ASTRONOMIJA I ASTROFIZIKA

GEOMETRIJA - (septembar 2004.)

1. Neka se koordinatni sistem $O'_{x'y'}$ dobija od Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema O_{xy} rotacijom oko tačke A sa koordinatama $(4,3)$ za $+30^0$.

a) [5 p.] Odrediti koordinate tačke B u novom koordinatnom sistemu $O'_{x'y'}$ ako su u starom koordinatnom sistemu (O_{xy}) njene koordinate $(1,1)$.

b) [5 p.] Odrediti koordinate tačke C u starom koordinatnom sistemu O_{xy} ako su u sistemu $O'_{x'y'}$ njene koordinate $(-1,2)$.

2. a) [15 p.]
Diskutovati i skicirati grafik jednačine

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - xy = 0$$

transformišući je najpre na jednačinu po x' i y' koja ne sadrži $x'y'$ član (term). (Odrediti fokuse, direktrisu, ekscentricitet, žižni parametar.)

b) [5 p.] Zapisati polarnu jednačinu dobijenog konusnog preseka birajući za pol njegov fokus i polarnu osu tako da je paralelna sa direktrisom i usmerena tako da joj je bliže teme (i direktrisa) sa desne strane.

3. [20 p.] Neka su na jediničnoj sferi data dva pravougla (krivolinijska) trougla $\triangle ABC$ ($\angle BAC = \frac{\pi}{2}$) i $\triangle BCD$ ($\angle CBD = \frac{\pi}{2}$) i neka je $AC = \frac{\pi}{6}$, $\angle ABC = \frac{\pi}{4}$, $\angle BDC = \frac{5\pi}{12}$. Odrediti dužinu luka CD.

4. Neka je zadata kriva sa $\vec{r} = (t + \frac{1}{t},\ t - \frac{1}{t},\ 2lnt)$. Odrediti

a) [10 p.] fleksiju $K = \frac{1}{\rho}$ (I krivinu krive) i

b) [10 p.] apsolutnu vrednost torzije $|\,\tau\,| = \frac{1}{|\,R\,|}$ (II krivine krive)

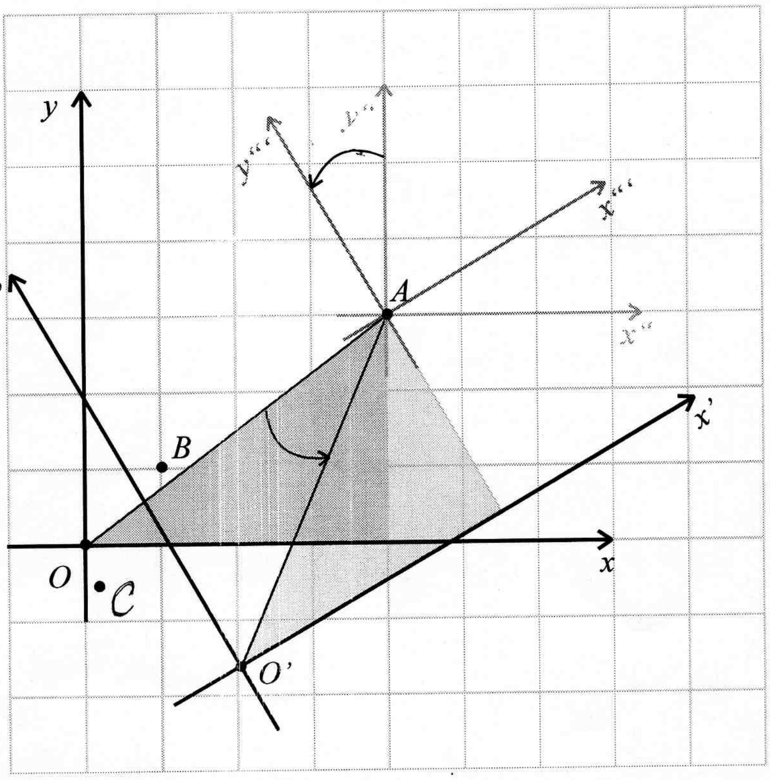
u tački N koja odgovara vrednosti parametra $t_0 = 1$.

5. [15 p.] Data je kriva $\vec{r} = (t, 1, \sqrt{5 - t^2})$. Napisati jednačine ravni koje obrazuju prirodni triedar krive u tački $(1,1,2)$.

6. [10 p.] Odrediti jednačinu tangentne ravni za površ zadatu parametarski sa $x = u\cos v,\quad y = u \sin v,\quad z = \sqrt{3}\,u \quad (u \in R,\ 0 \le v < 2\pi)$ u tački $P : (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$.

Rezultati i usmeni: (kab. 47/II)
22. IX u $9^{\underline{h}}$

1. Neka se koordinatni sistem $A_{x''y''}$ dobija od koordinatnog sistema O_{xy} translacijom za vektor $\vec{OA}$, a koordinatni sistem $A_{x'''y'''}$ rotacijom sistema $A_{x''y''}$ za 30° oko tačke A.



Veza između koordinata (x,y) u polarnom sistemu i koordinate (x'',y'') (iste tačke) u sistemu $A_{x''y''}$ je:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-4 \\ y-3 \end{bmatrix} \qquad (0)$$

Tačke O u sistemu $A_{x''y''}$ ima stoga koordinate $(-4,-3)$. Veza između koordinata (iste tačke) u sistemima $A_{x''y''}$ i $A_{x'''y'''}$ je sledeća:

$$\begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & \sin 30^\circ \\ -\sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Dalje, tačka O, sa koordinatama $(-4,-3)$ u sistemu $A_{x''y''}$, se rotacijom za 30° oko tačke A transformiše u tačku O'. Dakle, koordinate tačke O' u sistemu $A_{x''y''}$ se dobijaju na sledeći način

$$(2) \quad \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{3}+\frac{3}{2} \\ -2-\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Koordinatni sistem $O'_{x'y'}$ se dobija od koordinatnog sistema $A_{x'''y'''}$ translacijom za vektor $\vec{AO'}$. ~~Kako je veza između~~ Kako su koordinate tačke O' u sistemu $A_{x'''y'''}$ jednake odgovarajućim koordinatama tačke O u sistemu $A_{x''y''}$ (tj., primenom (1) na (2)) dobijamo da su koordinate tačke O' u sistemu $A_{x'''y'''}$ $(-4,-3)$. Stoga je veza između koordinata (iste tačke) u sistemu $O'_{x'y'}$ i $A_{x'''y''}$ sledeća

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''' \\ y''' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Tako smo došli do veze između koordinata iste tačke sistema O_{xy} i $O'_{x'y'}$ koristeći veze iz (0), (1) i (3):

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}(x-4) + \frac{1}{2}(y-3) + 4 \\ -\frac{1}{2}(x-4) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y-3) + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - 2\sqrt{3} + \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 5 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Dakle, koordinate tačke B u sistemu $O'_{x'y'}$ su

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}1 - 2\sqrt{3} + \frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 + 5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} + 3,\ -\sqrt{3} + \frac{9}{2}\right)$$

Dalje, ako su koordinate tačke C u novom koord. sistemu $O'_{x'y'}$ $(-1,2)$ u starom se dobijaju rešavanjem sistema:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-4 \\ y-3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Otuda dobijamo (matričnim računom) da je

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} \\ -1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-4 \\ y-3 \end{bmatrix}, \text{ tj. } \begin{bmatrix} x-4 \\ y-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \\ 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Dakle, stare koordinate tačke C su $\left(-\frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{9}{2},\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ■

2. a) Izvršimo rotaciju koordinatnog sistema oko koordinatnog početka za ugao θ, gde je $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{1-1}{-1} = 0$ $(A=C=1,\ B=-1)$, tj. za $\theta = \frac{\pi}{4}$. Veza između koordinata tačaka u starom i novom sistemu je

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \text{ tj. smenom } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{cases} \text{ data}$$

jednačina se svodi na

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 - 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) + \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right) = 0$$

Sređivanjem gornjeg izraza se dobija

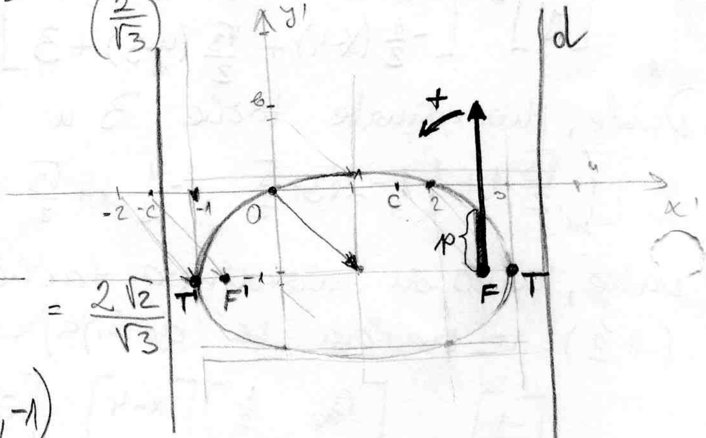
$$x'^2 + 3y'^2 - 2x' + 6y' = 0$$

$$\iff (x'-1)^2 + 3(y'+1)^2 = 4$$

$$\iff \boxed{\frac{(x'-1)^2}{2^2} + \frac{(y'-(-1))^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1}$$

Prepoznajemo jednačinu elipse sa centrom u tački $(1,-1)$ u koordinatnom sistemu $O_{x'y'}$

Naša elipsa se dobija translacijom elipse čija je jednačina (u sistemu $O_{x'y'}$) $\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$ za vektor $(1,-1)$.



Tražene veličine su, dakle,

velika osa: $a = 2$

mala osa: $b = \frac{2}{\sqrt{3}}$ $(\sim 1{,}154)$

veličina $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $(c \sim 1.63299)$

Fokusi: $F'\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 1, -1\right)$, $F\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 1, -1\right)$

Temena: $T'(-1,-1)$, $T(-1,3)$

Žižni parametar: $p = \frac{b^2}{a} = \frac{4}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}$

$\left(\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y^2 = \pm \frac{b^2}{a^2} \cdot b^2\right)$

ekscentricitet: $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ $(\sim 0.816 < 1)$

direktrisa: prava d: $x' = \frac{a^2}{c} + 1$; d': $x' = -\frac{a^2}{c} + 1$

d: $x' = \sqrt{6} + 1$ $(\approx 3{,}449)$; d': $x' = -\sqrt{6} + 1$ $\approx -1{,}449$

b) Pol - fokus F, polarna osa - paralelna sa direktrisom (teme T je desno od ose)

Polarna jednačina ove krive II reda:

$$r = \frac{p}{1 + e \cdot \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{p}{1 - e \sin\theta},$$

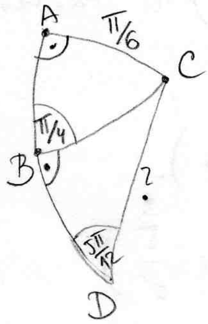
tj. u našem slučaju

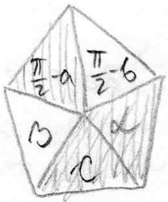
$$\boxed{r = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sin\theta} = \frac{2}{3 - \sqrt{6} \sin\theta}}$$

Npr., polarne koordinate (r,θ) za tačku T' su $\left(a+c, \frac{\pi}{2}\right)$

Provera: $r = \frac{2}{3 - \sqrt{6} \cdot \sin\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3 - \sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a + c$

3.





Najpre treba odrediti dužinu luka BC iz trougla ABC. Koristimo Neperovu formulu koja povezuje veličine $a=\frac{\pi}{6}$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$ i $c=BC$, tj. formulu

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin\alpha\cdot\sin c. \quad (4)$$

Odavde sledi $\sin c=\sin BC=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

tj. $BC=c=\frac{\pi}{4}$

Sada posmatramo krivolinijski trougao BCD sa pravim uglom kod temena B. Opet su nam poznate veličine katete i naspramnog ugla, a traži se veličina hipotenuze DC. Dakle, koristeći istu formulu (4) pri čemu su sada $a=BC=\frac{\pi}{4}$, $\alpha=\measuredangle BDC=\frac{5\pi}{12}$ a $c=CD$, dobijamo

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin c,\ \text{tj.}$$

$$\sin CD=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{12}}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\frac{\sqrt2}{2}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt2}{2}\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12\right)}=\frac{2}{1+\sqrt3}\approx 0.732$$

Stoga je $\boxed{CD=\arcsin\left(\frac{2}{1+\sqrt3}\right)}\approx 0.82\text{ rad}\approx 47^\circ$ ■

4. Kriva: $\vec r=\left(t+\frac1t,\ t-\frac1t,\ 2\ln t\right)$

a) Za određivanje fleksije k koristimo formulu $k=\dfrac{|\vec r'\times\vec r''|}{|\vec r'|^3}$

Dakle, $\vec r'=\left(1-\frac{1}{t^2},\ 1+\frac{1}{t^2},\ 2\frac1t\right)\xrightarrow{t_0=1}\vec r'=(0,2,2)$ u tački N

$\vec r''=\left(\frac{2}{t^3},\ -\frac{2}{t^3},\ -\frac{2}{t^2}\right)\xrightarrow{t_0=1}\vec r''=(2,-2,-2)$ u tački N

$|\vec r'|=2\sqrt2$, a $\vec r'\times\vec r''=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\0&2&2\\2&-2&-2\end{vmatrix}=(0,4,-4)$, te je $|\vec r'\times\vec r''|=\sqrt{2\cdot16}=4\sqrt2$

