

Polinomne matrice. Karakteristični koreni i vektori

5.1. Polinomne matrice

Do sada smo posmatrali matrice nad poljem, tj. matrice čiji su elementi iz nekog polja. Međutim, u raznim oblastima matematike i drugih nauka pojavljuju se problemi u kojima elementi matrica nisu iz polja već su elementi drugih struktura. Jedna važna klasa takvih matrica su matrice čiji su elementi polinomi i takve matrice se nazivaju polinomne matrice. Proučavanje tih matrica omogućuje da se dobiju rezultati ne samo o polinomnim matricama, već i značajni rezultati o matricama nad poljem koje smo ranije razmatrali.

DEFINICIJA 5.1. *Neka je F polje, a $F[\lambda]$ prsten polinoma po λ sa koeficijentima iz F . Polinomna matrica formata $m \times n$ je svako preslikavanje $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \rightarrow F[\lambda]$. Kao i kod matrica nad poljem, koje su definisane ranije, polinomne matrice prikazujemo u obliku pravougaone tablice sa m vrsta i n kolona:*

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \dots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Gornju matricu ćemo skraćeno označavati sa $[a_{ij}(\lambda)]$.

Skup svih polinomnih matrica formata $m \times n$ nad $F[\lambda]$ označavaćemo sa $F[\lambda]^{m,n}$.

Operacije na skupu polinomnih matrica i nazive nekih klasa polinomnih matrica definišemo analogno odgovarajućim definicijama za matrice nad poljem (Definicije 4.1–4.4).

DEFINICIJA 5.2. *Ako je*

$$(5.1) \quad A(\lambda) = A_p \lambda^p + \dots + A_1 \lambda + A_0,$$

gde su A_i , $i = 0, 1, \dots, p$, matrice iz $F^{n,n}$, $A_p \neq 0$, onda se $A(\lambda)$ naziva matrični polinom stepena p . Pri tome, usvajamo konvenciju da je $A\lambda = \lambda A$, $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$, dakle,

$$A\lambda = \lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sabirajući elemente na desnoj strani jednakosti (5.1), dobija se da je $A(\lambda)$ polinomna matrica. Očividno, svaki matrični polinom može se na jedinstven način prikazati kao polinomna matrica.

Važi i obrnuto, ako je

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

polinomna matrica, a p maksimalan stepen polinoma $a_{ij}(\lambda)$, $i, j = 1, \dots, n$, onda se $A(\lambda)$ može prikazati kao matrični polinom stepena p

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + \dots + A_1 \lambda + A_0,$$

gde je $A_i \in F^{n,n}$, $i = 0, 1, \dots, p$.

Primer.

Matrica

$$A = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & \lambda^2 - 3\lambda - 1 \\ \lambda^3 + 5\lambda & 2\lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

može se prikazati kao matrični polinom

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + \dots + A_1 \lambda + A_0, \quad A_i \in F^{n,n}$$

matrični polinom. Ako se u tom polinomu stavi $\lambda = c \in F$, dobija se

$$A(c) = A_p c^p + \dots + A_1 c + A_0,$$

i ta vrednost ne zavisi od toga da li je λ pisano sa leve ili desne strane u polinomu $A(\lambda)$.

Međutim, ako se u matičnom polinomu $A(\lambda)$ stavi $\lambda = C \in F^{n,n}$, s obzirom da množenje matrica nije komutativno, mogu se dobiti različite vrednosti za $A(C)$, zavisno od toga da li je λ pisano sa leve ili desne strane:

$$A_r(C) = A_p C^p + \cdots + A_1 C + A_0$$

i

$$A_l(C) = C^p A_p + \cdots + C A_1 + A_0.$$

$A_r(C)$ se naziva desna funkcionalna vrednost matičnog polinoma $A(\lambda)$ za $\lambda = C$, a $A_l(C)$ leva funkcionalna vrednost matičnog polinoma $A(\lambda)$ za $\lambda = C$.

Iako smo naveli da se svaki matični polinom može prikazati kao polinoma matrica i obrnuto, zamena promenljive λ matricom moguća je samo u matičnom polinomu, dok u polinomnoj matrici to nije moguće (jer bi se pojavili zbrojevi matrica i skalara, što nije definisano).

TEOREMA 5.1. *Ako su*

$$A(\lambda) = A_p \lambda^p + \cdots + A_1 \lambda + A_0,$$

i

$$B(\lambda) = B_q \lambda^q + \cdots + B_1 \lambda + B_0, \quad |B_q| \neq 0,$$

matični polinomi, onda postoje jedinstveni matični polinomi $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ i $Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)$, takvi da je

$$A(\lambda) = Q_1(\lambda)B(\lambda) + R_1(\lambda)$$

i

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_2(\lambda) + R_2(\lambda),$$

gde je $R_1(\lambda) = 0$ ili $\deg(R_1(\lambda)) < \deg(B(\lambda))$; i $R_2(\lambda) = 0$ ili $\deg(R_2(\lambda)) < \deg(B(\lambda))$.

$R_1(\lambda)$ se naziva desni ostatak, a $R_2(\lambda)$ levi ostatak pri deobi matičnog polinoma $A(\lambda)$ matičnim polinomom $B(\lambda)$.

Ako je $R_1(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ je desni delitelj $A(\lambda)$, a ako je $R_2(\lambda) = 0$, $B(\lambda)$ je levi delitelj $A(\lambda)$.

Za deljenje matičnih polinoma važi teorema analogna Bezuvovoj teoremi za polinome nad poljem.

TEOREMA 5.2. *Ako je $A(\lambda) = A_p \lambda^p + \cdots + A_1 \lambda + A_0$ matični polinom nad $F[\lambda]$, a $B \in F^{n,n}$, onda je desni ostatak R_1 pri deobi $A(\lambda)$ sa $\lambda E - B$*

$$R_1 = A_p B^p + \cdots + A_1 B + A_0 = A_r(B),$$

a levi ostatak je

$$R_2 = B^p A_p + \cdots + B A_1 + A_0 = A_l(B).$$

DOKAZ. Na osnovu Teoreme 5.1 postoje matricni polinomi $Q(\lambda)$ i R_1 takvi da je

$$(5.2) \quad A(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda E - B) + R_1,$$

(pri čemu je ostatak označen sa R_1 , a ne sa $R_1(\lambda)$, jer je delilac $\lambda E - B$ linearan, pa je ostatak konstanta).

Ako je $Q(\lambda) = Q_m \lambda^m + \cdots + Q_1 \lambda + Q_0$, onda iz

$$A(\lambda) = (Q_m \lambda^m + \cdots + Q_1 \lambda + Q_0)(\lambda E - B) + R_1,$$

sledi

$$A(\lambda) = Q_m \lambda^{m+1} + (Q_{m-1} - Q_m B) \lambda^m + \cdots + (Q_0 - Q_1 B) \lambda - Q_0 B + R_1.$$

Stavljajući u prethodnu jednakost $\lambda = B$ sa desne strane, dobija se

$$R_1 = A_r(B).$$

Analogno se dokazuje da je $R_2 = A_l(B)$. □

NAPOMENA. S obzirom da množenje koeficijenata matricnih polinoma nije komutativno, ne može se u (5.2) staviti $\lambda = B$ pre nego što se izračuna proizvod $Q(\lambda)(\lambda E - B)$.

5.2. Karakteristični polinom matrice

DEFINICIJA 5.3. Ako je $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$, onda se polinomna matrica

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

naziva karakteristična matrica matrice A .

Determinanta karakteristične matrice matrice A je normalizovan polinom n -tog stepena

$$|\lambda E - A| = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0$$

koji se naziva karakteristični polinom matrice A .

Jednačina

$$|\lambda E - A| = 0$$

se naziva karakteristična jednačina matrice A .

DEFINICIJA 5.4. Ako je $A \in F^{n,n}$, $f(\lambda) = a_m\lambda^m + \dots + a_1\lambda + a_0 \in F[\lambda]$, onda je

$$f(A) = a_mA^m + \dots + a_1A + a_0E.$$

TEOREMA 5.3. (Cayley-Hamilton) Ako je $A \in F^{n,n}$ matrica čiji je karakteristični polinom $f(\lambda)$, onda je $f(A) = O$. (Svaka matrica zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu.)

