FUNKCIJE

Aleksandar Pavlović

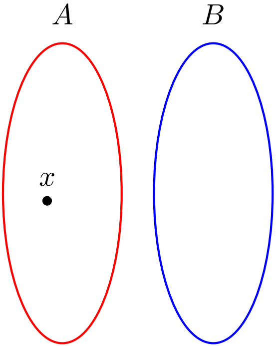
PREDAVANJA IZ POSLOVNE MATEMATIKE

February 22, 2015

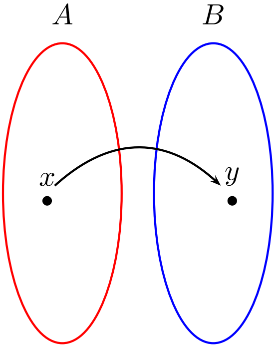
Šta je funkcija?

Šta je funkcija?

A i B neprazni skupovi
x element skupa A

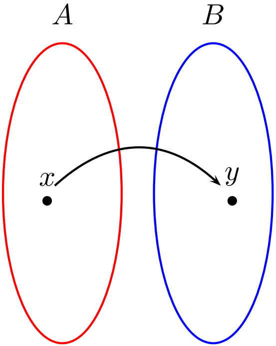


Šta je funkcija?



A i B neprazni skupovi
x element skupa A
Dodeljujemo mu y (ili $(f(x))$) iz skupa B

Šta je funkcija?

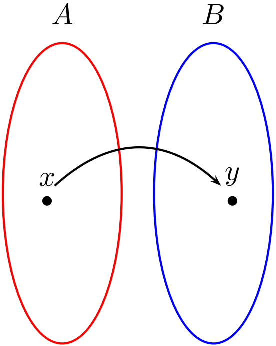


A i B neprazni skupovi
x element skupa A
Dodeljujemo mu y (ili $(f(x))$) iz skupa B
Sve zajedno: **preslikavanje**

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto f(x)$$

Šta je funkcija?



A i B neprazni skupovi
x element skupa A
Dodeljujemo mu y (ili $(f(x))$) iz skupa B
Sve zajedno: **preslikavanje**

$$f : A \to B$$

$$x \mapsto f(x)$$

x - **nezavisna promenljiva**
y (ili $f(x)$) - **zavisna promenljiva**
x - **original** y (ili $f(x)$) - **slika**
A - **domen** (skup originala) funkcije f
B - **kodomen** (skup slika).

Tablično zadata funkcija

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

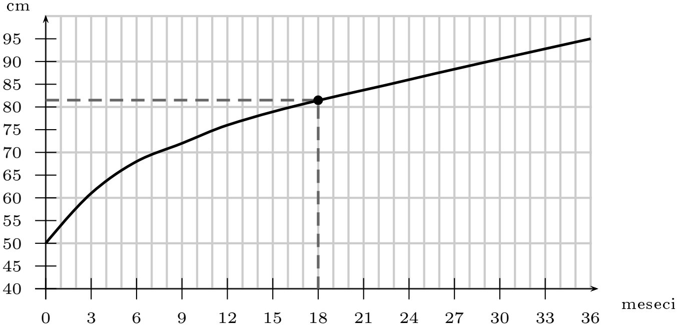
Tablično zadata funkcija

$$f : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

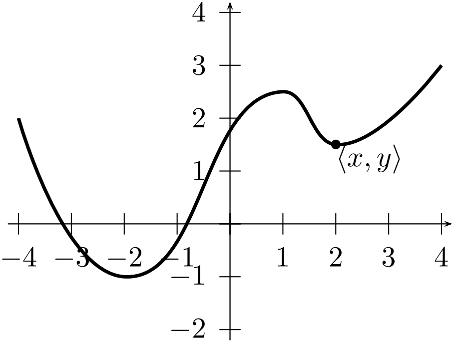
Valuta	ISO	Oznaka	Srednji kurs
Američki dolar	USD	$	91,90
Evro	EUR	€	115,15
Hrvatska kuna	HRK	kn	15,40
Mađarska forinta	HUF	Ft	40,20
Švajcarski franak	CHF	Fr	95,83