Dakle, $k=\dfrac{4\sqrt2}{(2\sqrt2)^3}=\dfrac14$ ■

b) Za određivanje torzije koristimo formulu: $|\varkappa|=\dfrac{|(\vec r'\times\vec r'')\cdot\vec r'''|}{|\vec r'\times\vec r''|^2}$

Dakle, $\vec r'''=\left(\frac{-6}{t^4},\ \frac{6}{t^4},\ \frac{4}{t^3}\right)\xrightarrow{t_0=1}\vec r'''=(-6,6,4)$ u tački N

$(\vec r'\times\vec r'')\cdot\vec r'''=(0,4,-4)(-6,6,4)=24-16=8$

Stoga je, $|\varkappa|=\dfrac{8}{(4\sqrt2)^2}=\dfrac{8}{16\cdot2}=\dfrac14$ ■

5. parametarske jednačine krive $\vec{r}=(t,1,\sqrt{5-t^2})$ u tački $(1,1,2)$

$$\vec{r}=(t,1,\sqrt{5-t^2}) \xrightarrow{t_0=1} \vec{r_0}=(x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$$

$$\vec{r}'=\left(1,0,-\frac{t}{\sqrt{5-t^2}}\right) \xrightarrow{t_0=1} \vec{r}_0'=(x_0',y_0',z_0')=\left(1,0,-\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{r}''=\left(0,0,-\frac{5}{(5-t^2)^{3/2}}\right) \xrightarrow{t_0=1} \vec{r}_0''=(x_0'',y_0'',z_0'')=\left(0,0,-\frac{5}{8}\right)$$

Jednačina normalne ravni: $(x-x_0)x_0'+(y-y_0)y_0'+(z-z_0)z_0'=0$

$(x-1)1+(y-1)\cdot 0+(z-2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \longrightarrow \boxed{2x-z=0}$ ← jednačina norm. ravni u tački $(1,1,2)$ ■

Jednačina oskulatorne ravni: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ x_0'' & y_0'' & z_0'' \end{vmatrix}=0$

Iz $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -5/8 \end{vmatrix}=0$, dobijamo

$(y-1)\left(-\frac{5}{8}\right)=0$, tj. da je jednačina oskulatorne ravni $\boxed{y-1=0}$ ■

Jednačina rektifikacione ravni: $\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_0' & y_0' & z_0' \\ \begin{vmatrix} y_0' & z_0' \\ y_0'' & z_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z_0' & x_0' \\ z_0'' & x_0'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x_0' & y_0' \\ x_0'' & y_0'' \end{vmatrix} \end{vmatrix}=0$

Izračunavanjem navedene determinante za veličine napred navedene dobijamo

$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 \end{vmatrix}=0$. Iz ovoga sledi $\frac{5}{16}(x-1)+0+(z-2)\frac{5}{8}=0$

tj. $\boxed{x+2z-5=0}$ ← jednačina rektifikacione ravni date krive u tački $(1,1,2)$ ■

6. vidi zad. 7. u junskom ispitnom roku

Rešenje: $\sqrt{6}x+\sqrt{6}y-2z=0$ ■

TEST 7 (28. mart 2007.) Ime i prezime (br. ind.):

1. a) [2p.] Data je jednačina

$$5x^2 + 6\sqrt{3}xy - y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y - 12 = 0.$$

Zapisati jednačinu ove krive u novom koordinatnom sistemu tako da joj je žižni pravac paralelan sa jednom od dobijenih koordinatnih osa.

jednačina: $\frac{(y'+2)^2}{1} - \frac{(x'-0)^2}{(\sqrt{2}/2)^2} = 1$ (hiperbola)

(zapisati vrstu krive u zagradi)

b) [1 p.] Zapisati polarnu jednačinu dobijenog konusnog preseka birajući za pol njegov fokus i polarnu osu tako da je paralelna sa direktrisom koja joj leži sa desne strane.

$$r = \frac{1/2}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta}$$

2. [1p.] Odrediti presek konusa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2} = 0$ sa ravni:

a) $z = 2 \rightarrow$ kružnica

b) $x + y = z \rightarrow$ dve prave

c) $x + y = 2z \rightarrow$ jedna prava

d) $x + y = z - 1 \rightarrow$ hiperbola

3. [1p.] Data je polarna jednačina krive II reda $r = \frac{8}{4 + 2cos\theta}$. Zapisati njenu jednačinu u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu pri čemu se polarna osa poklapa sa y-osom a pol sa koordinatnim početkom.

$$12x^2 + 9\left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = 64$$

2 a) $z = 2 \rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 2}$ kružnica $x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$

b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{(x+y)^2}{2} = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2 - 4xy = 0$

$\rightarrow x^2 + y^2 + 4xy = 0 \longrightarrow ctg 2\theta = \frac{A-C}{B} = 0 \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$, tj. $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

smena: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{bmatrix}$

$\rightarrow 2x'^2 + 2y'^2 + 4(x'^2 - y'^2) = 0$

$\rightarrow 3x'^2 = y'^2$

$\rightarrow 3(x+y)^2 = (y-x)^2$

$\rightarrow \sqrt{3}(x+y) = y - x \vee \sqrt{3}(x+y) = x - y$

tj. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{bmatrix}$

$\rightarrow \underbrace{(\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 0}_{\text{prava}} \vee \underbrace{(\sqrt{3}-1)x + (\sqrt{3}+1)y = 0}_{\text{prava}}$

c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{(x+y)^2}{8} = 0$

$\rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = 0$

$\rightarrow (x-y)^2 = 0 \rightarrow \boxed{x - y = 0}$

d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{(x+y+1)^2}{2} = 0$

$\rightarrow x^2 + y^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2 - 4xy - 4x - 4y = 0$

$\rightarrow x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 4y + 2 = 0 \xrightarrow[y = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y']{\text{smena: } x = \sqrt{2}/2\, x' - \sqrt{2}/2\, y'} \frac{1}{2}(6x'^2 - 2y'^2) + 4\sqrt{2}x' + 2 = 0 \rightarrow 3\left(x'^2 + 2 \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2}x' \pm \frac{8}{9}\right) + 2 = y'^2$

$\rightarrow 3\left(x' + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2 - y'^2 = +2/3 \rightarrow \boxed{\frac{-y'^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{\left(x' + \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = 1}$

hiperbolo $\longrightarrow$

1. $ctg\, 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{5+1}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \underbrace{ctg^2 2\theta = \frac{1}{3} = \frac{\cos^2 2\theta}{1-\cos^2 2\theta}}$ $\qquad ctg\, 2\theta > 0 \to 0 < 2\theta < \frac{\pi}{2} \to 0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

$4\cos^2 2\theta = 1 \to \cos 2\theta = \frac{1}{2}$

smena:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y' \\ \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' \end{bmatrix}$$

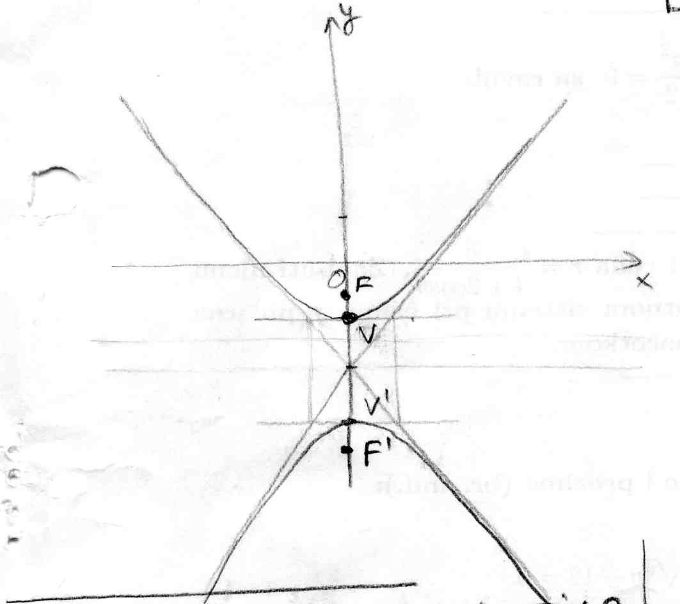
$\to 2\cos^2\theta - 1 = \frac{1}{2} \wedge 1 - 2\sin^2\theta = \frac{1}{2}$

$\to \boxed{\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \wedge \sin\theta = \frac{1}{2}}$ $(\theta = 30^\circ)$

$$5\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \tfrac{1}{2}y'\right)^2 + 6\sqrt{3}\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \tfrac{1}{2}y'\right)\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) - \left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2 + 8\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}x' - \tfrac{1}{2}y'\right) - 8\sqrt{3}\left(\tfrac{1}{2}x' + \tfrac{\sqrt{3}}{2}y'\right) - 12 = 0 \quad / \cdot 4$$

$$5\left(3x'^2 - \cancel{2\sqrt{3}x'y'} + y'^2\right) + 6\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x'^2 - \cancel{x'y'} + \cancel{3x'y'} - \sqrt{3}y'^2\right) - \left(x'^2 + \cancel{2\sqrt{3}x'y'} + 3y'^2\right) + 16\left(\sqrt{3}x' - y'\right) - 16\sqrt{3}\left(x' + \sqrt{3}y'\right) - 48 = 0$$

$$32x'^2 - 16y'^2 - 4\cdot 16y' - 3\cdot 16 = 0 \to \boxed{2x'^2 - y'^2 - 4y' - 3 = 0} \to \underbrace{2x'^2 - (y'+2)^2 = -1}$$



$$\boxed{\frac{(y'-(-2))^2}{1^2} - \frac{(x'-0)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1}$$

hiperbola: centar: $(0,-2)$

realna poluosa: $a = 1$

imaginarna poluosa: $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$c = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

ziže (na y-osi), temena $V:(0,-1)$ i $V':(0,-3)$

$F:\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right)$, $F':\left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right)$

$p = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

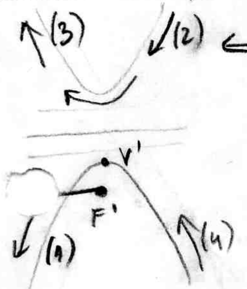
polarna jednačina

pol: žiža $F\left(0, \frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right)$

$$\boxed{r = \frac{1/2}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta}}$$

$\leftarrow$ za $\theta = -\frac{\pi}{2}$ dobija se tačka V tj. $r = \frac{1/2}{1 + \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{6}}$

$\underbrace{\frac{\sqrt{6}}{2} - 2 - (-1)}_{d(V,F)} = \frac{\sqrt{6}-2}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2} = \frac{6-4}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}+2}$ provera



polarna jednačina

pol: $F':\left(0, -\frac{\sqrt{6}}{2} - 2\right)$

$$\boxed{r = \frac{1/2}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta}}$$

za $\theta = -\frac{\pi}{2}$ se dobija tačka V' sa polarnim koordinatama $\left(\frac{1}{2+\sqrt{6}}, \frac{3\pi}{2}\right)$

3. $r = \frac{8}{4 + 2\cos\theta} = \frac{2}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta}$

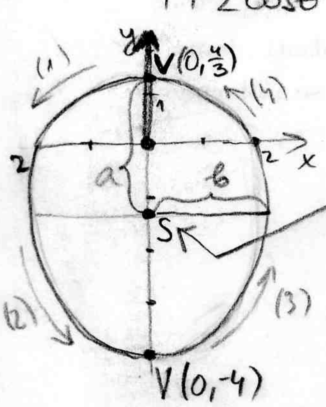
$p = 2$ i $e = \frac{1}{2} \to$ elipsa

$\frac{b^2}{a} = 2$, $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$

pol. $V:\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $V':(4, \pi)$ (polarne koord.)

$b = \frac{4}{3}\sqrt{3}$, $c = \frac{4}{3}$ $\leftarrow 2a = 4 + \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$ $\leftarrow$ velika osa

provera $a^2 = b^2 + c^2$



centar elipse $S:\left(0, -\frac{4}{3}\right)$

$$\leftarrow \boxed{\frac{(x-0)^2}{b^2} + \frac{(y-(-\frac{4}{3}))^2}{a^2} = 1} \text{ tj. } \frac{x^2}{\frac{16}{3}} + \frac{\left(y+\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{64}{9}} = 1, \text{ tj.}$$

$$\boxed{12x^2 + 9\left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = 64}$$

REŠENJA

I KOLOKVIJUM iz GEOMETRIJE (25. april 2007.)

Ime i prezime (br. ind.):

čitko pisanim slovima!

Rešenje za 1. zad.

1. [7p.] Data je jednačina

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 + 8\sqrt{3}x + 8y + 12 = 0.$$

$\boxed{(x'+2)^2 + 2(y')^2 = 1 \text{ (elipsa)}}$

Zapisati jednačinu ove krive u novom koordinatnom sistemu tako da joj je žižni pravac paralelan sa jednom od dobijenih koordinatnih osa.

(za tehniku videti rešenje za TEST 7. zad. 1a) i 1b))

2. [5 p.] Zapisati polarnu jednačinu elipse

$$(x+2)^2 + 2y^2 = 1$$

Rešenje za 2. zad. $\boxed{r = \dfrac{1}{2 - \sqrt{2}\sin\theta}}$

birajući za pol jedan njen fokus i polarnu osu tako da je paralelna sa direktrisom koja joj leži sa desne strane.

rešenje za 3. zad. $\boxed{\dfrac{(x-\sqrt{6}/2)^2}{1} - \dfrac{y^2}{1/2} = 1}$

$\frac{\sqrt{6}}{2} = e = \frac{c}{a}$ tj. $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$p = \frac{1}{2} = \frac{b^2}{a}$ tj. $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2a = \frac{1}{\sqrt{6}-2} - \frac{1}{2+\sqrt{6}}$ tj. $a = 1$

3. [5p.] Data je polarna jednačina krive II reda $r = \dfrac{1}{2 - \sqrt{6}\sin\theta}$. Zapisati njenu jednačinu u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu pri čemu se polarna osa poklapa sa y-osom a pol sa koordinatnim početkom.