DOKAZ. Teorema 4.38 je dokazana za matrice nad poljem, međutim u dokazu te teoreme nigde nije korišćeno deljenje elemenata polja, pa se odgovarajući dokaz može primeniti i na polinomne matrice (čiji elementi čine prsten, a ne polje). Prema tome, Teorema 4.38 važi i za polinomne matrice.

Tada je

$$(\lambda E - A)(\lambda E - A)^* = |\lambda E - A|E = f(\lambda)E.$$

Vidimo da je matični polinom $f(\lambda)E$ deljiv matičnim polinomom $\lambda E - A$ (ostatak je nula), a kako je na osnovu Teoreme 5.2 ostatak jednak $f(A)E$, sledi $f(A)E = f(A) = O$. $\square$

NAPOMENA. U matičnom polinomu $f(\lambda)E$ leva i desna funkcionalna vrednost za $\lambda = A$ su jednake jer su koeficijenti matičnog polinoma $f(\lambda)E$ matrice koje su komutativne sa svakom matricom.

Napominjemo da sledeći „dokaz” Kejli-Hamiltonove teoreme nije ispravan:

Ako je $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ karakteristični polinom matrice A , stavljajući u prethodnu jednakost $\lambda = A$ dobija se da je $f(A) = |AE - A| = O$.

Gornje zaključivanje nije korektno jer jednakost $f(\lambda) = |\lambda E - A|$ važi samo za skalare λ , dakle, greška je u tome što je u determinanti $|\lambda E - A|$ umesto promenljive λ stavljena matrica. Na primer, ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, onda stavljajući A umesto λ u $|\lambda E - A|$ dobija se nedefinisan izraz:

$$\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 1 & -2 \\ -3 & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - 4 \end{vmatrix}.$$

Stavljanje matrice umesto λ u karakterističnim polinomu moguće je samo kada je taj polinom u obliku $f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, (Definicija 5.4).

Primer.

1. Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ karakteristični polinom je

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 0 \\ -4 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)((\lambda - 1)^2 - 4) \\ = \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3,$$

pa je

$$A^3 - 3A^2 - A + 3E = O.$$

Koristeći Kejli-Hamiltonovu teoremu možemo, između ostalog, odrediti matricu A^{-1} . Naime, matrica A je regularna jer je slobodan član karakterističnog polinoma te matrice različit od 0.¹ Videli smo da je $A^3 - 3A^2 - A + 3E = O$, pa množeći ovu jednakost sa A^{-1} dobijamo:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3}(A^2 - 3A - E) = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

5.3. Elementarne transformacije polinomnih matrica i ekvivalencija polinomnih matrica

DEFINICIJA 5.5. *Elementarne transformacije polinomne matrice $A(\lambda) \in F[\lambda]^{m,n}$ su sledeće transformacije:*

- 1) *Zamena mesta dve vrste (kolone).*
- 2) *Množenje svih elemenata jedne vrste (kolone) konstantom različitom od nule.*
- 3) *Dodavanje elemenata jedne vrste (kolone), prethodno pomnoženih nekim polinomom, odgovarajućim elementima neke druge vrste (kolone).*

Elementarne polinomne matrice definišu se i označavaju analogno odgovarajućim definicijama za elementarne matrice nad poljem (4.12).

Za elementarne polinomne matrice važe tvrđenja analogna tvrđenjima 4.13 i 4.14.

TEOREMA 5.4. *Determinante elementarnih polinomnih matrica su konstante različite od nule.*

¹Ako je $|\lambda E - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ karakteristični polinom matrice A , onda je $|-A| = |0E - A| = a_0$.

DOKAZ. Neposredno sledi izračunavanjem odgovarajućih determinanti. $\square$

DEFINICIJA 5.6. *Polinomna matrica $A(\lambda)$ je ekvivalentna sa matricom $B(\lambda)$ ako postoje matrice $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ jednake proizvodu elementarnih matrica takve da je*

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda),$$

tj. $A(\lambda)$ je ekvivalentna sa $B(\lambda)$, ako se $A(\lambda)$ može elementarnim transformacijama svesti na $B(\lambda)$.

Iz ranijeg neposredno sledi da je relacija definisana u prethodnoj teoremi jedna relacija ekvivalencije.

Rang polinomnih matrica ćemo definisati pomoću minora, jer se u toj definiciji ne koristi deljenje elemenata iz polja, pa se rang može potpuno isto definisati kao što je definisan za matrice nad poljem. Dakle, rang polinomne matrice $A(\lambda)$ je broj r takav da su svi njeni minori reda većeg od r , ako postoje, jednaki 0, i postoji bar jedan minor reda r koji je različit od nule. Rang nula matrice je nula.

Važi sledeća teorema koju navodimo bez dokaza.

TEOREMA 5.5. *Ekvivalentne polinomne matrice imaju isti rang.*

DEFINICIJA 5.7. *Polinomna matrica $A(\lambda)$ reda n je regularna ako je njen rang n , tj. ako je $|A(\lambda)| \neq 0$.*

DEFINICIJA 5.8. *Polinomna matrica $A(\lambda)$ je invertibilna ako postoji polinomna matrica $B(\lambda)$ takva da je*

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E.$$

Matrica $B(\lambda)$ naziva se inverzna matrica za matricu $A(\lambda)$.

Polinomna matrica može biti regularna, a da ne bude invertibilna, što nije slučaj sa matricama nad poljem F . Primer za to je naveden na strani 103.

5.4. Smitova kanonička matrica

TEOREMA 5.6. *Ako je $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ matrica ranga r , onda je ona ekvivalentna sa matricom*

$$N(\lambda) = \text{diag}(f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda), 0, \dots, 0),$$

gde su $f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ normalizovani polinomi nad F takvi da je $f_i(\lambda) \nmid f_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, \dots, r-1$.

DOKAZ. Ako je $A(\lambda) = O$, onda je ona sama traženog oblika.

Neka je sada $A(\lambda) \neq O$. U skupu svih polinomnih matrica ekvivalentnih sa $A(\lambda)$, neka je $B(\lambda)$ matrica čiji je jedan elemenat polinom najmanjeg stepena među svim elementima svih matrica koje su ekvivalentne sa $A(\lambda)$ (ako ima više takvih polinoma uzimamo bilo koji). Taj elemenat ćemo elementarnim transformacijama dovesti na mesto (1,1) matrice i neka je

$$C(\lambda) = \begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & c_{12}(\lambda) & \dots & c_{1n}(\lambda) \\ c_{21}(\lambda) & c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}(\lambda) & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

tako dobijena matrica, gde je $c_{11}(\lambda)$ polinom najmanjeg stepena među svim elementima svih matrica koje su ekvivalentne sa $A(\lambda)$

Dokažimo da su svi elementi prve vrste i prve kolone matrice $C(\lambda)$ deljivi sa $c_{11}(\lambda)$. Za svaka dva polinoma jedinstveno postoje količnik i ostatak, pa za $c_{21}(\lambda)$, $c_{11}(\lambda)$ važi

$$c_{21}(\lambda) = q(\lambda)c_{11}(\lambda) + r(\lambda),$$

pri čemu je stepen ostatka $r(\lambda)$ manji od stepena delioca $c_{11}(\lambda)$ ili je $r(\lambda) = 0$.