Ovo su prošlogodišnji podaci

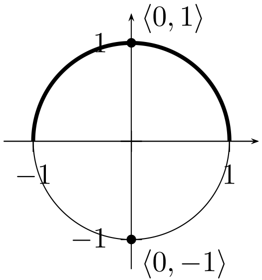
Grafički zadata funkcija



Prosečna visina dečaka u zavisnosti od uzrasta



Funkcija f i njen grafik G_f



Implicitno zadata funkcija $x^2 + y^2 = 1$

Identičko preslikavanje

Identičko preslikavanje

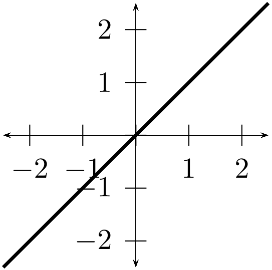
$$id_A : A \to A$$

$$id_A(x) = x$$

Identičko preslikavanje

$$id_A : A \to A$$

$$id_A(x) = x$$



Identičko preslikavanje $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$

$$D : \{\text{Luka, Saša, Jovan, Olja, Matija, Bogdan, Milica}\} \to \{1, \dots, 31\}.$$

Ime	Dan
Luka	9
Saša	16
Jovan	23
Olja	3
Matija	26
Bogdan	23
Milica	18

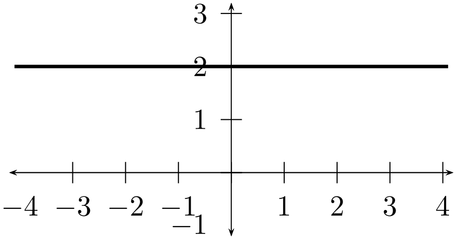
Konstatna funkcija

Konstatna funkcija

$$f(x) = c$$

Konstatna funkcija

$$f(x) = c$$



Konstantna funkcija $f(x) = 2$

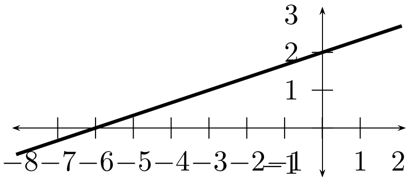
Linearna funkcija

Linearna funkcija

$$f(x) = ax + b$$

Linearna funkcija

$$f(x) = ax + b$$



Linearna funkcija $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$

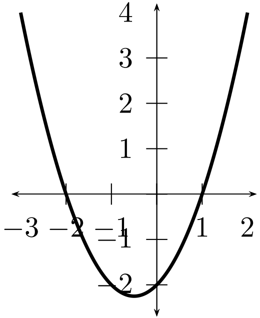
Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Kvadratna funkcija

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$



Kvadratna funkcija $f(x) = x^2 + x - 2$

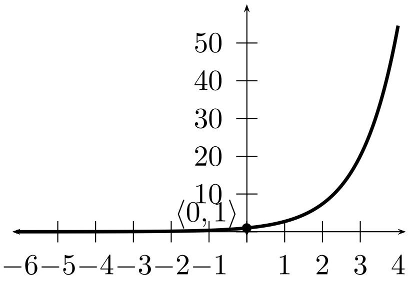
Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

Eksponencijalna funkcija

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$



Eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$

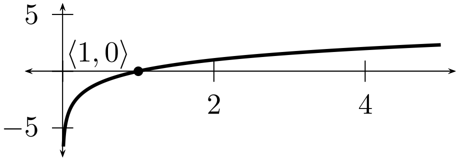
Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0$$

Logaritamska funkcija

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0$$



Logaritamska funkcija $f(x) = \log_2 x$

Funkcija $f : A \to B$ je **sirjekcija (ili „na")** ako i samo ako

$$\forall y \in B \ \exists x \in A \quad y = f(x).$$

Funkcija $f : A \to B$ je **sirjekcija (ili „na")** ako i samo ako

$$\forall y \in B \ \exists x \in A \quad y = f(x).$$

Svaki elemenat kodomena je slika bar jednog elementa domena.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Uglaste zagrade označavaju najveći ceo deo broja
Na primer $[3,6] = 3$.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Uglaste zagrade označavaju najveći ceo deo broja
Na primer $[3,6] = 3$.

$$f(1) = \left[\frac{1+1}{2}\right] = [1] = 1, f(2) = \left[\frac{2+1}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$
$$f(3) = \left[\frac{3+1}{2}\right] = [2] = 2, f(4) = \left[\frac{4+1}{2}\right] = [2,5] = 2$$
$$\vdots$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Uglaste zagrade označavaju najveći ceo deo broja
Na primer $[3,6] = 3$.

$$f(1) = \left[\frac{1+1}{2}\right] = [1] = 1, f(2) = \left[\frac{2+1}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$
$$f(3) = \left[\frac{3+1}{2}\right] = [2] = 2, f(4) = \left[\frac{4+1}{2}\right] = [2,5] = 2$$
$$\vdots$$

Za koje n je $f(n) = 100$?

