UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

2-FAKTORI DEKARTOVE SUME LANACA

- MAGISTARSKI RAD -

Bodroža Olga

Novi Sad, 1992.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

2–FAKTORI DEKARTOVE SUME LANACA

– MAGISTARSKI RAD –

AUTOR:
Bodroža Olga

MENTOR:
Dr Ratko Tošić

NOVI SAD, 1992.

SADRŽAJ

Strana

Uvod 2

1. Osnovni pojmovi i oznake 4

2. Prebrojavanje 2–faktora DSL–a
   2.1. Prebrojavanje 2–faktora DSL–a pomoću puteva odredjene dužine pridruženog grafa 8
   2.2. Odredjivanje vrednosti $F_3(n)$, $F_4(n)$ i $F_5(n)$ 12
   2.3. Algoritam za odredjivanje vrednosti $F_m(n)$ 19

3. Prebrojavanje Hamiltonovih kontura DSL–a
   3.1. Predstavljanje Hamiltonovih kontura DSL–a pomoću orijentisanih puteva odredjene dužine pridruženog grafa 22
   3.2. Odredjivanje vrednosti $H_4(n)$ i $H_5(n)$ 30
   3.3. Algoritmi za odredjivanje vrednosti $H_m(n)$
      3.3.1. Prvi algoritam 38
      3.3.2. Drugi algoritam 42

4. Literatura 47

5. DODATAK 49

Uvod

Zbog značaja koje imaju u fizici i hemiji kao i u drugim oblastima ljudske delatnosti, generisanje kao i odredjivanje broja r–faktora, u specijalnom slučaju 2–faktora, nekih grafova predstavlja jedan od aktuelnih problema u teoriji grafova.

U ovom radu istraživanja se odnose na odredjivanje broja 2–faktora *Dekartove sume* prostih *lanaca* **(DSL)** u oznaci $P_m + P_n$ koji je u opštem slučaju nerešen. Ovi grafovi koji se skoro uvek predstavljaju kao pravougaone mreže sreću se često u fizici kristala i hemiji ali se mogu prepoznati i kao grafovi električne mreže ili pak kao grafovi mreže ulica u gradu izgradjenom na pravougaonom sistemu blokova.

U prvom odeljku dati su osnovni pojmovi i oznake koje se koriste u radu.

U drugom odeljku daje se jedna pogodna karakterizacija 2–faktora korišćenjem binarnih reči dužine $(m-1)$ koja omogućava formiranje specijalnog opšteg grafa za dato m i na taj način naš problem svodi na problem generisanja i odredjivanja puteva odredjene dužine sa početkom i krajem u odredjenom skupu čvorova.

Problem prebrojavanja puteva u opštem grafu ili digrafu se algoritamski može uraditi na više načina. U ovom slučaju, ilustrovan je pristup (uzet iz [ToPa]) koji koristi transfer matrice (matrice prelaza) za dati opšti graf dok u slučaju Hamiltonovih kontura (odeljak 3) je ilustrovan drugi pristup odredjivanja broja orijentisanih puteva odredjene dužine datog opšteg digrafa sa početkom i krajem u odredjenim skupovima čvorova. Takodje u drugom odeljku se daju i rekurentne relacije za broj 2–faktora u grafovima $P_m + P_n$ za $m \leq 5$.

Treći odeljak se bavi povezanim 2–faktorima tzv. Hamiltonovim konturama. Ovde se daje pogodna karakterizacija Hamiltonovih kontura korišćenjem, ne više binarnih reči , već specijalnih reči dužine $(m-1)$ nad azbukom $\{0, 1, 2, \cdots, \lceil \frac{m}{2} \rceil\}$. Pored dva algoritma za generisanje i prebrojavanje Hamiltonovih kontura DSL u opštem slučaju u ovom odeljku se izvode i rekurentne relacije kao i egzaktne formule za slučaj $m \leq 5$.

U četvrtom odeljku su dati dalji pravci istraživanja u ovoj oblasti.

Svi algoritmi u ovom radu realizovani su na PASCAL–u.

Najveću zahvalnost dugujem svom mentoru, Dr Ratku Tošiću, koji me je uputio u ovu oblast teorije grafova i korisnim sugestijama mi pomogao na izradi ovog rada.

Takodje se zahvaljujem Dr Draganu Acketi na korisnim sugestijama pri izradi ovog rada.

1 Osnovni pojmovi i oznake

Prost graf $G = (V, E)$ se sastoji od konačnog nepraznog skupa elemenata $V(G)$ koje nazivamo *čvorovima* i skupa $E(G)$ dvočlanih podskupova skupa $V(G)$ koje nazivamo *granama* .

Ako se u gornjoj definiciji dozvoli višestruko pojavljivanje iste grane ili pojava *petlji* tj. jednočlanih podskupova skupa $V(G)$ kao grana grafa tada govorimo o *opštem grafu* .

Put je naizmeničan niz čvorova i njima incidentnih grana. Ako su sve grane u putu različite tada se on naziva *lanac* . Lanac u kome su svi čvorovi različiti izuzev, možda, prvog i poslednjeg čvora (u tom slučaju kažemo da se radi o *zatvorenom lancu*) naziva se *prost lanac*. *Dužina lanca* je broj grana u njemu. Prost lanac sa n čvorova označavamo sa P_n. Prost, zatvoren lanac nazivamo *konturom* .
Hamiltonova kontura je kontura koja sadrži sve čvorove grafa.

Dva čvora su *povezana* ako postoji put koji počinje u jednom a završava u drugom čvoru. Graf je *povezan* ako su svaka dva čvora povezana.

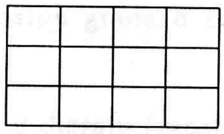
Šuma je graf bez kontura. *Stablo* je povezana šuma.

Unija grafova $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ u oznaci $G_1 \cup G_2$ je graf $G = (V, E)$ gde je $V = V_1 \cup V_2$ a $E = E_1 \cup E_2$

Dekartova suma grafova $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ je graf $G(V, E)$ u oznaci $G_1 + G_2$ gde je $V = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | \ v_1 \in V_1 \ \wedge \ v_2 \in V_2\}$ dok je

$$E = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} | \ (\{x_1, x_2\} \subseteq E_1 \wedge y_1 = y_2) \ \vee \ (x_1 = x_2 \wedge \{y_1, y_2\} \subseteq E_2$$

Tako je *Dekartova suma* prostih *lanaca* (**DSL**) P_4 i P_5 prikazana na sl.1.



Sl.1

Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je *podgraf* grafa $G(V, E)$ ako je $V_1 \subseteq V$ a $E_1 \subseteq E$.

Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je *pokrivajući podgraf* grafa $G(V, E)$ ako je $V_1 = V$ a $E_1 \subseteq E$.

Graf $G_1 = (V_1, E_1)$ je *indukovani podgraf* grafa $G(V, E)$ (podgraf indukovan skupom čvorova V_1) gde je $V_1 \subseteq V$ a

$$E_1 = \{\{v_1, v_2\} \in E |\ v_1 \in V_1 \ \wedge \ v_2 \in V_1\ \}$$

Graf je *regularan* stepena regularnosti r ako su svi stepeni čvorova grafa jednaki r tj. ako je svaki čvor incidentan sa tačno r grana.

r–faktor grafa G je regularan pokrivajući podgraf grafa G stepena regularnosti r.

Nije teško zaključiti da 2-faktor grafa predstavlja uniju disjunktnih kontura a da je Hamiltonova kontura, ustvari, povezan 2-faktor.

Prost digraf $D = (V, E)$ se sastoji od konačnog nepraznog skupa elemenata V(D) koje nazivamo *čvorovima* i skupa $E(D)$ uredjenih parova (u, v) čvorova iz $V(D)$ gde je $u \neq v$ koji nazivamo *granama* digrafa D.

Ako se u gornjoj definiciji dozvoli višestruko pojavljivanje istog uredjenog para ili pak pojavljivanje *petlji* (u slučaju kad je $u = v$) tada govorimo o *opštem digrafu* .

Kažemo da iz čvora v_1 postoji grana u čvor v_2 akko $(v_1, v_2) \in E$ i to zapisujemo $v_1 \longrightarrow v_2$.

Orijentisan put dužine l u digrafu (prostom ili opštem) je naizmeničan niz čvorova i njima incidentnih grana

$$v_{i_1}, (v_{i_1}, v_{i_2}), v_{i_2}, (v_{i_2}, v_{i_3}), v_{i_3}, \ldots, v_{i_l}, (v_{i_l}, v_{i_{l+1}}), v_{i_{l+1}}$$

gde je $v_{i_k} \in V(G)$, $k \in \{1, 2, \ldots, l+1\}$

Matrica susedstva opšteg grafa (digrafa) sa skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je kvadratna, celobrojna matrica $A = [a_{i,j}]$ reda n gde je $a_{i,j}$ jednak višestrukosti grane $\{v_i, v_j\}$ grafa (odn. grane (v_i, v_j) digrafa) u slučaju da ona postoji a jednak nuli u slučaju da ne postoji.

U daljem radu, pod grafom $P_m + P_n$ podrazumevamo označeni graf koga geometrijski predstavljamo u obliku pravougaone mreže sa stranama dimenzije $(m-1)$ i $(n-1)$. Oblasti odredjene koturama grafa dužine 4 (kvadratiće te pravougaone mreže) , nazivamo *prozorima* . Za prozor kažemo da se nalazi u unutrašnjosti date konture ako se nalazi u onoj oblasti odredjenoj tom konturom koja nije beskonačna.

Graf prozora DSL-a $P_m + P_n$ u oznaci $W_{m,n}$ je graf čiji je skup čvorova skup prozora grafa $P_m + P_n$ a susednost dva čvora se definiše preko susednosti tih čvorova kao oblasti u grafu $P_m + P_n$ (dva prozora su susedna ako odgovarajuće konture dužine 4 imaju zajedničku granu).

Prozore grafa $P_m + P_n$ možemo označiti kao elemente matrice $[w_{i,j}]$ tipa $(m-1) \times (n-1)$ tako da važi da su dva prozora $w_{i,j}$ i $w_{p,k}$ susedna akko $(i = p \ \wedge \ |j-k| = 1) \ \vee \ (j = k \ \wedge \ |p-i| = 1)$

Broj 2-faktora u grafu P_m+P_n označavamo sa $F_m(n)$ a broj Hamiltonovih kontura u istom grafu sa $H_m(n)$.

Binarna reprezentacija broja p dužine m je reč $\overline{p_1 p_2 \cdots p_m}$ nad azbukom $\{0,1\}$ gde je

$$p = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot 2^{m-i}$$

Za dve reči nad istom azbukom kažemo da su *inverzne* ako se jedna od druge može dobiti čitanjem sdesna nalevo.

Ostale definicije koje se koriste u daljem tekstu se navode u onim poglavljima gde se koriste.

2 Prebrojavanje 2–faktora DSL–a

2.1 Predstavljanje 2–faktora DSL–a pomoću puteva odredjene dužine pridruženog grafa

Lako se pokazuje sledeća

Teorema 2.1 *Graf $P_m + P_n$ ima 2–faktor (ili Hamiltonovu konturu) akko je je broj čvorova grafa paran tj. bar jedan od brojeva m i n paran.*

Nadalje posmatrajmo samo slučajeve kada je bar jedan od brojeva m i n paran. Takodje je očigledno da je

$$F_1(n) = 0 \text{ za } n \geq 1 \text{ i } F_m(1) = 0 \text{ za } m \geq 1$$

Uzmimo sada da je $m = 2$. Svakom 2-faktoru grafa $P_2 + P_n$ pridružujemo binarnu reč dužine $n-1$ pridružujući svakom prozoru grafa koji pripada unutrašnjosti neke konture jedinicu a ostalim prozorima nule.

Položaj pojavljivanja prve nule (ako postoji) može biti jedna od sledećih pozicija u toj binarnoj reči : $2, 3, \ldots, (n-2)$ te na osnovu toga broj $F_2(n)$ zadovoljava:

$$F_2(n) = 1 + \sum_{i=2}^{n-2} F_2(n-i) \tag{1}$$

Ako umesto n u gornju jednakost stavimo $n-1$ dobijamo:

$$F_2(n-1) = 1 + \sum_{i=2}^{n-3} F_2(n-i-1) \tag{2}$$

te kada od jednakosti (1) oduzmemo jednakost (2) dobijamo sledeću rekurentnu relaciju koja odredjuje brojeve $F_2(n)$.

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-2)$$

Ta relacija, uz početne uslove $F_2(1) = 0$, $F_2(2) = 1$, odredjuje niz Fibonačijevih brojeva.

Tako je dokazana sledeća

Teorema 2.2 *$F_2(n)$ zadovoljava sledeću rekurentnu relaciju:*

$$\boxed{F_2(n) = F_2(n-1) + F_2(n-2)}$$

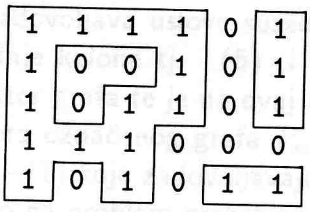
za $n \geq 3$ *sa početnim uslovima:* $F_2(1) = 0$ *i* $F_2(2) = 1$ *tj.*

$$F_2(n) = F_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right)$$

za $n \geq 1$.