$\theta = -\frac{\pi}{2} \wedge \theta = \frac{\pi}{2} \longrightarrow$

(za tehniku videti rešenje za TEST 7. zad. 3)

4. [9p.] Neka je data elipsa ε sa temenima $(\pm\sqrt{5}, 0)$ i fokusima $(\pm 1, 0)$ i prava
$s:\ 4y - 3x = 6.$

a) [1 p.] Odrediti koordinate tačke $\bar{O}$ koja predstavlja tačku preseka prave s sa x-osom i koeficijenat pravca (k) prave s.

b) [2p.] Odrediti vezu između polaznog koordinatnog sistema Oxy i sistema $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$ sa centrom u tački $\bar{O}$ i pravom s (orijentisanom u jednom od dva moguća smera) kao apscisom.

c) [2p.] Odrediti jednačinu date elipse ε u sistemu Oxy.

d) [1 p.] Odrediti jednačinu date elipse ε u sistemu $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$.

e) [1 p] Odrediti jednačinu elipse $\bar{\varepsilon} = \sigma_s(\varepsilon)$ u sistemu $\bar{O}\bar{x}\bar{y}$.

f) [2p.] Odrediti jednačinu elipse $\bar{\varepsilon}$ u sistemu Oxy.

videti rešenje za TEST 5 1. zad.

5) [2p.] Među datim jednačinama naći jednačinu hiperbolnog paraboloida

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1\ ,\quad \frac{x^2}{7} + \frac{z^2}{4} = y\ ,\quad \frac{z^2}{2} - \frac{x^2}{3} = 3y.$$

(sedlasta površ)
$x=0 \to$ parabola
$z=0 \to$ parabola
naziv
$y=\text{const} \to$ hiperbola

i utvrditi šta predstavlja njegov presek sa ravni $y = 0$.

a) hiperbolu b) parabolu c) elipsu d) par pravih.

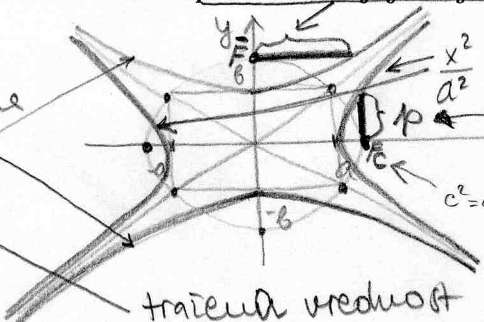
$y=0 \to 3z^2 = 2x^2$

$\boxed{\sqrt{3}z - \sqrt{2}x = 0 \vee \sqrt{3}z + \sqrt{2}x = 0}$

6) [2p.] Data je hiperbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Odrediti žižni parametar njoj konjugovane hiperbole.



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

žižni parametar polazne hiperbole

$p = \frac{b^2}{a}$

$c^2 = a^2 + b^2 \to \frac{(a^2+b^2)}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1$

konjugovane $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

tražena vrednost žižnog parametra $\boxed{\bar{p} = \frac{a^2}{b}}$

(za $y = c \to x = \frac{a^2}{b}$)

TEST 10 (16.maj 2007.)

Ime i prezime (br. ind.):

1

1. [2p.] Data je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$, tačka Q iz spoljašnjosti elipse koja pripada x-osi i tačka P dobijena u preseku velike ose sa normalom na tangentu iz tačke Q na elipsu u tački dodira. Dokazati da važi

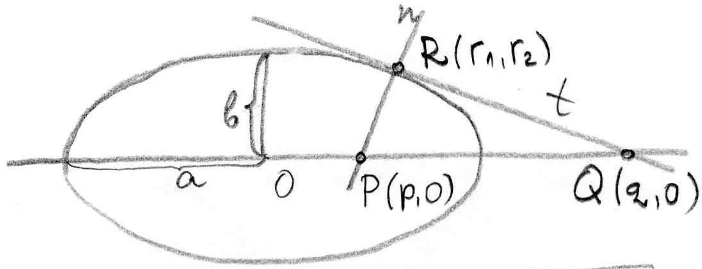
$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = a^2 - b^2$$

2. [2p.] Odrediti izraz za krivinu krive u ravni i primeniti ga za odredjivanje tačke sa najvećom fleksijom krive $x = a\ cht$ i $y = b\ sht$ $(a, b > 0)$.

3. [2p.] Odrediti krivinu i torziju kružne zavojne linije $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, \lambda t)$.

RESENJA TESTA 10. (1)

(1.) Jednacina tangente na elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u tacki $R:(r_1,r_2)$ jeste prava



$t: \boxed{\frac{x\cdot r_1}{a^2}+\frac{y\cdot r_2}{b^2}=1}$. Kako $Q\in t$, sledi $\frac{q\cdot r_1}{a^2}=1$, tj. $\boxed{q r_1 = a^2}$. (1)

Jednacina prave kroz tacke $P:(p,0)$ i $R:(r_1,r_2)$ jeste

$n: \frac{x-p}{r_1-p}=\frac{y-0}{r_2-0}$, tj. $\boxed{y\cdot(r_1-p)=r_2(x-p)}$

Kako su prave t i n ortogonalne, za njihove koeficijente pravaca k_t i k_n važi $k_t\cdot k_n=-1$, te imamo: $k_t\cdot k_n=\left(-\frac{b^2\cdot r_1}{r_2\cdot a^2}\right)\cdot\left(\frac{r_2}{r_1-p}\right)=-1$. Koristeći (1) iz prethodne jednakosti dobijamo

$-\frac{b^2}{\cancel{r_2}\cdot q}\cdot\frac{\cancel{r_2}}{\frac{a^2}{q}-p}=-1$, tj. $a^2-b^2=p\cdot q=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ ☒

(2.) Izraz za krivinu K i poluprečnik krive $\rho\ (=\frac{1}{K})$ ravne krive dobijamo iz obrasca

$$K=|\vec{K}|=\frac{1}{\rho}=\frac{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix}y'&z'\\y''&z''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z'&x'\\z''&x''\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x'&y'\\x''&y''\end{vmatrix}^2}}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\right)^3},$$ gde je

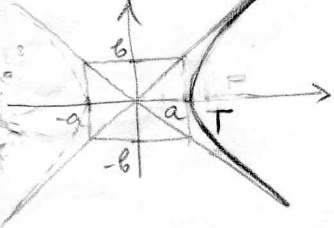
$\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$, a $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ i uzimajući da je $z(t)=0$. Tako dobijamo

$$\boxed{\frac{1}{\rho}=K=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^3}}.$$

Kriva je zadata u ravni sa $\vec{r}=\vec{r}(t)=(a\cdot \operatorname{ch}t,\ b\cdot\operatorname{sh}t)$ $(a,b>0)$

Kako je $\vec{r}\,'=(a\operatorname{sh}t,\ b\operatorname{ch}t)$ a $\vec{r}\,''=(a\operatorname{ch}t,\ b\operatorname{sh}t)$, za krivinu K (u tački $t\in\mathbb{R}$) imamo: $K=\frac{1}{\rho}=\frac{|ab\operatorname{sh}^2t-ab\operatorname{ch}^2t|}{\left(\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2t+b^2\operatorname{ch}^2t}\right)^3}=\frac{ab}{\left(\sqrt{a^2\operatorname{sh}^2t+b^2\operatorname{ch}^2t}\right)^3}$

Primećujemo da je $K=K(t)$ parna f-ja po t i monotono opadajuća na intervalu $[0,+\infty)$ te ima najveću vrednost za $t=0$, tj. $K(0)=a/b^2\rightarrow$



Hodograf naše vektorske f-je ②

$\vec r(t)=(a\,\mathrm{ch}\,t,\ b\,\mathrm{sh}\,t)$ jeste jedna grana hiperbole.

Najveća zakrivljenost je u temenu T $(\vec{OT}=\vec r(0))$

i iznosi $K=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{ab}{\left(\sqrt{a^2\mathrm{sh}^2 0+b^2\mathrm{ch}^2 0}\right)^3}=\dfrac{a}{b^2}$, a poluprečnik

zakrivljenosti je $\rho=\dfrac{b^2}{a}=p$ u tački $T:(a,0)$ ■

---

③ Kružna zavojna linija je zadata sa

$\vec r(t)=(a\cos t,\ a\sin t,\ \lambda t)$, gde je λ-koeficijent proporcionalnosti.

Kako je
$$\vec r\,'(t)=(-a\sin t,\ a\cos t,\ \lambda),$$
$$\vec r\,''(t)=(-a\cos t,\ -a\sin t,\ 0) \text{ i}$$
$$\vec r\,'''(t)=(a\sin t,\ -a\cos t,\ 0),$$
dobijamo da su

!! konstante (ne zavise od t)

$$|\vec r\,'(t)|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+\lambda^2}=\underline{\sqrt{a^2+\lambda^2}},$$

$$\vec r\,'(t)\times\vec r\,''(t)=(\lambda a\sin t,\ -\lambda a\cos t,\ a^2)\rightarrow \underline{|\vec r\,'(t)\times\vec r\,''(t)|=a\sqrt{a^2+\lambda^2}}$$

$$[\vec r\,'(t),\vec r\,''(t),\vec r\,'''(t)]=(\vec r\,'(t)\times\vec r\,''(t))\cdot\vec r\,'''(t)=\lambda a^2\sin^2 t+\lambda a^2\cos^2 t+a^2\cdot 0=\underline{\lambda a^2}.$$

Krivina ove krive (za proizvoljni parametar t) iznosi

$$\boxed{K=\frac{1}{\rho}=\frac{|\vec r\,'\times\vec r\,''|}{|\vec r\,'|^3}=\frac{a\sqrt{a^2+\lambda^2}}{(\sqrt{a^2+\lambda^2})^3}=\frac{a}{a^2+\lambda^2}}$$

dok je torzija

$$\boxed{\varkappa=\frac{1}{R}=-\rho^2[\dot{\vec r},\ddot{\vec r},\dddot{\vec r}]=\frac{-[\vec r\,',\vec r\,'',\vec r\,''']}{|\vec r\,'\times\vec r\,''|^2}=\frac{-\lambda \cancel{a^2}}{\cancel{a^2}(a^2+\lambda^2)}=\frac{-\lambda}{a^2+\lambda^2}}$$

TEST 11 (23. maj 2007.)

Ime i prezime (br. ind.):

1. [2p.] Odrediti najveću vrednost za krivinu krive zadatu sa

$$\vec{r}(t) = (\frac{\cos t}{1+2\cos t}, \quad \frac{\sin t}{1+2\cos t}) \quad \text{pri čemu} \quad t \in (\frac{-2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}).$$

2. [3 p.] Odrediti jednačine svih šest elemenata prirodnog triedra za kružnu zavojnu liniju

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, \quad a\sin t, \quad \lambda t) \quad \text{u tački sa parametrom} \quad t_0 = \frac{\pi}{3}.$$

3. [2p.] Dat je torus

(u,w)

$$\vec{r}(\cancel{t}) = ((b + a\sin u)\cos w, \quad (b + a\sin u)\sin w, \quad a\cos u), \quad u \in [0, 2\pi] \quad \text{i} \quad w \in [0, 2\pi]$$

nastao rotacijom oko z-ose kružnice poluprečnika a $(a > 0)$ čiji se centar nalazi u xy-ravni i na rastojanju b $(b > a)$ od koordinatnog početka. Zapisati jednačine tangentne ravni i normale na torus u proizvoljnoj tački (u_0, w_0) te površi. Dokazati da normala na površ torusa u svakoj tački prolazi kroz centar kružnice poluprečnika a kojoj pripada posmatrana tačka.