Ako sada prvu vrstu matrice $C(\lambda)$ pomnožimo sa $-q(\lambda)$ i dodamo drugoj, dobija se matrica

$$C'(\lambda) = \begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & c_{12}(\lambda) & \dots & c_{1n}(\lambda) \\ r(\lambda) & c'_{22}(\lambda) & \dots & c'_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}(\lambda) & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

koja je ekvivalentna sa polaznom matricom $A(\lambda)$ (jer je ekvivalencija polinomnih matrica jedna relacija ekvivalencije), a jedan njen elemenat je $r(\lambda)$ koji je stepena manjeg od najmanjeg stepena svih elemenata svih matrica koje su ekvivalentne sa $A(\lambda)$ ili je $r(\lambda) = 0$. Dakle, $r(\lambda) = 0$, tj. $c_{21}(\lambda)$ je deljiv sa $c_{11}(\lambda)$, a matrica $C'(\lambda)$ je

$$C'(\lambda) = \begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & c_{12}(\lambda) & \dots & c_{1n}(\lambda) \\ 0 & c'_{22}(\lambda) & \dots & c'_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}(\lambda) & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Analognim postupkom, vršeći elementarne transformacije na matrici $C'(\lambda)$ dobija se matrica $D(\lambda)$, ekvivalentna sa polaznom matricom $A(\lambda)$,

koja u prvoj vrsti i prvoj koloni ima sve nule sem prvog elementa

$$D(\lambda) = \begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22}(\lambda) & \dots & d_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_{n2}(\lambda) & \dots & d_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Slično se može pokazati da su i svi elementi $d_{ij}(\lambda)$ $i = 2, \dots, n$ $j = 2, \dots, n$ deljivi sa $c_{11}(\lambda)$. Zaista, ako u matrici $D(\lambda)$ dodamo i -tu vrstu prvoj dobija se matrica

$$D'(\lambda) = \begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & d_{i2}(\lambda) & \dots & d_{in}(\lambda) \\ 0 & d_{22}(\lambda) & \dots & d_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & d_{n2}(\lambda) & \dots & d_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

a onda, analognim postupkom kojim smo u matrici $C(\lambda)$ pokazali da su elementi prve vrste i prve kolone deljivi sa $c_{11}(\lambda)$, dokazujemo da su svi elementi $d_{i2}(\lambda), \dots, d_{in}(\lambda)$ deljivi sa $c_{11}(\lambda)$.

Sledeći korak je transformisanje elementarnim transformacijama bloka u matrici $D(\lambda)$ koji čine sve vrste i sve kolone sem prve vrste i prve kolone, na potpuno isti način kao što je transformisana matrica $C(\lambda)$. U tom postupku prva vrsta i prva kolona matrice $D(\lambda)$ će ostati neizmenjene. Tako se dobija matrica $F(\lambda)$, ekvivalentna sa $D(\lambda)$ (a to znači i sa $A(\lambda)$),

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} c_{11}(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d'_{22}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & f_{33}(\lambda) & \dots & f_{3n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & f_{n3}(\lambda) & \dots & f_{nn}(\lambda) \end{bmatrix},$$

S obzirom da smo do matrice $F(\lambda)$ došli vršenjem elementarnih transformacija, svi elementi matrice $F(\lambda)$ su i dalje deljivi sa $c_{11}(\lambda)$, a svi $f_{ij}(\lambda)$ su deljivi sa $d'_{22}(\lambda)$.

Nastavljajući tako dalje dobijamo dijagonalnu matricu, i ako u toj dijagonalnoj matrici sve polinome na dijagonali normalizujemo (množeći odgovarajuće vrste recipročnom vrednošću vodećeg koeficijenta polinoma),

konačno se dobija matrica ekvivalentna sa matricom $A(\lambda)$

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

gde su $f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ normalizovani polinomi nad F takvi da je $f_i(\lambda) \mid f_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, \dots, r-1$.

Da se na dijagonali matrice $N(\lambda)$ zaista nalazi tačno r polinoma različitih od nule, sledi iz toga što ekvivalentne matrice imaju isti rang, matrica $A(\lambda)$ je ranga r , a rang matrice $N(\lambda)$ je očigledno jednak broju polinoma različitih od nule na dijagonali te matrice. $\square$

DEFINICIJA 5.9. Matrica $N(\lambda)$ iz prethodne teoreme naziva se Smitova (Smith) kanonička (ili normalna) matrica za matricu $A(\lambda)$.

U Teoremi 5.6 dokazali smo da u svakoj klasi međusobno ekvivalentnih kvadratnih polinomnih matrica postoji bar jedna Smitova kanonička matrica, a kasnije ćemo dokazati da Smitova matrica postoji jedinstveno.

DEFINICIJA 5.10. Ako je $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$, onda sa $d_{kA}(\lambda)$ označavamo najveći zajednički delitelj svih minora reda k te matrice. Pri tome, ako su svi minori reda k jednaki 0, po definiciji je $d_{kA}(\lambda) = 0$.

TEOREMA 5.7. Ako su $A(\lambda) = [a_{ij}(\lambda)]$ i $B(\lambda) = [b_{ij}(\lambda)]$ ekvivalentne polinomne matrice reda n , onda je $d_{kA}(\lambda) = d_{kB}(\lambda)$, za svako $k = 1, \dots, n$.

DOKAZ. Kako je $A(\lambda) \sim B(\lambda)$ ako i samo ako se $A(\lambda)$ može dobiti od $B(\lambda)$ vršenjem konačnog niza elementarnih transformacija, dovoljno je dokazati da se najveći zajednički delitelji minora reda k matrice $B(\lambda)$ neće promeniti posle vršenja jedne elementarne transformacije na toj matrici.

1. Ako je $A(\lambda)$ dobijeno od $B(\lambda)$ množenjem neke vrste (ili kolone) skalarom $\alpha \neq 0$, onda su odgovarajući minori tih matrica ili jednaki ili je jedan od njih jednak drugom pomnoženom sa α . Kako množenje konstantom α ne utiče ne deljivost, sledi da je u ovom slučaju $d_{kA}(\lambda) = d_{kB}(\lambda)$.

2. Zamena mesta dve vrste (ili kolone) samo menja znake pojedinih minora, pa sledi da je i u ovom slučaju $d_{kA}(\lambda) = d_{kB}(\lambda)$.

3. Neka je sada $A(\lambda)$ dobijena od $B(\lambda)$ dodavanjem elemenata j -te vrste pomnožene polinomom $p(\lambda)$ odgovarajućim elementima i -te vrste. Minori sa sada mogu podeliti na tri klase koje ćemo posebno analizirati.

a) Minori koji ne sadrže elemente i -te vrste su u obe matrice jednaki.

b) Posmatrajmo minore koji sadrže delove i -te i j -te vrste. S obzirom da se vrednost determinante ne menja ako se elementi jedne vrste, prethodno pomnoženi nekim polinomom, dodaju odgovarajućim elementima neke druge vrste, sledi da su i u ovom slučaju odgovarajući minori jednaki.

c) Sada ćemo posmatrati minore koji sadrže delove i -te vrste, a ne sadrže delove j -te vrste. Neka je jedan takav minor matrice $A(\lambda)$

$$M_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}(\lambda) + p(\lambda)b_{j1}(\lambda) & \dots & b_{in}(\lambda) + p(\lambda)b_{jn}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

a odgovarajući minor matrice $B(\lambda)$

$$M_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}(\lambda) & \dots & b_{in}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

ostali elementi (koji nisu navedeni) ovih minora su jednaki.

Dalje je

$$\begin{aligned} M_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ b_{i1}(\lambda) & \dots & b_{in}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + p(\lambda) \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots \\ b_{j1}(\lambda) & \dots & b_{jn}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \\ &= M_B(\lambda) \pm p(\lambda) \overline{M_B(\lambda)}. \end{aligned}$$

$M_B(\lambda)$ i $\overline{M_B(\lambda)}$ su minori matrice $B(\lambda)$, dakle, deljivi sa $d_{kB}(\lambda)$, pa iz gornje jednakosti sledi da je i $M_A(\lambda)$ deljiv sa $d_{kB}(\lambda)$.

Prema tome, iz a), b) i c) sledi da su svi minori formata $k \times k$ matrice $A(\lambda)$ deljivi sa $d_{kB}(\lambda)$, a to znači da je i $d_{kA}(\lambda)$ deljiv sa $d_{kB}(\lambda)$.

