

Писмени испит из Алгебре 1

24. јануар 2023.

1. a) Одредити све подгрупе диједарске групе D_5 .
b) Доказати да постоји бесконачно много група које имају тачно 6 подгрупа различите кардиналности.
2. Нека су P и R комутативни прстени. Доказати или оповргнути следећа тврђења:
 - a) Елемент $(x, y) \in P \times R$ је идемпотентан ако и само ако је x идемпотентан у прстену P и y идемпотентан у прстену R .
 - b) Елемент $(x, y) \in P \times R$ је нилпотентан ако и само ако је x нилпотентан у прстену P и y нилпотентан у прстену R .
 - c) Елемент $(x, y) \in P \times R$ је делитељ нуле ако и само ако је x делитељ нуле у прстену P и y делитељ нуле у прстену R .
3. Одредити све природне троцифрене бројеве x који се завршавају са 9 и за које важи $x^2 + 4 \equiv 4x \pmod{7}$.
4. Дана је реална матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & a \end{bmatrix}.$$

- a) Одредити реални параметар a тако да је минимални полином матрице A четвртог степена и да је 0 једноструки карактеристични корен матрице A .
- b) Одредити рационалну каноничку форму сличности матрице A где је параметар a вредност добијена у делу под а).