REŠENJA ZADATAKA TESTA 11

(1.) Zadata kriva $\vec{r}=\left(\frac{\cos t}{1+2\cos t}, \frac{\sin t}{1+2\cos t}\right)$ definisane za $t\in\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ određuje jednu granu hiperbole čiji je žižni parametar $p=1$ (jer su polarne koordinate ove hiperbole vezane relacijom $\rho=\frac{1}{1+2\cos t}$ (pol u žiži)).

$$\vec{r}\,'=\left(\frac{-\sin t(1+\cancel{2\cos t})-\cancel{\cos t\cdot(-2\sin t)}}{(1+2\cos t)^2}, \frac{\cos t(1+2\cos t)-\sin t\cdot(-2\sin t)}{(1+2\cos t)^2}\right)=\boxed{\left(\frac{-\sin t}{(1+2\cos t)^2}, \frac{2+\cos t}{(1+2\cos t)^2}\right)}$$

$$\vec{r}\,''=\left(\frac{-\cos t\cdot(1+2\cos t)^{\cancel{2}}+\sin t\cdot 2\cdot\cancel{(1+2\cos t)}\cdot(2\sin t)}{\cancel{(1+2\cos t)}(1+2\cos t)^3}, \frac{-\sin t\cdot(1+2\cos t)-(2+\cos t)\cdot 2\cancel{(1+2\cos t)}\cdot(-2\sin t)}{\cancel{(1+2\cos t)}(1+2\cos t)^3}\right)$$

$$\boxed{\vec{r}\,''=\left(\frac{-\cos t-2-2\sin^2 t}{(1+2\cos t)^3}, \frac{7\sin t+2\sin t\cos t}{(1+2\cos t)^3}\right)}$$

$$\frac{1}{\rho}=K=\frac{|x'y''-x''y'|}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^3}=\frac{\frac{|-7\sin^2 t-\cancel{2\sin^2 t\cos t}+2\cos t+4+4\sin^2 t+\cos^2 t+2\cos t+\cancel{2\cos t\sin^2 t}|}{(1+2\cos t)^5}}{\left(\sqrt{\frac{\sin^2 t}{(1+2\cos t)^4}+\frac{(2+\cos t)^2}{(1+2\cos t)^4}}\right)^3}=$$

$$K=\frac{|4\cos t-3\overbrace{\sin^2 t}^{1-\cos^2 t}+4+\cos^2 t|}{\frac{\cancel{(1+2\cos t)^5}}{(1+2\cos t)^{6}}\left(\sqrt{5+4\cos t}\right)^3}=\frac{|4\cos^2 t+4\cos t+1|\,(1+2\cos t)}{\left(\sqrt{5+4\cos t}\right)^3}=\left(\frac{1+2\cos t}{\sqrt{5+4\cos t}}\right)^3$$

(provera: primetimo da je za $t\in\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ vrednost $K(t)>0$)

Primetimo da je $K(t)$ parna f-ja $K(t)=K(-t)$ te je dovoljno ispitati $K(t)$ za $t\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$. Ispitujemo monotonost.

$$K'(t)=3\cdot\left(\frac{1+2\cos t}{\sqrt{5+4\cos t}}\right)^2\cdot\frac{-2\sin t\cdot\sqrt{5+4\cos t}+(1+2\cos t)\cdot\frac{1\cdot(-\cancel{4}^{2}\sin t)}{\cancel{2}\sqrt{5+4\cos t}}}{(5+4\cos t)}=$$

$$=\frac{3\cdot(1+2\cos t)^2\cdot\left[\overset{-8}{\cancel{-10}}\sin t-\overset{-4}{\cancel{8}}\sin t\cos t+\cancel{2\sin t}+\cancel{4\sin t\cos t}\right]}{\left(\sqrt{5+4\cos t}\right)^5}\Rightarrow$$

$$K'(t)=-\frac{12(1+2\cos t)^2\overbrace{(2+\cos t)}^{>0}\sin t}{\left(\sqrt{5+4\cos t}\right)^5}\leq 0 \quad \text{i} \quad K'(t)=0 \Leftrightarrow t=0$$

$\to$ na $\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$, $K(t)\searrow$

(a na $\left(-\frac{2\pi}{3},0\right)$, $K(t)\nearrow$)

Dakle, maksimalnu vrednost za $K(t)$ se dostiže u $t=0$ i iznosi $K(0)=\left(\frac{1+2\cos 0}{\sqrt{5+4\cos 0}}\right)^3=\left(\frac{3}{\sqrt{9}}\right)^3=1$.

Dakle, $\boxed{K(t)=1}$. Primetiti da se ovaj rezultat slaže sa ranije ustanovljenim (zad. 2 test 10) da je krivina

hiperbole maksimalna u temenima i iznosi
$K = \frac{a}{b^2} = \frac{1}{p}$, gde je p perimetar (u našem slučaju $p=1$).

(2) $\vec{r}(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ \lambda t)$, $t_0 = \frac{\pi}{3}$ $\rightarrow$ tačka $\boxed{\vec{r}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, \lambda\frac{\pi}{3}\right)}$

$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t,\ \lambda) \longrightarrow \boxed{\vec{r}\,'(t_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{a}{2}, \lambda\right)}$ ← ovim vektorom određena tangenta i n.r. u tački

$\vec{r}\,''(t) = (-a\cos t, -a\sin t, 0) \longrightarrow \vec{r}\,''(t_0) = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''(t_0) = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sqrt{3}a & a & 2\lambda \\ -a & -a\sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}(2\lambda a\sqrt{3}, -2\lambda a, 4a^2) = \boxed{\frac{1}{2}a(\lambda\sqrt{3}, -\lambda, 2a) = \vec{r}\,' \times \vec{r}\,''(t_0)}$

ovim vektorom određena binormala i oskulatorna ravan u tački

$\vec{r}\,' \times (\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') = \frac{1}{2}a\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{\sqrt{3}a}{2} & \frac{a}{2} & \lambda \\ \lambda\sqrt{3} & -\lambda & 2a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}a\left(a^2+\lambda^2, a^2\sqrt{3}+\lambda^2\sqrt{3}, 0\right) \Rightarrow$

$\boxed{\vec{r}\,' \times (\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'') = \frac{1}{2}(a^2+\lambda^2)a(1, \sqrt{3}, 0)}$ ← ovim vektorom određena glavna normala i rektifikaciona ravan

tangenta: $\boxed{\frac{x-\frac{a}{2}}{-\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{z-\frac{\lambda\pi}{3}}{\lambda}}$ binormala: $\boxed{\frac{x-\frac{a}{2}}{\lambda\sqrt{3}} = \frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{-\lambda} = \frac{z-\lambda\frac{\pi}{3}}{2a}}$

gl. normala: $\boxed{\frac{x-\frac{a}{2}}{1} = \frac{y-\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}},\ z = \lambda\frac{\pi}{3}}$

jednačina normalne ravni: $\boxed{-\frac{a\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2}\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \lambda\left(z-\frac{\lambda\pi}{3}\right) = 0}$

jednačina oskulatorne ravni: $\boxed{\lambda\sqrt{3}\left(x-\frac{a}{2}\right) - \lambda\left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + 2a\left(z-\lambda\frac{\pi}{3}\right) = 0}$

jednačina rektifikacione ravni: $\left(x-\frac{a}{2}\right) + \left(y-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt{3} = 0$ tj. $\boxed{x+\sqrt{3}y = 2a}$

(3) $\vec{r}(u,w) = ((b+a\sin u)\cos w, (b+a\sin u)\sin w, a\cos u)$, $u\in[0,2\pi]$, $w\in[0,2\pi]$

$\vec{r}\,'_u = (a\cos u\cos w, a\cos u\sin w, -a\sin u)$ $\quad \vec{r}\,'_w = (-(b+a\sin u)\sin w, (b+a\sin u)\cos w, 0)$

tangentna ravan i normala u tački (u_0, w_0) je određena vektorom:

$\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_w = a\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos u_0\cos w_0 & \cos u_0\sin w_0 & -\sin u_0 \\ -(b+a\sin u_0)\sin w_0 & (b+a\sin u_0)\cos w_0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$\boxed{\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_w = a(b+a\sin u_0)(\sin u_0\cos w_0, \sin u_0\sin w_0, \cos u_0)}$

tangentna ravan:
$(x-(b+a\sin u_0)\cos w_0)\sin u_0\cos w_0 + (y-(b+a\sin u_0)\sin w_0)\sin u_0\sin w_0 + (z-a\cos u_0)\cos u_0 = 0$

tj. $\boxed{x\cdot\sin u_0\cos w_0 + y\cdot\sin u_0\sin w_0 + z\cdot\cos u_0 = a + b\sin u_0}$

Jednačina normale:

$$\boxed{\frac{X-(b+a\sin u_0)\cos w_0}{\sin u_0 \cos w_0} = \frac{Y-(b+a\sin u_0)\sin w_0}{\sin u_0 \sin w_0} = \frac{Z-a\cos u_0}{\cos u_0}} \qquad (*)$$

Tačka $\vec{r}(u_0,w_0)$ pripada jedinstvenoj kružnici poluprečnika a (kružnica koja generiše torus) i njen centar je u tački $(b\cdot\cos w_0, b\cdot\sin w_0, 0)$. Glavna normala u tački torusa $\vec{r}(u_0,w_0)$ na tu kružnicu prolazi kroz ove dve tačke. Kako centar kružnice pripada normali (tj. zadovoljava jednačinu $(*)$

jer je
$$\frac{b\cdot\cos w_0-(b+a\sin u_0)\cos w_0}{\sin u_0\cos w_0} = \frac{b\cdot\sin w_0-(b+a\sin u_0)\sin w_0}{\sin u_0 \sin w_0} =$$

$$= \frac{0-a\cos u_0}{\cos u_0} = -a \Big),$$

dobijamo da se normala na površ torusa u tački torusa sa parametrima (u_0,w_0) poklapa sa glavnom normalom u tački kružnice kroz ovu tačku poluprečnika a na torusu. Odavde proizilazi da je ta kružnica geodezijska linija na torusu.

II KOLOKVIJUM iz GEOMETRIJE (30. maj 2007.)

Ime i prezime (br. ind.):

čitko pisanim slovima!

1. [4p.] Napisati jednačine ravni koje obrazuju prirodni triedar krive

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

u tački $(1, 1, 2)$.

2. [4p.] Naći krivinu i torziju krive

$$\vec{r} = (t + \frac{a^2}{t}, \ t - \frac{a^2}{t}, \ 2a \ ln\frac{t}{a})$$

3. [4p.] Odrediti tačke sa najvećom i najmanjom fleksijom krive

$$x = a \ \cos t \ \text{i} \ y = b \ \sin t \qquad (a > b > 0).$$

4. [8 p.] Avion leti najkraćim putem iz Beograda (g.š. $= 44^0 48'$, g.d. $= 20^0 29'$) u San Francisko (g.š. $= 37^0 42'$, g.d. $= -122^0 25'$)

a)[2 p.] Koliki put avion prelazi?

b) [2p.] Kakav je azimut pravca leta aviona pri polasku, a kakav pri dolasku? (Azimut orijentisanog pravca na Zemljinoj sferi je ugao koji obrazuju pravac jug-sever i dati orijentisani pravac, računat od severa u smeru kazaljke na satu.)

c) [4p.] U kojoj tački svog puta je avion najbliži Severnom polu? Koliko je tada udaljen od Severnog pola? (Poluprečnik Zemlje iznosi $R = 6370km$)

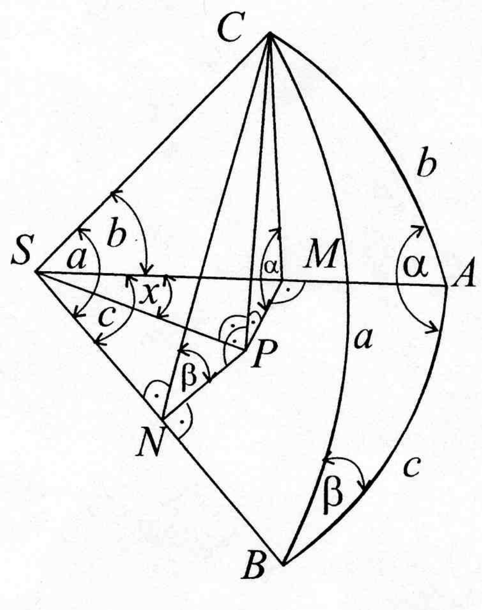
==

Napomena: I godina radi samo gornje zadatke.

==

(samo za II godinu)

5. [4p.] Koristeći oznake sa crteža ($\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$) i povezujući veličine $\overline{CP}$ i $\overline{CS}$ izvesti sinusnu teoremu koja povezuje elemente a, b, α i β sfernog trougla $\triangle ABC$.



6. [6p.] Koristeći polarnu kosinusnu teoremu izvesti formule koje povezuju elemente

a) α, β i a ,

b) α, β i b ,

c) α, β i c ,

pravouglog sfernog trougla.

7. [3p.] Dati definiciju geodezijske krive na površi.

8. [6p.] Dokazati da je nosač vektora torzije $\vec{\tau}$ glavna normala.

9. [6p.] Šta je eksces (defekt) sfernog trougla? U kakvoj je vezi sa površinom sfernog trougla? Dati definiciju autopolarnog trougla i odrediti njegov defekt.

REŠENJA ZADATAKA IZ GEOMETRIJE
II KOLOKVIJUM

1. Kriva u preseku dve površi $x^2+y^2+z^2=6$ i $x^2-y^2+z^2=4$ koja sadrži tačku $A:(1,1,2)$ ima za svoju (jednu od mogućih) parametarskih jednačina:

$$x=t \to \begin{array}{l} y^2+z^2=6-t^2 \\ -y^2+z^2=4-t^2 \quad (\cdot(-1)) \\ \hline 2y^2=2 \to y\in\{\pm 1\} \end{array}$$

(mogućnost $y=-1$ otpada jer tačka A pripada krivoj)

$y=1 \to z^2=5-t^2 \to z=\pm\sqrt{5-t^2}$

(mogućnost $z=-\sqrt{5-t^2}$ otpada jer A pripada krivoj)

$$\vec{r}(t)=(t,1,\sqrt{5-t^2})$$

$$\vec{r}\,'(t)=\left(1,0,\frac{-t}{\sqrt{5-t^2}}\right)$$

$$\vec{r}\,''(t)=\left(0,0,-\frac{5}{(\sqrt{5-t^2})^3}\right)$$

U tački A (parametar $t_0=1$) imamo: $\vec{r}_0=(1,1,2)$, $\vec{r}_0\,'=(1,0,-\frac{1}{2})$, $\vec{r}_0\,''=(0,0,-\frac{5}{8})$

Jednačina normalne ravni je određena vektorom $\vec{r}_0\,'$ pa je

$\boxed{\text{j.n.r. u A: } (\vec{R}-\vec{r}_0)\vec{r}_0\,'=0}$

$$(X-1)\cdot 1+(Y-1)\cdot 0+(Z-2)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=0 \to \boxed{2X-Z=0}$$

Jednačina oskulatorne ravni je određena vektorom $\vec{r}_0\,'\times\vec{r}_0\,''$ tj.