Kako važi da je $F_m(n) = F_n(m)$ to nadalje možemo uzeti da je $3 \leq m \leq n$ ne umanjujući opštost.

Dakle, posmatrajmo označeni graf $P_m + P_n$ i proizvoljni 2-faktor tog grafa (vidi sl.2). Ukupan broj prozora tog grafa je jednak $(m-1) \cdot (n-1)$. Svakom prozoru grafa pridružujemo jedan elemenat iz skupa $\{0, 1\}$ na sledeći način: ako se prozor w nalazi u unutrašnjoj oblasti parnog broja kontura datog 2-faktora tada mu se pridružuje 0 (isto važi i za prozore koji se nalaze u spoljašnjoj oblasti svih kontura) dok u ostalim slučajevima prozoru se pridružuje 1.



Sl.2

Na ovaj način smo datom 2-faktoru ovog označenog grafa pridružili jednoznačno odredjenu binarnu matricu $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ koja zadovoljava sledeće uslove:

- *Prvi uslov susednosti dve kolone:*

$$(\forall j)(1 \leq j \leq n-2) \neg(a_{1,j} = a_{1,j+1} = 0 \lor a_{m-1,j} = a_{m-1,j+1} = 0) \quad (3)$$

(dve uzastopne nule ne mogu da se pojave u prvoj i poslednjoj koloni)

- *Drugi uslov susednosti dve kolone:*

$$(\forall i)(1 \leq i \leq (m-2))(\forall j)(1 \leq j \leq (n-2))$$

$$(a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1}) \notin \{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,0)\} \tag{4}$$

- *Prvi uslov prve i poslednje kolone:*

$$(a_{1,1} = a_{m-1,1} = a_{1,n-1} = a_{m-1,n-1} = 1) \tag{5}$$

- *Drugi uslov prve i poslednje kolone:*

$$(\forall i)(1 \leq i \leq m-2)\neg(a_{i,1} = a_{i+1,1} = 0 \;\vee\; a_{i,n-1} = a_{i+1,n-1} = 0) \tag{6}$$

Ovi uslovi se mogu formulisati na više ekvivalentnih načina kao npr. u [ToPa].

Nije teško dokazati i obrnuto, tj. da se svakoj binarnoj matrici dimenzije $(m-1) \times (n-1)$ koja zadovoljava uslove susednosti dve kolone tj. (3) i (4) i uslove prve i poslednje kolone tj. (5) i (6) može na jednoznačan način pridružiti jedan 2-faktor grafa te je na ovaj način uspostavljena bijekcija izmedju skupa svih 2-faktora označenog grafa $P_m + P_n$ i skupa svih binarnih matrica tipa $(m-1) \times (n-1)$ koje zadovoljavaju uslove (3) - (6). Problem prebrojavanja se dakle, sveo na problem prebrojavanja ovakvih matrica.

Sada formirajmo pomoćni opšti graf G za dato m sa skupom čvorova $V(G) = \{0, 1, \ldots, 2^{m-1} - 1\}$ gde se susednost čvorova definiše na sledeći način: čvorovi p i q su susedni akko binarna reprezentacija broja p dužine $m-1$ i binarna reprezentacija broja q dužine $m-1$ zadovoljavaju prvi i drugi uslov susednosti dve kolone tj. ako je $\overline{p_1 p_2 \cdots p_{m-1}}$ binarna reprezentacija broja p dužine $m-1$ a $\overline{q_1 q_2 \cdots q_{m-1}}$ binarna reprezentacija broja q dužine $m-1$ tada važi:

$$(\forall j)(1 \leq j \leq n-2)\neg(p_1 = q_1 = 0 \;\vee\; p_{m-1} = q_{m-1} = 0) \tag{7}$$

i

$$(\forall i)(1 \leq i \leq m-2)(\forall j)(1 \leq j \leq n-2)$$

$$(p_i, p_{i+1}, q_i, q_{i+1}) \notin \{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,0)\} \quad (8)$$

Definicija 2.1 *Čvorove opšteg grafa G čije binarne reprezentacije dužine $m-1$ zadovoljavaju uslove prve i poslednje kolone tj. čvorove $p \in V(G)$ čije binarne reprezentacije dužine $m-1$ tj. reči $\overline{p_1 p_2 \cdots p_{m-1}}$ zadovoljavaju uslove:*

$$p_1 = p_{m-1} = 1 \quad (9)$$

i

$$(\forall i)(1 \leq i \leq m-1)\neg(p_i = p_{i+1} = 0) \quad (10)$$

nazivamo **istaknutim** *čvorovima.*

Na ovaj način problem prebrojavanja svih binarnih matrica tipa $(m-1) \times (n-1)$ koje zadovoljavaju uslove (3) - (6) dalje svodimo na prebrojavanje svih puteva dužine $(n-2)$ u opštem grafu G sa početnim i krajnjim čvorovima u skupu istaknutih čvorova ovog grafa.

2.2 Odredjivanje vrednosti $F_3(n), F_4(n)$ i $F_5(n)$

Odgovarajući opšti graf G za $m = 3$ je dat matricom susedstva (i-toj koloni odn. vrsti odgovara čvor $i-1$):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Skup istaknutih čvorova je $\{3\}$.

Ako sa $f_i(k)$ označimo broj puteva dužine k koji počinju u čvoru i a završavaju u nekom istaknutom čvoru opšteg grafa G tada u slučaju za $m = 3$ dobijamo da važi sledeći sistem rekurentnih relacija:

$$\begin{aligned} f_0(k) &= f_3(k-1) \\ f_1(k) &= f_3(k-1) \\ f_2(k) &= f_3(k-1) \\ f_3(k) &= f_0(k-1) + f_1(k-1) + f_2(k-1) \\ F_3(k) &= f_3(k-2) \end{aligned}$$

Iz ovog sistema dobijamo

$$f_3(k) = 3 \cdot f_3(k-2)$$

odnosno

$$F_3(k) = 3 \cdot F_3(k-2)$$

te je na ovaj način dokazana sledeća

Teorema 2.3 *$F_3(n)$ zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$\boxed{F_3(n) = 3 \cdot F_3(n-2)}$$

sa početnim uslovima $F_3(1) = 0$ i $F_3(2) = 1$ tj.

$$F_3(n) = \begin{cases} 3^{\frac{n}{2}-1} & \textit{za n parno} \\ 0 & \textit{za n neparno} \end{cases}$$

Predjimo sada na odredjivanje vrednosti $F_4(n)$. Odgovarajući opšti graf za $m = 4$ je dat preko sledeće matrice susedstva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Skup istaknutih čvorova u ovom opštem grafu je $\{7, 5\}$.
Sada na osnovu matrice susedstva dobijamo sledeći sistem rekurentnih relacija:

$$f_0(k) = f_5(k-1) + f_7(k-1) \tag{1}$$

$$f_1(k) = f_4(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) \tag{2}$$

$$f_2(k) = f_7(k-1) \tag{3}$$

$$f_3(k) = f_6(k-1) \tag{4}$$

$$f_4(k) = f_1(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) \tag{5}$$

$$f_5(k) = f_0(k-1) + f_1(k-1) + f_4(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) \tag{6}$$

$$f_6(k) = f_3(k-1) \tag{7}$$

$$f_7(k) = f_0(k-1) + f_1(k-1) + f_2(k-1) + f_4(k-1) + f_5(k-1) \tag{8}$$

$$F_4(k) = f_7(k-2) + f_5(k-2) \tag{9}$$

Iz relacije (4) i (7) sledi da je

$$f_6(k) = f_3(k) = 0 \text{ za svako } k \geq 1$$

Pošto su binarne reprezentacije dužine 3 brojeva 1 i 4 inverzne to sledi da je

$$f_1(k) = f_4(k) \tag{10}$$

Dalje, koristeći relacije (1), (3) i (10) u (2), (6) i (8) gornji sistem se redukuje na sledeći:

$$f_1(k) = f_1(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) \tag{11}$$

$$f_5(k) = 2 \cdot f_1(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) + f_5(k-2) + f_7(k-2) \tag{12}$$

$$f_7(k) = 2 \cdot f_1(k-1) + f_5(k-1) + f_5(k-2) + 2 \cdot f_7(k-2) \tag{13}$$

$$F_4(k) = f_7(k-2) + f_5(k-2) \tag{14}$$

Koristeći relaciju (14) u (12) i (13) i oduzimajući od (13) relaciju (12) uzimajući $k-1$ umesto k dobijamo

$$f_7(k) - f_5(k-1) = 2 \cdot (f_1(k-1) - f_1(k-2)) + f_5(k-1) + f_7(k-2) - F_4(k-1)$$

a kako iz (11) i (14) važi

$$f_1(k-1) - f_1(k-2) = F_4(k)$$

to dobijamo sledeću relaciju:

$$f_7(k) - f_7(k-2) = 2 \cdot f_5(k-1) + 2 \cdot F_4(k) - F_4(k-1) \tag{15}$$

Dalje, ako od relacije (13) oduzmemo (12) a uzimajući u obzir (14) dobijamo:

$$f_7(k) - f_7(k-2) = f_5(k) + f_5(k-1) - F_4(k+1) \tag{16}$$

Sada, ako od (15) oduzmemo (16) dobijamo:

$$f_5(k) - f_5(k-1) = F_4(k+1) + 2 \cdot F_4(k) - F_4(k-1) \tag{17}$$

Ako u (15) umesto $f_7(k)$ i $f_7(k-2)$ stavimo na osnovu (14) $F_4(k+2) - f_5(k)$ i $F_4(k) - f_5(k-2)$ redom, dobijamo:

$$f_5(k) + 2 \cdot f_5(k-1) - f_5(k-2) = F_4(k+2) - 3 \cdot F_4(k) + F_4(k-1) \tag{18}$$

odnosno, ako se stavi $(k-1)$ umesto k:

$$f_5(k-1) + 2 \cdot f_5(k-2) - f_5(k-3) = F_4(k+1) - 3 \cdot F_4(k-1) + F_4(k-2) \tag{19}$$

Oduzimajući (19) od (18) a koristeći (17) dobija se:

$$F_4(k+2)-2\cdot F_4(k+1)-7\cdot F_4(k)+2\cdot F_4(k-1)+3\cdot F_4(k-2)-F_4(k-3)=0$$

te je na taj način dokazana teorema:

Teorema 2.4 *$F_4(n)$ zadovoljava sledeću rekurentnu relaciju:*

$$\boxed{F_4(n)=2\cdot F_4(n-1)+7\cdot F_4(n-2)-2\cdot F_4(n-3)-3\cdot F_4(n-4)+F_4(n-5)}$$

za $n\geq 6$, sa početnim vrednostima
$F_4(1)=0,\ F_4(2)=2,\ F_4(3)=3,\ F_4(4)=18,\ F_4(5)=54.$

Sada uzmimo da je $m=5$. Matrica susedstva odgovarajućeg opšteg grafa je sledeća:

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&0&1\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&1&0\\
0&1&0&0&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&0&1&1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Skup istaknutih čvorova je $\{11,13,15\}$. Odgovarajući sistem rekurentnih relacija je sledeći:

$$f_0(k)=f_{11}(k-1)+f_{13}(k-1)+f_{15}(k-1)$$

$$f_1(k) = f_{11}(k-1) + f_{12}(k-1) + f_{13}(k-1) + f_{15}(k-1)$$
$$f_2(k) = f_{11}(k-1) + f_{15}(k-1)$$
$$f_3(k) = f_8(k-1) + f_9(k-1) + f_{10}(k-1) + f_{14}(k-1)$$
$$f_4(k) = f_{13}(k-1) + f_{15}(k-1)$$
$$f_5(k) = f_{12}(k-1) + f_{13}(k-1) + f_{15}(k-1)$$
$$f_6(k) = 0$$
$$f_7(k) = f_{12}(k-1) + f_{13}(k-1)$$
$$f_8(k) = f_3(k-1) + f_{11}(k-1) + f_{13}(k-1) + f_{15}(k-1)$$
$$f_9(k) = f_3(k-1) + f_{11}(k-1) + f_{12}(k-1) + f_{13}(k-1) + f_{15}(k-1)$$
$$f_{10}(k) = f_3(k-1) + f_{11}(k-1) + f_{15}(k-1)$$
$$f_{11}(k) = f_0(k-1)+f_1(k-1)+f_2(k-1)+f_8(k-1)+f_9(k-1)+f_{10}(k-1)+f_{14}(k-1)$$
$$f_{12}(k) = f_1(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) + f_9(k-1)$$
$$f_{13}(k) = f_0(k-1)+f_1(k-1)+f_4(k-1)+f_5(k-1)+f_7(k-1)+f_8(k-1)+f_9(k-1)$$
$$f_{14}(k) = f_4(k-1) + f_{11}(k-1)$$
$$f_{15}(k) = f_0(k-1)+f_1(k-1)+f_2(k-1)+f_4(k-1)+f_5(k-1)+f_8(k-1)+f_9(k-1)+f_{10}(k-1)$$
$$F_5(k) = f_{11}(k-2) + f_{13}(k-2) + f_{15}(k-2)$$

