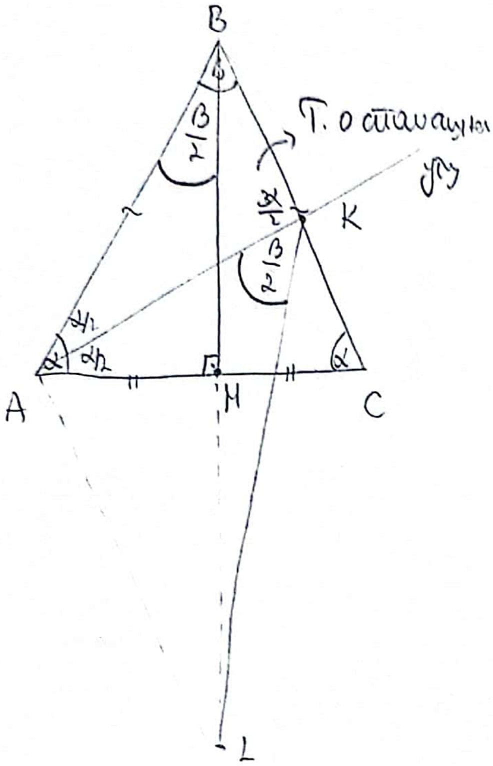
$$\Rightarrow AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$$

$$40^2 + 21^2 - 5^2 = DM^2$$

$$1600 + 441 - 25 = 2016 = DM^2$$

$$\Rightarrow DM = \sqrt{2016}$$

6. У једнакокраком ΔABC, $AB = BC$, тачка M је подножје висине из B, а симетрала $\measuredangle BAC$ сијече страницу BC у тачки K. Ако важи $2BM = AK$, одредити углове тог троугла.



$2BM = AK$

$\measuredangle AKB = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3\alpha}{2}$ (спољашњи = збиру 2 ун. несу.)

Нека $L \in p(M,B)$ и $ML \cong MB$.

$BL = 2BM = AK$

$BALC$ је ромб $\Rightarrow$ $BALK$ је трапез ($BK \parallel AL$)

и има једнаке дијагонале ($BL = AK$), па је

то једнакокраки трапез, па је тетиван

Сада из

$\measuredangle ABL = \measuredangle AKL = \frac{\beta}{2}$

$\measuredangle ABK = \measuredangle LKB$

$\Rightarrow \beta = \frac{3\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \Rightarrow \beta = 3\alpha$

$2\alpha + \beta = 180$

$5\alpha = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = 36^\circ}$, $\boxed{\beta = 108^\circ}$

11. вјежбе Комбинаторика

1. У врсту је поређано 2016 столица. На колико начина је могуће обојити сваку столицу црвеном или плавом бојом на такав начин да број парова суседних столица које имају исту боју буде паран?

Ц $\underbrace{ППП}$Ц → 2 пара

Обојимо првих 2015 произвољно и онда ако је број парова обојених истом бојом паран, последњу столицу обојимо супротном бојом од претпоследње, а иначе истом бојом.

Тако да је рјешење: 2^{2015}.

2. За дате природне бројеве n и k, колико има неопадајућих низова дужине k чији су елементи из скупа $\{1, 2, ..., n\}$ и чија свака 2 суседна елемента имају парну разлику?

Због датог услова сви бројеви који се налазе у низу морају бити или парни или непарни.

1° Сви су парни: Знамо да у скупу $\{1, 2, .. n\}$ има $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ парних.

Даље, из скупа $\{1, 2, .. n\}$, треба да изаберемо k парних са понављањем (комбинације са понављањем)

У овом случају то је $\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + k - 1}{k}$

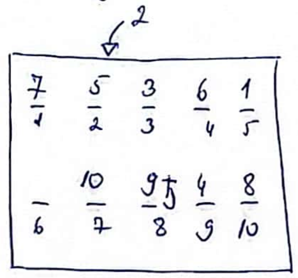
2° Сви су непарни: Непарних има $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$, па је у овом случају одг. $\binom{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor + k - 1}{k}$

Коначан одговор: $\binom{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor + k - 1}{k} + \binom{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor + k - 1}{k}$

3. У биоскопску салу која има 2015 мјеста ушло је 2014 посјетилаца, међу којима је и Ђура. Сви ови посјетиоци сједе на произвољна мјеста не обазирући се на то које мјесто им пише на карти. На пола филма у салу улази 2015. посјетилац. Он жели да сједне баш на своје мјесто и уколико је оно заузето подиже гледаоца који сједи на том мјесту. Овај поступак се наставља све док не буде подигнут гледалац коме је према карти додијељено мјесто које је слободно (он тада сједа на то мјесто). Нека је a број оних почетних распореда за које ће (се) током читавог овог комешања и Ђура у неком моменту бити подигнут, а b број преосталих почетних распореда. Доказати да важи $a=b$.

Илустроваћемо на примјеру са 10 мјеста и 9 посјетилаца и 10. који долази има карту на којој пише 2.

