ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

10. јун 2019

Професор: Бојан Башић   Асистент: Стефан Хачко

1. Доказати да, за сваки природан број k, постоји низ од k узастопних природних бројева ниједан од којих није потпун степен природног броја.

   Једна идеја: Посматрати систем конгруенција $x \equiv p_i - i + 1 \pmod{p_i^2}$ за $i = 1, 2, \ldots, k$ и погодно одабране бројеве $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

2. Нека је p прост број облика $4k+3$, и нека је a квадратни остатак по модулу p. Доказати да постоји цео број b такав да важи $a \equiv b^4 \pmod{p}$.

   Једна идеја: Ако је c цео број за који важи $a \equiv c^2 \pmod{p}$, утврдити да један од бројева c и $-c$ мора бити квадратни остатак по модулу p, и да за вредност b тражену у поставци можемо узети управо тај број.

3. Под претпоставком да важи Голдбахова хипотеза, доказати да за сваки паран природан број n постоје $a, b \in \mathbb{N}$ такви да важи $n = \sigma(a) + \sigma(b)$.

4. Дефинишимо функцију S на скупу природних бројева на следећи начин: ако је проста факторизација природног броја n дата са

   $$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

   тада важи

   $$S(n) = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \cdots + \alpha_k p_k.$$

   Под претпоставком да важи Шинцелова хипотеза H, доказати да постоји бесконачно много природних бројева n за које је испуњено

   $$S(n) = S(n+1).$$

   Једна идеја: Ако је k природан број такав да су бројеви s, p, q и r сви прости, за

   $$\begin{aligned} s &= 2k+1; \\ p &= 8k+5; \\ q &= 48k^2+24k-1; \\ r &= 48k^2+30k-1, \end{aligned}$$

   доказати да важи $S(pq) = S(pq+1)$.