$\boxed{\text{j.o.r. u A: } (\vec{R}-\vec{r}_0)(\vec{r}_0\,'\times\vec{r}_0\,'')=0}$

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{8} \end{vmatrix}=0 \longrightarrow \boxed{Y-1=0}$$

Jednačina rektifikacione ravni je određena vektorom $\vec{r}\,'\times(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')$ tj.

$\boxed{\text{j.r.r. u A: } (\vec{R}-\vec{r}_0)(\vec{r}\,'\times(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''))=0}$

$$\begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{8} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{8} & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X-1 & Y-1 & Z-2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 \end{vmatrix}=0$$

tj. $\frac{5}{16}(X-1)+0\cdot(Y-1)+(Z-2)\cdot\frac{5}{8}=0 \to X-1+2Z-4=0 \to \boxed{X+2Z-5=0}$

② $\vec{r} = \left(t + \frac{a^2}{t},\ t - \frac{a^2}{t},\ 2a \ln\frac{t}{a}\right)$

$$\vec{r}\,' = \left(1 + (-1)\cdot\frac{a^2}{t^2},\ 1 + \frac{a^2}{t^2},\ 2\cancel{a}\cdot\frac{1}{\cancel{a}}\,\frac{a}{t}\right) = \left(1 - \frac{a^2}{t^2},\ 1 + \frac{a^2}{t^2},\ 2\frac{a}{t}\right)$$

$$\vec{r}\,'' = \left(2\frac{a^2}{t^3},\ -2\frac{a^2}{t^3},\ -2\frac{a}{t^2}\right)$$

$$\vec{r}\,''' = \left(-6\frac{a^2}{t^4},\ +6\frac{a^2}{t^4},\ 4\frac{a}{t^3}\right)$$

$$|\vec{r}\,'| = \sqrt{\frac{(t^2-a^2)^2 + (t^2+a^2)^2 + 4a^2t^2}{t^4}} = \sqrt{\frac{2t^4 + 2a^4 + 4a^2t^2}{t^4}}$$

$$\boxed{|\vec{r}\,'| = \sqrt{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)}{t^2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = K = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}, \qquad \tau = \frac{1}{R} = -\frac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''']}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2}$$

$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - \frac{a^2}{t^2} & 1 + \frac{a^2}{t^2} & 2\frac{a}{t} \\ 2\frac{a^2}{t^3} & -2\frac{a^2}{t^3} & -2\frac{a}{t^2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2a}{t^2} - \frac{2a^3}{t^4} + \frac{4a^3}{t^4},\ \frac{2a}{t^2} - \frac{2a^3}{t^4} + \frac{4a^3}{t^4},\ -\frac{2a^2}{t^3} + \cancel{\frac{2a^4}{t^5}} - \frac{2a^2}{t^3} - \cancel{\frac{2a^4}{t^5}}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \frac{a}{t^2}\left(-2 + \frac{2a^2}{t^2},\ 2 + \frac{2a^2}{t^2},\ -\frac{4a}{t}\right)}$$

$$= \frac{2a}{t^2}\left(\frac{a^2-t^2}{t^2},\ \frac{a^2+t^2}{t^2},\ \frac{-2at}{t^2}\right)$$

$$|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| = \frac{2|a|}{t^2}\sqrt{\frac{(a^2-t^2)^2 + (a^2+t^2)^2 + 4a^2t^2}{t^4}} = \frac{2|a|}{t^2}\sqrt{\frac{2a^4 + 2t^4 + 4a^2t^2}{t^4}} = \frac{2\sqrt{2}|a|}{t^4}\sqrt{(a^2+t^2)^2}$$

$$\rightarrow \boxed{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| = \frac{2\sqrt{2}|a|(a^2+t^2)}{t^4}}$$

$$K = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{\cancel{2\sqrt{2}}|a|\cancel{(a^2+t^2)}\cdot t^{\cancel{6}\,2}}{\cancel{t^4}\cdot\cancel{2\sqrt{2}}(t^2+a^2)^{\cancel{3}\,2}} = \boxed{\frac{|a|t^2}{(t^2+a^2)^2} = K}$$

$$[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,'''] = \frac{2a}{t^4}(a^2-t^2, a^2+t^2, -2at)\cdot\left(-\frac{6a^2}{t^4}, \frac{6a^2}{t^4}, \frac{4at}{t\,t^3}\right) = \frac{4a^2}{t^8}(a^2-t^2, a^2+t^2, -2at)(-3a, 3a, 2t)$$

$$= \frac{4a^2}{t^8}\left(\cancel{-3a^3} + 3at^2 + \cancel{3a^3} + 3at^2 - 4at^2\right) = \frac{4a^2}{t^{\cancel{8}\,6}}\cdot 2a\cancel{t^2} = \frac{8a^3}{t^6}$$

$$\tau = -\frac{\frac{\cancel{8a^3}}{\cancel{t^8}}}{\frac{\cancel{8a^2}(a^2+t^2)^2}{t^{\cancel{8}\,2}}} \Rightarrow \boxed{\tau = -\frac{at^2}{(a^2+t^2)^2}}$$

3. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(a>b>0)$ $\vec{r}(t) = (a\cos t, b\sin t)$

$\vec{r}: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

hodograf vek. f-je je elipsa

$$k = |\vec{k}| = \frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{\left(\sqrt{x'^2 + y'^2}\right)^3}$$

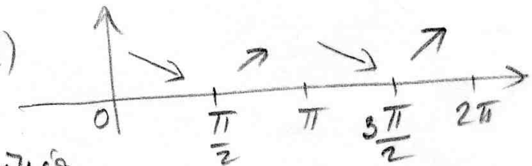
$\vec{r}\,'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

$\vec{r}\,''(t) = (-a\cos t, -b\sin t)$

$$K = \frac{|ab\sin^2 t + ab\cos^2 t|}{\left(\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}}\right)^3} = \boxed{\frac{ab}{\left(\sqrt{b^2 + (a^2-b^2)\sin^2 t}\right)^3}}$$

$$K(t) = \frac{ab}{\left(\sqrt{b^2 + c^2\sin^2 t}\right)^3} \quad (c^2 = a^2 - b^2)$$

$k(t)$



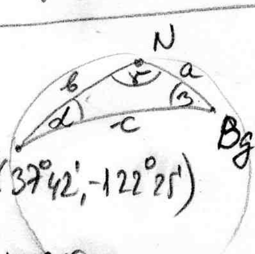
Funkcija $k(t)$ je monotono opadajuća, $k(t)\searrow$, za $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$, a monotono raste, $k(t)\nearrow$, za $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$, te ekstremne vrednosti dostiže u tačkama iz skupa $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

$K(\frac{\pi}{2}) = K(\frac{3\pi}{2}) = \frac{ab}{(\sqrt{a^2})^3} = \frac{b}{a^2}$ ← minimum

$K(0) = k(\pi) = k(2\pi) = \frac{ab}{(\sqrt{b^2})^3} = \frac{a}{b^2}$ ← maksimum

---

4.



SF$(37°42', -122°25')$ Bg$(44°48', 20°29')$

$a = 90° - 44°48' = 45°12' = 45{,}2° = 0{,}788888821$ rad

$b = 90° - 37°42' = 52°18' = 52{,}3° = 0{,}912807198$ rad

$\gamma = 122°25' + 20°29' = 142°54' = 142{,}9° = 2{,}61624859$ rad

Kosinusna teorema: $\boxed{\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cdot \cos\gamma}$

lučna mera $\angle$

$c = d_\ell(Bg, SF) = \arccos(\cos c) = \arccos(-0{,}016883926) = \boxed{90{,}9674237° = 1{,}587681056 \text{ rad}}$

$\cos c = \cos 45{,}2° \cos 52{,}3° + \sin 45{,}2° \cdot \sin 52{,}3° \cdot \cos 142{,}9° = -0{,}016883926$

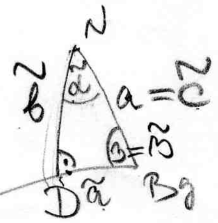
Rastojanje od Bg do SF. je $\underline{10113{,}52833 \text{ km}}$

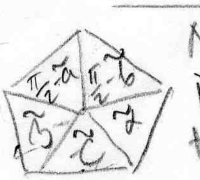
$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta \to \cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = 0{,}8787184$

→ Azimut u polasku jeste $\boxed{\beta = 28{,}51184282°}$

Slično, $\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = 0{,}903740959 \to \boxed{\alpha = 25{,}3457583°}$

→ Azimut u dolasku jeste $180° - \alpha = 180° - 25{,}3457583° = \boxed{154{,}6542417°}$





Neka je D tačka sa velike kružnice BgSF koja je najbliža severnom polu N. Tada je sferni trougao $\triangle NBgD$ pravougli sa pravim uglom naspram stranice $NBg = \tilde{c}$ (stara a)

4) $\tilde{\alpha}$ ugao dobijamo iz Neperovog pravila

$$\cos\tilde{C} = \operatorname{ctg}\tilde{\alpha}\cdot\operatorname{ctg}\tilde{\beta} \rightarrow \operatorname{ctg}\tilde{\alpha} = \frac{\cos\tilde{C}}{\operatorname{ctg}\tilde{\beta}} = \frac{\cos 45{,}2^\circ}{\operatorname{ctg} 28{,}511^\circ} = 0.38277376$$

$$\rightarrow \tilde{\alpha} = 69{,}05446522^\circ$$

→ Tačka D se nalazi na geografskoj dužini $20{,}48\dot{3} - 69{,}05446522 = -48.57113192^\circ$ (z.g.d.)

Veličinu $\tilde{b}$ dobijamo iz Neperove formule za trojku $(\tilde{b}, \beta, \tilde{c})$

tj. $\sin\tilde{b} = \sin\tilde{c}\cdot\sin\tilde{\beta} = \sin 45{,}2^\circ\cdot\sin 28{,}51184282^\circ = 0{,}338706777$

$\rightarrow \tilde{b} = 19{,}79810357^\circ = 0{,}345542092$ rad

Geografska širina je u tački D jednaka $70{,}20189643^\circ$ (s.g.š.)

a udaljenost tačke D od severnog pola iznosi 2201,103126 km

Grenland

5.) videti rešenje zad. 2 testa 8 (od 18. aprila 2007)

6.)

$$\boxed{\begin{aligned}
&\cos\alpha = -\cos\beta\cancel{\cos\gamma}^{0} + \sin\beta\cancel{\sin\gamma}^{1}\cos a \rightarrow \cos\alpha = \sin\beta\cos a\\
&\cos\beta = -\cos\cancel{\gamma}\cos\alpha^{0} + \cancel{\sin\gamma}^{1}\sin\alpha\cos b \rightarrow \cos\beta = \sin\alpha\cos b\\
&\underset{0}{\cancel{\cos\gamma}} = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c \rightarrow \cos c = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta
\end{aligned}}$$

7.) Geodezijska kriva na površi je kriva te površi čija se glavna normala u svakoj tački poklapa sa normalom na tu površ u toj tački.

8.) $\vec{\vec{z}} \overset{def}{=} \frac{d\vec{b}}{ds} = \dot{\vec{b}} = (\vec{t}\times\vec{n})^{\cdot} = \dot{\vec{t}}\times\vec{n} + \vec{t}\times\dot{\vec{n}} = \underbrace{\vec{k}\times\vec{n}}_{=0} + \vec{t}\times\dot{\vec{n}} = \vec{t}\times\dot{\vec{n}} \rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\vec{z}} \perp \vec{t}}$ (1)

$\vec{b}\cdot\vec{b} = 1 \Rightarrow \frac{d(\vec{b}\cdot\vec{b})}{ds} = 0 \rightarrow \dot{\vec{b}}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\dot{\vec{b}} = 0 \rightarrow 2\vec{b}\cdot\vec{\vec{z}} = 0 \rightarrow \boxed{\vec{\vec{z}} \perp \vec{b}}$ (2)

Iz (1) i (2) sledi $\vec{\vec{z}} \parallel \vec{n}$ tj. nosač vektora torzije je glavna normala

9.) Defekt (eksces) sfernog trougla sa uglovima α, β i γ, jeste veličina $\Delta = \alpha+\beta+\gamma-\pi$. $S(\Delta ABC) = R^2\cdot\Delta$, gde je R poluprečnik sfere. Autopolarni trougao je onaj koji se poklapa sa svojim polarnim, odakle sledi da su sve stranice i uglovi jednaki $\frac{\pi}{2}$ → $\Delta_{autopolarnog.} = \pi/2$ ▧

GEOMETRIJA (Astronomija sa astrofizikom)
- junski ispitni rok 2007. -

1. [15p.] Napisati jednačine tangente, binormale i glavne normale za krivu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

u tački $(1, 1, 2)$.

2. [10p.] Dat je torus

$\vec{r}(t) = ((b + a\sin u)\cos w, \quad (b + a\sin u)\sin w, \quad a\cos u), \quad u \in [0, 2\pi]$ i $w \in [0, 2\pi]$

nastao rotacijom oko z-ose kružnice poluprečnika a $(a > 0)$ čiji se centar nalazi u xy-ravni i na rastojanju b $(b > a)$ od koordinatnog početka. Zapisati jednačine tangentne ravni i normale na torus u proizvoljnoj tački (u_0, w_0) te površi.

