

Kanoničke forme sličnosti

Jedan od osnovnih problema pri ispitivanju sličnih matrica je problem nalaženja kanoničkih predstavnika u svakoj klasi međusobno sličnih matrica. Najzgodnije je kada su te kanoničke matrice dijagonalne matrice zbog toga što su dijagonalne matrice vrlo jednostavnog oblika, sa njima se lako računa, a i neka bitna svojstva cele klase sličnih matrica se mogu neposredno uočiti iz dijagonalne matrice u toj klasi.

6.1. Sličnost sa dijagonalnom matricom

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju dijagonalne matrice slične datoj matrici. Iz te teoreme neposredno sledi da postoje klase međusobno sličnih matrica u kojima nema ni jedne dijagonalne matrice, tako da ćemo kanoničke predstavnike morati da tražimo na drugi način.

TEOREMA 6.1. *Matrica $A \in F^{n,n}$ je slična sa dijagonalnom matricom ako i samo ako A ima n linearno nezavisnih karakterističnih vektora.*

DOKAZ. Pretpostavimo najpre da je A slična sa dijagonalnom matricom D ,

$$P^{-1}AP = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n).$$

Vektori $e_1 = [1, 0, \dots, 0]', e_2 = [0, 1, 0, \dots, 0]' \dots, e_n = [0, \dots, 0, 1]'$ su očigledno karakteristični vektori matrice D . Dokazaćemo da su vektori $Pe_1, Pe_2, \dots, Pe_n$ karakteristični vektori matrice A . Zaista,

$$APe_i = PDe_i = d_iPe_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

S obzirom da je P regularna matrica, karakteristični vektori $Pe_1, Pe_2, \dots, Pe_n$ matrice A su linearno nezavisni.

Obrnuto, pretpostavimo sada da je A matrica koja ima n linearno nezavisnih karakterističnih vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$, dakle, $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, \dots, n$.

Neka je $P = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in F^{n,n}$ matrica čije kolone čine vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$. Tada je

$$\begin{aligned} AP &= A[x_1, x_2, \dots, x_n] = [Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n] = [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] \\ &= [x_1, x_2, \dots, x_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD. \end{aligned}$$

P je regularna matrica (jer su $x_1, x_2, \dots, x_n$ linearno nezavisni), pa je $P^{-1}AP = D$. $\square$

Primer. Matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

nije slična sa dijagonalnom matricom nad poljem realnih brojeva (a ni nad poljem kompleksnih brojeva). Naime, ona ima jedan karakteristični koren $\lambda_1 = -1$, višestrukosti 3, a odgovarajući invarijantni potprostor je dimenzije 2, jednu bazu tog potprostora čine vektori $[1, 0, 1]'$ i $[0, 1, 2]'$. Prema tome, A nema tri linearno nezavisna karakteristična vektora, pa na osnovu Teoreme 6.1 nije slična sa dijagonalnom matricom.

Videli smo da postoje mnogobrojni primeri matrica reda n nad poljem F koje nemaju n linearno nezavisnih karakterističnih vektora, što znači da u klasama međusobno sličnih matrica u kojima su te matrice nema dijagonalnih matrica. Za takve klase matrica moramo da tražimo drugačije kanoničke predstavnike i pokušaćemo da ih nađemo među matricama koje su bliske dijagonalnim matricama – to su tzv. kvazidijagonalne matrice.

DEFINICIJA 6.1. *Matrica oblika*

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix}, \quad k > 1,$$

gde su A_{ii} , $i = 1, \dots, k$ kvadratne matrice, a A_{ij} , $i \neq j$, nula matrice, naziva se kvazidijagonalna matrica.

Ako su $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ i $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$ kvazidijagonalne matrice istog formata, takve da su formati odgovarajućih blokova jednaki, onda se lako proverava da je

$$A \pm B = \text{diag}(A_1 \pm B_1, \dots, A_k \pm B_k),$$

$$\alpha A = \text{diag}(\alpha A_1, \dots, \alpha A_k), \quad \alpha \in F,$$

$$AB = \text{diag}(A_1 B_1, \dots, A_k B_k),$$

$$A^m = \text{diag}(A_1^m, \dots, A_k^m),$$

$$A^{-1} = \text{diag}(A_1^{-1}, \dots, A_k^{-1}), \quad A \text{ regularna matrica,}$$

a ako je $p(\lambda) \in F[\lambda]$ proizvoljan polinom, onda je

$$p(A) = \text{diag}(p(A_1), \dots, p(A_k)).$$

Videli smo da je računanje sa kvazidijagonalnim matricama slično računanju sa dijagonalnim matricama, pri čemu se dijagonalni blokovi tretiraju kao pojedinačni elementi u dijagonalnim matricama. I sličnost ovakvih matrica se može ispitivati po blokovima, što sledi iz sledeće dve teoreme.

