ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
7. септембар 2018

Професор: Бојан Башић — Асистент: Стефан Хачко

1. Да ли постоји бесконачно дугачак низ простих бројева са особином да се сваки следећи члан низа за један разликује од удвострученог претходног члана? (На пример, такву особину има низ $2, 3, 5, 11, 23, 47$, но у овом случају се он не може даље продужити.)

   Једна идеја: Показати да, уколико су q_{k-2}, q_{k-1}, q_k три узастопна члана таквог низа за која важи $q_{k-1} = 2q_{k-2} - 1$ и $q_k = 2q_{k-1} + 1$ (или обратно), тада један од бројева q_{k-2}, q_{k-1}, q_k мора бити дељив са 3. Одавде закључити да, од неког момента надаље, низ мора константно пратити или образац $q_k = 2q_{k-1} - 1$, или $q_k = 2q_{k-1} + 1$. У првом случају искористити први задатак из јунског испитног рока (подсећање, у њему се тврди да не постоји бесконачно дугачак низ простих бројева који прати образац $p_k = 2p_{k-1} - 1$; што се доказује установљавањем најпре формуле $p_k = 2^{k-1}p_1 - 2^{k-1} + 1$, а потом посматрањем ове формуле за $k = p_1$ по одређеном модулу). Други случај размотрити слично као први.

2. Природан број n је дељив са 2018 и може се представити као збир квадрата два цела броја. Доказати да се и број $\frac{n}{2018}$ може представити као збир квадрата два цела броја.

3. Нека је q прост број облика $q = 8k + 7$. Доказати: $q \mid M_{\frac{q-1}{2}}$ (овим смо означили одговарајући Мерсенов број).

   Једна идеја: Искористити одређену конгруенцију за Лежандров симбол $\left(\frac{2}{q}\right)$ по модулу q.

4. a) У прстену $\mathbb{Z}[\sqrt{-102}]$ наћи сва нееквивалентна растављања броја 10201 на два нејединична чиниоца.

   b) У сваком од растављања из дела под a) испитати који од добијених чиниоца су прости у $\mathbb{Z}[\sqrt{-102}]$.

ПИСМЕНИ ИСПИТ ИЗ ТЕОРИЈЕ БРОЈЕВА
7. септембар 2018

Професор: Бојан Башић — Асистент: Стефан Хачко

1. Да ли постоји бесконачно дугачак низ простих бројева са особином да се сваки следећи члан низа за један разликује од удвострученог претходног члана? (На пример, такву особину има низ $2, 3, 5, 11, 23, 47$, но у овом случају се он не може даље продужити.)

   Једна идеја: Показати да, уколико су q_{k-2}, q_{k-1}, q_k три узастопна члана таквог низа за која важи $q_{k-1} = 2q_{k-2} - 1$ и $q_k = 2q_{k-1} + 1$ (или обратно), тада један од бројева q_{k-2}, q_{k-1}, q_k мора бити дељив са 3. Одавде закључити да, од неког момента надаље, низ мора константно пратити или образац $q_k = 2q_{k-1} - 1$, или $q_k = 2q_{k-1} + 1$. У првом случају искористити први задатак из јунског испитног рока (подсећање, у њему се тврди да не постоји бесконачно дугачак низ простих бројева који прати образац $p_k = 2p_{k-1} - 1$; што се доказује установљавањем најпре формуле $p_k = 2^{k-1}p_1 - 2^{k-1} + 1$, а потом посматрањем ове формуле за $k = p_1$ по одређеном модулу). Други случај размотрити слично као први.

2. Природан број n је дељив са 2018 и може се представити као збир квадрата два цела броја. Доказати да се и број $\frac{n}{2018}$ може представити као збир квадрата два цела броја.

3. Нека је q прост број облика $q = 8k + 7$. Доказати: $q \mid M_{\frac{q-1}{2}}$ (овим смо означили одговарајући Мерсенов број).

   Једна идеја: Искористити одређену конгруенцију за Лежандров симбол $\left(\frac{2}{q}\right)$ по модулу q.

4. a) У прстену $\mathbb{Z}[\sqrt{-102}]$ наћи сва нееквивалентна растављања броја 10201 на два нејединична чиниоца.

   b) У сваком од растављања из дела под a) испитати који од добијених чиниоца су прости у $\mathbb{Z}[\sqrt{-102}]$.