Ako se $A(\lambda)$ može dobiti od $B(\lambda)$ vršenjem jedne elementarne transformacije, onda se vršenjem inverzne elementarne transformacije na matrici $A(\lambda)$ dobija $B(\lambda)$, dakle, $d_{kA}(\lambda) = d_{kB}(\lambda)$. $\square$

Dokazaćemo sada da za datu polinomnu matricu $A(\lambda)$ Smitova kanonička matrica postoji jedinstveno.

Neka je za matricu $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ ranga r Smitova kanonička matrica

$$N(\lambda) = \begin{bmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_r(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

S obzirom da je $A(\lambda)$ ranga r , u matrici $N(\lambda)$ na dijagonali ima tačno r elemenata različitih od nule. Očigledno je najveći zajednički delitelj svih minora formata $k \times k$ matrice $N(\lambda)$, $d_{kN}(\lambda) = f_1(\lambda)f_2(\lambda)\dots f_k(\lambda)$, $k = 1, \dots, r$, a iz prethodne teoreme znamo da je $d_{kA}(\lambda) = d_{kN}(\lambda)$, za svako $k = 1, \dots, n$.

Dakle,

$$\begin{aligned} d_{1A}(\lambda) &= f_1(\lambda), \\ d_{2A}(\lambda) &= f_1(\lambda)f_2(\lambda), \\ &\dots\dots\dots \\ d_{rA}(\lambda) &= f_1(\lambda)f_2(\lambda)\dots f_r(\lambda), \end{aligned}$$

a odatle sledi da je

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= d_{1A}(\lambda), \\ f_2(\lambda) &= \frac{d_{2A}(\lambda)}{d_{1A}(\lambda)}, \\ &\dots\dots\dots \\ f_r(\lambda) &= \frac{d_{rA}(\lambda)}{d_{(r-1)A}(\lambda)}. \end{aligned}$$

S obzirom da najveći zajednički delitelji $d_{1A}(\lambda), \dots, d_{rA}(\lambda)$ odgovarajućih minora matrice $A(\lambda)$ postoje jedinstveno, sledi da su i $f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ jedinstveni. To znači da za svaku polinomnu matricu $A(\lambda)$ postoji tačno jedna Smitova kanonička matrica.

DEFINICIJA 5.11. *Ako je $A(\lambda)$ polinomna matrica, a $N(\lambda)$ njena Smitova kanonička matrica, onda se polinomi sa dijagonale matrice $N(\lambda)$ nazivaju invarijantni faktori matrice $A(\lambda)$. Invarijantni faktori koji su jednaki 1 nazivaju se trivijalni, ostali su netrivijalni.*

Pošto je ekvivalencija polinomnih matrica jedna relacija ekvivalencije, sledi da važi sledeća teorema.

TEOREMA 5.8. *Dve kvadratne polinomne matrice su ekvivalentne ako i samo ako imaju redom jednake invarijantne faktore (tj. ako su ekvivalentne sa istom Smitovom kanoničkom matricom).*

Takođe očigledno važi i sledeća teorema.

TEOREMA 5.9. *Dve polinomne matrice $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ reda n su ekvivalentne ako i samo ako je $d_{kA}(\lambda) = d_{kB}(\lambda)$, za svako $k = 1, \dots, n$.*

Primer.

Ispitaćemo da li su sledeće dve matrice ekvivalentne

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - \lambda + 1 \end{bmatrix},$$

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 + \lambda & \lambda^2 + 1 & \lambda^3 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & -2\lambda & \lambda^3 - \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

Najveći zajednički delitelj minora matrice A su:

$$d_1(\lambda) = 1, \quad d_2(\lambda) = \lambda + 1, \quad d_3(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda^2 - \lambda + 1).$$

Na osnovu dokaza Teoreme 5.7 je

$$f_1(\lambda) = 1, \quad f_2(\lambda) = \lambda + 1, \quad f_3(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = \lambda^3 + 1.$$

Što se tiče matrice $B(\lambda)$, polinom $f_1(\lambda)$ njene Smitove kanoničke matrice je najveći zajednički delitelj za sve elemente matrice $B(\lambda)$, dakle, $f_1(\lambda) = 1$. To znači da treba elementarnim transformacijama matricu $B(\lambda)$ svesti na oblik u kome će taj elemenat biti u prvoj vrsti i prvoj koloni, a zatim elementarnim transformacijama anulirati sve preostale elemente prve vrste i prve kolone. Kada to dobijemo, onda isti postupak primenjujemo na blok matrice $B(\lambda)$ koji čine sve vrste i kolone sem prve vrste i prve kolone (u slučaju kada je matrica većeg formata, nastavljamo isti postupak dalje sve dok se ne dobije dijagonalna matrica).

$$B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 \\ \lambda^3 + \lambda & \lambda^2 + 1 & \lambda^3 \\ \lambda^3 - \lambda^2 & -2\lambda & \lambda^3 - \lambda^2 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & \lambda - 1 & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda^2 + 1 & \lambda^3 \\ -1 & -2\lambda & \lambda^3 - \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -\lambda - 1 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3 + 1 \end{bmatrix}.$$

Poslednja matrica u prethodnom nizu je Smitova kanonička matrica za matricu $A(\lambda)$, pa sledi da matrice $A(\lambda)$ i $B(\lambda)$ imaju redom iste invarijantne faktore, dakle, one su ekvivalentne.

TEOREMA 5.10. *Matrica $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ jednaka je proizvodu elementarnih matrica ako i samo ako je $|A(\lambda)|$ konstanta različita od 0.*

DOKAZ. Teorema (4.29) koja utvrđuje da je determinanta proizvoda dve kvadratne matrice jednaka proizvodu determinanata tih matrica, može se dokazati koristeći teoreme iz teorija determinanata ne koristeći deljenje, pa važi i za polinomne matrice.

Ako je

$$A(\lambda) = \overline{E_1(\lambda)} \dots \overline{E_k(\lambda)},$$

gde su $\overline{E_1(\lambda)}, \dots, \overline{E_k(\lambda)}$ elementarne matrice, onda je

$$|A(\lambda)| = |\overline{E_1(\lambda)}| \dots |\overline{E_k(\lambda)}| = c \in F, \quad c \neq 0.$$

Obrnuto, neka je sada $|A(\lambda)| = c \in F, \quad c \neq 0$. Na osnovu Teoreme 5.6 i Definicije 5.6 postoje matrice $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$, jednake proizvodu elementarnih matrice, takve da je

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = N(\lambda) = \text{diag}(f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)),$$

gde je $N(\lambda)$ Smitova kanonička matrica za matricu $A(\lambda)$. Pređemo li na determinante u gornjoj jednakosti, biće

$$|P(\lambda)||A(\lambda)||Q(\lambda)| = f_1(\lambda) \dots f_n(\lambda),$$

tj.

$$f_1(\lambda) \dots f_n(\lambda) = c \in F, \quad c \neq 0,$$

(jer su $|P(\lambda)|, |A(\lambda)|, |Q(\lambda)|$ konstante različite od 0).

Oдавde odmah sledi da je $f_1(\lambda) = \dots = f_n(\lambda) = 1$. Dakle,

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda) = E,$$

pa je

$$A(\lambda) = P^{-1}(\lambda)Q^{-1}(\lambda),$$

a $P^{-1}(\lambda), Q^{-1}(\lambda)$ su jednake proizvodu elementarnih matrica. □

TEOREMA 5.11. *Matrica $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ je invertibilna, tj. ima inverznu matricu nad $F[\lambda]$, ako i samo ako je $A(\lambda)$ jednaka proizvodu elementarnih matrica (ili, s obzirom na prethodnu teoremu, ako i samo ako je $|A(\lambda)| = c \neq 0$, $c \in F$).*

DOKAZ. Pošto svaka elementarna matrica ima inverznu matricu nad $F[\lambda]$, kada je $A(\lambda)$ jednaka proizvodu elementarnih matrica očigledno je da i $A(\lambda)$ ima inverznu matricu nad $F[\lambda]$.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji $A^{-1}(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ tako da je

$$A(\lambda)A^{-1}(\lambda) = E.$$

Tada je

$$|A(\lambda)||A^{-1}(\lambda)| = 1,$$

odakle sledi da je $|A(\lambda)| = c \neq 0$, $c \in F$, pa na osnovu Teoreme 5.10 sledi da je $A(\lambda)$ jednaka proizvodu elementarnih matrica. $\square$

Dakle, kod polinomnih matrica može se desiti da je matrica $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ ranga n , a nema inverznu matricu nad $F[\lambda]$ (što nije slučaj sa matricama nad poljem F).