Dalje nije teško primetiti (na osnovu inverznosti binarnih zapisa) da važi:

$$f_1(k) = f_8(k)$$
$$f_2(k) = f_4(k)$$
$$f_3(k) = f_{12}(k)$$
$$f_5(k) = f_{10}(k)$$
$$f_7(k) = f_{14}(k)$$
$$f_{11}(k) = f_{13}(k)$$

pa se sistem može redukovati na sledeći:

$$f_0(k) = 2 \cdot f_{11}(k-1) + f_{15}(k-1) \tag{20}$$

$$f_1(k) = f_3(k-1) + 2 \cdot f_{11}(k-1) + f_{15}(k-1) \tag{21}$$

$$f_2(k) = f_{11}(k-1) + f_{15}(k-1) \tag{22}$$

$$f_3(k) = f_1(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) + f_9(k-1)$$

$$f_5(k) = f_3(k-1) + f_{11}(k-1) + f_{15}(k-1) \tag{23}$$

$$f_7(k) = f_3(k-1) + f_{11}(k-1)$$

$$f_9(k) = 2 \cdot f_3(k-1) + 2 \cdot f_{11}(k-1) + f_{15}(k-1) \tag{24}$$

$$f_{11}(k) = f_0(k-1) + 2 \cdot f_1(k-1) + f_2(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) + f_9(k-1) \tag{25}$$

$$f_{15}(k) = f_0(k-1) + 2 \cdot f_1(k-1) + 2 \cdot f_2(k-1) + 2 \cdot f_5(k-1) + f_9(k-1) \tag{26}$$

$$F_5(k) = 2 \cdot f_{11}(k-2) + f_{15}(k-2) \tag{27}$$

Koristeći relaciju (20) i (27) u (21), (22), (23), (24), (25) i (26) dati sistem se svodi na sledeći:

$$f_1(k) = f_3(k-1) + F_5(k+1) \tag{28}$$

$$f_2(k) = F_5(k+1) - f_{11}(k-1) \tag{29}$$

$$f_3(k) = f_1(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) + f_9(k-1) \tag{30}$$

$$f_5(k) = f_3(k-1) - f_{11}(k-1) + F_5(k+1) \tag{31}$$

$$f_7(k) = f_3(k-1) + f_{11}(k-1) \tag{32}$$

$$f_9(k) = 2 \cdot f_3(k-1) + F_5(k+1) \tag{33}$$

$$f_{11}(k) = 2 \cdot f_1(k-1) + f_2(k-1) + f_5(k-1) + f_7(k-1) + f_9(k-1) + F_5(k) \tag{34}$$

$$f_{15}(k) = 2 \cdot f_1(k-1) + 2 \cdot f_2(k-1) + 2 \cdot f_5(k-1) + f_9(k-1) + F_5(k) \tag{35}$$

$$F_5(k) = 2 \cdot f_{11}(k-2) + f_{15}(k-2)$$

Sada, ako se jednačine (28), (29), (31), (32) i (33) ubace u (30),(31) i (32) sistem se svodi na:

$$f_3(k) = 5 \cdot f_3(k-2) + 3 \cdot F_5(k) \tag{36}$$

$$f_{11}(k) = 6 \cdot f_3(k-2) - f_{11}(k-2) + 6 \cdot F_5(k) \tag{37}$$

$$f_{15}(k) = 6 \cdot f_3(k-2) - f_{11}(k-2) + 8 \cdot F_5(k) \tag{38}$$

$$F_5(k) = 2 \cdot f_{11}(k-2) + f_{15}(k-2) \tag{39}$$

Iz relacije (37) dobija se

$$6 \cdot f_3(k-2) = f_{11}(k) + f_{11}(k-2) - 6 \cdot F_5(k)$$

pa kada se to primeni u (38) dobija se:

$$f_{15}(k) = f_{11}(k) - 3 \cdot f_{11}(k-2) + 2 \cdot F_5(k) \tag{40}$$

a kada se ista primeni u (36) prethodno pomnožena sa 6 dobija se:

$$5 \cdot f_{11}(k-2) + 4 \cdot f_{11}(k) - f_{11}(k+2) = 12 \cdot F_5(k) - 6 \cdot F_5(k+2) \tag{41}$$

Ako se (40) uvrsti u (39) dobija se:

$$3 \cdot f_{11}(k-2) - 3 \cdot f_{11}(k-4) = F_5(k) - 2 \cdot F_5(k-2) \tag{42}$$

Ako u (42) uvrstimo $(k+2)$ umesto k dobijamo:

$$3 \cdot f_{11}(k) - 3 \cdot f_{11}(k-2) = F_5(k+2) - 2 \cdot F_5(k) \tag{43}$$

Množeći relaciju (41) sa 3 dobijamo:

$$15 \cdot f_{11}(k-2) + 12 \cdot f_{11}(k) - 3 \cdot f_{11}(k+2) = 36 \cdot F_5(k) - 18 \cdot F_5(k+2) \tag{44}$$

i ako se u ovoj zameni k sa $(k-2)$ dobija se:

$$15 \cdot f_{11}(k-4) + 12 \cdot f_{11}(k-2) - 3 \cdot f_{11}(k) = 36 \cdot F_5(k-2) - 18 \cdot F_5(k) \tag{45}$$

Oduzmajući od (44) relaciju (45) i koristeći (43) dobijamo:

$$F_5(k+4) - 24 \cdot f_5(k+2) + 57 \cdot F_5(k) - 26 \cdot F_5(k-2) = 0$$

te je tako dokazana sledeća

Teorema 2.5 *$F_5(n)$ zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$\boxed{F_5(n) = 24 \cdot F_5(n-2) - 57 \cdot F_5(n-4) + 26 \cdot F_5(n-6)}$$

za $n \geq 7$, sa početnim uslovima $F_5(1) = 0$, $F_5(2) = 3$, $F_5(3) = 0$, $F_5(4) = 54$, $F_5(5) = 0$, $F_5(6) = 1140$.

Rešavanjem gore navedene rekurentne relacije dobija se sledeća

Teorema 2.6

$$F_5(n) = \frac{1}{3} \cdot 2^{2 \cdot n - 1} + \frac{2 \cdot (4 - \sqrt{3})}{39} \cdot (11 + 6 \cdot \sqrt{3})^{2 \cdot n} + \frac{2 \cdot (4 + \sqrt{3})}{39} \cdot (11 - 6 \cdot \sqrt{3})^{2 \cdot n}$$

za $n \geq 1$.

2.3 Algoritam za odredjivanje vrednosti $F_m(n)$

U (2.1) videli smo da se prebrojavanje svih 2-faktora označenog grafa $P_m + P_n$ svodi na prebrojavanje svih binarnih matrica $[a_{ij}]_{(m-1)\times(n-1)}$ koje zadovoljavaju uslove susednosti dve kolone za svako j, $1 \leq j \leq (n-2)$ i uslove prve i poslednje kolone, odnosno na prebrojavanje svih puteva dužine (n-2) u opštem grafu G sa početnim i krajnjim čvorom u skupu istaknutih čvorova ovog grafa.

Matricu susedstva opšteg grafa G označićemo sa H_m. Za brojeve koji odgovaraju susednim čvorovima kažemo da su *susedni* a za brojeve koji odgovaraju istaknutim čvorovima kažemo da su *istaknuti*. Dakle, svaki niz od (n-1) brojeva iz skupa $\{0, 1, \ldots, 2^{m-1} - 1\}$, čiji su prvi i poslednji član istaknuti brojevi, a svaka dva uzastopna člana u nizu susedni jednoznačno odredjuju jedan 2-faktor grafa $P_m + P_n$.

Prvo ispitujemo susednost dve binarne reči dužine (m-1) tj. reči $\overline{h_1 h_2 \ldots h_{m-1}}$ i $\overline{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \ldots, \bar{h}_{m-1}}$ koje predstavljaju binarne reprezentacije brojeva h i $\bar{h}$ iz skupa $\{0, 1, \ldots, 2^{m-1} - 1\}$ redom odnosno susednost brojeva h i $\bar{h}$ u grafu G. Svakom mogućem paru $(h, \bar{h})$ pridružujemo jednoznačno odredjenu reč $\overline{s_1 s_2 \ldots s_{m-1}}$ dužine $(m-1)$ nad azbukom $\{0, 1, 2, 3\}$ tako da važi:

$$s_i = \begin{cases} 0 & \text{ako je } (h_i, \bar{h}_i) = (0,0) \\ 1 & \text{ako je } (h_i, \bar{h}_i) = (0,1) \\ 2 & \text{ako je } (h_i, \bar{h}_i) = (1,0) \\ 3 & \text{ako je } (h_i, \bar{h}_i) = (1,1) \end{cases}$$

za svako i, $1 \leq i \leq (m-1)$.

Ako su brojevi h i $\bar{h}$ susedni u grafu G tada i samo tada reč $\overline{s_1 s_2 \ldots s_{m-1}}$ koja im odgovara zadovoljava sledeće uslove:

- $s_1 \in \{1, 2, 3\}$
- za svako i, $2 \leq i \leq m-2$ važi:
  $s_{i-1} = 0 \longrightarrow s_i \in \{1, 2, 3\}$
  $s_{i-1} = 1 \longrightarrow s_i \in \{0, 1, 3\}$
  $s_{i-1} = 2 \longrightarrow s_i \in \{0, 2, 3\}$
  $s_{i-1} = 3 \longrightarrow s_i \in \{0, 1, 2\}$

- $s_{m-2} = 0 \longrightarrow s_{m-1} \in \{1,2,3\}$
  $s_{m-2} = 1 \longrightarrow s_{m-1} \in \{1,3\}$
  $s_{m-2} = 2 \longrightarrow s_{m-1} \in \{2,3\}$
  $s_{m-2} = 3 \longrightarrow s_{m-1} \in \{1,2\}$

Umesto binarne matrice susedstva za opšti graf G koristimo boolovsku matricu $B = [b_{i,j}]_{2^{m-1} \times 2^{m-1}}$ koja se od matrice susedstva dobija zamenjujući jedinice sa *true* a nule sa *folse*. Ovu matricu nazivamo *izmenjena* matrica susedstva za opšti graf G.

Dakle, u izmenjenoj matrici susedstva B na poziciji koja odgovara paru $(h, \bar{h})$ (dakle, $h+1$ -va vrsta i $\bar{h}+1$ -va kolona) biće true akko reč $\overline{s_1 s_2 \ldots s_{m-1}}$ pridružena ovom paru zadovoljava gore navedene uslove.

Izmenjena matrica susedstva B se sada dobija u dva koraka: prvo se odredjuju reči $\overline{s_1 s_2 \ldots s_{m-1}}$ na osnovu gornjih uslova a zatim se za svaku tu reč odredjuje par $(h, \bar{h})$ tj. pozicija u matrici B gde će odgovarajući elemenat dobiti vrednost true.

```
begin
  c:=1 ;
  for i:=1 to (m-1) do c:=c*2 ;
  i:=1 ; j:=1 ;
  for k:=1 to (m-1) do
    begin
      c:=c div 2 ;
      case s[k] of
          0:       ;
          1: i:=i+c ;
          2: j:=j+c ;
          3: begin
               i:=i+c ;
               j:=j+c
             end
      end
    end ;
  b[i][j]:=true
end;
```

Matrica susedstva H_m se sada dobija lako od matrice B kada se sve vrednosti true zamene sa 1 a ostalim elementima pridruže nule. Na osnovu uslova prve i poslednje kolone matrice A iz (2.1) odredjuju se istaknute vrste i kolone matrice susedstva tj. istaknuti brojevi koji predstavljaju početne odn. završne čvorove traženih puteva dužine (n-2). Sada ostaje da se matrica susedstva H_m stepenuje. Dakle, odredimo matricu H_m^{n-2}, (da bi dobili veći stepen te matrice potrebno je matricu susedstva prikazati kao celobrojnu matricu višestruke preciznosti) kao i podmatricu ove (matricu I sa vrstama i kolonama iz skupa istaknutih vrsta i kolona. Pošto elemenat $h_{i,j}^{(n-2)}$ matrice H_m^{n-2} predstavlja broj puteva dužine $(n-2)$ u opštem grafu G koji počinju u čvoru $(i+1)$ a završavaju u čvoru $(j+1)$ to je zbir elemenata matrice I jednak broju 2-faktora DSL-a $P_m + P_n$.

Prvi članovi nizova $F_4(n)$ i $F_5(n)$ dati su u dodatku.

3 Prebrojavanje Hamiltonovih kontura DSL-a

3.1 Predstavljanje Hamiltonovih kontura DSL-a pomoću orijentisanih puteva odredjene dužine pridruženog opšteg digrafa

Za slučajeve $m = 1$ ili $m = 2$ trivijalno se dobijaju vrednosti za $H_m(n)$ tj. $H_1(n) = 0$ i $H_2(n) = 1$ za svako $n \geq 2$. Zato nadalje pretpostavimo da je $m \geq 3$.