TEOREMA 6.2. *Ako su dijagonalni blokovi kvazidijagonalne matrice $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ redom slični odgovarajućim blokovima matrice $B = \text{diag}(B_1, \dots, B_k)$, tj. ako je*

$$A_i = P_i^{-1} B_i P_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

onda su A i B slične matrice i pritom je

$$A = P^{-1} B P,$$

gde je $P = \text{diag}(P_1, \dots, P_k)$.

DOKAZ. Množeći odgovarajuće matrice dobija se tvrđenje teoreme. $\square$

Sledeća teorema, koju navodimo bez dokaza, utvrđuje da se proizvoljnim premeštanjem blokova na dijagonali kvazidijagonalne matrice uvek dobija matrica slična sa polaznom.

TEOREMA 6.3. *Kvazidijagonalna matrica $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k)$ je slična sa matricom $B = \text{diag}(A_{i_1}, \dots, A_{i_k})$, gde je $i_1, \dots, i_k$ proizvoljna permutacija indeksa $1, \dots, k$.*

6.2. Prva kanonička forma sličnosti

Sada prelazimo na određivanje kanoničkih predstavnika za pojedine klase sličnih matrica, a njih ćemo tražiti među kvazidijagonalnim matricama. To se može postići na više načina, pa ćemo tako imati i više različitih kanoničkih predstavnika.

$$B = \text{diag}(C(f_1(\lambda)), \dots, C(f_k(\lambda))).$$

DOKAZ. Smitova kanonička matrica matrice $\lambda E - C(f_1(\lambda))$ ima na dijagonali $1, \dots, 1, f_1(\lambda)$ (Teorema 5.19), a analogno važi i za ostale blokove $C(f_2(\lambda)), \dots, C(f_k(\lambda))$ sa dijagonale matrice B .

To znači da se vršenjem odgovarajućih elementarnih transformacija na matrici $\lambda E - B$, može postići da se svaki blok te matrice transformiše u njegovu Smitovu kanoničku matricu:

$$\lambda E - B \sim \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & 0 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_1(\lambda) & & & \\ \hline & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \boxed{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f_k(\lambda) \end{array}} & \end{array} \right].$$

Vršeći dalje elementarne transformacije tipa $E_{i,j}$ na dobijenoj matrici, premeštamo sve jedinice na početak dijagonale, a iza njih polinome $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$, pa se dobija da je

$$\lambda E - B \sim \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_1(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & f_k(\lambda) \end{bmatrix}.$$

$$1, \dots, 1, f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda),$$

pa su slične (Teorema 5.14). $\square$

Primer.

Neka su $f_1(\lambda) = \lambda + 1$, $f_2(\lambda) = \lambda^3 + 1$ i $f_3(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + \lambda + 2$ netrivialne invarijante sličnosti realne matrice A .

Tada su prateće matrice ovih inavarijanata sličnosti

$$\begin{aligned} C(f_1(\lambda)) &= [-1], \\ C(f_2(\lambda)) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ C(f_3(\lambda)) &= \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

pa je prva kanonička forma B matrice A

$$\begin{aligned} B &= \begin{bmatrix} C(f_1(\lambda)) & 0 & 0 \\ 0 & C(f_2(\lambda)) & 0 \\ 0 & 0 & C(f_3(\lambda)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \boxed{-1} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

TEOREMA 6.5. *Ako je $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_k) \in F^{n,n}$ kvazidiagonalna matrica i ako je $m_i(\lambda)$ minimalni polinom matrice A_i , $i = 1, \dots, k$, onda je minimalni polinom $m_A(\lambda)$ matrice A jednak najmanjem zajedničkom sadržaocu za polinome $m_1(\lambda), \dots, m_k(\lambda)$.*

DOKAZ. Neka je $p(\lambda)$ proizvoljan polinom nad poljem F . Kako je $p(A) = \text{diag}(p(A_1), \dots, p(A_k))$, važi (Teorema 5.16)

$$\begin{aligned} p(A) = O &\iff (p(A_1) = O \wedge \dots \wedge p(A_k) = O) \\ &\iff (m_1(\lambda)|p(\lambda) \wedge \dots \wedge m_k(\lambda)|p(\lambda)). \end{aligned}$$