Na primer, neka su date matrice

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ovde je

$$\text{rang } A(\lambda) = \text{rang } B(\lambda) = 2, \quad |A(\lambda)| = 2 \in F, \quad |B(\lambda)| = 2\lambda,$$

pa $A(\lambda)$ ima inverznu matricu nad $F[\lambda]$, a $B(\lambda)$ nema.

Sada ćemo ponovo razmatrati matrice nad poljem. Definisaćemo jednu relaciju u skupu matrica nad poljem F za koju ćemo pokazati da je tesno povezana sa nekim relacijama u skupu polinomnih matrica.

5.5. Sličnost matrica

DEFINICIJA 5.12. *Matrica $A \in F^{n,n}$ je slična sa matricom $B \in F^{n,n}$ ako postoji regularna matrica P takva da je*

$$B = P^{-1}AP.$$

Da je matrica A slična sa matricom B zapisujemo sa $A \stackrel{S}{\sim} B$.

Očigledno, svake dve matrice koje su slične su i ekvivalentne (Definicija 4.16), dok obrnuto ne važi.

Lako se pokazuje da važi sledeća teorema.

TEOREMA 5.12. *U skupu $F^{n,n}$ relacija sličnosti definisana u 5.12 je relacija ekvivalencije.*

Sledeća teorema uspostavlja ekvivalenciju između sličnosti matrica nad poljem F i ekvivalencije njihovih karakterističnih matrica nad $F[\lambda]$.

TEOREMA 5.13. *Matrice $A, B \in F^{n,n}$ su slične ako i samo ako su njihove karakteristične matrice $\lambda E - A$ i $\lambda E - B$ ekvivalentne kao polinomne matrice nad $F[\lambda]$.*

DOKAZ. Ako je $A = P^{-1}BP$, onda je

$$\lambda E - A = \lambda E - P^{-1}BP,$$

i

$$\lambda E - A = P^{-1}(\lambda E - B)P,$$

a to znači da su matrice $\lambda E - A$ i $\lambda E - B$ ekvivalentne.

Obrnuto, neka su $\lambda E - A$ i $\lambda E - B$ ekvivalentne polinomne matrice. To znači da postoje matrice $P(\lambda), Q(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ jednake proizvodu elementarnih matrica takve da je

$$(5.3) \quad \lambda E - A = P(\lambda)(\lambda E - B)Q(\lambda).$$

Na osnovu algoritma deljenja (Teorema 5.1) postoje matrice $R_1(\lambda), S_1(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$ i $R_0, S_0 \in F$ takve da je

$$(5.4) \quad P(\lambda) = (\lambda E - A)R_1(\lambda) + R_0, \quad Q(\lambda) = S_1(\lambda)(\lambda E - B) + S_0$$

Da bi pojednostavili notaciju u daljem ćemo koristiti sledeće skraćene oznake:

$$\lambda E - A = \overline{A}, \quad \lambda E - B = \overline{B}, \quad P(\lambda) = \overline{P}, \quad Q(\lambda) = \overline{Q}, \quad S_1(\lambda) = \overline{S}_1, \quad R_1(\lambda) = \overline{R}_1.$$

Sa tim oznakama jednakost (5.3) zapisujemo sa

$$(5.5) \quad \overline{A} = \overline{P} \overline{B} \overline{Q},$$

a jednakost (5.4) sa

$$(5.6) \quad \overline{P} = \overline{A} \overline{R}_1 + R_0, \quad \overline{Q} = \overline{S}_1 \overline{A} + S_0.$$

Ako vrednosti za $\overline{P}$ i $\overline{Q}$ iz (5.6) uvrstimo u (5.5) biće

$$\overline{A} = \overline{P} \overline{B} \overline{Q} = (\overline{A} \overline{R}_1 + R_0) \overline{B} (\overline{S}_1 \overline{A} + S_0)$$

$$\begin{aligned}
&= \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} + \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} S_0 + R_0 \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} + R_0 \overline{B} S_0 \\
&= \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} + \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} (\overline{Q} - \overline{S}_1 \overline{A}) + (\overline{P} - \overline{A} \overline{R}_1) \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} + R_0 \overline{B} S_0 \\
&= \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} + \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} \overline{Q} - \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} + \overline{P} \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} - \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} + R_0 \overline{B} S_0 \\
&= \overline{A} \overline{R}_1 \overline{P}^{-1} \overline{A} + \overline{A} \overline{Q}^{-1} \overline{S}_1 \overline{A} - \overline{A} \overline{R}_1 \overline{B} \overline{S}_1 \overline{A} + R_0 \overline{B} S_0 \\
&= \overline{A} (\overline{R}_1 \overline{P}^{-1} + \overline{Q}^{-1} \overline{S}_1 - \overline{R}_1 \overline{B} \overline{S}_1) \overline{A} + R_0 \overline{B} S_0 \\
&= \overline{A} \overline{C} \overline{A} + R_0 \overline{B} S_0,
\end{aligned}$$

gde je uvedena oznaka $\overline{C} = \overline{R}_1 \overline{P}^{-1} + \overline{Q}^{-1} \overline{S}_1 - \overline{R}_1 \overline{B} \overline{S}_1$.

U gornjem nizu jednakosti, najpre je na osnovu (5.6) izvršena smena $S_0 = \overline{Q} - \overline{S}_1 \overline{A}$, i $R_0 = \overline{P} - \overline{A} \overline{R}_1$, a zatim na osnovu (5.5) $\overline{B} \overline{Q} = \overline{P}^{-1} \overline{A}$ i $\overline{P} \overline{B} = \overline{A} \overline{Q}^{-1}$.

Dakle, dobili smo da je

$$\overline{A} = \overline{A} \overline{C} \overline{A} + R_0 \overline{B} S_0,$$

što se može, vraćajući se na originalne oznake, zapisati sa

$$\lambda E - A = (\lambda E - A)C(\lambda)(\lambda E - A) + R_0(\lambda E - B)S_0.$$

Ako bi u prethodnoj jednakosti bilo $C(\lambda) \neq 0$, dobili bi kontradikciju - leva strana bi bio polinom stepena 1, a desna strana polinom stepena najmanje 2. Dakle, $C(\lambda) = 0$, pa je

$$\lambda E - A = R_0(\lambda E - B)S_0$$

i

$$\lambda E - A = \lambda R_0 S_0 - R_0 B S_0.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobija se da je

$$R_0 S_0 = E, \text{ tj. } R_0 = S_0^{-1},$$

pa je konačno $A = S_0^{-1} B S_0$, tj. A i B su slične matrice. $\square$

S obzirom na prethodnu teoremu uvodimo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 5.13. *Ako je $A \in F^{n,n}$, onda se invarijantni faktori matrice $\lambda E - A$ nazivaju invarijante sličnosti matrice A .*

Kako je $|\lambda E - A| \neq 0$ (jer je $|\lambda E - A|$ karakteristični polinom matrice A), rang matrice $\lambda E - A$ je n , što znači da su sve invarijante sličnosti matrice A različite od nule.

Primer.

Odredimo invarijante sličnosti matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vršenjem elementarnih transformacija na karakterističnoj matrici date matrice dobijamo

$$\begin{aligned} \lambda E - A &\sim \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & \lambda - 2 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ \lambda - 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} -1 & -2 & \lambda - 2 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 2 - 2\lambda & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 1 - \lambda \\ 0 & 2 - 2\lambda & \lambda^2 - 4\lambda + 3 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 2 - 2\lambda & \lambda^2 - 6\lambda + 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)(\lambda - 5) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Poslednja matrica u nizu je Smitova kanonička matrica matrice A , a invarijante sličnosti matrice A su 1, $\lambda - 1$ i $(\lambda - 1)(\lambda - 5)$.