Posmatrajmo označeni graf $P_m + P_n$ (sl.3) kao i u (2.1) ali sada umesto proizvoljnog 2-faktora posmatrajmo proizvoljnu Hamiltonovu konturu grafa. Najpre, pridružimo na isti način kao i u (2.1) svakom prozoru $w_{i,j}$ grafa jedan elemenat $a_{i,j}$ iz skupa $\{0, 1\}$ odn. datoj Hamiltonovoj konturi binarnu matricu $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$. Dakle, svakom prozoru iz unutrašnje oblasti Hamiltonove konture pridružujemo 1 a ostalim prozorima 0 (sl.4). Ovako dobijena matrica A zadovoljava pored uslova susednosti i uslova prve i poslednje kolone iz (2.1) još i jedan uslov koji ćemo nazvati:

- *Uslov povezanosti:*
  Podgraf grafa prozora $W_{m,n}$ grafa $P_m + P_n$ indukovan prozorima koji se nalaze u unutrašnjoj oblasti date Hamiltonove konture tj. prozorima kojima su pridružene jedinice čini stablo dok podgraf istog grafa indukovan prozorima koji se nalaze u spoljašnjoj oblasti Hamiltonove konture tj. prozorima kojima su pridružene nule čini šumu.

Definicija 3.1 *Komponente šume koja se pominje u uslovu povezanosti nazivamo* **spoljašnja stabla** *i označavamo sa* **SS** .

Važi i obrnuto: svaka binarna matrica tipa $(m-1) \times (n-1)$ koja zadovoljava uslove susednosti dve kolone i uslove prve i poslednje kolone kao i uslov povezanosti jednoznačno odredjuje Hamiltonovu konturu grafa $P_m + P_n$. Ovi uslovi odgovaraju uslovima (BC), (IC), (CC) i (EC) iz [Kw].

Uslov povezanosti se može zameniti sledećim uslovom koji ćemo nazvati:

- *Uslov korena:*

  Podgraf grafa prozora $W_{m,n}$ indukovan prozorima kojima su pridružene nule čini šumu a svaka komponenta (SS) te šume sadrži tačno jedan prozor $w_{i,j}$, pridružen elementu $a_{i,j}$ matrice A, za koji važi

  $$(i \in \{1, m-1\} \;\wedge\; j \notin \{1, n-1\}) \vee (j \in \{1, n-1\} \;\wedge\; i \notin \{1, m-1\})$$

Definicija 3.2 *Prozor $w_{i,j}$ koji se pominje u uslovu korena nazivamo* **korenom tog SS-a** .

Dakle, svaka Hamiltonova kontura grafa $P_m + P_n$ je jednoznačno odredjena binarnom matricom $[a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ koja zadovoljava pored uslova susednosti dve kolone i uslova prve i poslednje kolone i uslov korena.

Definicija 3.3 *Za dva prozora $w_{i,l}$ i $w_{j,s}$ za koje važi: $a_{i,l} = 0$; $a_{j,s} = 0$ i $l, s \leq k$ kažemo da su* **na nivou k sigurno sa istog spoljašnjeg stabla (k - SSISS)** *akko u podgrafu grafa prozora $W_{m,n}$ indukovanom skupom svih prozora $w_{p,t}$ za koje je $a_{p,t} = 0$ i $t \leq k$ pripadaju istoj komponenti (tj. istom SS).*

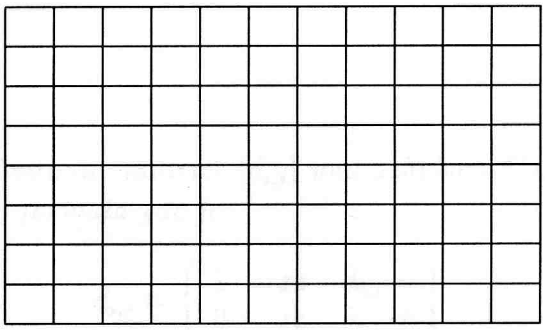
Primetimo najpre da je relacija k-SSISS u skupu svih prozora $w_{i,j}$ za koje je $a_{i,j} = 0$; $1 \leq i \leq m-1$ i k-fiksno, relacija ekvivalencije te da ona vrši particiju na klase ekvivalencije kojih može biti najviše $\lceil \frac{m-1}{2} \rceil$. Primetimo da više ovih klasa mogu biti iz istog SS-a (ali nismo u to još "sigurni " poznavajući svega prvih k-kolona matrice A) a pošto svaka klasa pripada tačno jednom SS-u to svaka klasa može biti k-SSISS sa najviše jednim korenom.

Označimo sa C skup $\{2, 3, \ldots, \lceil\frac{m-1}{2}\rceil\}$. Sada, svakoj binarnoj matrici $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ koja zadovoljava uslove susednosti dve kolone, uslove prve i poslednje kolone (sve iz (2.1)) kao i uslov korena, odnosno Hamiltonovoj konturi grafa $P_m + P_n$, pridružujemo jednoznačno odredjenu matricu $B = [b_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ sa elementima iz skupa $C \cup \{0,1\}$ na sledeći način (vidi sl.5):

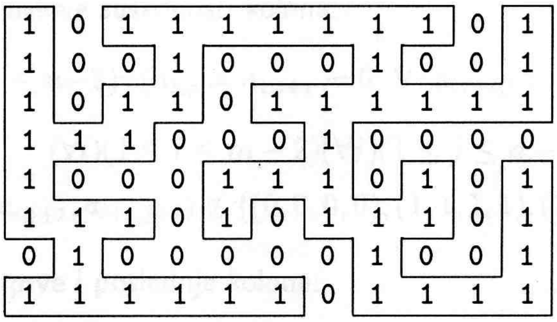
- $b_{i,j} = 1$ akko $a_{i,j} = 1$ za $1 \leq i \leq (m-1)$, $1 \leq j \leq (n-1)$;
- ako je $w_{i,j}$ koren nekog SS-a i ako je $i = 1$ ili $i = (m-1)$ ili $j = 1$ tada je $b_{i,j} = 0$;
- ako $w_{i,j}$ nije koren nekog SS-a ali je u relaciji j-SSISS sa nekim korenom tada je $b_{i,j} = 0$;
- preostalim prozorima $w_{i,j}$ (oni za koje je $a_{i,j} = 0$ ali koji nisu j-SSISS sa nekim korenom iz kolone čiji je indeks manji od (n-1)) pridružujemo neki elemenat iz skupa C u zavisnosti kojoj klasi ekvivalencije relacije j-SSISS na skupu svih prozora $w_{k,l}$ pridruženih j-toj koloni (j-fiksno, $1 \leq k \leq (m-1)$) za koje je $a_{k,j} = 0$ pripadaju. Do ovog momenta nekim klasama su već pridruženi odgovarajući elementi matrice B (nule) pa ostaje da se preostalim klasama (tj. njenim prozorima) pridruže odgovarajući elementi matrice B (iz skupa C). To se vrši na sledeći način: dvema različitim klasama pridružuju se različiti brojevi i to prema redosledu prvih pojavljivanja prozora tih klasa gledano u smeru od prozora $w_{1,j}$ prema $w_{(m-1),j}$ (odozgo nadole). Dakle, svim prozorima klase koja se prva pojavljuje pridružuje se 2, svim prozorima sledeće klase (ako postoji) broj 3,.. .

Definicija 3.4 Osnova *reči* $\overline{d_1 d_2 \ldots d_{m-1}}$ *nad azbukom* $C \cup \{0,1\}$ *je binarna reč* $\bar{d}_1\bar{d}_2\ldots\bar{d}_{m-1}$ *gde je*

$$\bar{d}_i = \begin{cases} 1 & za \quad d_i = 1 \\ 0 & za \quad d_i \neq 1 \end{cases}$$

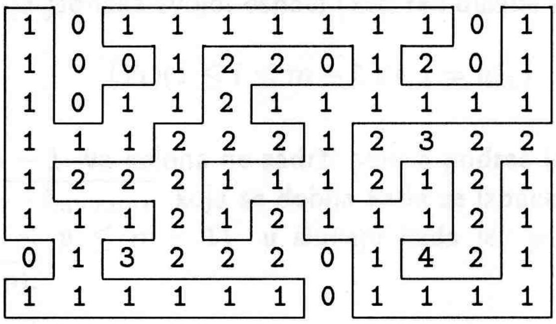


Sl.3



1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1
1 0 0 1 0 0 0 1 0 0 1
1 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1
1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0
1 0 0 0 1 1 1 0 1 0 1
1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1
0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1
1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1

Sl.4



1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1
1 0 0 1 2 2 0 1 2 0 1
1 0 1 1 2 1 1 1 1 1 1
1 1 1 2 2 2 1 2 3 2 2
1 2 2 2 1 1 1 2 1 2 1
1 1 1 2 1 2 1 1 1 2 1
0 1 3 2 2 2 0 1 4 2 1
1 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1

Sl.5

Definicija 3.5 Osnova *matrice* $[d_{i,j}]$ *nad azbukom* $C \cup \{0,1\}$ *je binarna matrica* $[\bar{d}_{i,j}]$ *istog formata gde je*

$$\bar{d}_{i,j} = \begin{cases} 1 & za \quad d_{i,j} = 1 \\ 0 & za \quad d_{i,j} \neq 1 \end{cases}$$

Na osnovu definicije matrice B lako se dolazi do sledećih osobina te matrice:

1. Osnova matrice $B = [b_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ tj. matrica $A = [a_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ zadovoljava uslove susednosti kolona:

$$(\forall j)(1 \leq j \leq n-2)\neg(a_{1,j} = a_{1,j+1} = 0 \vee a_{m-1,j} = a_{m-1,j+1} = 0) \quad (1)$$

$$(\forall i)(1 \leq i \leq m-2)(\forall j)(1 \leq j \leq n-2)$$
$$(a_{i,j}, a_{i+1,j}, a_{i,j+1}, a_{i+1,j+1}) \notin \{(0,0,0,0),(1,1,1,1),(1,0,0,1),(0,1,1,0)\} \quad (2)$$

kao i uslove prve i poslednje kolone:

$$a_{1,1} = a_{m-1,1} = a_{1,n-1} = a_{m-1,n-1} = 1 \quad (3)$$

$$(\forall i)(1 \leq i \leq m-2)\neg(a_{i,1} = a_{i+1,1} = 0 \vee a_{i,n-1} = a_{i+1,n-1} = 0) \quad (4)$$

2. Prva kolona ja jednaka svojoj osnovi (kao reč dužine m) tj.:

$$(\forall i)(1 \leq i \leq m-1)(b_{i,1} = a_{i,1}) \quad (5)$$

3. Poslednja, $n-1$ -va kolona ne sadrži nulu a podreč te reči $\overline{b_{1,n-1}b_{2,n-1}\cdots b_{m-1,n-1}}$ koja se dobija kada se izbace svih p jedinica $(\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor + 1 \leq p \leq m-1)$ u slučaju kada je $p \neq m-1$ je reč $\overline{23\cdots(m-p)}$.

4. Za svaku kolonu k $(2 \leq k \leq (n-1))$ matrice B važi:

(a)
$$b_{1,k} = a_{1,k} \quad ; \quad b_{m-1,k} = a_{m-1,k} \tag{6}$$

(b) Ako je $b_{i,k} \neq 1$, $2 \leq i \leq (m-2)$, to je $b_{i-1,k} \in \{b_{i,k}, 1\}$ i $b_{i+1,k} \in \{b_{i,k}, 1\}$
(susednim prozorima iz iste kolone koji pripadaju istom SS-u tj. klasi pridružuju se isti brojevi)

(c) Ako je $b_{i,k-1} = 0$, $2 \leq i \leq m-2$ tada je $b_{i,k} \in \{0, 1\}$
(Ako je $W_{i,k-1}$ u relaciji (k-1)-SSISS sa nekim korenom (tj. $b_{i,k-1} = 0$) to je on i u relaciji k-SSISS sa istim tim korenom i ako je u relaciji k-SSISS sa $W_{i,k}$ (tj. $a_{i,k} = 0$) a pošto je relacija k-SSISS relacija ekvivalencije i u skupu svih prozora $W_{i,j}$ iz spoljašnjosti Hamiltonove konture gde je $1 \leq j \leq k$, $1 \leq i \leq (m-1)$ to sledi da je i $W_{i,k}$ u relaciji k-SSISS sa pomenutim korenom))

(d) *Za svako $b \in C$ koje se pojavljuje u (k-1)-oj koloni mora postojati* prozor $W_{i,k-1}$ takav da je $b_{i,k-1} = b$ a $b_{i,k} \neq 1$.
(Ne dozvoljava se da postoji SS bez korena)

(e) Ako postoje p i l, $2 \leq p, l \leq m-1$ takvi da je $b_{p,k-1} = b_{l,k-1} \neq 1$ a $a_{p,k} = a_{l,k} = 0$ tada je $b_{p,k} = b_{l,k}$
(Ako $W_{p,k-1}$ i $W_{l,k-1}$ pripadaju istom SS-u (u slučaju kada je $b_{p,k-1} = b_{l,k-1} \in C$) to iz $a_{p,k} = a_{l,k} = 0$ sledi da i $W_{p,k}$ i $W_{l,k}$ pripadaju tom istom SS-u te mora da važi $b_{p,k} = b_{l,k}$.)