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Uglaste zagrade označavaju najveći ceo deo broja
Na primer $[3,6] = 3$.

$$f(1) = \left[\frac{1+1}{2}\right] = [1] = 1, f(2) = \left[\frac{2+1}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$
$$f(3) = \left[\frac{3+1}{2}\right] = [2] = 2, f(4) = \left[\frac{4+1}{2}\right] = [2,5] = 2$$
$$\vdots$$

Za koje n je $f(n) = 100$? Šta se slika u $m \in \mathbb{N}$?

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Uglaste zagrade označavaju najveći ceo deo broja
Na primer $[3,6] = 3$.

$$f(1) = \left[\frac{1+1}{2}\right] = [1] = 1, f(2) = \left[\frac{2+1}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$
$$f(3) = \left[\frac{3+1}{2}\right] = [2] = 2, f(4) = \left[\frac{4+1}{2}\right] = [2,5] = 2$$
$$\vdots$$

Za koje n je $f(n) = 100$? Šta se slika u $m \in \mathbb{N}$?
Odgovor: $2m - 1$ i $2m$.

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\quad f(n)=\left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Uglaste zagrade označavaju najveći ceo deo broja
Na primer $[3,6]=3$.

$$f(1)=\left[\frac{1+1}{2}\right]=[1]=1, f(2)=\left[\frac{2+1}{2}\right]=\left[\frac{3}{2}\right]=1$$
$$f(3)=\left[\frac{3+1}{2}\right]=[2]=2, f(4)=\left[\frac{4+1}{2}\right]=[2,5]=2$$
$$\vdots$$

Za koje n je $f(n)=100$? Šta se slika u $m\in\mathbb{N}$?
Odgovor: $2m-1$ i $2m$.
Svaki element iz kodomena ima barem jedan original

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(n) = \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

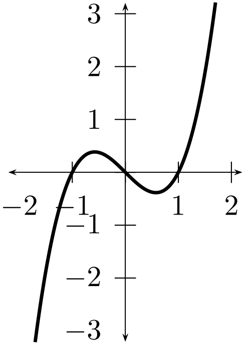
Uglaste zagrade označavaju najveći ceo deo broja
Na primer $[3,6] = 3$.

$$f(1) = \left[\frac{1+1}{2}\right] = [1] = 1, f(2) = \left[\frac{2+1}{2}\right] = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$
$$f(3) = \left[\frac{3+1}{2}\right] = [2] = 2, f(4) = \left[\frac{4+1}{2}\right] = [2,5] = 2$$
$$\vdots$$

Za koje n je $f(n) = 100$? Šta se slika u $m \in \mathbb{N}$?
Odgovor: $2m - 1$ i $2m$.
Svaki element iz kodomena ima barem jedan original
Dato preslikavanje sirjektivno.

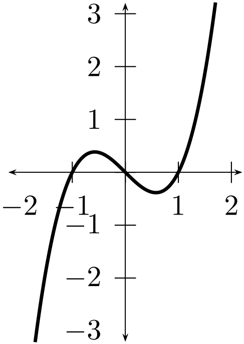
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato sa $g(x) = x^3 - x$.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato sa $g(x) = x^3 - x$.



Funkcija $g(x) = x^3 - x$

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dato sa $g(x) = x^3 - x$.



Funkcija $g(x) = x^3 - x$

Sa grafika se vidi, a može se i pokazati da svaki element iz kodomena ima original. Neki od elemenata kodomena, na primer $y = 0$, imaju više svojih originala, $x = -1$, $x = 0$ i $x = 1$.

Funkcija $f : A \to B$ je **injekcija (ili „1-1")** ako i samo ako

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Funkcija $f : A \to B$ je **injekcija (ili „1-1")** ako i samo ako

$$\forall x_1, x_2 \in A \;\; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Kod injektivne funkcije svaki element kodomena ima najviše jedan original.