Na osnovu prethodnih rezultata sledi da važi sledeća teorema.

TEOREMA 5.14. *Matrice $A, B \in F^{n,n}$ su slične ako i samo ako su im redom jednake invarijante sličnosti.*

TEOREMA 5.15. *Karakteristični polinom matrice $A \in F^{n,n}$ jednak je proizvodu njenih invarijanata sličnosti.*

DOKAZ. Matrica $\lambda E - A$ se može elementarnim transformacijama svesti na Smitovu kanoničku matricu, dakle, postoje matrice $P(\lambda)$ i $Q(\lambda)$ jednake proizvodu elementarnih matrica, takve da je

$$P(\lambda)(\lambda E - A)Q(\lambda) = N(\lambda),$$

gde je $N(\lambda) = \text{diag}(f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda))$ Smitova kanonička matrica za matricu $\lambda E - A$.

Tada je

$$|P(\lambda)| |(\lambda E - A)| |Q(\lambda)| = f_1(\lambda) \dots f_n(\lambda),$$

a kako je $|P(\lambda)| = c_1$ i $|Q(\lambda)| = c_2$, gde su $c_1, c_2 \in F$ (Teorema 5.4), onda je

$$c_1 c_2 |\lambda E - A| = f_1(\lambda) \dots f_n(\lambda).$$

Kako je svaki od polinoma $|\lambda E - A|, f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ normalizovan, sledi da je $c_1 c_2 = 1$, pa je

$$|\lambda E - A| = f_1(\lambda) \dots f_n(\lambda).$$

□

Kako slične matrice imaju redom jednake invarijante sličnosti, sledi da važi sledeća posledica prethodne teoreme.

POSLEDICA. *Slične matrice imaju jednake karakteristične polinome.*

Napominjemo da obrnuto tvrđenje ne važi. Na primer, matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

imaju isti karakteristični polinom $\lambda^2 - 2\lambda + 1$, ali nisu slične jer je matrica E slična samo sa samom sobom i ni jednom drugom matricom ($P^{-1}EP = E$).

5.6. Minimalni polinom matrice

Videli smo da svaka matrica reda n zadovoljava svoju karakterističnu jednačinu (Cayley-Hamiltonova teorema (5.3)), međutim, može se desiti da matrica zadovoljava i neku jednačinu stepena manjeg od n , pa stoga dajemo sledeću definiciju.

DEFINICIJA 5.14. *Ako je $A \in F^{n,n}$, normalizovan polinom $m(\lambda) \in F[\lambda]$ najmanjeg stepena takav da je $m(A) = O$, naziva se minimalni polinom matrice A .*

TEOREMA 5.16. *Neka je $A \in F^{n,n}$, $f(\lambda) \in F[\lambda]$. $f(A) = O$ ako i samo ako je polinom $f(\lambda)$ deljiv minimalnim polinomom $m(\lambda)$ matrice A .*

DOKAZ. Pretpostavimo da je $m(\lambda) | f(\lambda)$, tj.

$$f(\lambda) = q(\lambda)m(\lambda).$$

Tada je $f(A) = q(A)m(A) = O$, jer je $m(A) = O$.

Obrnuto, neka je sada $f(A) = O$. Tada je

$$f(\lambda) = q(\lambda)m(\lambda) + r(\lambda),$$

gde je $\deg r(\lambda) < \deg m(\lambda)$ ili je $r(\lambda) = 0$. Stavljaajući u prethodnu jednakost $\lambda = A$, dobija se

$$f(A) = q(A)m(A) + r(A),$$

a kako je $f(A) = O$ i $m(A) = O$, sledi da mora biti i $r(A) = O$, odakle je $r(\lambda) = 0$, tj. $m(\lambda) | f(\lambda)$. □

Iz Cayley-Hamiltonove teoreme i prethodne teoreme dobija se sledeća posledica.

POSLEDICA 1. *Karakteristični polinom matrice deljiv je njenim minimalnim polinomom.*

Takođe važi i

POSLEDICA 2. *Za svaku matricu postoji jedinstven minimalni polinom.*

DOKAZ. Ako pretpostavimo da neka matrica ima dva minimalna polinoma, onda na osnovu prethodne teoreme prvi od tih polinoma deli drugi, a i drugi deli prvi, pa kako su to normalizovani polinomi oni moraju biti jednaki. $\square$

TEOREMA 5.17. *Minimalni polinom matrice $A \in F^{n,n}$ jednak je invarijanti sličnosti najvećeg stepena te matrice.*

DOKAZ. Neka je $d_{n-1}(\lambda)$ najveći zajednički delitelj svih minora reda $n-1$ matrice $\lambda E - A$, a $f(\lambda)$ karakteristični polinom matrice A . Ako su $f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ invarijante sličnosti matrice A , onda je $d_{n-1}(\lambda) = f_1(\lambda) \dots f_{n-1}(\lambda)$ i $f(\lambda) = f_1(\lambda) \dots f_n(\lambda)$.

To znači da je

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = d_{n-1}(\lambda)f_n(\lambda)$$

i

$$(\lambda E - A)^* = d_{n-1}(\lambda)B(\lambda),$$

gde najveći zajednički delitelj svih elemenata matrice B mora biti 1 (jer su elementi matrice $(\lambda E - A)^*$ kofaktori reda $n-1$ matrice $\lambda E - A$, a $d_{n-1}(\lambda)$ je najveći zajednički delitelj svih tih kofaktora).

Iz

$$(\lambda E - A)(\lambda E - A)^* = f(\lambda)E$$

sledi

$$(\lambda E - A)d_{n-1}(\lambda)B(\lambda) = d_{n-1}(\lambda)f_n(\lambda)E,$$

pa je

$$(\lambda E - A)B(\lambda) = f_n(\lambda)E.$$

Dakle, $\lambda E - A$ je delitelj matičnog polinoma $f_n(\lambda)E$, pa je po Teoremi 5.2 $f_n(A) = O$. Odavde na osnovu Teoreme 5.16 sledi da je minimalni polinom $m(\lambda)$ matrice A delitelj polinoma $f_n(\lambda)$

$$f_n(\lambda) = q(\lambda)m(\lambda).$$

Pokazaćemo da mora biti $q(\lambda) = 1$, a time će teorema biti dokazana.

Koristićemo ponovo Teoremu 5.2 i na osnovu te teoreme ostatak pri deobi polinoma $m(\lambda)E$ sa $\lambda E - A$ je $m(A)$, a kako je $m(A) = O$ sledi da je $m(\lambda)E$ deljivo sa $\lambda E - A$

$$m(\lambda)E = (\lambda E - A)C(\lambda).$$

Dakle,

$$(\lambda E - A)B(\lambda) = f_n(\lambda)E = q(\lambda)m(\lambda)E = q(\lambda)(\lambda E - A)C(\lambda),$$

pa je

$$B(\lambda) = q(\lambda)C(\lambda),$$

a kako je najveći zajednički delitelj za sve elemente matrice $B(\lambda)$ jednak 1, sledi da je

$$q(\lambda) = 1.$$

□

TEOREMA 5.18. *Karakteristični i minimalni polinom matrice imaju iste korene, jedino se može razlikovati višestrukost tih korena.*

DOKAZ. Očigledno sledi iz činjenice da je karakteristični polinom matrice jednak proizvodu njenih invarijanata sličnosti,

$$f(\lambda) = f_1(\lambda) \dots f_n(\lambda),$$

pri čemu je $f_n(\lambda)$ minimalni polinom matrice, a $f_i(\lambda) | f_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, \dots, n-1$. □

Primeri.

1. Odredićemo minimalni polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom matrice A je $\lambda^3 - 7\lambda^2 + 16\lambda - 12 = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$, a karakteristični koreni su $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Pošto minimalni polinom ima iste korene kao karakteristični, minimalni polinom $m(\lambda)$ date matrice je $(\lambda - 2)(\lambda - 3)$ ili je jednak karakterističnom polinomu. Proverom (stavljajući u polinom $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ matricu A umesto λ) dobijamo da je

$$A^2 - 5A + 6E = 0,$$

pa je $m(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$.

