PRIMENA PRVOG IZVODA

Aleksandar Pavlović

PREDAVANJA IZ POSLOVNE MATEMATIKE

May 19, 2014

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

CILJ

Naći minimum, odnosno maksimum funkcije f.

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

CILJ

Naći minimum, odnosno maksimum funkcije f.

Tačke lokalnog minimuma i maksimuma se zajedno zovu **lokalni ekstremi**.

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

CILJ

Naći minimum, odnosno maksimum funkcije f.

Tačke lokalnog minimuma i maksimuma se zajedno zovu **lokalni ekstremi**.
Minimum (maksimum) neprekidne funkcije se nalazi ili na rubovima domena (skupa A) ili u tačkama lokalnih ekstrema.

Tačka x_0 sa osobinom da je $f'(x_0) = 0$ smo već rekli da se naziva stacionarna tačka.

$f : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

CILJ

Naći minimum, odnosno maksimum funkcije f.

Tačke lokalnog minimuma i maksimuma se zajedno zovu **lokalni ekstremi**.
Minimum (maksimum) neprekidne funkcije se nalazi ili na rubovima domena (skupa A) ili u tačkama lokalnih ekstrema.

Tačka x_0 sa osobinom da je $f'(x_0) = 0$ smo već rekli da se naziva stacionarna tačka.
Stacionarne tačke su tačke potencijalnih ekstrema, ali ne mora svaka stacionarna tačka da bude lokalni ekstrem.

Neka je x_0 stacionarana tačka, tj., neka je $f'(x_0) = 0$.

Neka je x_0 stacionarana tačka, tj., neka je $f'(x_0) = 0$.
Za proveru da li je stacionarna tačka lokalni ekstrem, koristimo drugi izvod. Nađemo $f''(x_0)$.

Neka je x_0 stacionarana tačka, tj., neka je $f'(x_0) = 0$.
Za proveru da li je stacionarna tačka lokalni ekstrem, koristimo drugi izvod. Nađemo $f''(x_0)$.

- Ako je $f''(x_0) > 0$, onda je stacionarna tačka lokalni minimum.

Neka je x_0 stacionarana tačka, tj., neka je $f'(x_0) = 0$.
Za proveru da li je stacionarna tačka lokalni ekstrem, koristimo drugi izvod. Nađemo $f''(x_0)$.

- Ako je $f''(x_0) > 0$, onda je stacionarna tačka lokalni minimum.
- Ako je $f''(x_0) < 0$, onda je stacionarna tačka lokalni maksimum.

Neka je x_0 stacionarana tačka, tj., neka je $f'(x_0) = 0$.
Za proveru da li je stacionarna tačka lokalni ekstrem, koristimo drugi izvod. Nađemo $f''(x_0)$.

- Ako je $f''(x_0) > 0$, onda je stacionarna tačka lokalni minimum.
- Ako je $f''(x_0) < 0$, onda je stacionarna tačka lokalni maksimum.
- Ako je $f''(x_0) = 0$, onda ovaj test sa drugim izvodom ne daje odgovor.

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.

$f'(x) =$

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.
$f'(x) = 3\frac{x^2}{3} - 1 = x^2 - 1.$

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.
$f'(x) = 3\frac{x^2}{3} - 1 = x^2 - 1.$
Stacionarne tačke su rešenja jednačine $x^2 - 1 = 0$, tj, $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.
$f'(x) = 3\frac{x^2}{3} - 1 = x^2 - 1.$
Stacionarne tačke su rešenja jednačine $x^2 - 1 = 0$, tj, $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
Drugi izvod je $f''(x) =$

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.
$f'(x) = 3\frac{x^2}{3} - 1 = x^2 - 1$.
Stacionarne tačke su rešenja jednačine $x^2 - 1 = 0$, tj, $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
Drugi izvod je $f''(x) = (x^2 - 1)'$

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.
$f'(x) = 3\frac{x^2}{3} - 1 = x^2 - 1.$
Stacionarne tačke su rešenja jednačine $x^2 - 1 = 0$, tj, $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
Drugi izvod je $f''(x) = (x^2 - 1)' = 2x$.

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.
$f'(x) = 3\frac{x^2}{3} - 1 = x^2 - 1.$
Stacionarne tačke su rešenja jednačine $x^2 - 1 = 0$, tj, $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
Drugi izvod je $f''(x) = (x^2 - 1)' = 2x$.
Kako je $f''(-1) = -2 < 0$, tačka $x_1 = -1$ je lokalni maksimu.

