ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА

27. август 2019

Професор: Бојан Башић — Асистент: Стефан Хачко

1. Нека за природне бројеве n и k важи $n \equiv 3 \pmod 9$ и $k \equiv 9 \pmod{73}$. Доказати да је број $k \cdot 2^n + 1$ дељив са 73.

2. Нека је S непразан скуп чији су сви елементи прости бројеви, и нека је испуњено: за све $p, q \in S$ (не обавезно различите) бар један прост фактор броја $pq + 1$ такође је у скупу S. Доказати да се у скупу S налази бар један прост број облика $4k + 1$.

   Једна идеја: Претпоставити супротно и одабрати произвољно $p \in S$. Разликовати случајеве $p = 2$ и $p \neq 2$. У другом случају применити услов задатка на број $p^2 + 1$, па користећи особине квадратних остатака добити контрадикцију с полазном претпоставком.

3. Под претпоставком да постоји бесконачно много Фермаових простих бројева, доказати да једначина
$$\varphi(n) = \varphi(n+2)$$
   има бесконачно много решења.

   Једна идеја: Узети $n + 2 = 2F_k$.

4. Доказати да постоји бесконачно много тројки природних бројева (a, b, c) за које важи $a + b = c$, $\mathrm{rad}(abc) < c$, и један од бројева a, b, c је степен двојке већи од 1.

   Једна идеја: Посматрати тројке облика $(1, 2^{6n} - 1, 2^{6n})$.