2. Minimalni polinom matrice može se odrediti i na sledeći način.

Određićemo minimalni polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Za svako $\alpha \in R$ očigledno je $\alpha A \neq E$, pa minimalni polinom nije linearan. Stavimo $A^2 = \alpha A + \beta E$, tj.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 14 & -10 & 10 \\ -25 & 29 & -25 \\ -30 & 30 & -26 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oдавде dobijamo 9 jednačina sa po dve nepoznate α i β . Rešavajući dve od tih jednačina dobićemo da je $\alpha = 5$, $\beta = -6$, a zatim ćemo proveriti da li ta rešenja zadovoljavaju i svih preostalih 7 jednačina. U našem slučaju dobijena rešenja zadovoljavaju sve jednačine, pa je, prema tome, jednačina najmanjeg stepena koju matrica A zadovoljava $A^2 = 5A - 6E$, odnosno minimalni polinom matrice A je

$$m(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

3. Treći način za određivanje minimalnog polinoma matrice A je svodenje njene karakteristične matrice $\lambda E - A$ na Smitov kanonički oblik $N(\lambda)$, a onda je traženi minimalni polinom matrice A invarijanta sličnosti najvećeg stepena te matrice (tj. element u poslednjoj vrsti i poslednjoj koloni matrice $N(\lambda)$).

Dakle,

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 2 & -2 \\ 5 & \lambda - 7 & 5 \\ 6 & -6 & \lambda + 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)(\lambda - 3) \end{bmatrix} = N(\lambda).$$

pa je minimalni polinom matrice A

$$m(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6.$$

5.7. Prateća matrica

DEFINICIJA 5.15. *Neka je*

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

normalizovan polinom nad poljem F . Matrica

$$C(f(\lambda)) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

se naziva *prateća matrica polinoma* $f(\lambda)$.

Prateća matrica polinoma $\lambda + a$ je $[-a]$.

Često se u literaturi prateća matrica nekog polinoma definiše kao transponovana matrica matrice navedene u prethodnoj definiciji ili kao matrica dobijena „okretanjem” matrice navedene u definiciji oko sporedne dijagonale. S obzirom da se osnovna osobina prateće matrice (navedena u sledećoj teoremi) dobija izračunavanjem determinante matrice $\lambda E - C(f(\lambda))$, a vrednost determinante se ne menja vršenjem navedenih okretanja, sve te definicije daju tu istu osobinu prateće matrice.

TEOREMA 5.19. *Minimalni i karakteristični polinom prateće matrice $C(f(\lambda))$ polinoma $f(\lambda)$ je polinom $f(\lambda)$.*

DOKAZ. Ako je

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

onda je

$$C(f(\lambda)) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

pa je

$$\lambda E - C(f(\lambda)) = \begin{bmatrix} \lambda + a_{n-1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ a_0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}.$$

Ako sada prvu vrstu gornje matrice pomnožimo sa λ^{n-1} i dodamo poslednjoj vrsti, zatim drugu vrstu pomnožimo sa λ^{n-2} i takođe dodamo poslednjoj vrsti i nastavimo tako dalje množeći i -tu vrstu sa λ^{n-i} , $i =$

$1, \dots, n-1$, i dodajući poslednjoj vrsti, dobija se

$$\lambda E - C(f(\lambda)) \sim B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + a_{n-1} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-2} & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & -1 \\ f(\lambda) & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrica $B(\lambda)$ je dobijena od matrice $\lambda E - C(f(\lambda))$ vršenjem elementarnih transformacija koje ne menjaju determinantu matrice, dakle, $|\lambda E - C(f(\lambda))| = |B(\lambda)|$.

Međutim, razvijajući $|B(\lambda)|$ po elementima poslednje vrste dobija se

$$|\lambda E - C(f(\lambda))| = |B(\lambda)| = f(\lambda),$$

dakle, karakteristični polinom matrice $C(f(\lambda))$ je $f(\lambda)$.

Potrebno je još dokazati da je $f(\lambda)$ i minimalni polinom matrice $C(f(\lambda))$. Minor reda $n-1$ matrice $\lambda E - C(f(\lambda))$ koji se dobija izostavljajući prvu kolonu i poslednju vrstu te matrice je $(-1)^{n-1}$, pa je najveći zajednički delitelj $d_{n-1}(\lambda)$ svih minora reda $n-1$ te matrice 1. S obzirom da je $d_{n-1}(\lambda)$ jednak proizvodu prvih $n-1$ invarijanta sličnosti matrice $C(f(\lambda))$, to znači da su sve invarijante sličnosti te matrice, sem poslednje, trivijalne tj. jednake 1, pa je poslednja invarijanta sličnosti (a to je minimalni polinom matrice $C(f(\lambda))$), jednaka karakterističnom polinomu te matrice (Teoreme 5.15, 5.17). $\square$

Na osnovu Teorema 5.14, 5.15 i 5.17 očigledno sledi da važi i sledeća teorema.

TEOREMA 5.20. *Neka su karakteristični i minimalni polinom matrice $A \in F^{n,n}$ jednaki $f(\lambda)$, a karakteristični i minimalni polinom matrice $B \in F^{n,n}$ jednaki $g(\lambda)$. Matrice A i B su slične ako i samo ako je $f(\lambda) = g(\lambda)$.*

5.8. Karakteristični koreni i vektori

Razmotrićemo sada problem određivanja tzv. karakterističnih korena i vektora za datu linearnu transformaciju odnosno matricu. Ovaj problem se često sreće u raznim oblastima matematike, a takođe i u primeni u drugim naukama.

Taj problem se sastoji u sledećem:

Ako je A linearna transformacija vektorskog prostora V nad poljem F , naći sve nenula vektore $x \in V$ i skalare $\lambda \in F$ takve da je

$$A(x) = \lambda x.$$

Ukoliko je vektorski prostor V neki od geometrijskih prostora, onda se navedeni problem može prikazati na sledeći način: naći nenula vektor i odgovarajući skalar tako da slika tog vektora linearnom transformacijom bude kolinearna sa originalom.

Pre nego što pokažemo kako se određuju traženi vektori i skalari daćemo neke definicije.

DEFINICIJA 5.16. *Neka je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$. Ako su $x \in V$, $x \neq 0$ i $\lambda \in F$ takvi da je $A(x) = \lambda x$, onda se x naziva karakteristični vektor transformacije A , a λ karakteristični koren te transformacije.*

DEFINICIJA 5.17. *Neka je $A \in F^{n,n}$. Ako su $x \in F^{n,1}$, $x \neq 0$ i $\lambda \in F$ takvi da je $Ax = \lambda x$, onda je x karakteristični vektor matrice A , a λ karakteristični koren te matrice.*

Karakteristični koreni i karakteristični vektori nazivaju se i „sopstveni” ili „svojtveni” koreni, odnosno vektori, a takođe se za karakteristične korene neki put koristi termin „sopstvene (ili svojtvene) vrednosti”.

S obzirom na ranije utvrđene izomorfizme strukture linearnih transformacija konačno dimenzionalnog vektorskog prostora i strukture odgovarajućih matrica, sledi da je u konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru koordinatna kolona $[x]$ karakterističnog vektora x linearne transformacije A tog prostora karakteristični vektor matrice $[A]$ te transformacije, a karakteristični koreni linearne transformacije i njene matrice su isti.

DEFINICIJA 5.18. *Skup svih karakterističnih korena linearne transformacije (matrice) A naziva se spektar te linearne transformacije (matrice) i označava sa $\sigma(A)$.*

Ako je A linearna transformacija konačnodimenzionalnog vektorskog prostora, a $[A]$ njena matrica, onda je $\sigma(A) = \sigma([A])$.

TEOREMA 5.21. *Ako je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$, a λ_i jedan njen karakteristični koren, onda je skup vektora*

$$S_A(\lambda_i) = \{x \mid A(x) = \lambda_i x\}$$

potprostor vektorskog prostora $V(F)$.

