ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
11. јун 2018

Професор: Бојан Башић Асистент: Стефан Хачко

1. Нека је p_1 прост број, и за $k \geqslant 2$ дефинишимо $p_k = 2p_{k-1} - 1$. Да ли је могуће да сви чланови низа $p_1, p_2, p_3 \dots$ (бесконачне дужине) буду прости бројеви?

   Једна идеја: Најпре доказати формулу $p_k = 2^{k-1}p_1 - 2^{k-1} + 1$, а потом уочити да се за $k = p_1$ може добити користан закључак за ову вредност посматрану по погодно одабраном модулу.

2. Означимо са $R(n)$ број међусобно неподударних правоугаоника који се могу уписати у кружницу пречника n. Нека је n задат природан број, и нека је q прост број за који важи $q \nmid n$ и $q \equiv 1 \pmod 4$. Доказати:

$$R(nq) = 3R(n) + 1.$$

3. Да ли у прстену $\mathbb{Z}[\sqrt{34}]$ постоји елемент чија норма износи -1?

4. За природан број n, потребно је разврстати n објеката у одређен број корпи, међу којима су неке црвене, неке плаве, а неке беле (од сваке боје постоји бар по једна корпа). Перица је бројао на колико се начина ово може извести а да притом буде искоришћена бар једна црвена и бар једна плава корпа. Микица је бројао на колико се начина ово може извести а да сви објекти буду искључиво у белим корпама. Ако се испоставило да су Перица и Микица добили исти резултат, одредити n. (Свака два објекта се међусобно разликују, и сваке две корпе се међусобно разликују.)

   Једна идеја: Ако постоји c црвених, p плавих и b белих корпи, преко ових променљивих изразити вредности које су Перица и Микица добили (вредност коју је бројао Перица можемо добити одузимајући од укупног броја расподела, што је $(c+p+b)^n$, број оних расподела које не одговарају Перичином услову), па упоређивањем добијених израза установити колика мора бити вредност броја n.

ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
11. јун 2018

Професор: Бојан Башић Асистент: Стефан Хачко

1. Нека је p_1 прост број, и за $k \geqslant 2$ дефинишимо $p_k = 2p_{k-1} - 1$. Да ли је могуће да сви чланови низа $p_1, p_2, p_3 \dots$ (бесконачне дужине) буду прости бројеви?

   Једна идеја: Најпре доказати формулу $p_k = 2^{k-1}p_1 - 2^{k-1} + 1$, а потом уочити да се за $k = p_1$ може добити користан закључак за ову вредност посматрану по погодно одабраном модулу.

2. Означимо са $R(n)$ број међусобно неподударних правоугаоника који се могу уписати у кружницу пречника n. Нека је n задат природан број, и нека је q прост број за који важи $q \nmid n$ и $q \equiv 1 \pmod 4$. Доказати:

$$R(nq) = 3R(n) + 1.$$

3. Да ли у прстену $\mathbb{Z}[\sqrt{34}]$ постоји елемент чија норма износи -1?

4. За природан број n, потребно је разврстати n објеката у одређен број корпи, међу којима су неке црвене, неке плаве, а неке беле (од сваке боје постоји бар по једна корпа). Перица је бројао на колико се начина ово може извести а да притом буде искоришћена бар једна црвена и бар једна плава корпа. Микица је бројао на колико се начина ово може извести а да сви објекти буду искључиво у белим корпама. Ако се испоставило да су Перица и Микица добили исти резултат, одредити n. (Свака два објекта се међусобно разликују, и сваке две корпе се међусобно разликују.)

   Једна идеја: Ако постоји c црвених, p плавих и b белих корпи, преко ових променљивих изразити вредности које су Перица и Микица добили (вредност коју је бројао Перица можемо добити одузимајући од укупног броја расподела, што је $(c+p+b)^n$, број оних расподела које не одговарају Перичином услову), па упоређивањем добијених израза установити колика мора бити вредност броја n.