ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
20. јануар 2020

Професор: Бојан Башић | Асистент: Стефан Хачко

1. Означимо са $\tau(n)$ број делилаца природног броја n. Доказати да за сваки природан број k постоји природан број n такав да важи $k = \tau(n)$.

2. Знајући да важи
$$\binom{642}{14} = \overline{2{*}\,094\,957\,4{*}6\,{*}41\,363\,{*}2{*}\,048\,{*}35\,6{*}0},$$
одредити цифре означене звездицом.

3. Означимо n-ти Мерсенов број (не обавезно прост) са M_n (тј. $M_n = 2^n - 1$). Доказати да број M_n ни за једно n не може бити потпун степен природног броја.

   Једна идеја: Претпоставити супротно: да је број $2^n - 1$ облика k^m за неке природне бројеве k и m, $m > 1$. Раздвојити случајеве када је m паран и када је непаран број. У првом случају добити контрадикцију разматрањем по модулу 8. У другом случају добити контрадикцију применом формуле за растављање на чиниоце збира два m-та степена.

4. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_k$ неки природни бројеви, и нека је b природан број узајамно прост са сваким од бројева a_i. Посматрајмо полиноме $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ дате са $P_i(x) = a_i x + b$ за $1 \leqslant i \leqslant k$. Доказати да ова колекција полинома испуњава услове Диксонове хипотезе.

ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
20. јануар 2020

Професор: Бојан Башић | Асистент: Стефан Хачко

1. Означимо са $\tau(n)$ број делилаца природног броја n. Доказати да за сваки природан број k постоји природан број n такав да важи $k = \tau(n)$.

2. Знајући да важи
$$\binom{642}{14} = \overline{2{*}\,094\,957\,4{*}6\,{*}41\,363\,{*}2{*}\,048\,{*}35\,6{*}0},$$
одредити цифре означене звездицом.

3. Означимо n-ти Мерсенов број (не обавезно прост) са M_n (тј. $M_n = 2^n - 1$). Доказати да број M_n ни за једно n не може бити потпун степен природног броја.

   Једна идеја: Претпоставити супротно: да је број $2^n - 1$ облика k^m за неке природне бројеве k и m, $m > 1$. Раздвојити случајеве када је m паран и када је непаран број. У првом случају добити контрадикцију разматрањем по модулу 8. У другом случају добити контрадикцију применом формуле за растављање на чиниоце збира два m-та степена.

4. Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_k$ неки природни бројеви, и нека је b природан број узајамно прост са сваким од бројева a_i. Посматрајмо полиноме $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_k(x)$ дате са $P_i(x) = a_i x + b$ за $1 \leqslant i \leqslant k$. Доказати да ова колекција полинома испуњава услове Диксонове хипотезе.