3. [20p.] Odrediti najveću i najmanju vrednost za krivinu krive zadatu sa

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\cos t}{2 + \cos t}, \quad \frac{\sin t}{2 + \cos t}\right) \quad .$$

4. Data je jednačina

$$5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 + 8\sqrt{3}x + 8y + 12 = 0.$$

a) [15 p.] Zapisati jednačinu ove krive u novom koordinatnom sistemu tako da joj je žižni pravac paralelan sa jednom od dobijenih koordinatnih osa. (zapisati vrstu krive u zagradi)

b) [10 p.] Zapisati polarnu jednačinu dobijene krive birajući za pol jedan njen fokus i polarnu osu tako da je paralelna sa direktrisom koja joj leži sa desne strane.

5. [20 p.] Avion leti najkraćim putem iz Beograda (g.š. $= 44^0 48'$, g.d. $= 20^0 29'$) u San Francisko (g.š. $= 37^0 42'$, g.d. $= -122^0 25'$)
U kojoj tački svog puta (g.š., g.d.) je avion najbliži Severnom polu? Koliko je tada udaljen od Severnog pola? (Poluprečnik Zemlje iznosi $R = 6370km$)

6. [10 p.] Neka je s tangenta na krivu $y = lnx$ u tački $(\sqrt{3}, \frac{ln3}{2})$. Ako tačka A ima koordinate (a, b), odrediti koordinate tačke $\widetilde{A} = \sigma_s(A)$ koja se dobija kao slika tačke A prilikom osne simetrije sa osom s.

REŠENJE ZADATAKA:

1. tangenta: $\boxed{\frac{x-1}{1} = \frac{z-2}{-\frac{1}{2}}, \ y=1}$ binormala: $\boxed{x=1, \ z=2}$

glavna normala: $\boxed{\frac{x-1}{5/16} = \frac{z-2}{5/8}, \ y=1}$ (videti zad. 1 KOLOKVIJUM II)

---

2. tangentna ravan: $\boxed{x\cdot\sin u_0\cos w_0 + y\cdot\sin u_0\sin w_0 + z\cos u_0 = a + b\sin u_0}$

jednačina normale: $\boxed{\frac{x-(b+a\sin u_0)\cos w_0}{\sin u_0\cos w_0} = \frac{y-(b+a\sin u_0)\sin w_0}{\sin u_0\sin w_0} = \frac{z-a\cos u_0}{\cos u_0}}$

(videti zad. 3, TEST 11)

---

3. $\vec{r}\,'(t) = \left(\frac{-2\sin t}{(2+\cos t)^2}, \frac{1+2\cos t}{(2+\cos t)^2}\right)$, $\vec{r}\,'' = \left(-2\frac{4+6\cos t-\cos^3 t}{(2+\cos t)^4}, -2\sin t\frac{(2-\cos t-\cos^2 t)}{(2+\cos t)^4}\right)$

$$K = \frac{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{|x'y''-x''y'|}{\left(\sqrt{x'^2+y'^2}\right)^3} \longrightarrow \boxed{K(t) = \frac{2\cdot(2+\cos t)^3}{\sqrt{(5+4\cos t)^3}}}$$

Primetimo da je $K(t)$ parna f-ja (dovoljno je ispitati ovu f-ju za $t\geq 0$) i kako je f-ja $\varphi(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$ monotono rastuća (za $x\geq 0$), a funkcija $K(t) = \varphi(F(t))$, gde je $\boxed{F(t) = \frac{(2+\cos t)^2}{5+4\cos t}}$, dovoljno je ispitati f-ju $F(t)$, tj. odrediti njene ekstremne vrednosti.

$$F'(t) = \frac{-2\sin t\,(2+5\cos t+2\cos^2 t)}{(5+4\cos t)^2}$$

Kako su rešenja kvadratne jednačine $2+5u+2u^2=0$ iz skupa $\{-2, -\frac{1}{2}\}$, to je

$$F'(t)=0 \iff \sin t = 0 \ \vee \ \cos t = -\frac{1}{2}$$
$$\iff t\in\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\tfrac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$$

Kako je $F''(k\pi)<0$ ($k\in\mathbb{Z}$), sledi da $F(t)$ ima max. vrednost (a time i $K(t)$) za $t\in\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$

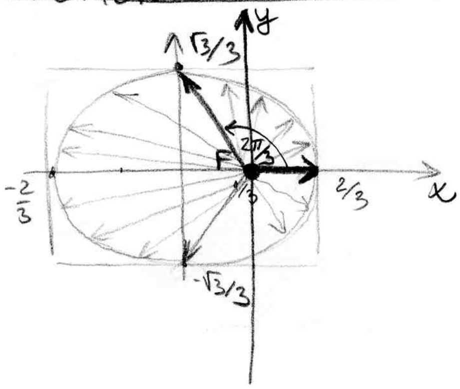
Kako je $F''(k\pi)>0$ ($k\in\mathbb{Z}$), sledi da $F(t)$ (a time i $K(t)$) ima min. vrednost za $t\in\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$

Dakle, maksimalna vrednost krivine $K=K(t)$ iznosi

$$K(t) = \frac{2\cdot(2+1)^3}{\sqrt{(5+4\cdot 1)^3}} = 2, \text{ za } t\in\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\},$$

a minimalna vr. iznosi $K(t) = \frac{2\cdot(2+(-\frac{1}{2}))^3}{\sqrt{(5+4\cdot(-\frac{1}{2}))^3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, za $t\in\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$

NAPOMENA u 3. zad.: Hodograf vektorske f-je $\vec{r}(t)=\left(\frac{\cos t}{2+\cos t}, \frac{\sin t}{2+\cos t}\right)$



jeste elipsa sa parametrima $a=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{3}, b=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (što se dobija iz $p=\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}$ i $e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$) ←

U 3. zad. II kolokvijuma dobili smo da je maksimalna krivina elipse u temenima na velikoj osi i da iznosi $k_{max}=\frac{a}{b^2}$, što u našem slučaju potvrđuje $\boxed{k_{max}=\frac{a}{b^2}=\frac{2/3}{1/3}=2}$, što smo i dobili. Prema tom zadatku, minimalna krivina elipse se dostiže u temenima na maloj osi i iznosi $\boxed{k_{min}=\frac{b}{a^2}=\frac{\sqrt{3}/3}{4/9}=\frac{3}{4}\sqrt{3}}$, što (opet) potvrđuje dobijeni rezultat u ovom zadatku.

(sličan zadatak, vezan za hiperbolu umesto elipse, jeste zadatak br. 1. test 11.)

---

4. a) $\boxed{(x'+2)^2+2(y')^2=1}$ (elipsa) b) $\boxed{r=\frac{1}{2-\sqrt{2}\sin\theta}}$

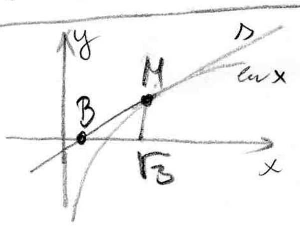
(videti zad. 1. i 2. sa I kolokvijuma)

---

5. Tačka na putanji najbliža severnom polu ima s.g.š. $\approx 70{,}20189643^\circ$ i z.g.d. $\approx -48.57113192^\circ$, a udaljenost od severnog pola je $\approx 2201{,}1031$ km

(videti 4. zad. II kolokvijuma)

6.



Neka je M tačka $M:(\sqrt{3}, \frac{\ln 3}{2})$ a B tačka preseka tangente s u M na datu krivu i x-ose. Dakle $B:\left(\sqrt{3}\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right), 0\right)$

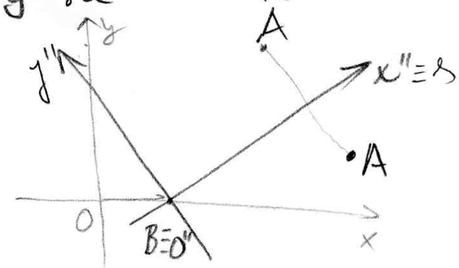
Koeficijent pravca prave s iznosi $k_s=\operatorname{tg}\theta=(\ln x)'_{x=\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, odakle dobijamo da prava s zaklapa sa x-osom ugao od $\theta=\frac{\pi}{6}=30^\circ$. Odredimo koordinate tačke A u novom koordinatnom sistemu $O_{x''y''}$ u kojem

će prava s biti apscisa a tačka B koordinatni početak (3)
O''. Dakle, $O_{xy} \xrightarrow{\tau_{\overrightarrow{OB}}} O'_{x'y'} \xrightarrow{\rho_{O;30^\circ}} O''_{x''y''}$ $(B\equiv O'\equiv O'',\ s\equiv x'')$

Veza između koordinata sisteme O_{xy} i $O''_{x''y''}$ su:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\sqrt{3}\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right) \\ y \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sqrt{3}\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Koordinate tačke A u novom sistemu $O''_{x''y''}$ su



$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{2}\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right) + \frac{b}{2} \\ -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right) + \frac{b\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Koordinate tačke $\tilde{A}$ u sistemu $O''_{x''y''}$ su

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}_{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} x'' \\ -y'' \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{3}{2}\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right) + \frac{b}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\ln 3}{2}\right) - \frac{b\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix},$$ a u sistemu O_{xy} su

$$\boxed{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}b + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\ln 3 \\ \frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{b}{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{4}\ln 3 \end{bmatrix}}$$

■

I KOLOKVIJUM iz GEOMETRIJE (april 2008.)

A-grupa

Ime i prezime (br. ind.):

1. [4b.] Neka je s tangenta na elipsu $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ u tački $(4,\frac{9}{5})$. Ako tačka A ima koordinate (a,b), odrediti koordinate tačke $\widetilde{A}=\sigma_s(A)$ koja se dobija kao slika tačke A prilikom osne simetrije sa osom s.

2. a) [4p.] Data je jednačina $-5x^2-6\sqrt{3}xy+y^2+4(2\sqrt{3}-3)x+4(2+3\sqrt{3})y+24=0$. Zapisati jednačinu ove krive u novom koordinatnom sistemu tako da joj je žižni pravac paralelan sa jednom od dobijenih koordinatnih osa.

b) [3 p.] Odrediti centar, žiže, parametre $(a,b,c,\ p)$, ekscentricitet. Zapisati polarnu jednačinu dobijenog konusnog preseka birajući za pol njegov fokus i polarnu osu tako da je ortogonalna na direktrisu i usmerena ka njoj.

3. [4p.] Data je polarna jednačina krive II reda $r=\frac{8}{4-2cos\theta}$. Zapisati njenu jednačinu u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu pri čemu se polarna osa poklapa sa x-osom a pol sa koordinatnim početkom.

I KOLOKVIJUM iz GEOMETRIJE (april 2008.)

B-grupa

Ime i prezime (br. ind.):

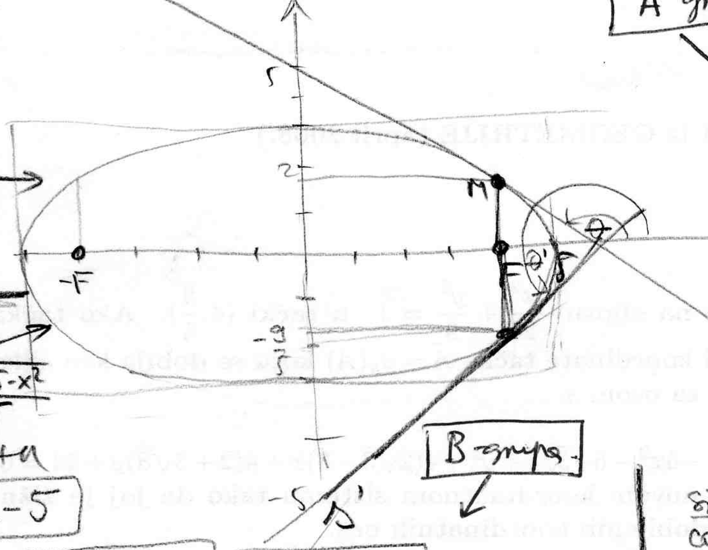
1. [4b.] Neka je s tangenta na elipsu $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ u tački $(4,-\frac{9}{5})$. Ako tačka A ima koordinate (a,b), odrediti koordinate tačke $\widetilde{A}=\sigma_s(A)$ koja se dobija kao slika tačke A prilikom osne simetrije sa osom s.

2. a) [4p.] Data je jednačina $7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2-4(2\sqrt{3}+3)x+4(3\sqrt{3}-2)y+40=0$. Zapisati jednačinu ove krive u novom koordinatnom sistemu tako da joj je žižni pravac paralelan sa jednom od dobijenih koordinatnih osa.

b) [3 p.] Odrediti centar, žiže, parametre $(a,b,c,\ p)$, ekscentricitet. Zapisati polarnu jednačinu dobijenog konusnog preseka birajući za pol njegov fokus i polarnu osu tako da je ortogonalna na direktrisu i usmerena ka njoj.

3. [4p.] Data je polarna jednačina krive II reda $r=\frac{8}{4+2cos\theta}$. Zapisati njenu jednačinu u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu pri čemu se polarna osa poklapa sa x-osom a pol sa koordinatnim početkom.

1.