Funkcija $f : A \to B$ je **injekcija (ili „1-1")** ako i samo ako

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Kod injektivne funkcije svaki element kodomena ima najviše jedan original.
Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa

$$f(n) = 2n.$$

Funkcija $f : A \to B$ je **injekcija (ili „1-1")** ako i samo ako

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Kod injektivne funkcije svaki element kodomena ima najviše jedan original.
Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa

$$f(n) = 2n.$$

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, \dots$$

Funkcija $f : A \to B$ je **injekcija (ili „1-1")** ako i samo ako

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Kod injektivne funkcije svaki element kodomena ima najviše jedan original.
Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa

$$f(n) = 2n.$$

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, \ldots$$

Šta je original broja 100, šta broja 131?

Funkcija $f : A \to B$ je **injekcija (ili „1-1")** ako i samo ako

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Kod injektivne funkcije svaki element kodomena ima najviše jedan original.

Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa

$$f(n) = 2n.$$

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, \ldots$$

Šta je original broja 100, šta broja 131?

$f(50) = 2 \cdot 50 = 100.$

Funkcija $f : A \to B$ je **injekcija (ili „1-1")** ako i samo ako

$$\forall x_1, x_2 \in A \ \ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Kod injektivne funkcije svaki element kodomena ima najviše jedan original.
Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa

$$f(n) = 2n.$$

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, \dots$$

Šta je original broja 100, šta broja 131?
$f(50) = 2 \cdot 50 = 100.$
Broj 131 nema svoj original, jer ne postoji prirodan broj koji pomnožen sa 2 daje 131 (nije paran).

Funkcija $f : A \to B$ je **injekcija (ili „1-1")** ako i samo ako

$$\forall x_1, x_2 \in A \;\; f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Kod injektivne funkcije svaki element kodomena ima najviše jedan original.
Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ data sa

$$f(n) = 2n.$$

$$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6, \dots$$

Šta je original broja 100, šta broja 131?
$f(50) = 2 \cdot 50 = 100.$
Broj 131 nema svoj original, jer ne postoji prirodan broj koji pomnožen sa 2 daje 131 (nije paran).
Original parnog broja je njegova polovina, koja je jedinstvena, a neparni brojevi nemaju svoj original. Kako svaka slika ima najviše jedan original, data funkcija f je injekcija.

Funkcija $f : A \to B$ je bijekcija ako i samo ako je istovremeno i sirjekcija i injekcija. Tada svaka slika ima tačno jedan original.

Funkcija $f : A \to B$ je bijekcija ako i samo ako je istovremeno i sirjekcija i injekcija. Tada svaka slika ima tačno jedan original. Posmatramo funkciju

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x.$$

Funkcija $f : A \to B$ je bijekcija ako i samo ako je istovremeno i sirjekcija i injekcija. Tada svaka slika ima tačno jedan original. Posmatramo funkciju

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x.$$

Domen i kodomen su promenjeni.

Funkcija $f : A \to B$ je bijekcija ako i samo ako je istovremeno i sirjekcija i injekcija. Tada svaka slika ima tačno jedan original.
Posmatramo funkciju

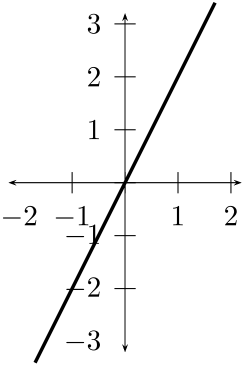
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x.$$

Domen i kodomen su promenjeni.
Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tada je $f(x_1) = 2x_1$, a $f(x_2) = 2x_2$. Ako je $f(x_1) = f(x_2)$, tj. $2x_1 = 2x_2$, nakon deljenja sa 2, imamo da je $x_1 = x_2$, što pokazuje da je f injekcija.

Funkcija $f : A \to B$ je bijekcija ako i samo ako je istovremeno i sirjekcija i injekcija. Tada svaka slika ima tačno jedan original.
Posmatramo funkciju

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x.$$

Domen i kodomen su promenjeni.
Neka su $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Tada je $f(x_1) = 2x_1$, a $f(x_2) = 2x_2$. Ako je $f(x_1) = f(x_2)$, tj. $2x_1 = 2x_2$, nakon deljenja sa 2, imamo da je $x_1 = x_2$, što pokazuje da je f injekcija.
Za element y iz skupa slika imamo da je njegov original $\frac{y}{2}$ (uvek postoji), jer je $f(\frac{y}{2}) = 2 \cdot \frac{y}{2} = y$, pa je preslikavanje f i sirjekcija, što zajedno sa injekcijom daje da je f bijekcija.