Primer

Ispitajmo ekstreme funckije $f(x) = \frac{x^3}{3} - x$ koristeći prvi izvod.
$f'(x) = 3\frac{x^2}{3} - 1 = x^2 - 1$.
Stacionarne tačke su rešenja jednačine $x^2 - 1 = 0$, tj, $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.
Drugi izvod je $f''(x) = (x^2 - 1)' = 2x$.
Kako je $f''(-1) = -2 < 0$, tačka $x_1 = -1$ je lokalni maksimu.
Tačka $x_2 = 1$ je lokalni minimum, jer je $f''(1) = 2 > 0$.

Marginalni trošak

(u oznaci MC)
je promena ukupnih troškova pri povećanju proizvodnje za 1.

$$MC(Q) = TC(Q+1) - TC(Q)$$

Marginalni trošak

(u oznaci MC)
je promena ukupnih troškova pri povećanju proizvodnje za 1.

$$MC(Q) = TC(Q+1) - TC(Q)$$

Marginalni prihod

(u oznaci MR)
je promena ukupnih prihoda pri povećanju prodaje (odnosno cene) za 1.

$$MR(Q) = TR(Q+1) - TR(Q)$$

Marginalni trošak

(u oznaci MC)
je promena ukupnih troškova pri povećanju proizvodnje za 1.

$$MC(Q) = TC(Q+1) - TC(Q)$$

Marginalni prihod

(u oznaci MR)
je promena ukupnih prihoda pri povećanju prodaje (odnosno cene) za 1.

$$MR(Q) = TR(Q+1) - TR(Q)$$

$$MR(P) = TR(P+1) - TR(P)$$

$$MC(Q) = \frac{TC(Q+1) - TC(Q)}{1}.$$

$$MC(Q) = \frac{TC(Q+1) - TC(Q)}{1}.$$

1 je jako malo

$$MC(Q) = \frac{TC(Q+1) - TC(Q)}{1}.$$

1 je jako malo

$$TC'(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{TC(Q+\Delta Q) - TC(Q)}{\Delta Q}$$

$$MC(Q) = \frac{TC(Q+1) - TC(Q)}{1}.$$

1 je jako malo

$$TC'(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{TC(Q+\Delta Q) - TC(Q)}{\Delta Q}$$

$$MC(Q) = TC'(Q), \quad MR(Q) = TR'(Q), \quad MR(P) = TR'(P).$$

$$MC(Q) = \frac{TC(Q+1) - TC(Q)}{1}.$$

1 je jako malo

$$TC'(Q) = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{TC(Q+\Delta Q) - TC(Q)}{\Delta Q}$$

$$MC(Q) = TC'(Q), \quad MR(Q) = TR'(Q), \quad MR(P) = TR'(P).$$

Marginalna funkcija dobiti, marginalna funkcija prosečnih troškova, ...

Elastičnost funkcije tražnje

je mera promene (izražena u procentima) tražnje kada se cena poveća za 1%

Elastičnost funkcije prihoda

je mera promene (izražena u procentima) prihoda kada se proizvodnja poveća za 1%.

Elastičnost funkcije y

je funkcija koja opisuje relativnu promenu vrednosti zavisne promenljive y kada se vrednost njene nezavisne promenljive x poveća za 1%.

$$\text{OZNAKA: } \varepsilon_y^x.$$

1%je relativno mala promena.

1%je relativno mala promena.

Relativnu promenu promenljive x izračunavamo sa $\frac{\Delta x}{x}$
Relativnu promenu promenljive y izračunavamo sa $\frac{\Delta y}{y}$

1%je relativno mala promena.

Relativnu promenu promenljive x izračunavamo sa $\frac{\Delta x}{x}$
Relativnu promenu promenljive y izračunavamo sa $\frac{\Delta y}{y}$

$$\varepsilon_y^x(x)$$

1%je relativno mala promena.

Relativnu promenu promenljive x izračunavamo sa $\frac{\Delta x}{x}$
Relativnu promenu promenljive y izračunavamo sa $\frac{\Delta y}{y}$

$$\varepsilon_y^x(x) = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}$$

1%je relativno mala promena.

Relativnu promenu promenljive x izračunavamo sa $\frac{\Delta x}{x}$
Relativnu promenu promenljive y izračunavamo sa $\frac{\Delta y}{y}$

$$\varepsilon_y^x(x) = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1%je relativno mala promena.

Relativnu promenu promenljive x izračunavamo sa $\frac{\Delta x}{x}$
Relativnu promenu promenljive y izračunavamo sa $\frac{\Delta y}{y}$

$$\varepsilon_y^x(x) = \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'.$$

Kako tumačiti dobijenu funkciju elastičnosti?

Kako tumačiti dobijenu funkciju elastičnosti?

- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| = 0$, onda je y **potpuno neelastična** prema x.

Kako tumačiti dobijenu funkciju elastičnosti?

- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| = 0$, onda je y **potpuno neelastična** prema x.
- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| < 1$, onda je y **neelastična** prema x.

Kako tumačiti dobijenu funkciju elastičnosti?

- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| = 0$, onda je y **potpuno neelastična** prema x.
- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| < 1$, onda je y **neelastična** prema x.
- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| = 1$, onda je y **indiferentno neelastična** prema x.

Kako tumačiti dobijenu funkciju elastičnosti?

- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| = 0$, onda je y **potpuno neelastična** prema x.
- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| < 1$, onda je y **neelastična** prema x.
- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| = 1$, onda je y **indiferentno neelastična** prema x.
- Ako je $\left|\varepsilon_y^x\right| > 1$, onda je y **elastična** prema x.

Primer

Ako je funkcija tražnje $Q_d = 3000 - P^2$, naći funkciju elastičnosti, elastičnost pri ceni 50,
kao i cenu pri kojoj je tražnja indiferentno elastična.

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon_{Q_d}^{P}(P)| = 1$.

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon_{Q_d}^{P}(P)| = 1$.
Dve mogućnosti: $\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = 1$ ili $\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = -1$.

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon^{P}_{Q_d}(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon^{P}_{Q_d}(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon^{P}_{Q_d}(P)| = 1$.
Dve mogućnosti: $\varepsilon^{P}_{Q_d}(P) = 1$ ili $\varepsilon^{P}_{Q_d}(P) = -1$.
Prva nije jer je funkcija tražnje opadajuća, a znak elastičnosti se poklapa sa znakom prvog izvoda.

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon_{Q_d}^{P}(P)| = 1$.
Dve mogućnosti: $\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = 1$ ili $\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = -1$.
Prva nije jer je funkcija tražnje opadajuća, a znak elastičnosti se poklapa sa znakom prvog izvoda.
Rešavamo

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = -1$$

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^P(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^P(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon_{Q_d}^P(P)| = 1$.
Dve mogućnosti: $\varepsilon_{Q_d}^P(P) = 1$ ili $\varepsilon_{Q_d}^P(P) = -1$.
Prva nije jer je funkcija tražnje opadajuća, a znak elastičnosti se poklapa sa znakom prvog izvoda.
Rešavamo

$$\varepsilon_{Q_d}^P(P) = -1 \quad \frac{-2P^2}{3000 - P^2} = -1$$

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon_{Q_d}^{P}(P)| = 1$.
Dve mogućnosti: $\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = 1$ ili $\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = -1$.
Prva nije jer je funkcija tražnje opadajuća, a znak elastičnosti se poklapa sa znakom prvog izvoda.
Rešavamo

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = -1 \quad \frac{-2P^2}{3000 - P^2} = -1$$

$$-2P^2 = -3000 + P^2$$

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon_{Q_d}^{P}(P)| = 1$.
Dve mogućnosti: $\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = 1$ ili $\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = -1$.
Prva nije jer je funkcija tražnje opadajuća, a znak elastičnosti se poklapa sa znakom prvog izvoda.
Rešavamo

$$\varepsilon_{Q_d}^{P}(P) = -1 \quad \frac{-2P^2}{3000 - P^2} = -1$$

$$-2P^2 = -3000 + P^2 \quad -3P^2 = -3000$$

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^P(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^P(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon_{Q_d}^P(P)| = 1$.
Dve mogućnosti: $\varepsilon_{Q_d}^P(P) = 1$ ili $\varepsilon_{Q_d}^P(P) = -1$.
Prva nije jer je funkcija tražnje opadajuća, a znak elastičnosti se poklapa sa znakom prvog izvoda.
Rešavamo

$$\varepsilon_{Q_d}^P(P) = -1 \quad \frac{-2P^2}{3000 - P^2} = -1$$

$$-2P^2 = -3000 + P^2 \quad -3P^2 = -3000 \quad P^2 = 1000$$

Funkcija elastičnosti

$$\varepsilon_{Q_d}^P(P) = \frac{P}{Q_d} \cdot Q_d' = \frac{P}{3000 - P^2} \cdot (-2P) = \frac{-2P^2}{3000 - P^2}.$$

Elastičnost pri ceni 50

$$\varepsilon_{Q_d}^P(50) = \frac{-2 \cdot 50^2}{3000 - 50^2} = -10.$$

Indiferentna elastičnost.
Rešavamo jednačinu: $|\varepsilon_{Q_d}^P(P)| = 1$.
Dve mogućnosti: $\varepsilon_{Q_d}^P(P) = 1$ ili $\varepsilon_{Q_d}^P(P) = -1$.
Prva nije jer je funkcija tražnje opadajuća, a znak elastičnosti se poklapa sa znakom prvog izvoda.
Rešavamo

$$\varepsilon_{Q_d}^P(P) = -1 \quad \frac{-2P^2}{3000 - P^2} = -1$$

$$-2P^2 = -3000 + P^2 \quad -3P^2 = -3000 \quad P^2 = 1000 \quad P = 31.62.$$