Utvrdili smo da je svaki polinom $p(\lambda)$ takav da je $p(A) = O$, polinom koji je deljiv sa $m_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, k$. Minimalni polinom $m_A(\lambda)$ matrice A je normalizovan polinom najmanjeg stepena takav da je $m_A(A) = O$, dakle, to je normalizovan polinom najmanjeg stepena deljiv sa $m_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, k$, tj. $m_A(\lambda)$ je najmanji zajednički sadržalac za polinome $m_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, k$. $\square$

NAPOMENA. Ako su $m_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, k$ relativno prosti polinomi, onda je $m_A(\lambda) = m_1(\lambda) \dots m_k(\lambda)$.

6.3. Elementarni delitelji

Uvešćemo sada jednu novu definiciju koja će nam omogućiti da dođemo do novih kanoničkih formi sličnih matrica, koje će biti bliže dijagonalnoj matrici od prve kanoničke forme, tj. do kanoničke forme koja će na dijagonali imati više „sitnijih” blokova.

DEFINICIJA 6.2. *Neka je $A(\lambda) \in F[\lambda]^{n,n}$, a $f_1(\lambda), \dots, f_n(\lambda)$ njeni invarijantni faktori, pri čemu su $f_i(\lambda) \neq 0$, $i = 1, \dots, r$, a $f_j(\lambda) = 0$, $j = r+1, \dots, n$. Ako je svaki od polinoma $f_1(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ razložen*

$$f_i(\lambda) = p_{i1}^{e_{i1}}(\lambda) \dots p_{ik_i}^{e_{ik_i}}(\lambda), \quad i = 1, \dots, r,$$

gde su $p_{i1}, \dots, p_{ik_i}$ različiti, nesvodljivi nad F normalizovani polinomi, a svi eksponenti $e_{i1}, \dots, e_{ik_i}$ različiti od nule, onda se polinomi

$$p_{i1}^{e_{i1}}(\lambda), \dots, p_{ik_i}^{e_{ik_i}}(\lambda)$$

nazivaju elementarnim deliteljima polinoma $f_i(\lambda)$. Elementarni delitelji svih nenula invarijantnih faktora matrice $A(\lambda)$ čine sistem elementarnih delitelja te matrice. U tom sistemu svaki elementarni delitelj se pojavljuje onoliko puta koliko puta se pojavljuje kao faktor u invarijantnim faktorima matrice.

Elementarni delitelji matrice $A \in F^{n,n}$ su elementarni delitelji nad F njene karakteristične matrice $\lambda E - A$. Sistem elementarnih delitelja matrice A je sistem elementarnih delitelja matrice $\lambda E - A$.

Primeri. Neka je $A(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]^{n,n}$ matrica čiji su invarijantni faktori

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= f_2(\lambda) = 1, \\ f_3(\lambda) &= \lambda^2 + 1, \\ f_4(\lambda) &= (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1), \\ f_5(\lambda) &= (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^3. \end{aligned}$$

Sistem elementarnih delitelja matrice $A(\lambda)$ nad poljem realnih brojeva je

$$\lambda^2 + 1, \quad \lambda + 1, \quad \lambda^2 + 1, \quad \lambda + 1, \quad (\lambda^2 + 1)^3.$$

Taj sistem je dobijen tako što su netrivialni invarijantni faktori $f_3(\lambda)$, $f_4(\lambda)$ i $f_5(\lambda)$ matrice $A(\lambda)$ faktorizovani u proizvod nesvodljivih nad $\mathbb{R}$ faktora, faktori sa istom osnovom su prikazani kao jedan polinom, a onda svi ti faktori navedeni u sistemu elementarnih delitelja onoliko puta koliko puta se pojavljuju kao činioci u invarijantnim faktorima matrice.

To znači, na primer, da se $f_5(\lambda)$ ne sme faktorizovati u

$$f_5(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 1)^2,$$

jer faktori $\lambda^2 + 1$ i $(\lambda^2 + 1)^2$ imaju istu osnovu - svi činioci sa istom osnovom moraju biti spojeni u jedan polinom (u definiciji elementarnih delitelja je naglašeno da su u faktorizaciji jednog invarijantnog faktora osnove „različiti” polinomi.)

Razmotrićemo sada obrnut problem. Ako je dat sistem elementarnih delitelja matrice $A \in F^{n,n}$, da li je tim sistemom jednoznačno određen niz invarijanata sličnosti te matrice? U sledećem primeru pokazaćemo da je zaista tako.