Funkcija $f(x) = 2x$

Za funkciju $f : A \to B$ **(direktnom) slikom** skupa $C \subset A$ nazivamo skup

$$f[C] = \{f(x) : x \in C\}.$$

Inverznom slikom skupa $D \subset B$ nazivamo skup

$$f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

Za funkciju $f : A \to B$ **(direktnom) slikom** skupa $C \subset A$ nazivamo skup

$$f[C] = \{f(x) : x \in C\}.$$

Inverznom slikom skupa $D \subset B$ nazivamo skup

$$f^{-1}[D] = \{x \in A : f(x) \in D\}$$

Ako $f(x) = 10^x$, onda je $f[(-\infty, 0]] = (0, 1]$, dok je $f^{-1}[[1, 10]] = [0, 1]$.

Za funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$ definišemo funkciju $g \circ f : A \to C$ sa $g \circ f(x) = g(f(x))$ i nazivamo je **kompozicija funkcija** f i g.

Za funkcije $f : A \to B$ i $g : B \to C$ definišemo funkciju $g \circ f : A \to C$ sa $g \circ f(x) = g(f(x))$ i nazivamo je **kompozicija funkcija** f i g.
Ako je $f(x) = x^2 + 3$, a $g(x) = e^x$, onda je

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3) = e^{x^2+3}.$$

Ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda je $f^{-1} : B \to A$ definisana sa

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

inverzna funkcija funkcije f.

Ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda je $f^{-1} : B \to A$ definisana sa

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

inverzna funkcija funkcije f.
Za inverznu funkciju važi da je $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ i $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$

Ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda je $f^{-1} : B \to A$ definisana sa

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

inverzna funkcija funkcije f.
Za inverznu funkciju važi da je $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ i $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$
Za funkciju $f(x) = 3x - 1$, inverzna je $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

Ako je $f : A \to B$ bijekcija, onda je $f^{-1} : B \to A$ definisana sa

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

inverzna funkcija funkcije f.
Za inverznu funkciju važi da je $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ i $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$
Za funkciju $f(x) = 3x - 1$, inverzna je $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$.

$$f \circ f^{-1}(x) = f(\frac{x+1}{3})) = 3(\frac{x+1}{3}) - 1 = (x+1) - 1 = x$$

Tabelarno zadata funkcija F

1	Partizan
2	Crvena zvezda
3	Vojvodina
4	Jagodina
5	Sloboda P. Sevojno
6	Radnički 1923
7	Spartak Zlat. voda
8	OFK Beograd
9	Javor
10	Rad
11	Hajduk
12	BSK
13	Smederevo
14	Novi Pazar
15	Borac
16	Metalac

Tabelarno zadata funkcija F

1	Partizan
2	Crvena zvezda
3	Vojvodina
4	Jagodina
5	Sloboda P. Sevojno
6	Radnički 1923
7	Spartak Zlat. voda
8	OFK Beograd
9	Javor
10	Rad
11	Hajduk
12	BSK
13	Smederevo
14	Novi Pazar
15	Borac
16	Metalac

Inverzna funkcija funkcije F koja mestu na tabeli dodeljuje tim, a koja je definisana u prethodnom primeru tabelom, je funkcija F^{-1} koja timu dodeljuje mesto na kom se nalazi. Tako je, npr.

$$F^{-1}(\text{Vojvodina}) = 3.$$

Tabelarno zadata funkcija F

1	Partizan
2	Crvena zvezda
3	Vojvodina
4	Jagodina
5	Sloboda P. Sevojno
6	Radnički 1923
7	Spartak Zlat. voda
8	OFK Beograd
9	Javor
10	Rad
11	Hajduk
12	BSK
13	Smederevo
14	Novi Pazar
15	Borac
16	Metalac

Na pitanje "Koji timovi idu u Eurokupove?", odgovor je prva tri, tj. direktna slika skupa $\{1, 2, 3\}$,