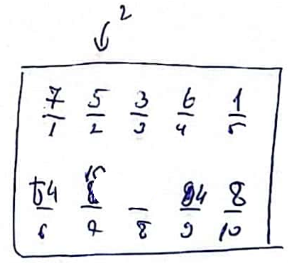
1°



5 → 1 → 7 → 10 → 8 → 9 Ђ → 4 → $\boxed{6}$

(један распоред гдје се Ђура помјерио)

2°



5 → 1 → 7 → 10 → $\boxed{8}$

(један распоред гдје се Ђура није помјерио)

Доказ дајемо принципом бијекције. Уочићемо бијекцију између свих распореда типа А (гдје се Ђура помјерио) и типа Б (гдје се Ђура не помјера). Показаћемо да сваком распореду типа А одговара неки распоред типа Б.

Посматрајмо неки распоред типа А и нека је у њему празно мјесто означено са x. Тај распоред ћемо пресликати у распоред у којем је све исто као у A, осим што Ђура једи на мјесту x.

(у 1° неко са картом број 8 помјера Ђуру, а у 2° се то неће десити јер ће 8 бити празно мјесто па ће ост. јести и преостаће премјештање, па се Ђура неће помјерати).

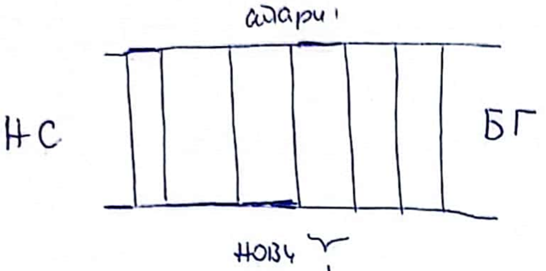
4. Посматрајмо све ријечи дужине 6 састављене од 30 слова азбуке у којима су сва слова различита и поредана у азбучном поретку. Да ли у свим оваквим ријечима има више појава слова Н или слова С?

(АБВГЗШ је једна таква ријеч, а ГКЗХИЦ није)

Доказаћемо да се свако слово појављује једнак број пута у ријечима са описаним својством. Нека је x произвољно слово, тада ријечи са описаним својством које у себи садрже x има онолико колико и петочланих подскупова скупа од 29 сл.

Заиста, за сваки такав скуп, на јединствен начин можемо поредати његове елементе и x у ријеч дужине 6 чија су слова у азбучном поретку

5. Од НС до БГ постоје нови и стари пут који су повезани са 7 попречних путева. Колико има различитих начина путовања овим путевима тако да у сваком путовању сваки дио пута буде пређен највише једном?



Одговор : 2^8

↳ за сваки дио пута имамо 2 избора

6. Бетмен хоће да провали шифру Едварда Нигме. Њему је познато да шифра представља неку пермутацију слова у изразу TRICKORTREAT и да су притом прво и последње слово шифре једнаки. Колико укупно постоји могућности за такву шифру?

Слова : $\underbrace{T \times 3, R \times 3}_{\text{прво и последње су } T \vee R}$, $I \times 1$, $C \times 1$, $K \times 1$, $O \times 1$, $E \times 1$, $A \times 1$

$T \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{пермутација скупа од 10 ел. гдје се 3 понављају}} T$ $\quad \frac{10!}{3!}$

$R \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{"} \sim} R$ $\quad \frac{10!}{3!}$

Одговор: $2 \cdot \frac{10!}{3!}$

7 У мјесту Средње Зуце сваки телефонски број има пет цифара које су поређане у нерастућем или неопадајућем поретку и притом прва цифра није 0. Колико максимално тел. бројева може постојати у том мјесту?

Ако су све цифре исте, онда 9 (све осим 00000).

* Пребројмо сада све бројеве чије су цифре у неопадајућем поретку.

Сваки такав број је једнозначно добијен одабиром 5 цифара (може бити понављања), а међу њима не смије бити 0.

Ако је број сачињен од само 2 различите цифре a и b нпр., постоје сл. опције:

a b b b b (b>a)
a a b b b (b>a)
a a a b b (b>a)
a a a a b (b>a)

Даље, то су 4 могућа телефонска броја, а цифре a и b можемо одабрати на $\binom{9}{2}$ начина, тј. је укупан број у овом случају: $4\cdot\binom{9}{2}$.

Ако је број сачињен од 3 различите цифре, могуће су сљедеће опције:

a a a b c (a<b<c)
a b b b c
a b c c c
a a b b c
a b b c c
a a b c c

Дакле, у овом случају укупно $6\cdot\binom{9}{3}$ опција.

Ако је број сачињен од 4 различите цифре, могуће су сљедеће опције:

a b c d d (a<b<c<d)
a a b c d
a b b c d
a b c c d

Укупно $4\cdot\binom{9}{4}$. Ако су све цифре различите имо их $\binom{9}{5}$.

Даље, ако су цифре у неопадајућем поретку, укупан број телефонских бројева је: $9+4\cdot\binom{9}{2}+6\cdot\binom{9}{3}+4\cdot\binom{9}{4}+\binom{9}{5}$.

* Ако су цифре у нерастућем поретку, резон је скроз исти, само што можемо да бирамо и 0 (она ће свакако доћи на крај).

Стога је укупан број:

$$4 \cdot \binom{10}{2} + 6 \cdot \binom{10}{3} + 4 \cdot \binom{10}{4} + \binom{10}{5}$$

Коначно рјешење је збир оба случаја, што ће бити 3 279 телефонских бројева.