Neka je dat sistem elementarnih delitelja nad $\mathbb{R}$ matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$\lambda, \lambda, \lambda + 1, (\lambda + 1)^2.$$

Proizvod svih elementarnih delitelja iz sistema elementarnih delitelja jednak je proizvodu invarijanata sličnosti (što sledi iz načina na koji su dobijeni elementarni delitelji). Sa druge strane, proizvod svih invarijanata sličnosti jednak je karakterističnom polinomu matrice A (Teorema 5.15). To znači da je karakteristični polinom matrice A stepena 5, dakle, $n = 5$ i matrica A ima pet invarijanata sličnosti $f_1(\lambda), \dots, f_5(\lambda)$.

S obzirom da $f_i(\lambda)$ deli $f_{i+1}(\lambda)$, $i = 1, 2, 3, 4$, svaki elementarni delitelj je delitelj invarijante sličnosti najvećeg stepena $f_5(\lambda)$, pa je $f_5(\lambda)$ najmanji zajednički sadržalac za sve elementarne delitelje, $f_5(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)^2$.

U sistemu elementarnih delitelja preostali su elementi

$$\lambda, \lambda + 1.$$

Analogno zaključujemo da je $f_4(\lambda)$ najmanji zajednički sadržalac za preostale elementarne delitelje, dakle, $f_4(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)$.

Time je sistem elementarnih delitelja iscrpen, pa su preostale invarijante sličnosti trivijalne, $f_3(\lambda) = f_2(\lambda) = f_1(\lambda) = 1$.

Očigledno, ovo što je prikazano na prethodnom primeru važi i u opštem slučaju. Prema tome, sistem elementarnih delitelja matrice $A \in F^{n,n}$ potpuno određuje njene invarijante sličnosti. Znamo da su matrice slične ako i

samo ako imaju redom jednake invarijante sličnosti (Teorema 5.14), pa važi sledeća teorema.

TEOREMA 6.6. *Dve matrice $A, B \in F^{n,n}$ su slične ako i samo ako imaju iste sisteme elementarnih delitelja.*

6.4. Druga kanonička forma sličnosti

Iskoristićemo sada elementarne delitelje da dobijemo novu kanoničku formu sličnosti, koja će u opštem slučaju biti bliža dijagonalnoj matrici od prve kanoničke forme.

TEOREMA 6.7. *Ako je $A \in F^{n,n}$ matrica čiji je sistem elementarnih delitelja nad F*

$$g_1(\lambda), \dots, g_s(\lambda),$$

onda je matrica A slična sa matricom

$$B = \text{diag}(C(g_1(\lambda)), \dots, C(g_s(\lambda))).$$

Matrica B naziva se druga kanonička forma klase matrica sličnih sa A .

DOKAZ. Neka su netrivialne invarijante sličnosti matrice A polinomi $f_1(\lambda), \dots, f_k(\lambda)$. Ako je $f_i(\lambda)$ faktorizovan u proizvod elementarnih delitelja

$$f_i(\lambda) = g_{i_1}(\lambda) \dots g_{i_{m_i}}(\lambda), \quad i_1, \dots, i_{m_i} \in \{1, \dots, s\},$$

dokazaćemo da je onda

$$C(f_i(\lambda)) \stackrel{S}{\sim} G_i = \text{diag}(C(g_{i_1}(\lambda)), \dots, C(g_{i_{m_i}}(\lambda))).$$

Kada to dokažemo, na osnovu Teorema 6.2, 6.3 i 6.4 slediće da je druga kanonička forma slična sa prvom kanoničkom formom, a to znači i sa matricom A .

Karakteristični i minimalni polinom matrice $C(f_i(\lambda))$ je polinom $f_i(\lambda)$ (Teorema 5.19), dokazaćemo da je i za matricu G_i polinom $f_i(\lambda)$ karakteristični i minimalni polinom, a to će značiti da su $C(f_i(\lambda))$ i G_i slične matrice (Teorema 5.20).

Na osnovu Teoreme 6.5 sledi da je minimalni polinom matrice G_i

$$m_{G_i}(\lambda) = \text{nzs}(g_{i_1}(\lambda), \dots, g_{i_{m_i}}(\lambda)) = g_{i_1}(\lambda) \dots g_{i_{m_i}}(\lambda) = f_i(\lambda).$$

Matrice G_i i $C(f_i(\lambda))$ su istog reda, stepen polinoma $f_i(\lambda)$ (koji je karakteristični polinom matrice $C(f_i(\lambda))$) jednak je redu tih matrica, to znači da je stepen minimalnog polinoma $m_{G_i}(\lambda) = f_i(\lambda)$ matrice G_i jednak njenom redu, dakle, $f_i(\lambda)$ je i karakteristični polinom matrice G_i .