$f[\{1, 2, 3\}]$
$=$\{Partizan, Crvena Zvezda, Vojvodina\}

Tabelarno zadata funkcija F

1	Partizan
2	Crvena zvezda
3	Vojvodina
4	Jagodina
5	Sloboda P. Sevojno
6	Radnički 1923
7	Spartak Zlat. voda
8	OFK Beograd
9	Javor
10	Rad
11	Hajduk
12	BSK
13	Smederevo
14	Novi Pazar
15	Borac
16	Metalac

Na pitanje "Na kom su mestu timovi iz Vojvodine?", odgovor je inverzna slika skupa {Vojvodina, Hajduk, Spartak},

$f^{-1}[\{\text{Vojvodina, Hajduk, Spartak}\}]$
$=\{3, 7, 11\}$

Tabelarno zadata funkcija F

1	Partizan
2	Crvena zvezda
3	Vojvodina
4	Jagodina
5	Sloboda P. Sevojno
6	Radnički 1923
7	Spartak Zlat. voda
8	OFK Beograd
9	Javor
10	Rad
11	Hajduk
12	BSK
13	Smederevo
14	Novi Pazar
15	Borac
16	Metalac

Ako funkcija G dodeljuje grad iz kog je tim, onda kompozicija $G \circ F$ daje odgovor iz kog je grada tim na odgovarajućem mestu. T

$$G \circ F(11) = G(\text{Hajduk}) = \text{Kula}$$

Tabelarno zadata funkcija F

1	Partizan
2	Crvena zvezda
3	Vojvodina
4	Jagodina
5	Sloboda P. Sevojno
6	Radnički 1923
7	Spartak Zlat. voda
8	OFK Beograd
9	Javor
10	Rad
11	Hajduk
12	BSK
13	Smederevo
14	Novi Pazar
15	Borac
16	Metalac

Ako je H inverzna funkcija funkcije F, onda H timu dodeljuje mesto na tabeli.

$$H(\text{Javor}) = 9$$

Nule funkcije funkcije $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ čine skup tačaka čija je slika nula, tj.

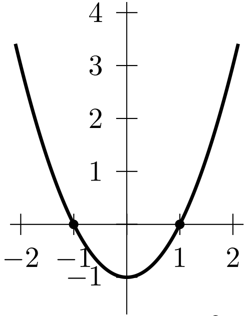
$$\{x : f(x) = 0\}.$$

Koristeći inverznu sliku funkcije, skup nula funkcije f se može definisati kao $f^{-1}[\{0\}]$.

Nule funkcije funkcije $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$ čine skup tačaka čija je slika nula, tj.

$$\{x : f(x) = 0\}.$$

Koristeći inverznu sliku funkcije, skup nula funkcije f se može definisati kao $f^{-1}[\{0\}]$.



Funkcija $f(x) = x^2 - 1$

Funkcija je **pozitivna** tamo gde važi $f(x) > 0$, a **negativna** tamo gde je $f(x) < 0$.
Skup vrednosti za koje je funkcija pozitivna je $f^{-1}[(0, \infty)]$, dok je skup vrednosti za koje je funkcija negativna $f^{-1}[(-\infty, 0)\}$.

- Rećićemo da je funkcija **striktno rastuća** ako

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

  Ako važi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2),$$

  onda je funkcija samo **rastuća**, odnosno neopadajuća.

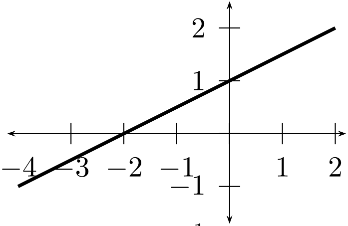
- Rećićemo da je funkcija **striktno opadajuća** ako

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

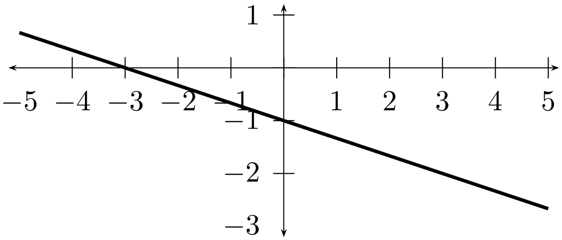
  Ako važi

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

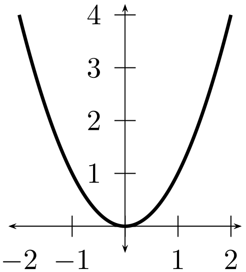
  onda je funkcija samo **opadajuća**, odnosno nerastuća.