A grupa $a=5,\ b=3,\ c=4=\sqrt{25-9}$

$M:(4,\frac{9}{5})$ $\quad A:(a,b)$

$\tilde{A}=\sigma_s(A)$

a) $f(x)= \boxed{3\sqrt{\frac{25-x^2}{5}}}$

b) $f'(x)=-3\sqrt{\frac{25-x^2}{5}}$

$s: y=kx+n$

$k=\left(\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}\right)'_{x=4}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{25-x^2}}\Big|_{x=4}=\frac{-4}{5}$

$\frac{9}{5}=\frac{-4}{5}4+n \rightarrow n=\frac{25}{5}=5$

$s: \boxed{y=-\frac{4}{5}x+5}$ $\quad tg\theta=-\frac{4}{5}=$

$s': y=kx+n$

$\boxed{y=\frac{4}{5}x-5}$

$tg\theta'=\frac{4}{5} \rightarrow \boxed{\sin\theta'=\frac{4}{\sqrt{41}}} \wedge \boxed{\cos\theta'=-\frac{5}{\sqrt{41}}} \rightarrow \cos 2\theta'=\frac{25}{41}-\frac{16}{41}=\frac{9}{41}$

$\sin 2\theta'=2\cdot\frac{20}{41}$

$\sin 2\theta'=\frac{40}{41}$

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-4\\ b+\frac{9}{5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-\frac{9}{5}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{9}{41} & \frac{40}{41}\\ \frac{40}{41} & -\frac{9}{41}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-4\\ b+\frac{9}{5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-\frac{9}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{41}a+\frac{40}{41}b+\frac{-36+72+164}{41}\\ \frac{40}{41}a-\frac{9}{41}b+\frac{-160-90}{41}\end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix}\frac{9a+40b+200}{41}\\ \frac{40-9b-250}{41}\end{bmatrix}}$$

B grupa

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{16}{25} \rightarrow 1-\cos^2\theta-\frac{16}{25}\cos^2\theta=0$

$25=41\cos^2\theta \rightarrow \cos^2\theta=\frac{25}{41} \rightarrow \frac{-5}{\sqrt{41}}=\cos\theta$

$\sin^2\theta=\frac{16}{41} \rightarrow \boxed{\sin\theta=\frac{4}{\sqrt{41}}}$ $\quad \cos 2\theta=\frac{25}{41}-\frac{16}{41}=\frac{9}{41}$

$\sin 2\theta=-\frac{220}{41}=-\frac{40}{41}$

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9}{41} & -\frac{40}{41}\\ -\frac{40}{41} & -\frac{9}{41}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a-4\\ b-\frac{9}{5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\ \frac{9}{5}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\frac{9a-40b-36+72+164}{41}\\ \frac{-40a-9b+160+(81+369)/5}{41}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{9a-40b+200}{41}\\ \frac{-40a-9b+250}{41}\end{bmatrix}$$

2. A grupa

$-5x^2-6\sqrt{3}xy+y^2+4(2\sqrt{3}-3)x+4(2+3\sqrt{3})y+24=0$

$ctg 2\theta=\frac{A-C}{B}=\frac{-5-1}{-6\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}=\frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} \rightarrow \theta=30^\circ$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & -1/2\\ \frac{1}{2} & \sqrt{3}/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\\ \frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\end{bmatrix}$$

$-5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)^2-6\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2$
$+4(2\sqrt{3}-3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)+4(2+3\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+24=0$

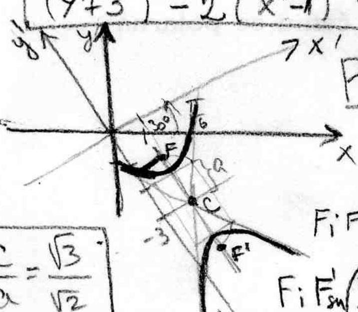
$\frac{x'^2}{4}(-15-18+1)+\frac{y'^2}{4}(-5+18+3)+\frac{x'y'}{4}(+10\sqrt{3}+6\sqrt{3}-18\sqrt{3}+2\sqrt{3})$
$+\frac{x'}{2}(24-12\sqrt{3}+8+12\sqrt{3})+\frac{y'}{2}(-8\sqrt{3}+12+8\sqrt{3}+36)+24=0$

$-8x'^2+4y'^2+16x'+24y'+24=0 \quad /:4$

$-2(x'^2-2x'\pm1)+(y'^2+6y'+9)+6=0$

$\boxed{(y'+3)^2-2(x'-1)^2=1}$ $\quad a=1$ - realna poluos; $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ - imag. poluos

$\boxed{c=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$ $\quad$ 2ΣΣe su na pravoj $x'=+1$



C u $O_{x'y'}$ je $(1,-3)$

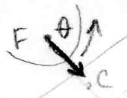
a u O_{xy} $\boxed{C:\left(\frac{\sqrt{3}+3}{2},\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right)}$

$\boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

F i F' u $O_{x'y'}$ je $\left(1,-3\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ a u O_{xy}

F i F' su $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(-3+\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-3+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\right)$

$\boxed{F:\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}\sqrt{2}\right),\ F':\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4},\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)}$



$\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ $\quad \boxed{p=\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}}$

$\boxed{\rho=\frac{1/2}{1+\sqrt{3}\cos\theta/\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}\cos\theta}}$

B grupa

$7x^2+2\sqrt{3}xy+5y^2-4(2\sqrt{3}+3)x+4(3\sqrt{3}-2)y+40=0$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\\ \frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\end{bmatrix}$$

$ctg 2\theta=\frac{7-5}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \theta=\frac{\pi}{6}$

$7\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)^2+2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+5\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)^2$
$-4(2\sqrt{3}+3)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x'-\frac{1}{2}y'\right)+4(3\sqrt{3}-2)\left(\frac{1}{2}x'+\frac{\sqrt{3}}{2}y'\right)+40=0$

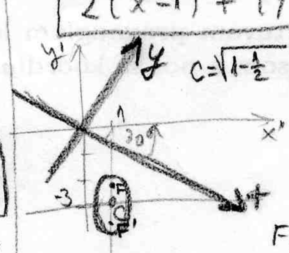
$\frac{x'^2}{4}(21+6+5)+\frac{y'^2}{4}(+7-6+15)+\frac{x'y'}{4}(-14\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}+10\sqrt{3})=0$
$+\frac{x'}{2}(24-12\sqrt{3}+12\sqrt{3}-8)+\frac{y'}{2}(8\sqrt{3}+12+36-8\sqrt{3})+40=0$

$8x'^2+4y'^2-16x'+24y'+40=0 \quad /:4$

$2(x'^2-2x'\pm1)+(y'^2+6y'+9)+10=0$

$\boxed{2(x'-1)^2+(y'+3)^2=1}$ $\quad a=1$ - velika poluos; $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ - mala poluos

$\boxed{c=\sqrt{1-\frac{1}{2}}}$ $\boxed{c=\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\quad$ 2ΣΣe na pravoj $x'=1$



C u $O_{x'y'}$ je $(1,-3)$ a u O_{xy}

$\boxed{C:\left(\frac{\sqrt{3}+3}{2},\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right)}$

2ΣΣe F i F' u $O_{x'y'}$ su $\left(1,-3\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a u O_{xy}

F i F' su $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(-3\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(-3\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$, tj.

$\boxed{F:\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}$ i $\boxed{F':\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{4}\right)}$

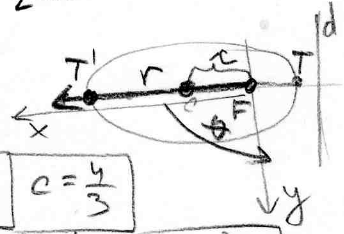
$\boxed{p=\frac{b^2}{a}=\frac{1}{2}}$ $\quad \boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$\boxed{\rho=\frac{1/2}{1+e\cos\theta}=\frac{1/2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta}=\frac{1}{2+\sqrt{2}\cos\theta}}$

3. zad. $\boxed{\text{A-grupa}}$

$$r=\frac{8}{4-2\cos\theta}=\frac{2}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}\qquad p=2=\frac{b^2}{a}\qquad e=\frac{1}{2}<1\rightarrow \text{elipsa}$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta=0\rightarrow 4=r\\ \theta=\pi\rightarrow r=\frac{4}{3}\end{array}\right\}\ 2a=\frac{16}{3}\qquad \boxed{a=\frac{8}{3}}$$



$$b^2=2a=\frac{16}{3}\rightarrow \boxed{b=\frac{4\sqrt{3}}{3}}\qquad \boxed{c=\frac{4}{3}}$$

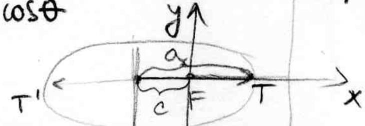
centar $C:(c,0)$, tj. $\boxed{C:\left(\frac{4}{3},0\right)}$

$$\boxed{\frac{\left(x-\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{64}{9}}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1}\Leftrightarrow\boxed{(3x-4)^2+12y^2=64}$$

3. zad. $\boxed{\text{B-grupa}}$

$$r=\frac{8}{4+2\cos\theta}=\frac{2}{1+\frac{1}{2}\cos\theta}\qquad p=2=\frac{b^2}{a}\qquad e=\frac{1}{2}<1\rightarrow \text{elipsa}$$

$$\left.\begin{array}{l}\theta=0\rightarrow r=\frac{2}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\\ \theta=\pi\rightarrow r=\frac{2}{1/2}=4\end{array}\right\}\ 2a=\frac{16}{3}$$



$$\boxed{a=\frac{8}{3}},\ b^2=2\cdot a=\frac{16}{3}\rightarrow\boxed{b=\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

provera
$$\boxed{e=\frac{c}{a}=\frac{4/3}{8/3}=\frac{1}{2}\ \checkmark}$$

$$c=\sqrt{\frac{64}{9}-\frac{48}{9}}\ \boxed{=\frac{4}{3}=c}$$

centar elipse u $\left(-\frac{4}{3},0\right)$

$$\boxed{\frac{\left(x+\frac{4}{3}\right)^2}{\frac{64}{9}}+\frac{y^2}{\frac{16}{3}}=1}\Leftrightarrow 9\left(x+\frac{4}{3}\right)^2+12y^2=64\ \Leftrightarrow\boxed{(3x+4)^2+12y^2=64}$$

I Kolokvijum iz GEOMETRIJE

(Astronomija sa astrofizikom, 26.4.2009.)

1. [7p.] Data je jednačina

$$5x^2 + 6\sqrt{3}xy - y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y - 12 = 0.$$

a) Zapisati jednačinu ove krive u novom koordinatnom sistemu tako da joj je žižni pravac paralelan sa jednom od dobijenih koordinatnih osa.
(zapisati vrstu krive, centar i ostale parametre)

b) Zapisati polarnu jednačinu dobijene krive birajući za pol jedan njen fokus i polarnu osu tako da je paralelna sa direktrisom koja joj leži sa desne strane.

2. [4 p.] Neka je s tangenta na krivu $(x+2)^2 + 2y^2 = 1$ u tački $(-\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4})$. Ako tačka A ima koordinate (a, b), odrediti koordinate tačke $\widetilde{A} = \sigma_s(A)$ koja se dobija kao slika tačke A prilikom osne simetrije sa osom s.

3. [4p.] Odrediti jednačinu hiperbole ako se zna da su joj temena $(4, -1)$ i $(-2, -1)$ i da prolazi kroz tačku P:$(-4, 1)$

I kol. Astronomi: I kol. 26.4.2005.

(1.) = 4. zad. obl. ispitok 2007. = 1. zad. test 7.2007

$ctg\, 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{A-C}{B} \longrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\theta = \frac{1}{2},\ \theta = 30°,\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -\frac{1}{2} \\ 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$

$5x^2 + 6\sqrt{3}xy - y^2 + 8x - 8\sqrt{3}y - 12 = 0 \longrightarrow 2x'^2 - y'^2 - 4y - 3 = 0 \longrightarrow$

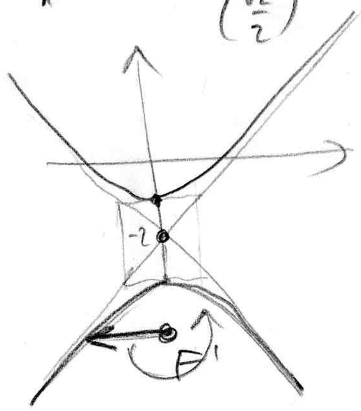
$\frac{(y' - (-2))^2}{1^2} - \frac{(x' - 0)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$

centar: $(0,-2)$

realna poluos $a=1$, imag. $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$

žiže (na y-osi) $F: (0, \frac{\sqrt{6}}{2} - 2)$, $F': (0, -\frac{\sqrt{6}}{2} - 2)$

tjemena: $V: (0,-1)$, $V'(0,-3)$



b) polarna

$r = \frac{1/2}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2}\sin\theta}$

pol: $F'(0, -\frac{\sqrt{6}}{2} - 2)$

(2.) $\boxed{s: \ \sqrt{6}y - x = 4}$ $\quad k_s = tg\,\theta = \frac{\sqrt{6}}{6}$

$A' = \sigma_s(A): \begin{bmatrix} \frac{5}{7}a + \frac{2\sqrt{6}}{7}b \\ \frac{2\sqrt{6}}{7}a - \frac{5}{7}b + \frac{8\sqrt{6}}{7} \end{bmatrix}$

(3.) $d(T, T') = 6 \rightarrow a = 3$ realna os na pravoj $y = -1$

centar $(1,-1)$

$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1 \rightarrow b = \frac{3}{2}$

I KOLOKVIJUM IZ GEOMETRIJE za astronome i astrofizičare 31. V 2010.