DOKAZ. Pretpostavimo da je matrica A nerazloživa. Onda ona ima samo jednu netrivialnu invarijantu sličnosti, jer bi u protivnom bila slična sa prvom kanoničkom formom koja je kvazidijagonalna matrica.

Pretpostavka da ta invarijanta sličnosti može da se rastavi u proizvod dva elementarna delitelja opet dovodi do kontradikcije, jer bi onda druga kanonička forma bila kvazidijagonalna matrica slična sa A .

Dakle, jedina netrivialna invarijanta sličnosti (a to je onda minimalni i karakteristični polinom matrice A) je polinom oblika $p^k(\lambda)$ gde je $p(\lambda)$ normalizovan, nesvodljiv nad F polinom.

Obrnuto, pretpostavimo sada da su minimalni i karakteristični polinom matrice A jednaki i oblika $p^k(\lambda)$, gde je $p(\lambda)$ normalizovan, nesvodljiv nad F polinom.

Ako pretpostavimo suprotno, tj. da je A razloživa, onda je A slična sa kvazidijagonalnom matricom M

$$A \sim M = \begin{bmatrix} B & O \\ O & C \end{bmatrix}.$$

Odavde sledi da matrica M ima iste invarijante sličnosti kao A (Teorema 5.14) i to su $1, \dots, 1, p^k(\lambda)$. Međutim, minimalni polinom matrice M (a to znači i A) je jednak najmanjem zajedničkom sadržaocu za minimalne polinome matrica B i C (Teorema 6.5), pa su minimalni polinomi matrica B i C , redom $p^{k_1}(\lambda)$ i $p^{k_2}(\lambda)$, gde su $k_1, k_2 \geq 1$. Matrice B i C su reda manjeg od n , a $p^k(\lambda)$ je stepena n , što znači da je $k > k_1, k_2$.

Najmanji zajednički sadržalac za polinome $p^{k_1}(\lambda)$ i $p^{k_2}(\lambda)$ je onaj koji ima veći stepen, pa sledi da je minimalni polinom matrice M stepena manjeg od n , a to je protivrečnost jer je minimalni polinom matrice M jednak njenom karakterističnom polinomu koji je stepena n . $\square$

6.5. Racionalna kanonička forma sličnosti

Iako blokovi na dijagonali druge kanoničke forme nisu razložive matrice, ipak su ti blokovi slični sa jednom vrstom matrica koje su, iako nisu kvazidijagonalne matrice, bliže dijagonalnim matricama.

Pre nego što navedemo odgovarajuće teoreme, podsetićemo čitaoca na opšti oblik Laplasove teoreme o razvoju determinanata, koja će nam biti potrebna za dokaz teoreme koja sledi.

Razvoj determinante $|A|$ matrice $A \in F^{n,n}$ po elementima jedne vrste ili kolone je specijalan slučaj Laplasove teoreme. Naime, $|A|$ se može razviti ne samo po elementima jedne vrste ili kolone, već po elementima bilo kojih

k , $1 \leq k < n$, vrsta ili kolona. Umesto da biramo jednu vrstu u $|A|$, izaberimo k vrsta sa rednim brojevima $i_1, \dots, i_k$. Potom biramo na sve moguće načine k kolona (takvih izbora ima $\binom{n}{k}$). Kada načinimo jedan od tih izbora i odaberemo kolone sa rednim brojevima $j_1, \dots, j_k$, množimo minor $|A_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k}|$ (koji čine elementi koji pripadaju odabranim vrstama i kolonama) sa algebarskim komplementom tog minora (koji čine elementi koji ne pripadaju ni jednoj od odabranih vrsta i kolona), a proizvod tih minora se još množi sa $(-1)^{j_1 + \dots + j_k + i_1 + \dots + i_k}$. Zbir svih ovako dobijenih proizvoda minora je $|A|$.

Primer.