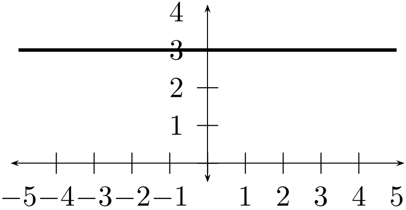
$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



Funkcija $g(x) = -\frac{1}{3}x - 2$



Funkcija $h(x) = x^2$



Funkcija $c(x) = 3$

f u tački x_0 ima lokalni maksimum ako

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ \ f(x_0) \geq f(x)$$

f u tački x_0 ima lokalni minimum ako

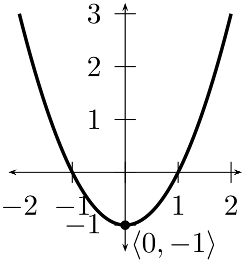
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \ \ f(x_0) \leq f(x).$$

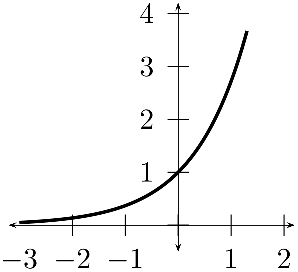
f u tački x_0 ima lokalni maksimum ako

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad f(x_0) \geq f(x)$$

f u tački x_0 ima lokalni minimum ako

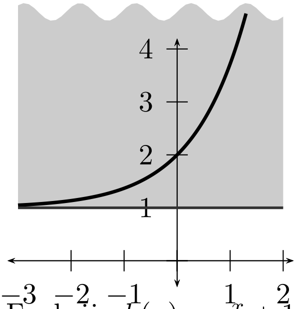
$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad f(x_0) \leq f(x).$$



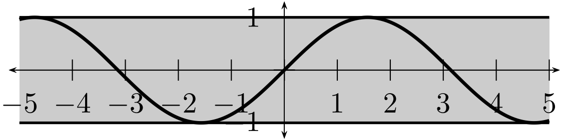


Funkcije $f(x) = x^2 - 1$ i $f(x) = e^x$

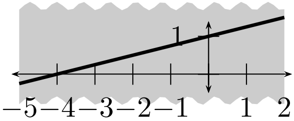
- Funkcija je **ograničena sa gornje strane** na skupu $A \subset \mathbb{R}$ ako postoji broj M takvo da je svako $x \in A$ važi $f(x) \leq M$.
- Funkcija je **ograničena sa donje strane** na skupu $A \subset \mathbb{R}$ ako postoji broj m takvo da je svako $x \in A$ važi $f(x) \geq m$.
- Funkcija je **ograničena** na skupu $A \subset \mathbb{R}$ ako je ograničena i sa donje i sa gornje strane na skupu A, tj. ako postoji broj K takvo da je svako $x \in A$ važi $|f(x)| \leq K$.



Funkcija $h(x) = e^x + 1$



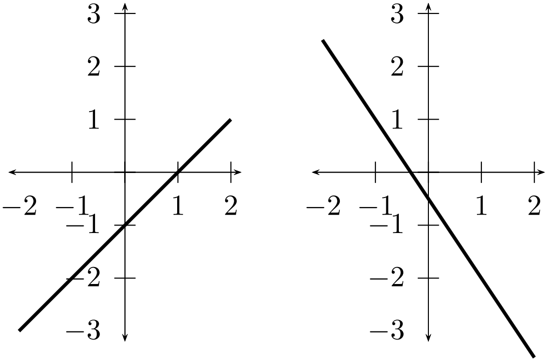
Funkcija $g(x) = \sin x$



Funkcija $l(x) = \frac{1}{4}x + 1$

$$f(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}.$$

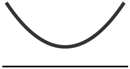
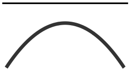
$$f(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}.$$



Funkcije $f(x) = x - 1$ i $g(x) = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

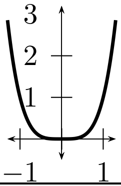
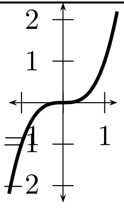
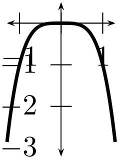
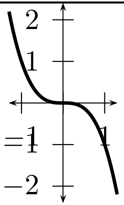
$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