Analogno tvrđenje važi za matrice.

DOKAZ. Za svako $x, y \in S_A(\lambda_i)$ i $\alpha, \beta \in F$ je

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y) = \alpha \lambda_i x + \beta \lambda_i y = \lambda_i(\alpha x + \beta y).$$

□

DEFINICIJA 5.19. *Ako je A linearna transformacija vektorskog prostora $V(F)$, a λ_i jedan njen karakteristični koren, onda se $S_A(\lambda_i)$ naziva invarijantni potprostor linearne transformacije A koji odgovara karakterističnom korenu λ_i .*

Analogno se definiše invarijantni potprostor matrice.

Jednodimenzioni invarijantni potprostor se naziva i invarijantni pravac.

Jednačina $Ax = \lambda x$, gde je $A = [a_{ij}] \in F^{n,n}$, a $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]'$ može se i ovako zapisati

$$(\lambda E - A)x = 0,$$

tj.

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0.$$

Prethodna jednakost predstavlja homogen sistem linearnih jednačina po nepoznatim $x_1, x_2, \dots, x_n$ i on, kao što je poznato, ima netrivialno rešenje (različito od nula vektora) ako i samo ako je determinanta sistema jednaka nuli, tj.

$$(5.7) \quad |\lambda E - A| = 0.$$

Dakle, karakteristični koreni matrice A su rešenja po λ u polju F karakteristične jednačine matrice A (5.7) (tj. nule karakterističnog polinoma matrice A), drugih karakterističnih korena nema, a karakteristični vektori postoje samo za te vrednosti λ .

Primeri.

1. Neka je $V(\mathbb{R})$ vektorski prostor geometrijskih vezanih vektora sa zajedničkom početnom tačkom O koji pripadaju jednoj ravni. Ako se u tom prostoru uvede Dekartov pravougli koordinatni sistem, onda je simetrija σ u odnosu na pravu $y = x$ jedna linearna transformacija. U odnosu na bazu $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ matrica te transformacije je

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njena karakteristična jednačina je

$$|\lambda E - [\sigma]| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0,$$

a karakteristični koreni su $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Karakteristični vektor koji odgovara λ_1 dobijamo rešavanjem sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

Odatle je $x_1 = x_2$, pa su karakteristični vektori matrice $[\sigma]$ sva nenula rešenja gornjeg sistema, dakle, svaki vektor oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Slično, za $\lambda_2 = -1$ biće

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0,$$

a odatle sledi da je $x_1 = -x_2$, pa su karakteristični vektori koji odgovaraju λ_2 svi vektori oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Kako su karakteristični vektori matrice $[\sigma]$ koordinatne kolone karakterističnih vektora linearne transformacije σ , sledi da su $a_1 = (1, 1)$ i $a_2 = (1, -1)$ (pri čemu se koordinate ovih vektora određuju u odnosu na bazu e_1, e_2) karakteristični vektori linearne transformacije σ . Invarijantni potprostori linearne transformacije σ su potprostori $L(a_1)$ i $L(a_2)$ tj. potprostori generisani sa a_1 , odnosno a_2 .

S obzirom da su svi nenula skalarni umnošci karakterističnog vektora takođe karakteristični vektori koji odgovaraju istom karakterističnom korenu, to se često ne naglašava posebno, već se samo kao karakteristični vektori navode generatori odgovarajućih invarijantnih potprostora, što smo i mi u ovom primeru uradili.

2. U vektorskom prostoru $V(\mathbb{R})$ iz prethodnog primera, rotacija ρ te ravni oko tačke O za ugao $\pi/2$ je linearna transformacija čija je matrica u odnosu na bazu e_1, e_2

$$[\rho] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristična jednačina je

$$(5.8) \quad |\lambda E - [\rho]| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0,$$

a njeni koreni u polju nad kojim je dat vektorski prostor odnosno matrica, su traženi karakteristični koreni. U našem primeru jednačina (5.8) nema realne korene, tj. data matrica i njom određena linearna transformacija nemaju karakteristične korene, a to znači ni vektore.

Do istog zaključka se može doći očiglednim geometrijskim razmatranjem (ne postoji nenula vektor koji bi posle rotacije za ugao $\pi/2$ oko tačke O bio kolinearan sa originalom).

3. Za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

odredićemo karakteristične korene i vektore.

Karakteristični polinom te matrice je

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 & -1 \\ -1 & -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5.$$

Ako normalizovan polinom sa celim koeficijentima ima racionalne nule, one su celi brojevi i činioci slobodnog člana. U ovom primeru to mogu biti ± 1 i ± 5 . Proverom se dobija da su karakteristični koreni matrice A , $\lambda_1 = 5$ i dvostruki koren $\lambda_{2,3} = 1$.

Karakteristični vektor koji odgovara korenu $\lambda_1 = 5$ dobija se iz

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = O,$$

odakle sledi $x_1 = x_2 = x_3$. Dakle, za svako $x_1 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

je karakteristični vektor koji odgovara korenu λ_1 , a $L([1, 1, 1]')$ je odgovarajućim invarijantni potprostor.

Slično, za $\lambda_{2,3} = 1$, iz

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} = O,$$

sledi $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$, pa su karakteristični vektori oblika

$$\begin{bmatrix} -2x_2 - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Prema tome, karakteristični vektor koji odgovara korenu $\lambda_{2,3}$ je vektor $x_2[-2, 1, 0]' + x_3[-1, 0, 1]'$ za svako $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, a dvodimenzionalni potprostor $L([-2, 1, 0]', [-1, 0, 1]')$ je odgovarajući invarijantni potprostor.

Kakva veza postoji između višestrukosti karakterističnog korena i dimenzije odgovarajućeg invarijantnog potprostora sledi iz sledeće teoreme koju navodimo bez dokaza.

TEOREMA 5.22. *Ako je $A \in F^{n,n}$, a λ_i koren višestrukosti k njene karakteristične jednačine, onda je rang matrice $\lambda_i E - A$ veći ili jednak $n - k$, a dimenzija odgovarajućeg invarijantnog potprostora je manja ili jednaka k .*

S obzirom da je matrica $\lambda_i E - A$ singularna, uvek je

$$n - 1 \geq \text{rang}(\lambda_i E - A) \geq n - k,$$

$$1 \leq \dim(S_A(\lambda_i)) \leq k,$$

odakle sledi da je za jednostruki koren λ_i

$$\text{rang}(\lambda_i E - A) = n - 1,$$

$$\dim(S_A(\lambda_i)) = 1.$$

TEOREMA 5.23. *Ako su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ svi karakteristični koreni matrice $A \in F^{n,n}$, pri čemu su u prethodnom nizu višestruki koreni navedeni onoliko puta kolika im je višestrukost, onda je*

$$a) \quad |A| = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n,$$

$$b) \quad \text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n.$$

DOKAZ.

$$(5.9) \quad |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n |A|.$$

Zaista, svaki član u razvoju determinante $|\lambda E - A|$ je proizvod n elemenata matrice $\lambda E - A$, odakle sledi da je $|\lambda E - A|$ polinom n -tog stepena, a najveći stepen λ^n se dobija iz proizvoda dijagonalnih elemenata $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$, pa je vodeći koeficijent 1. Iz tog istog proizvoda sledi da je koeficijent uz λ^{n-1} jednak $-(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})$, a pošto gornja jednakost važi za svako λ , stavljajući u tu jednakost $\lambda = 0$ dobija se da je slobodan član $(-1)^n |A|$.

Sa druge strane, pošto su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ svi koreni polinoma $|\lambda E - A|$

$$(5.10) \quad \begin{aligned} |\lambda E - A| &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \\ &= \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n. \end{aligned}$$

Upoređujući jednakosti (5.9) i (5.10) sledi tvrđenje teoreme. $\square$

S obzirom da se trag matrice veoma jednostavno izračunava, prethodna teorema se može korisno upotrebiti u postupku određivanja karakterističnih korena ili provere da li su karakteristični koreni tačno izračunati.