Razvićemo determinantu

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

po elementima prve dve kolone:

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &+ (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

TEOREMA 6.9. *Matrica $A \in F^{n,n}$ čija je jedina netrivialna invarijanta sličnosti polinom $p^k(\lambda)$, gde je $p(\lambda) \in F[\lambda]$, slična je sa matricom*

$$B = \begin{bmatrix} C(p(\lambda)) & N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & C(p(\lambda)) & N & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C(p(\lambda)) & N \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & C(p(\lambda)) \end{bmatrix},$$

gde se na glavnoj dijagonali matrice B nalazi k blokova $C(p(\lambda))$, a N je matrica istog formata kao $C(p(\lambda))$, koja u donjem levom uglu ima jedinicu, a ostali elementi su joj 0.

Matrica B naziva se hiper-prateća matrica polinoma $p^k(\lambda)$.

Navešćemo najpre primer jedne hiper-prateće matrice, a potom ćemo dati dokaz prethodne teoreme.

Primer.

Za realnu matricu čija je jedina netrivialna invarijanta sličnosti polinom $(\lambda^2 - \lambda + 1)^3$ hiper-prateća matrica je

$$B = \begin{bmatrix} \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array} & & 0 \\ & \begin{array}{cc|cc} & & 1 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{array} & \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \\ & 0 & \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \end{bmatrix}.$$

Uočavamo da se u hiper-pratećoj matrici iznad glavne dijagonale nalazi neprekidan niz jedinica, a iznad njih su nule.

DOKAZ TEOREME 6.9. Ako je $C(p(\lambda))$ matrica reda m , onda razvijajući $|\lambda E - B|$ po elementima prvih m vrsta, pa zatim razvijajući sledeći minor takođe po prvih m vrsta itd. dobija se da je

$$|\lambda E - B| = |\lambda E - C(p(\lambda))|^k = p^k(\lambda),$$

pa je karakteristični polinom matrice B jednak karakterističnom polinomu matrice A .

S obzirom da se iznad glavne dijagonale u matrici $\lambda E - B$ nalazi neprekidan niz minus jedinica iznad kojih se nalaze nule, sledi da je minor reda $n - 1$ te matrice dobijen izostavljanjem prve kolone i poslednje vrste jednak 1 ili -1 . To znači da je 1 najveći zajednički delitelj svih minora reda $n - 1$, a kako je taj najveći zajednički delitelj proizvod svih invarijanata sličnosti sem poslednje, zaključujemo da su invarijante sličnosti matrice B , $1, \dots, 1, p^k(\lambda)$, tj. A je sična sa B . $\square$

TEOREMA 6.10. Matrica $A \in F^{n,n}$ čiji je sistem elementarnih delitelja $g_1(\lambda), \dots, g_s(\lambda)$, slična je sa matricom

$$B = \text{diag}(B_1, \dots, B_s),$$

gde je B_i hiper-prateća matrica elementarnog delitelja $g_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, s$.

Matrica B naziva se racionalna kanonička forma¹ klase matrica sličnih sa A .

¹Neki autori koriste drugačije nazive za kanoničke forme, pa tako ono što smo mi nazivali druga kanonička forma nazivaju racionalna kanonička forma, a racionalnu kanoničku formu nazivaju druga kanonička forma.

DOKAZ. Na osnovu prethodnog (Teorema 6.9), odmah sledi da je matrica B_i slična sa matricom $C(g_i(\lambda))$, $i = 1, \dots, s$, pa je B slična sa drugom kanoničkom formom matrice A (Teorema 6.2), a to znači i sa A . $\square$

Primer.

Neka je $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ matrica čiji je sistem elementarnih delitelja nad poljem realnih brojeva

$$\lambda^2 + 1, (\lambda^2 + 1)^2, (\lambda^2 + 1)^2, \lambda + 2.$$

Tada je racionalna kanonička forma za matricu A

$$B = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} & & & 0 \\ \hline & \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} & & \\ \hline & & \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} & \\ \hline & & & -2 \end{array} \right].$$

U specijalnom slučaju, kada je polje F polje kompleksnih brojeva, racionalna kanonička forma ima posebno jednostavan oblik. S obzirom da se nad poljem kompleksnih brojeva svaki polinom može faktorizovati u proizvod linearnih faktora, svi elementarni delitelji matrice $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ su oblika $(\lambda - a)^k$, pa su sve hiper-prateće matrice elementarnih delitelja oblika

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Matrice ovog oblika nazivaju se Žordanovi (Jordan) blokovi, a racionalna kanonička forma kompleksne matrice A naziva se Žordanova kanonička forma i to je kvazidijagonalna matrica koja na dijagonali ima Žordanove blokove svih elementarnih delitelja iz sistema elementarnih delitelja matrice A .