(f) Ako je $b_{i,k-1} = b_{j,k-1} \in C$ i $b_{i,k} = b_{j,k} = b \neq 1$ za $i \neq j$, $2 \leq i, j \leq m-2$ tada elementi $b_{i,k}$ i $b_{j,k}$ ne pripadaju istom maksimalnom nizu uzastopnih pojavljivanja elementa $b \in C \cup \{0\}$ u k-toj koloni.
(u suprotnom bi dobili konturu u odgovarajućem SS-u)

(g) Za svaki maksimalni niz v_1 uzastopnih pojavljivanja nula k-te kolone matrice B postoji jednoznačno odredjen niz $v_1, v_2, \ldots, v_p$; $(p \geq 1)$ različitih maksimalnih nizova uzastopnih pojavljivanja nula takav da

za slučaj kad je $p = 1$ važi:

niz v_1 *ili* je susedan sa tačno jednom nulom iz (k-1)-ve kolone matrice B (u smislu da u nizu v_1 postoji nula $b_{i,k}$ takva da je $b_{i,k-1} = 0$ *ili* sadrži tačno jedan elemenat $b_{1,k}$ ili $b_{m-1,k}$;

a za slučaj kad je $p \neq 1$ važi:

Za svako i, $1 \leq i \leq p-1$
postoji tačno jedno $b_{t_i,k-1} \in C$ za koje je $b_{t_i,k} \in v_i$ i
tačno jedno $b_{s_{i+1},k-1} \in C$ za koje je $b_{s_{i+1},k} \in v_{i+1}$
takvo da je $b_{t_i,k-1} = b_{s_{i+1},k-1}$ za svako i, $1 \leq i \leq p-1$ a za niz v_p važi da *ili* je susedan sa tačno jednom nulom iz $(k-1)$-ve kolone matrice B *ili* sadrži tačno jedan elemenat $b_{1,k}$ ili $b_{m-1,k}$
(Za svaki maksimalni niz pojavljivanja nula u k-toj koloni postoji jednoznačno odredjen put kojim se krećući se po čvorovima SS-a (prozorima) stiže do korena tog SS-a od nekog prozora tog SS-a prolazeći svaki čvor tog SS-a najviše jedanput.)

(h) Za svako $b \in C$ za koje u k-toj koloni matrice B postoji najmanje dva različita maksimalna niza uzastopnih pojavljivanja tog elementa, za svaka dva takva različita niza v i w postoji jednoznačno odredjen niz $v_1 = v, v_2, \ldots, v_p = w$ različitih maksimalnih nizova uzastopnih pojavljivanja elemenata $b \in C$ u koloni k matrice B takav da za svako i, $1 \leq i \leq p-1$ *postoji tačno jedno* $b_{t_i,k-1} \in C$ za koje je $b_{t_i,k} \in v_i$ i *postoji tačno jedno* $b_{s_{i+1},k-1} \in C$ za koje je $b_{s_{i+1},k} \in v_{i+1}$ takvo da je $b_{t_i,k-1} = b_{s_{i+1},k-1}$ za svako i, $1 \leq i \leq p-1$. (Egzistencija ovog niza sledi iz definicije matrice B tj. iz činjenice da dva prozora $w_{i,k}$ i $w_{j,k}$ za koje je $b_{i,k} = b_{j,k} = b \in C$ pripadaju istom SS-u a jednoznačnost sledi iz činjenice da spoljašnje stablo ne sadrži konture.)

(i) Posmatrajmo prva pojavljivanja (gledano odozgo nadole tj. od $b_{1,k}$ prema $b_{m-1,k}$ svih elemenata iz C u k-toj koloni matrice B i neka su to redom elementi $b_{p1,k}, b_{p2,k}, \ldots, b_{pt,k}$. Tada važi:
$b_{p_i,k} = i+1$ (sledi iz definicije matrice B).

Važi i obrnuto:

Svaka celobrojna matrica $[b_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ sa elementima iz skupa $C \cup \{0,1\}$ koja zadovoljava osobine 1. – 4. jednoznačno odredjuje Hamiltonovu konturu grafa $P_m + P_n$ tj. osnova matrice B zadovoljava pored uslova susednosti dve kolone i uslova prve i poslednje kolone (osobina 1.) i uslov korena (ili njemu ekvivalentan uslov povezanosti) što nije teško pokazati.

Dakle, problem prebrojavanja Hamiltonovih kontura za $P_m + P_n$ se sada svodi na prebrojavanje svih celobrojnih matrica $[b_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ sa osobinama 1. - 4..

Formirajmo u tu svrhu pomoćni opšti digraf D za dato m na sledeći način: sve reči dužine $m-1$ nad skupom $\{0,1,\ldots,\lceil\frac{m-1}{2}\rceil\}$ koje se mogu pojaviti kao kolone matrice $B=[b_{i,j}]_{(m-1)\times(n-1)}$ odredjuju čvorove opšteg digrafa D. Binarne reči (medju ovima) koje se mogu pojaviti kao prva kolona matrice B nazivamo *istaknutim čvorovima* a sve reči koje se mogu pojaviti kao poslednja kolona iste matrice nazivamo *poslednjim čvorovima* .
Iz čvora $u\in V(D)$ imamo orijentisanu granu u čvor $v\in V(D)$ tj. $u\rightarrow v$ akko čvor u (kao reč dužine $(m-1)$ nad azbukom $C\cup\{0,1\}$) može biti prethodna kolona reči dužine m nad azbukom $C\cup\{0,1\}$ koja je pridružena čvoru v u matrici B tj. ako čvor u kao reč $\overline{b_{1,k-1}b_{2,k-1}\ldots b_{m-1,k-1}}$ i čvor v kao reč $\overline{b_{1,k}b_{2,k}\ldots b_{m-1,k}}$ zadovoljavaju uslove odredjene osobinom 4. kao i osobinom 1. za matricu B.

Dakle, problem odredjivanja broja Hamiltonovih kontura grafa P_m+P_n se na ovaj način sveo na problem prebrojavanja svih orijentisanih puteva u opštem digrafu D dužine (n-2) koji polaze iz nekog istaknutog čvora (koji kao reč dužine (m-1) nad azbukom $C\cup\{0,1\}$ zadovoljava osobine 1. i 2. za matricu B) a završavaju u nekom od poslednjih čvorova opšteg digrafa D (tj. zadovoljavaju osobine 1. i 3. za B).

3.2 Odredjivanje brojeva $H_4(n)$ i $H_5(n)$

Već je u odeljku 2.2 pomenuto tvrdjenje da je za $m, n > 1$, $H_m(n) > 0$ akko je $m \cdot n$ paran broj. Lako se zaključuje sada da je

$$H_1(n) = 0 \quad \text{za sve} \quad n \in N$$

$$H_2(n) = 1 \quad \text{za sve} \quad n \geq 2 \ , \ n \in N$$

$$H_3(n) = \begin{cases} 2^{\frac{n}{2}-1} & \text{za n - parno} \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Predjimo na odredjivanje vrednosti $H_4(n)$.

Čvorove pomoćnog opšteg digrafa D za $m = 4$ numerisaćemo tako što ćemo čvorovima: 101 , 111 , 001 , 010 , 121 , 100 redom pridružiti brojeve: 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 .
Matrica susedstva opšteg digrafa D je sledeća:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(i-ta vrsta odn. kolona odgovaraju čvoru sa numeracijom i, za $i = 1, \ldots, 6$)

Označimo sa $h_i(k)$ broj orijentisanih puteva dužine k koji počinju u čvoru sa numeracijom i a završavaju u nekom od poslednjih čvorova digrafa D.

U našem slučaju skup poslednjih čvorova je: $\{111, 121\}$ dok je skup istaknutih čvorova $\{101, 111\}$ te se vrednost $H_4(n)$ dobija iz sledeće formule:

$$H_4(n) = h_1(n-2) + h_2(n-2) \tag{1}$$

Iz matrice susedstva dobijamo sledeći sistem rekurentnih relacija:

$$h_1(k) = h_1(k-1) + h_2(k-1)$$

$$h_2(k) = h_3(k-1) + h_4(k-1) + h_5(k-1) + h_6(k-1)$$

$$h_3(k) = h_1(k-1) + h_2(k-1)$$

$$h_4(k) = h_2(k-1)$$

$$h_5(k) = h_3(k-1) + h_5(k-1) + h_6(k-1)$$

$$h_6(k) = h_1(k-1) + h_2(k-1)$$

Lako se uočava da je $h_1(k) = h_3(k) = h_6(k)$ a koristeći da je $h_4(k) = h_2(k-1)$ gornji sistem se zajedno sa (1) svodi na sledeći:

$$h_1(k) = h_1(k-1) + h_2(k-1) \tag{2}$$

$$h_2(k) = 2 \cdot h_1(k-1) + h_2(k-2) + h_5(k-1) \tag{3}$$

$$h_5(k) = 2 \cdot h_1(k-1) + h_5(k-1) \tag{4}$$

$$H_4(k) = h_1(k-2) + h_2(k-2) \tag{5}$$

Na osnovu (2) i (5) sledi:

$$H_4(k) = h_1(k+1) \tag{6}$$

dok na osnovu (3) i (4) dobijamo:

$$h_5(k) = h_2(k) - h_2(k-2)$$

što kada se primeni u (3) daje:

$$h_2(k) = 2 \cdot h_1(k-1) + h_2(k-1) + h_2(k-2) - h_2(k-3) \tag{7}$$

Ako iz (2) izrazimo $h_2(k)$ pa to dalje primenimo u (7) dobijamo:

$$h_1(k+1) - 2 \cdot h_1(k) - 2 \cdot h_1(k-1) + 2 \cdot h_1(k-2) - h_1(k-3) = 0$$

Koristeći (6) dalje dobijamo:
$H_4(k) - 2 \cdot H_4(k-1) - 2 \cdot H_4(k-2) + 2 \cdot H_4(k-3) - H_4(k-4) = 0$

Do ove formule se može doći na više načina (vidi [ToBo] ili [Kw]).

Teorema 3.1 *$H_4(n)$ zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$\boxed{H_4(n) - 2 \cdot H_4(n-1) - 2 \cdot H_4(n-2) + 2 \cdot H_4(n-3) - H_4(n-4) = 0}$$

sa početnim uslovima

$H_4(0) = H_4(1) = 0,\ H_4(2) = 1 \quad i \quad H_4(3) = 2$

Rešavanjem gornje rekurentne relacije može se dobiti i eksplicitna formula za vrednosti $H_4(n)$.

Teorema 3.2

$$H_4(n) = \sum_{i=1}^{4} \frac{\alpha_i}{\acute{F}(\alpha_i)} \cdot \alpha_i^n$$

gde su α_i *nule karakterističnog polinoma* $F(x) = x^4 - 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 1$, *i iznose:*

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \cdot ((1+K) + \sqrt{G})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot ((1+K) - \sqrt{G})$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2} \cdot ((1-K) + \sqrt{H})$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{2} \cdot ((1-K) - \sqrt{H})$$

gde je:

$$G = 4 - (1+K)^2 \cdot (1 - \frac{2}{K})$$

$$G = 4 - (1-K)^2 \cdot (1 + \frac{2}{K})$$

$$K = \sqrt{\frac{2 \cdot (\mu + \nu) + 7}{3}}$$

a $\mu = \sqrt[3]{\frac{-29+3\cdot\sqrt{39}}{2}}$ *i* $\nu = \sqrt[3]{\frac{-29-3\cdot\sqrt{39}}{2}}$

Sada uzmimo da je $m = 5$. Čvorove pomoćnog opšteg digrafa D:

$$1011\,,\ 1101\,,\ 1111\,,\ 1010\,,\ 1110\,,\ 0101\,,$$

$$0111\,,\ 1001\,,\ 0001\,,\ 0010\,,\ 0100\,,\ 0121\,,$$

$$1000\,,\ 1210\,,\ 1221\,,\ 0011\,,\ 1211\,,\ 1121\,,\ 1100$$

numerišimo redom brojevima od $1 - 19$.
Skup istaknutih čvorova je $\{\ 1011\,,\ 1101\,,\ 1111\ \}$
dok je skup poslednjih čvorova $\{\ 1111\,,\ 1211\,,\ 1121\ \}$.