	$D > 0$	D=0	D<0
a>0			
a<0			

Šematski prikaz grafika kvadratne funkcije u zavisnosti od znaka vodećeg člana i znaka diskriminante

$$f(x) = ax^n, \quad a \neq 0$$

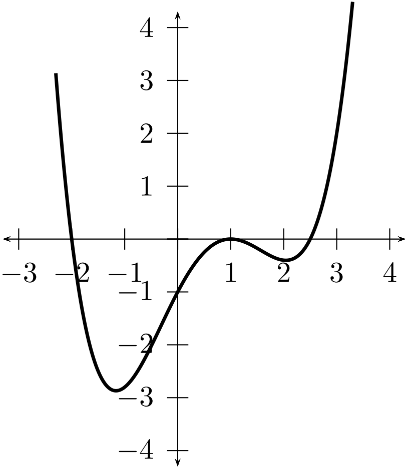
$$f(x) = ax^n, \quad a \neq 0$$

	n parno	n neparno
a>0		
a<0		

Stepene funkcije

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

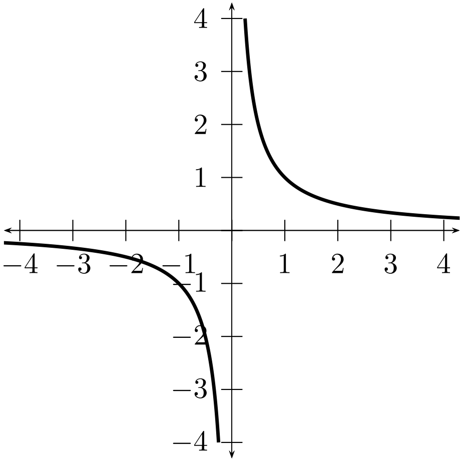
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$



Polinom $p(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{19}{10}x - 1$

$$f(x) = \frac{a}{x^n}$$

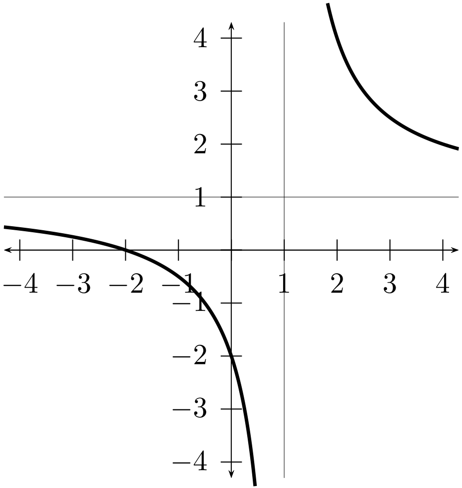
$$f(x) = \frac{a}{x^n}$$



Funkcija $h(x) = \frac{1}{x}$

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad a_n, b_m \neq 0.$$

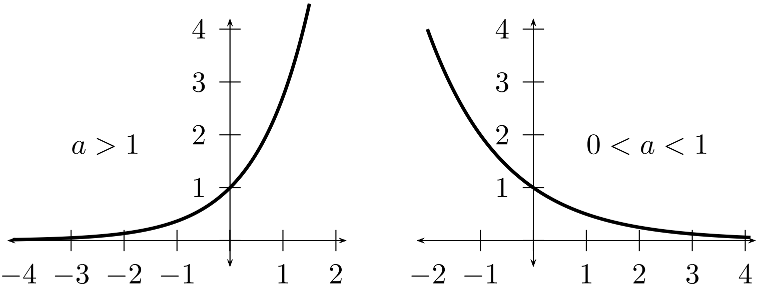
$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}, \quad a_n, b_m \neq 0.$$



Funkcija $h(x) = \frac{x+2}{x-1}$

$$f(x) = a^x, a > 0.$$

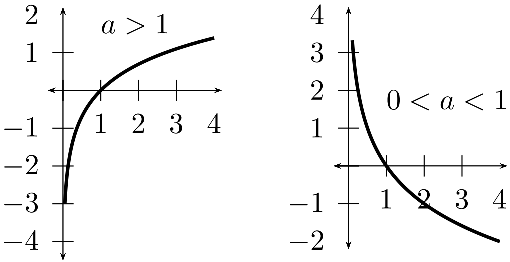
$f(x) = a^x, a > 0.$



Funkcije $f(x) = e^x$ i $g(x) = (\frac{1}{2})^x$

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0.$$

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0.$$



Funkcije $g(x) = \ln x$ i $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$