ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
19. септембар 2019

Професор: Бојан Башић   Асистент: Стефан Хачко

1. Наћи све просте бројеве облика $1010101\ldots0101$ (тј. чији децимални запис се састоји од цифре 1 иза које следи блок „01“ поновљен произвољан број пута).

   Једна идеја: Приметити да се дати број може записати у облику

$$\frac{10^{2k}-1}{99}.$$

2. Доказати да је 78557 број Сјерпињског.

   Једна идеја: Доказати следеће импликације:

$$\begin{aligned}
n \equiv 0 \pmod{2},\ k \equiv 2 \pmod{3} &\Rightarrow 3 \mid k\cdot 2^n+1;\\
n \equiv 1 \pmod{4},\ k \equiv 2 \pmod{5} &\Rightarrow 5 \mid k\cdot 2^n+1;\\
n \equiv 1 \pmod{3},\ k \equiv 3 \pmod{7} &\Rightarrow 7 \mid k\cdot 2^n+1;\\
n \equiv 11 \pmod{12},\ k \equiv 11 \pmod{13} &\Rightarrow 13 \mid k\cdot 2^n+1;\\
n \equiv 15 \pmod{18},\ k \equiv 11 \pmod{19} &\Rightarrow 19 \mid k\cdot 2^n+1;\\
n \equiv 27 \pmod{36},\ k \equiv 6 \pmod{37} &\Rightarrow 37 \mid k\cdot 2^n+1;\\
n \equiv 3 \pmod{9},\ k \equiv 9 \pmod{73} &\Rightarrow 73 \mid k\cdot 2^n+1.
\end{aligned}$$

3. Нека је p непаран прост број, и нека је q најмањи позитиван квадратни неостатак по модулу p. Доказати да је q прост број.

4. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_k$ неки природни бројеви. Посматрајмо полиноме $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ дате са $P_i(x) = a_i x + 1$ за $1 \leqslant i \leqslant k$. Доказати да ова колекција полинома испуњава услове Диксонове хипотезе.