Matrica susedstva opšteg digrafa D je sledeća:

$$\begin{bmatrix}
0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&1&1&1&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{bmatrix}$$

Na osnovu matrice susedstva dolazimo do sledećeg sistema rekurentnih relacija:

$$h_1(k) = h_4(k-1) + h_5(k-1) + h_6(k-1)$$

$$h_2(k) = h_4(k-1) + h_7(k-1) + h_8(k-1)$$

$$h_3(k) = h_9(k{-}1){+}h_{10}(k{-}1){+}h_{11}(k{-}1){+}h_{12}(k{-}1){+}h_{13}(k{-}1){+}h_{14}(k{-}1){+}h_{15}(k{-}1)$$

$$h_4(k) = h_1(k-1) + h_2(k-1) + h_3(k-1)$$
$$h_5(k) = h_1(k-1) + h_3(k-1)$$
$$h_6(k) = h_{16}(k-1) + h_{17}(k-1)$$
$$h_7(k) = h_2(k-1) + h_3(k-1)$$
$$h_8(k) = h_{18}(k-1) + h_{19}(k-1)$$
$$h_9(k) = h_1(k-1) + h_2(k-1) + h_3(k-1)$$
$$h_{10}(k) = h_1(k-1) + h_3(k-1)$$
$$h_{11}(k) = h_2(k-1) + h_3(k-1)$$
$$h_{12}(k) = h_{18}(k-1) + h_{19}(k-1)$$
$$h_{13}(k) = h_1(k-1) + h_2(k-1) + h_3(k-1)$$
$$h_{14}(k) = h_{16}(k-1) + h_{17}(k-1)$$
$$h_{15}(k) = h_{16}(k-1) + h_{17}(k-1) + h_{18}(k-1) + h_{19}(k-1)$$
$$h_{16}(k) = h_4(k-1) + h_5(k-1) + h_6(k-1)$$
$$h_{17}(k) = h_9(k-1) + h_{10}(k-1) + h_{13}(k-1) + h_{14}(k-1) + h_{15}(k-1)$$
$$h_{18}(k-1) = h_9(k-1) + h_{11}(k-1) + h_{12}(k-1) + h_{13}(k-1) + h_{15}(k-1)$$
$$h_{19}(k) = h_4(k-1) + h_7(k-1) + h_8(k-1)$$

Traženi niz $H_5(n)$ dobijamo iz formule:

$$H_5(n) = h_1(n-2) + h_2(n-2) + h_3(n-2) \tag{8}$$

koju priključujemo gornjem sistemu.
Lako se oučava da važi:

$$h_1(k) = h_{16}(k)$$
$$h_2(k) = h_{19}(k)$$
$$h_4(k) = h_9(k) = h_{13}(k)$$
$$h_5(k) = h_{10}(k)$$
$$h_6(k) = h_{14}(k)$$
$$h_7(k) = h_{11}(k)$$

$$h_8(k) = h_{12}(k)$$

a na osnovu parova inverznih čvorova opšteg digrafa D (kao reči nad azbukom $C \cup \{0,1\}$) takodje važi i:

$$h_1(k) = h_2(k)$$

$$h_5(k) = h_7(k)$$

$$h_6(k) = h_8(k)$$

$$h_{17}(k) = h_{18}(k)$$

te koristeći sve ovo, gornji sistem se može svesti na sledeći:

$$h_1(k) = h_4(k-1) + h_5(k-1) + h_6(k-1) \tag{9}$$

$$h_3(k) = 2 \cdot h_4(k-1) + 2 \cdot h_5(k-1) + 2 \cdot h_6(k-1) + h_{15}(k-1) \tag{10}$$

$$h_4(k) = 2 \cdot h_1(k-1) + h_3(k-1) \tag{11}$$

$$h_5(k) = h_1(k-1) + h_3(k-1) \tag{12}$$

$$h_6(k) = h_1(k-1) + h_{17}(k-1) \tag{13}$$

$$h_{15}(k) = 2 \cdot h_1(k-1) + 2 \cdot h_{17}(k-1) \tag{14}$$

$$h_{17}(k) = 2 \cdot h_4(k-1) + h_5(k-1) + h_6(k-1) + h_{15}(k-1) \tag{15}$$

$$F_5(k+1) = h_4(k) \tag{16}$$

Koristeći (11), (12), (13) i (14) u preostalim sistem se dalje redukuje na sledeći:

$$h_1(k) = H_5(k) + 2 \cdot h_1(k-2) + h_3(k-2) + h_{17}(k-2) \tag{17}$$

$$h_3(k) = 2 \cdot H_5(k) + 6 \cdot h_1(k-2) + 2 \cdot h_3(k-2) + 4 \cdot h_{17}(k-2) \tag{18}$$

$$h_{17}(k) = 2 \cdot H_5(k) + 4 \cdot h_1(k-2) + h_3(k-2) + 3 \cdot h_{17}(k-2) \tag{19}$$

$$H_5(k+1) = 2 \cdot h_1(k-1) + h_3(k-1) \tag{20}$$

Sabirajući (17) i (19) i oduzimajući jednakost (18) od toga dobijamo:

$$h_{17}(k) = H_5(k) + h_3(k) - h_1(k)$$

što kada se primeni u (17) i (18) za $(k-2)$ umesto k daje sledeći sistem:

$$h_1(k) = H_5(k) + H_5(k-2) + h_1(k-2) + 2 \cdot h_3(k-2) \tag{21}$$

$$h_3(k) = 2 \cdot H_5(k) + 4 \cdot H_5(k-2) + 2 \cdot h_1(k-2) + 6 \cdot h_3(k-2) \tag{22}$$

$$H_5(k+1) = 2 \cdot h_1(k-1) + h_3(k-1) \tag{23}$$

Sada, iz (21) može se izraziti $h_3(k-2)$ odnosno $h_3(k)$ što kada se primeni u (22) i (23) daje:

$$H_5(k) - H_5(k+2) - 2 \cdot H_5(k-2) = -h_1(k+2) + 7 \cdot h_1(k) - 2 \cdot h_1(k-2) \tag{24}$$

$$3 \cdot H_5(k+1) + H_5(k-1) = 3 \cdot h_1(k-1) + h_1(k+1)$$

Sada izrazimo jednakost (24) za $(k-2)$ umesto za k pa množeći dobijenu sa 3 i dodavajući joj (24) a koristeći (25) za $k+1$, $k-1$ i $k-3$ redom umesto k dolazimo do rekurentne relacije za $H_5(k)$ tj.

$$H_5(k+2) - 11 \cdot H_5(k) - 2 \cdot H_5(k-4) = 0$$

Do ove rekurentne relacije se može, kao i za vrednosti $H_4(n)$, doći na drugi način (vidi [Kw]).

Teorema 3.3 *$H_5(n)$ zadovoljava rekurentnu relaciju:*

$$\boxed{H_5(n) = 11 \cdot H_5(n-2) + 2 \cdot H_5(n-6)}$$

za $n \geq 6$ sa početnim vrednostima
$H_5(0) = H_5(1) = H_5(3) = H_5(5) = 0 \quad H_5(2) = 1,\ H_5(4) = 14$

Rešavanjem gornje rekurentne relacije dobija se sledeće tvrdjenje

Teorema 3.4

$$H_5(2 \cdot n + 1) = 0,$$

$$H_5(2 \cdot n) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\beta_i + 3}{\acute{G}(\beta_i)} \beta_i^n,$$

za sve $n \geq 0$,
gde su β_i *nule polinoma* $G(z) = z^3 - 11 \cdot z^2 - 2$ *a iznose:*

$$\beta_1 = \frac{11}{3} + u + v$$

$$\beta_2 = \frac{11}{3} - \frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} \cdot \sqrt{3}i$$

$$\beta_3 = \frac{11}{3} - \frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} \cdot \sqrt{3}$$

dok je $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ *i* $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ *a*
$p = -\frac{121}{2}$ *i* $q = -\frac{2716}{27}$

Dalji pravci istraživanja se svode na odredjivanje matrica susedstva digrafova D za $m \geq 6$ i rešavanje odgovarajućeg sistema rekurentnih relacija.

3.3 Algoritmi za odredjivanje vrednosti $H_m(n)$

Ovde su data dva algoritma za odredjivanje vrednosti $H_m(n)$.

Prvi generiše jednu po jednu Hamiltonovu konturu i na taj način ih prebrojava, dok drugi koristi pridruženi opšti digraf D iz (3.1). i mnogo brže odredjuje vrednosti za $H_m(n)$. Prednost drugog algoritma je dakle, u postignutoj brzini (dobijene su vrednosti za neke vrednosti m i n za čije odredjivanje pomoću prvog algoritma bi iziskivalo puno vremena). Prednost prvog algoritma u odnosu na drugi je u mogućnosti pretraživanja nekih Hamiltonovih kontura sa odredjenim svojstvima (s obzirom na generisanje samih kontura) a takodje nije ograničen veličinom memorije računara u slučaju većih vrednosti za m i n.

3.3.1 Prvi algoritam

U (3.1) videli smo da se svakoj Hamiltonovoj konturi grafa $P_m + P_n$ može pridružiti jednoznačno odredjena matrica tipa $(m-1)\times(n-1)$ koja zadovoljava uslove susednosti, uslove prve i poslednje kolone kao i uslov korena i da je ovo pridruživanje obostrano jednoznačno.

Ovaj algoritam generiše (i ujedno prebrojava) sve binarne matrice koje zadovoljavaju navedene osobine.

Kako se svaka nula nalazi tačno u jednom SS-u to se generisanje svih matrica sa navedenim osobinama svodi na generisanje svih mogućih rasporeda svih mogućih spoljašnjih stabala u odgovarajućem grafu prozora vodeći, naravno, računa o ispunjenosti traženih uslova. U binarnoj matrici A sva SS-a se mogu urediti u zavisnosti od položaja odgovarajućih korena koji se nalaze u prvoj ili poslednjoj vrsti ili koloni pa stoga, uvodimo prioritet: prva vrsta (koreni koji joj pripadaju su najstariji), poslednja ((n-1)-a) kolona , poslednja ((m-1)-a) vrsta, prva kolona.
Dakle, kod izgradnje spoljašnjeg stabla prvo se grade ona čiji se koreni nalaze u prvoj vrsti (ako uopšte postoje) i to ona prvo sa manjim drugim indeksom, pa ona SS-a čiji se koreni nalaze u poslednjoj koloni (opet, ako uopšte postoje) i to ona prvo sa manjim prvim indeksom, pa ona SS-a čiji se koreni nalaze u

poslednjoj vrsti (opet, ako postoje) i to prvo ona sa većim drugim indeksom, pa tek onda ona SS-a čiji se koreni nalaze u prvoj koloni (ako postoje) i to ona prvo sa većim prvim indeksom.

Na početku svi elementi matrice su *slobodni* tj. pridružena im je vrednost različita od 0 i 1 (neka to bude 2) izuzev elemenata u " ćoškovima" matrice ($a_{1,1} = a_{1,n-1} = a_{m-1,1} = a_{m-1,n-1} = 1$). Nakon izgradnje svakog SS-a, tj. pridruživanja nula nekim elementima matrice A, pristupa se "oivičavanju " tog SS-a jedinicama, tj. pridruživanju jedinica susednim elementima tog SS-a kao i onim prozorima koji sa nekim od prozora tog SS-a imaju zajednički čvor vodeći pri tome računa o ispunjenosti navedenih uslova koje matrica A mora da zadovoljava. Ako se uspešno završi oivičavanje nastavlja se dalje sa izborom novog SS-a odn. njegovog korena a u suprotnom slučaju mora se tražiti nova mogućnost za izbor SS-a sa datim korenom.

Pomoću backtrack-a (programiranje sa povratkom unazad) se pokušava pridružiti na dati način svim elementima matrice A elemenat iz skupa $\{0,1\}$ (što se može jednostavnom procedurom proveriti) i odrediti sve takve moguće binarne matrice.

Elementi matrice A se definišu na sledeći način:

```
pok = ^prozor ;
prozor = record
            vrednost: integer ;
            nivo: integer ;
            sever,  jug,  istok,  zapad: pok ;
            granica: pok ;
end ;
```

Za elemenat $a_{i,j}$ matrice A pokazivačke promenljive *sever, jug, istok, zapad* odredjuju susedne elemente (u slučaju kad je $1 < i < m-1$, $1 < j < n-1$, to su $a_{i-1,j}$, $a_{i+1,j}$, $a_{i,j+1}$ $a_{i,j-1}$ redom) ili pak su *nil* ako odgovarajući elemenat ne postoji (npr. za $i = m-1$ $jug = nil$). Pokazivačka promenljiva *granica* odredjuje sledeće elemente:

$$granica = \begin{cases} a_{i,j+1} & \text{za } i=1 \text{ i } j<n-2 \\ a_{i+1,j} & \text{za } j=n-1 \text{ i } i<m-2 \\ a_{i,j-1} & \text{za } i=m-1 \text{ i } j>2 \\ a_{i-1,j} & \text{za } j=1 \text{ i } i>2 \\ nil & \text{za } 1<i<m-1 \text{ i } 1<j<n-1 \end{cases}$$

Definicija 3.6 Nivo elementa $a_{i,j}$ *u nekom momentu ima vrednost max = const (neodredjena) u slučaju da je vrednost tog elementa u tom momentu neodredjena (tj.jednaka broju 2), a jednaka rednom broju SS-a kome pripada u slučaju da je vrednost elementa* $a_{i,j}$ *jednaka 0 odnosno jednaka rednom broju SS-a čijim "oivičvanjem" jedinicama je ona nastala, u slučaju da je vrednost elementa* $a_{i,j}$ *jednaka 1.*

Dakle, vrednost nivoa elementa čija vrednost je jednaka 1 je jednaka minimalnom rednom broju onih stabala sa kojima je posmatrani prozor susedan. (To je potrebno jer u slučaju "brisanja" SS-a i njegovog omotača nije dozvoljeno "obrisati" neku jedinicu koja pripada i omotaču nekog drugog SS-a sa manjim rednim brojem.)