[5] = maj 2006 A i B grupa

1. a) Odrediti polarnu jednačinu elipse $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ sa polom u žiži, pri čemu je polarna osa ortogonalna na direktrisu i usmerena prema centru elipse.

   b) Naći jednačinu hiperbole sa temenima $T:(3,1)$; $T':(3,3)$, koja prolazi kroz tačku $A:(5,0)$

[5] maj 2006 = jun 2004 popravni

2. Transformisati jednačinu
$$16x^2-24xy+9y^2-60x-80y+100=0$$
na jednačinu po x' i y' koja ne sadrži $x'y'$ član. Zapisati matricu pogodno izabrane rotacije kojom se to postiže i krajnje rešenje.

jun 2005.

3. [5] Neka je data hiperbola $4y^2-2x^2=1$. Odrediti jednačinu hiperbole koja se dobija kao slika date hiperbole prilikom rotacije za $120°$ oko tačke $A:(-2,3)$

Rešenja zadataka I kol. 31.V 2010.

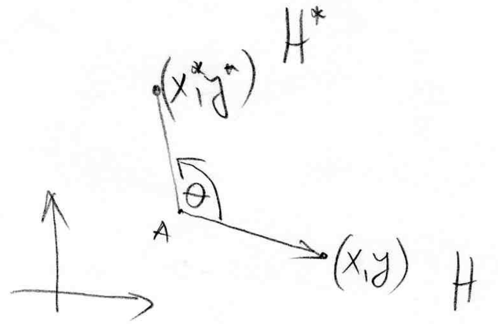
1. a) $r = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}\cos\theta}$ b) $\dfrac{(y-2)^2}{1} - \dfrac{(x-3)^2}{4/3} = 1$

2. Zadatak je bio dat u junskom isp. roku 2004

$\operatorname{ctg} 2\theta = \dfrac{A-C}{B} = -\dfrac{7}{24}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \boxed{y'^2 - 4x' + 4 = 0}$

3.



$H: 4y^2 - 2x^2 = 1 \xrightarrow{\rho_{A,120^\circ}} H^*$ (nove koordinate x^*, y^*)

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-(-2) \\ y-(+3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 120^\circ & \sin 120^\circ \\ -\sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^*+2 \\ y^*-3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ +3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x^* + \frac{\sqrt{3}}{2}y^* - 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x^* - \frac{1}{2}y^* - \sqrt{3} + \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

$$H^*: \quad 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x^* - \frac{1}{2}y^* - \sqrt{3} + \frac{9}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}x^* + \frac{\sqrt{3}}{2}y^* - 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

tj. $\left((x^*, y^*) \longrightarrow (x, y)\right)$

$$H^*: \quad 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} + \frac{9}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

II KOLOKVIJUM iz GEOMETRIJE (jun 2010.)

1. Neka su date 2 tačke na Zemljinoj kugli
$A : (15^0$ s.g.š., 75^0 i.g.d.) i $B : (15^0$ j.g.š., 75^0 z.g.d.)

a) [2p.] Odrediti najkraći put (lučnu meru) od tačke A do tačke B vazdušnom linijom.

b) [3p.] Odrediti azimut pri polasku (u tački A) i pri dolasku (u tački B).

2.[5p.] Napisati jednačine ravni koje obrazuju prirodni triedar krive

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

u tački $(1, 1, 2)$.

3. [5p.] Naći krivinu i torziju krive $\vec{r} = (t + \frac{a^2}{t}, t - \frac{a^2}{t}, 2aln\frac{t}{a})$

4. [5p.] Zapisati jednačine tangentne ravni i normale na površ

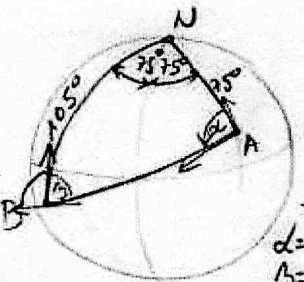
$$x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$$

u tački $(1, 1, -1)$ te površi.

Ime i prezime (br. ind.): ____________________

Rešenja zadataka za II kolokvijum iz GEOMETRIJE

1.



a) $\cos\widehat{AB} = \cos\widehat{NA}\cos\widehat{NB} + \sin\widehat{NA}\sin\widehat{NB}\cos\sphericalangle ANB$

$= \cos 75^\circ \cos 105^\circ + \sin 75^\circ \sin 105^\circ \cos 150^\circ$

$= -\cos^2 75^\circ - \sin^2 75^\circ \cos 30^\circ = \sin^2(30^\circ + 45^\circ)(1 - \cos 30^\circ) - 1$

$= -\frac{7}{8} \rightarrow \boxed{\widehat{AB} = \arccos\left(-\frac{7}{8}\right) \approx 151{,}0449756^\circ}$

$\alpha = \sphericalangle NAB$
$\beta = \sphericalangle NBA$

b) Azimut u A je $\alpha \approx 93{,}967130^\circ$

Azimut u B je $\pi - \beta = \alpha$

! Primetiti da se azimut menjao na putu od A do B, iako je i na startu i na cilju bio jednak !

$\cos\widehat{BN} = \cos 75^\circ \cos\widehat{AB} + \sin 75^\circ \sin\widehat{AB} \cos\alpha \rightarrow$

$\cos\alpha = \frac{-\frac{1}{8}\cos 75^\circ}{\sin 75^\circ} \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} = \frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{15}} \rightarrow \boxed{\alpha = \arccos\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\right) \quad \alpha \approx 93{,}967130^\circ}$

$\cos\beta = \frac{\cos 75^\circ - \cos 105^\circ \cos\widehat{AB}}{\sin 105^\circ \cdot \sin\widehat{AB}} = \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{\cos 30^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ + \sin 30^\circ} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$

$\rightarrow \boxed{\beta = \arccos\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\right) \approx 86.0328652^\circ} \leftarrow$ primetiti $\cos\beta = -\cos\alpha$

4. $F(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} - 1 = 0 \qquad A:(1,1,-1)$

$$\left.\begin{aligned} F_x &= 2x \\ F_y &= \frac{y}{2} \\ F_z &= -\frac{z}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} F_x(A) &= 2 \\ F_y(A) &= \frac{1}{2} \\ F_z(A) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

jednačina normale ↙

$$\boxed{\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1/2} = \frac{z+1}{1/2}}$$

$4(x-1) + (y-1) + (z+1) = 0$

$\rightarrow \boxed{4x + y + z = 4} \leftarrow$ tangentna ravan

RESENJA ZADATAKA IZ GEOMETRIJE
II KOLOKVIJUM

2) Kriva u preseku dve površi $x^2+y^2+z^2=6$ i $x^2-y^2+z^2=4$ koja sadrži tačku $A:(1,1,2)$ ima za svoju (jednu od mogućih) parametarskih jednačina:

$$x=t \Rightarrow \begin{array}{l} y^2+z^2=6-t^2 \\ -y^2+z^2=4-t^2 \;\; /\cdot(-1) \end{array}$$

$$2y^2=2 \rightarrow y\in\{\pm 1\}$$

(mogućnost $y=-1$ otpada jer tačka A pripada krivoj)

$y=1 \rightarrow z^2=5-t^2$

$\rightarrow z=\pm\sqrt{5-t^2}$

(mogućnost $z=-\sqrt{5-t^2}$ otpada jer A pripada krivoj)

$$\vec{r}(t)=\left(t,\ 1,\ \sqrt{5-t^2}\right)$$

$$\vec{r}\,'(t)=\left(1,\ 0,\ \frac{-t}{\sqrt{5-t^2}}\right)$$

$$\vec{r}\,''(t)=\left(0,\ 0,\ -\frac{5}{(\sqrt{5-t^2})^3}\right)$$

U tački A (parametar $t_0=1$) imamo: $\vec{r}_0=(1,1,2)$, $\vec{r}_0\,'=(1,0,-\frac{1}{2})$, $\vec{r}_0\,''=(0,0,-\frac{5}{8})$

Jednačina normalne ravni je određena vektorom $\vec{r}_0\,'$ pa je

$\boxed{\text{j.n.r. u A: } (\vec{R}-\vec{r}_0)\vec{r}_0\,'=0}$

$$(x-1)\cdot 1+(y-1)\cdot 0+(z-2)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=0 \rightarrow \boxed{2x-z=0}$$

Jednačina oskulatorne ravni je određena vektorom $\vec{r}_0\,'\times\vec{r}_0\,''$ tj.

$\boxed{\text{j.o.r. u A: } (\vec{R}-\vec{r}_0)(\vec{r}_0\,'\times\vec{r}_0\,'')=0}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{8} \end{vmatrix}=0 \longrightarrow \boxed{y-1=0}$$

Jednačina rektifikacione ravni je određena vektorom $\vec{r}\,'\times(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,'')$ tj.

$\boxed{\text{j.r.r. u A: } (\vec{R}-\vec{r}_0)(\vec{r}\,'\times(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''))=0}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \begin{vmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{5}{8} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{5}{8} & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 \end{vmatrix}=0$$

tj. $\frac{5}{16}(x-1)+0\cdot(y-1)+(z-2)\cdot\frac{5}{8}=0 \rightarrow x-1+2z-4=0 \rightarrow \boxed{x+2z-5=0}$

3. $\vec{r} = \left(t + \frac{a^2}{t},\ t - \frac{a^2}{t},\ 2a \ln\frac{t}{a}\right)$

$\vec{r}\,' = \left(1 + (-1)\cdot\frac{a^2}{t^2},\ 1 + \frac{a^2}{t^2},\ 2\cancel{a}\cdot\frac{1}{\cancel{a}}\,\frac{a}{t}\right) = \left(1 - \frac{a^2}{t^2},\ 1 + \frac{a^2}{t^2},\ 2\frac{a}{t}\right)$

$\vec{r}\,'' = \left(2\frac{a^2}{t^3},\ -2\frac{a^2}{t^3},\ -2\frac{a}{t^2}\right)$

$\vec{r}\,''' = \left(-6\frac{a^2}{t^4},\ +6\frac{a^2}{t^4},\ 4\frac{a}{t^3}\right)$

$|\vec{r}\,'| = \sqrt{\frac{(t^2-a^2)^2 + (t^2+a^2)^2 + 4a^2t^2}{t^4}} = \sqrt{\frac{2t^4 + 2a^4 + 4a^2t^2}{t^4}}$

$\boxed{|\vec{r}\,'| = \sqrt{2}\cdot\frac{(t^2+a^2)}{t^2}}$

$\frac{1}{\rho} = K = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}, \quad \tau = \frac{1}{R} = -\frac{[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''']}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2}$

$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 - \frac{a^2}{t^2} & 1 + \frac{a^2}{t^2} & 2\frac{a}{t} \\ 2\frac{a^2}{t^3} & -2\frac{a^2}{t^3} & -2\frac{a}{t^2} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2a}{t^2} - \frac{2a^3}{t^4} + \frac{4a^3}{t^4},\ \frac{2a}{t^2} - \frac{2a^3}{t^4} + \frac{4a^3}{t^4},\ -\frac{2a^2}{t^3} + \cancel{\frac{2a^4}{t^5}} - \frac{2a^2}{t^3} - \cancel{\frac{2a^4}{t^5}}\right) \Rightarrow$$

$\boxed{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \frac{a}{t^2}\left(-2 + \frac{2a^2}{t^2},\ 2 + \frac{2a^2}{t^2},\ -\frac{4a}{t}\right)}$

$= \frac{2a}{t^2}\left(\frac{a^2-t^2}{t^2},\ \frac{a^2+t^2}{t^2},\ \frac{-2at}{t^2}\right)$

$|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| = \frac{2|a|}{t^2}\sqrt{\frac{(a^2-t^2)^2 + (a^2+t^2)^2 + 4a^2t^2}{t^4}} = \frac{2|a|}{t^2}\sqrt{\frac{2a^4 + 2t^4 + 4a^2t^2}{t^4}} = \frac{2\sqrt{2}|a|}{t^4}\sqrt{(a^2+t^2)^2}$

$\rightarrow \boxed{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| = \frac{2\sqrt{2}|a|(a^2+t^2)}{t^4}}$

$K = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3} = \frac{\cancel{2\sqrt{2}}|a|\cancel{(a^2+t^2)}\cdot t^{\cancel{6}\,2}}{\cancel{t^4}\cdot \cancel{2\sqrt{2}}(t^2+a^2)^{\cancel{3}\,2}} = \boxed{\frac{|a|t^2}{(t^2+a^2)^2} = K}$

$[\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,'''] = \frac{2a}{t^4}(a^2-t^2, a^2+t^2, -2at)\cdot\left(-\frac{6a^2}{t^4}, \frac{6a^2}{t^4}, \frac{4at}{t\,t^3}\right) = \frac{4a^2}{t^8}(a^2-t^2, a^2+t^2, -2at)(-3a, 3a, 2t)$

$= \frac{4a^2}{t^8}\left(-\cancel{3a^3} + 3at^2 + \cancel{3a^3} + 3at^2 - 4at^2\right) = \frac{4a^2}{t^{\cancel{8}\,6}}\cdot 2a\cancel{t^2} = \frac{8a^3}{t^6}$

$\tau = -\frac{\frac{\cancel{8a^3}}{\cancel{t^8}}}{\frac{\cancel{8a^2}(a^2+t^2)^2}{t^{\cancel{8}\,2}}} \Rightarrow \boxed{\tau = -\frac{at^2}{(a^2+t^2)^2}}$