

# ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

24. септембар 2018

Професор: Бојан Башић

Асистент: Стефан Хачко

1. Знајући да важи

$$53999 \cdot 14!! \cdot 33!! = \overline{22*6*3\,493\,6*9*96\,8*4*10\,6*4***},$$

одредити цифре означене звездицом.

2. Нека је  $p$ ,  $p > 3$ , прост број облика  $4l + 3$ . Ако је и број  $2p + 1$  прост, доказати да је Мерсенов број  $M_p$  сложен.

Једна идеја: Искористити трећи задатак из септембарског испитног рока (подсећање, у њему се тврди да за прост број  $q$  облика  $8k + 7$  важи  $q \mid M_{\frac{q-1}{2}}$ ).

3. Нека је  $t$  задат природан број. У скупу природних бројева наћи најмање решење једначине

$$x^2 - ((t+2)^2 - 2)y^2 = 1.$$

Једна идеја: Показати следећу једнакост:

$$\sqrt{(t+2)^2 - 2} = t + 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{t + \frac{1}{1 + \frac{1}{t+1 + \sqrt{(t+2)^2 - 2}}}}}.$$

4. Под претпоставком да важи Диксонова хипотеза, доказати да постоји бесконачно много природних бројева  $n$  за које важи  $\varphi(n) = \varphi(n+2)$ .

Једна идеја: Посматрати бројеве  $n$  облика  $n = 2(2p - 1)$ , где је  $p$  непаран прост број. Утврдити под којим додатним условом бројеви овог облика испуњавају тражену једнакост, и приметити да из Диксонове хипотезе следи да постоји бесконачно много непарних простих бројева  $p$  који испуњавају и тај додатан услов.