U programu su korišćene sledeće funkcije i procedure:

- function gore (r1, r2: pok): pok ;
- function desno (r1, r2: pok): pok ;
- function levo (r1, r2: pok): pok ;
  (koriste se pri kretanju po matrici A za odredjivanje položaja prozora u odnosu na pravac kretanja)
- function ogranicen (x: integer ; p: pok): boolean ;
  (odgovara na pitanje da li je prozor $p\uparrow$ u nekom "ćošku " ograničen sa tri prozora iste vrednosti $x \in \{0,1\}$.)
- function moze (kk: integer ; t1, t2: pok) : boolean ;
  (odgovara na pitanje da li se prozor $p\uparrow$ može priključiti SS-u rednog broja kk kome već pripada prozor $t1\uparrow$)

- procedure oivici (k5: integer) ;
(pokušava da "oiviči" SS rednog broja $k5$ jedinicama, rezultuje *uspeh* -om (globalna bulovska promenljiva))

- procedure otkači (k6: integer ; r: pok) ;
(koristi se prilikom "brisanja" SS-a i njegovog omotača jedinica ; u slučaju da je $r\uparrow.\ nivo = k6$ prozoru $r\uparrow$ se pridružuje vrednost 2 a nivo *max*)

- procedure novostablo (k4: integer) ;
(stalno traži novu mogućnost za SS rednog broja $k4$ dok ne dobije SS koje se može pravilno oivičiti jedinicama (posle primene procedure *oivici* uspeh = true) ili pak, zaključuje da nema više mogućnosti za izbor stabla (poslednji:=true) te se postojeće stablo rednog broja $k6$ mora zajedno sa svojim omotačem jedinica "obrisati" i tražiti nova mogućnost za izbor SS-a na nivou $k6-1$)

Naravno, tu su i

- function svirasp: boolean ;
koja utvrdjuje da li je dobijena matrica binarna matrica i

- procedure ham (k: integer) ;
koja prebrojava Hamiltonove konture.

Ostaje da se jasnije objasni na koji način se traži od postojećeg SS-a sa datim korenom novo SS sa istim korenom (ako je to moguće).
Naravno, za prvu mogućnost se uzima slučaj kad je SS jednako svom korenu. Nadalje se uvek pokušava "dograditi" jedan novi prozor u dato SS i u tom cilju se napreduje kroz postojeće SS koristeći backtrack i brisanje odredjenih prozora sve dok se to ne postigne ili pak, dok se ne "obriše " celo stablo tj. dodje tragačem do korena tog spoljašnjeg stabla.
Šetnju kroz postojeće spoljašnje stablo i orijentaciju omogućavaju pokazivačke promenljive:

```
trgac, pratrag:  pok ;
```

a odredjivanje nove mogućnosti za izbor SS-a se može najlakše videti iz same procedure novostablo (date u dodatku).

3.3.2 Drugi algoritam

Videli smo u (3.1) da se problem odredjivanja broja Hamiltonovih kontura grafa $P_m + P_n$ može svesti na problem prebrojavanja svih orijentisanih puteva u D dužine (n-2) koji polaze iz nekog istaknutog čvora a završavaju u nekom od poslednjih čvorova.

Skup čvorova opšteg digrafa D u oznaci $V(D)$ je konačan skup , pošto je skup svih reči dužine $(m-1)$ nad azbukom $C \cup \{0,1\}$ konačan ali je kardinalnosti mnogo manji od broja $(\lceil \frac{m-1}{2} + 1 \rceil)^{m-1}$ koji daje broj svih reči dužine $(m-1)$ nad azbukom $C \cup \{0,1\}$ (u dodatku je dat broj čvorova opšteg digrafa za neke vrednosti m uporedjene sa brojem čvorova opšteg grafa koji koristimo pri odredjivanju 2-faktora za te vrednosti m).

Čvorovi i grane digrafa D se definišu na sledeći način:

```
type
  pokc=^cvor;
  poks=^sledbenik;
  mniz=array[1..(m-1)] of integer;
  ccniz=array[1..c] of integer;          (* koristimo aritmetiku *)
  nniz=array[1..(n-2)] of ccniz;         (* visestruke preciznosti *)

  cvor=record
        ctezina:nniz;(* broj orijentisanih puteva duzine *)
                     (* argumenta koji pocinju tim cvorom *)
                     (* a zavrsavaju nekim poslednjim*)
        csl:poks;
        cposlednji:boolean;
        cist:pokc;    (* svi istaknuti cv. su povezani *)
        cniz:mniz;    (* rec kojoj je pridruzen *)
        sledeci:pokc (* red formiranja cvorova *)
      end;

 sledbenik=record    (* grane *)
             sodg:pokc;
             ssl:poks
           end;
```

Pokazivačka promenljiva csl odredjuje prvu granu koja polazi iz datog čvora a završava u čvoru $sodg\uparrow$. Sve grane koje polaze iz istog čvora vezane su u niz prema svom nastanku (pokazivačka promenljiva ssl odredjuje sledeću granu u tom nizu dok $sodg$ odredjuje čvor u koji ta grana uvire).

Čvorove digrafa D dobijamo na sledeći način:

Definicija 3.7 *reč dužine* $(m-1)$ $\overline{b_{1,k}b_{2,k}\cdots b_{m-1,k}}$ *nad azbukom* $C \cup \{0,1\}$ *pripada skupu* $V(D)$ *akko važi jedno od sledećeg:*

1. *reč* $\overline{b_{1,k}b_{2,k}\cdots b_{m-1,k}}$ *zadovoljava osobinu (1.) i (2.) iz (3.1) za* $k=1$ *(tj. ako je istaknuta)*

2. $\overline{b_{1,k}b_{2,k}\cdots b_{m-1,k}}$ *i* $\overline{b_{1,k-1}b_{2,k-1}\cdots b_{m-1,k-1}}$ *zadovoljavaju osobine (1.) i (4.) iz (3.1) a reč* $\overline{b_{1,k-1}b_{2,k-1}\cdots b_{m-1,k-1}} \in V(D)$

3. *reč* $\overline{b_{1,k}b_{2,k}\cdots b_{m-1,k}}$ *je dobijena konačnom primenom (1.) i (2.) iz ove definicije.*

Prvo se odredjuju svi mogući istaknuti čvorovi. Kako svaki istaknuti čvor ima svoj par u skupu poslednjih čvorova (čvor sa istom osnovom) to se prilikom formiranja svih istaknutih čvorova može ujedno formirati i skup svih poslednjih čorova (za ove čvorove važi da je $cposlednji = true$). Čvor pridružen reči $\overline{11\cdots 1}$ je jedini i istaknuti i poslednji čvor i on se poslednji formira od svih istaknutih čvorova (svi čvorovi koji se formiraju posle ovog čvora se dobijaju kao mogući sledbenici nekih istaknutih čvorova ili čvorova nastalih pre ovog do kojih se može stići iz nekog istaknutog orijentisanim putem konačne dužine.

Formiranje skupa istaknutih i poslednjih čvorova se najbolje može videti iz same procedure istaknut .

```
procedure istaknut; (* formira niz reci koje mogu biti prve tj istaknute
                        (* kao i poslednje *)
var
  e,f:mniz;
  t,i,j:integer;
  stop1:boolean;
  ist1,ist2:pokc;
  cp4:pokc;
begin          (* formiranje prve istaknute reci *)
  e[1]:=1;
  e[m-1]:=1;
  i:=2;
  stop1:=false;
  while (i<(m-1)) do begin
    e[i]:=0;
    e[i+1]:=1;
    i:=i+2
  end;
  new(ppoc);
  with ppoc^ do begin
    for i:=1 to (n-2) do begin
      for j:=1 to (c-1) do ctezina[i][j]:=0;
      ctezina[i][c]:=-1    (* oznaka neodredjenostii *)
    end;
    csl:=nil;
    cposlednji:=false;
    cist:=nil;
    for i:=1 to  (m-1) do cniz[i]:=e[i];
    sledeci:=nil;
    num:=1
  end;
  ist1:=ppoc;
  repeat
    j:=m-2;
    while (j<>1) and (e[j]=1) do j:=j-1;
    if j=1 (* sve jedinice *) then
      begin
```

```
     ist1^.cposlednji:=true; (* jedina i istaknuta i poslednja rec *)
     stop1:=true;            (* poslednja se formira              *)
     jedinica:=ist1
    end
  else              (* za svaku formiranu istaknutu rec se moze odmah *)
    begin           (* odrediti odgovarajuca poslednja rec           *)
     t:=2;
     for i:=1 to (m-1) do
       if e[i]=1 then f[i]:=1
       else begin
              f[i]:=t;
              t:=t+1
            end;
     trazi(f,cp4);
     ist1^.sledeci:=cp4;
     cp4^.cposlednji:=true;
     e[j]:=1;
     j:=j+1;
     while(j<(m-1)) do   (* trazimo sledecu istaknutu rec *)
       begin
         e[j]:=0;
         e[j+1]:=1;
         j:=j+2
       end;
     trazi(e,ist2);
     ist2^.cist:=ist1;
     ist1:=ist2;
     cp4^.sledeci:=ist2
   end
 until stop1 ;
 writeln('zavrsen je istaknut')
end;
```

Kako se odredjuju svi mogući sledbenici za dati čvor (tj. za reč *cniz* pridruženu ovom čvoru) ?

Prvo se odredjuje osnova date reči, pa se zatim odredjuju sve moguće binarne reči dužine $(m-1)$ koje sa osnovom predhodne zadovoljavaju uslove susednosti dve kolone (vidi osobina 1. matrice B iz 3.1). Za svaku tu binarnu reč se pokušava odrediti reč dužine $(m-1)$ nad azbukom $C \cup \{0,1\}$ čija osnova će biti upravo ta binarna reč ali tako da reč pridružena polaznom čvoru i ova zadovoljavaju osobinu 4. matrice B (vidi 3.1) kao dve susedne kolone ((k-1)-va i k-ta). U slučaju uspeha formira se nova grana (eventualno i novi čvor). Primetimo da dva različita čvora (tj. reči pridružene njima) ne mogu imati istu binarnu reč za osnovu te se na osnovu ovoga skup svih sledbenika istog čvora može urediti prema njihovim osnovama kao binarnim reprezentacijama prirodnih brojeva.

Postupak prebrojavanja sadrži u sebi rekurziju. Naime, za dato n tražeći broj svih orijentisanih puteva dužine k , $k > 1$, koji polaze iz datog čvora a završavaju u nekom poslednjem (tj. tražeći vrednost *ctezina[k]*) mi prolazimo sve moguće sledbenike datog čvora i sabiramo vrednosti *ctezina[k-1]* koje se, u slučaju da su već odredjene, ne moraju ponovo odredjivati. Specijalno, za $k = 1$ vrednost *ctežina[1]* se dobija prebrajanjem svih mogućih sledbenika datog čvora koji su iz skupa poslednjih čvorova tj. za koje je *cposlednji* $=$ *true*.

Na kraju ukupan broj orijentisanih puteva dužine $(n-2)$ koji polaze iz proizvoljnog istaknutog čvora a završavaju u nekom poslednjem čvoru biće jednak zbiru vrednosti *ctežina[n-2]* svih istaknutih čvorova.

U dodatku su date vrednosti za $H_4(n)$ i $H_5(n)$ $3 \leq n \leq 30$ uporedjene sa odgovarajućim vrednostima $F_4(n)$ i $F_5(n)$ a takodje i $H_6(n)$ $H_7(n)$ $H_8(n)$ za neke vrednosti n postignute računarom.

LITERATURA

BaMy Basil R.Myers, Enumeration of Tours in Hamiltonian Rectangular Lattice Graphs, Mathematics Magazine, 54 (1981), 19 –23.

ToBo R.Tošić, O.Bodroža, Y.H.H.Kwong and H.J.Straight, On the nunber of Hamiltonian cycles of $P_4 \times P_n$ Indian J. of Pure and Applied Math., to appear.

Kw Y.H.Harris Kwong, Enumeration of Hamiltonian Cycles in $P_4 \times P_n$ and $P_5 \times P_n$

ToPa Tošić dr Ratko, Paunić mr Djura, Algoritam za generisanje i prebrojavanje 2-faktora jedne klase grafova (XI Simpozijum iz informatike, Jahorina, 1987.)

Bo Bodroža Olga, An Algorithm for Generation and Enumeration of Hamiltonian Cycles in $P_m + P_n$, primljeno u Review of Research, Faculty of Science, University of Novi Sad

RaOl R.Tošić, O.Bodroža, Enumeration of 2-factors of $P_5 \times P_n$, primljeno u Review of Research, Faculty of Science, University of Novi Sad

Ha Frank Harary, Graph Theory and Theoretical Physics, 1967 Academic Press London and New York

LoPl László Lovász and Michael D.Plummer, Matching Theory, Akadémiai Kiadó, Budapest 1986.

CvSi Dr Dragoš Cvetković, Dr Slobodan Simić, Klasična i moderna kombinatorika, Naučna Knjiga Beograd, 1990

Cv Dr Dragoš Cvetković, Teorija grafova i njene primene, Naučna knjga 1990

Tu Alan Tucker, Applied Combinatorics, Wiley, 1980

BeChLe Mehdi Behzad, Gary Chartrand, Linda Lesniak – Foster , Wadsworth 1979

Ev Shimon Even, Graph Algorithms, Computer Science Press, 1979

CvDoSa Dragoš M. Cvetković , Michael Doob, Horst Sachs, Spectra of Graphs - Theory and Application, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1982

Zy A.A.Zykov, The Foundations of Graph Theory, Moscow, "Nauka", 1987.

DODATAK

```
procedure novostablo(k4:integer);
  var i4:integer;
      tragac,pratrag,pom:pok;
      poslednji,dodat:boolean;
  begin
   stop[k4]:=false;
   repeat
     tragac:=koren[k4];
     if tragac^.vrednost=2 then
       (* stvaranje prvog moguceg stabla da datim korenom *)
       begin
         tragac^.vrednost:=0;
         tragac^.nivo:=k4 ;
         oivici(k4) ;
       end
    else
      (*________________________________________ *)
      (* ako je postojalo stablo napredujemo kroz njega *)
      (* krecemo se uvek u pravcu pratrag --> tragac    *)
      (*---------------------------------------------- *)
     begin
       pratrag:=nil;
       poslednji:=false;
       stuspeh:=false;
       while not (stuspeh or poslednji) do     (*I while  *)
         begin
           (* ----------------------------------------------- *)
           (* ako nadesno imamo granu stabla popnemo se na nju *)
           (* a ako nemamo pokusavamo je napraviti i na taj   *)
           (* nacin  dobiti novo stablo                        *)
           (* ---------------------------------------------- *)
```

```
if desno(pratrag,tragac)^.vrednost=0 then
  begin
    pom:=tragac;
    tragac:=desno(pratrag,tragac);
    pratrag:=pom
  end
else
  if moze(k4,tragac,desno(pratrag,tragac)) then
    begin
      tragac:=desno(pratrag,tragac);
      tragac^.vrednost:=0;
      stuspeh:=true;    (* izlaz iz  I while *)
      tragac^.nivo:=k4
    end
  else
    (* ------------------------------------------------------ *)
    (* ako nista od prethodnog nismo uspeli pokusavamo da     *)
    (* napredujemo nagore ili pak, da dogradimo novu grancicu *)
    (* ------------------------------------------------------ *)
    if gore(pratrag,tragac)^.vrednost=0 then
      begin
        pom:=tragac;
        tragac:=gore(pratrag,tragac);
        pratrag:=pom
      end
    else
      if moze(k4,tragac,gore(pratrag,tragac)) then
        begin
          tragac:=gore(pratrag,tragac);
          tragac^.vrednost:=0;
          tragac^.nivo:=k4;
          stuspeh:=true      (* izlaz iz I while  *)
        end
      else
        (* ----------------------------------------------- *)
        (* ako nista od prethodnog nismo uspeli pokusavamo *)
        (* sve isto ali nalevo --------------------------- *)
```

```
if levo(pratrag,tragac)^.vrednost=0 then
               begin
                 pom:=tragac;
                 tragac:=levo(pratrag,tragac);
                 pratrag:=pom
               end
else
  if moze(k4,tragac,levo(pratrag,tragac)) then
    begin
      tragac:=levo(pratrag,tragac);
      tragac^.vrednost:=0;
      tragac^.nivo:=k4;
      stuspeh:=true  (* izlaz iz I while *)
    end
  else
       (* ------------------------------------------------------------ *)
       (* dospeli smo do najdesnijeg viseceg cvora u postojecem stablu, *)
       (* ne mozemo nti da napredujemo vise kroz stablo, niti mozemo da *)
       (* dogradimo novu grancicu - ostaje nam jedino mogucnost da      *)
       (* obrisemo taj viseci cvor i da se vratimo korak unazad,        *)
       (* trazeci sa tog polozaja novu mogucnost za izbor stabla        *)
       (* ------------------------------------------------------------ *)
       begin
         dodat:=false;
         while not(dodat or (tragac=koren[k4])
                         or (pratrag=koren[k4])) do
         (* ------------------------------------------------------------ *
         (* sledeci postupak se ponavlja dok ne dobijemo novo stablo ili  *
         (* pak, dok ne zakljucimo da je poslednje stablo bilo poslednje  *
         (* moguce sa datim korenom tj. dok ne obrisemo skoro celo stablo *
         (* ------------------------------------------------------------- *
```

```
begin   (* II while  *)
  if desno(tragac,pratrag)^.vrednost=0 then
   if (gore(tragac,pratrag)^.vrednost=0) or
      (levo(tragac,pratrag)^.vrednost=0) then
     (* ---------------------------------------------------- *)
     (* posto se brise uvek prvo desniji cvor, to znaci da    *)
     (* u ovom slucaju, nismo mogli doci iz cvora             *)
     (* desno(tragac,pratrag)^  tj. taj cvor nije stariji od *)
     (* cvora pratrag^  - brisemo viseci cvor tragac^ i      *)
     (* nastavljamo da napredujemo dalje kroz postojece stablo*)
     (* ---------------------------------------------------- *)
     begin
      tragac^.vrednost:=2;
      tragac^.nivo:=max;
      otkaci(k4,gore(pratrag,tragac));
      otkaci(k4,desno(tragac,gore(pratrag,tragac)));
      otkaci(k4,levo(tragac,gore(pratrag,tragac)));
      tragac:=desno(tragac,pratrag) ;
      dodat:=true  (* povratak u I while *)
     end
   else
     (* ------------------------------------------------------ *)
     (* u ovom slucaju cvor desno(tragac,pratrag)^ jeste stariji *)
     (* cvor od cvora pratrag^ , i moramo se vratiti jos jedan  *)
     (* korak unazad jer do ovog momenta je vec ustanovljeno    *)
     (* da se ne mogu dograditi cvorovi levo(tragac,pratrag)^ i *)
     (* gore(tragac,pratrag)^ --------------------------------- *)
     begin
      tragac^.vrednost:=2;
      tragac^.nivo:=max;
      otkaci(k4,gore(pratrag,tragac));
      otkaci(k4,desno(tragac,gore(pratrag,tragac)));
      otkaci(k4,levo(tragac,gore(pratrag,tragac)));
      pom:=desno(tragac,pratrag);
      tragac:=pratrag;
      pratrag:=pom  (* povratak u II while *)
     end
```

```
else  (* ako desno(tragac,pratrag)^.vrednost nije 0 *)
  if (gore(tragac,pratrag)^.vrednost=0) and
     (levo(tragac,pratrag)^.vrednost=0)  then
(* ------------------------------------------------------ *)
(* cvor levo(tragac,pratrag)^ je stariji  od cvora pratrag^ *)
(* tj. iz tog pravca smo dosli                          *)
(* ------------------------------------------------------ *)
   begin
    tragac^.vrednost:=2;
    tragac^.nivo:=max;
    otkaci(k4,gore(pratrag,tragac));
    otkaci(k4,desno(tragac,gore(pratrag,tragac)));
    otkaci(k4,levo(tragac,gore(pratrag,tragac)));
  (* ---------------------------------------------------- *)
  (* brisemo cvor tragac^ i pokusavamo da ubacimo novi    *)
  (* cvor ; ako uspemo - dobili smo novo stablo a ako...  *)
  (* ---------------------------------------------------- *)
      if moze(k4,pratrag,desno(tragac,pratrag)) then
        begin
         tragac:=desno(tragac,pratrag);
         tragac^.vrednost:=0;
         stuspeh:=true;
         tragac^.nivo:=k4
        end (* povratak u I while *)
  (* ---------------------------------------------------- *)
  (*...  a ako ne uspemo napredujemo kroz stablo dalje    *)
  (* ---------------------------------------------------- *)
      else tragac:=gore(tragac,pratrag);
      dodat:=true (* izlaz iz II while *)
    end
 else
   if gore(tragac,pratrag)^.vrednost=0 then
   (* ---------------------------------------------- *)
   (* a  niti je levo(tragac,pratrag)^.vrednost  = 0 *)
   (* niti desno(tragac,pratrag)^.vrednost = 0       *)
   (* tj. cvor gore(tragac,pratrag)^ je stariji od   *)
   (* cvora pratrag^ ------------------------------- *)
```

```
    begin
      tragac^.vrednost:=2;
      tragac^.nivo:=max;
      otkaci(k4,gore(pratrag,tragac));
      otkaci(k4,desno(tragac,gore(pratrag,tragac)));
      otkaci(k4,levo(tragac,gore(pratrag,tragac)));
      (* --------------------------------------------- *)
      (* pokusavamo dograditi novi cvor.. . ....      *)
      (* --------------------------------------------- *)
      if moze(k4,pratrag,desno(tragac,pratrag)) then
        begin
          tragac:=desno(tragac,pratrag);
          tragac^.vrednost:=0;
          stuspeh:=true;
          tragac^.nivo:=k4;
          dodat:=true (* izlaz iz II while *)
        end
      else
      (*--------------------------------------------- *)
      (* ako ne uspemo moramo se vratiti korak unazad *)
      (* --------------------------------------------- *)
        begin
         pom:=gore(tragac,pratrag);
          tragac:=pratrag;
          pratrag:=pom
        end (* povratak u  II while *)
     end
  else
   (* ---------------------------------------------- *)
   (* ako je levo(tragac,pratrag)^.vrednost = 0      *)
   (* a  niti je gore(tragac,pratrag)^.vrednost  = 0 *)
   (* niti desno(tragac,pratrag)^.vrednost = 0       *)
   (* tj. cvor levo(tragac,pratrag)^ je stariji od   *)
   (* cvora pratrag^;                                *)
   (* ---------------------------------------------- *)
```

```
        begin
         tragac^.vrednost:=2;
         tragac^.nivo:=max;
         otkaci(k4,gore(pratrag,tragac));
         otkaci(k4,desno(tragac,gore(pratrag,tragac)));
         otkaci(k4,levo(tragac,gore(pratrag,tragac)));
         (* ---------------------------------------- *)
         (* pokusavamo ubaciti novi cvor              *)
         (* ----------------------------------------- *)
         if moze(k4,pratrag,desno(tragac,pratrag)) then
           begin
             tragac:=desno(tragac,pratrag);
             tragac^.vrednost:=0;
             stuspeh:=true;
             tragac^.nivo:=k4;
             dodat:=true   (* izlaz iz  II while  *)
           end
         else
          if moze(k4,pratrag,gore(tragac,pratrag)) then
            begin
              tragac:=gore(tragac,pratrag);
              tragac^.vrednost:=0;
              tragac^.nivo:=k4;
                dodat:=true;
                stuspeh:=true (* izlaz iz II while*)
            end
           else
           (* ---------------------------------- *)
           (* ako ne uspemo vracamo se korak unazad *)
           (* ---------------------------------- *)
             begin
               pom:=levo(tragac,pratrag);
               tragac:=pratrag;
               pratrag:=pom (* povratak u II while *)
             end
       end
end;
```

```
(* ------------------------------------------------------------ *)
(* ako smo iscrpeli sve mogucnosti za izbor stabla sa korenom  *)
(* koren[k4]^ tj. obrisali prethodno stablo , pokusavamo da    *)
(* nadjemo stablo sa promenjenim  (pomerenim)  korenom          *)
(* ------------------------------------------------------------ *)
           if pratrag=koren[k4]  then
            begin
              poslednji:=true;
              tragac^.vrednost:=2;
              tragac^.nivo:=max;
              pratrag^.vrednost:=1 ;
              otkaci(k4,desno(pratrag,tragac));
              otkaci(k4,levo(pratrag,tragac));
              otkaci(k4,desno(tragac,pratrag));
              otkaci(k4,gore(pratrag,tragac));
              otkaci(k4,desno(tragac,gore(pratrag,tragac)));
              otkaci(k4,levo(tragac,gore(pratrag,tragac)));
              while(pratrag^.granica<>pocetak) and
                   (pratrag^.granica^.nivo=0) do
                pratrag:=pratrag^.granica;
              if (pratrag^.granica^.nivo<k4) or
              (pratrag^.granica=pocetak) then stop[k4]:=true
              else koren[k4]:=pratrag^.granica;
           end
           else
            if tragac=koren[k4] then
              begin
                otkaci(k4,levo(pratrag,tragac));
                otkaci(k4,gore(pratrag,tragac));
                otkaci(k4,desno(tragac,gore(pratrag,tragac)));
                otkaci(k4,levo(tragac,gore(pratrag,tragac)));
                poslednji:=true;
                if ogranicen(1,tragac) then stop[k4]:=true
                else
```

```
              begin
                tragac^.vrednost:=1;
                while(tragac^.granica<>pocetak) and
                     (tragac^.granica^.nivo=0) do
                     tragac:=tragac^.granica;
                if (tragac^.granica^.nivo<k4) or
                   (tragac^.granica=pocetak) then
                  stop[k4]:=true
                else koren[k4]:=tragac^.granica
              end
         end
   end
end; (* kraj od while I  *)
if stuspeh then oivici(k4)
end
(* ---------------------------------------------------------------------- *)
(* gornji postupak ponavljamo sve dok ne formiramo spoljasnje stablo koje *)
(* se moze uspesno oviciti sa jedinicama ili pak, dok ne iscrpimo sve     *)
(* mogucnosti za izbor ne samo stabla sa datim korenom koren[k4]^ vec     *)
(* i mogucnosti da izbor samog tog korena                                 *)
(* ---------------------------------------------------------------------- *)
until uspeh or stop[k4];
if stop[k4] then
  begin
    uspeh:=false;
    tragac:=pocblok[k4];
    while (tragac<>pocetak) do
      begin
        if (tragac^.nivo=k4) then begin
          tragac^.vrednost:=2;
          tragac^.nivo:=max
        end;
        tragac:=tragac^.granica
      end
  end
end;
```

Redosled formiranja Hamiltonovih kontura
(prvi algoritam)

```
1010101
1110101
0011111
1010001
1111101

redni broj Hamiltonove konture je 1022

1010101
1110101
1011111
1000001
1111101

redni broj Hamiltonove konture je 1023

1010101
1110101
1011111
1001001
1101011

redni broj Hamiltonove konture je 1024

1010101
1110101
1011111
1001001
1011011

redni broj Hamiltonove konture je 1025
```

1010101
1110101
1011111
0001001
1111011

redni broj Hamiltonove konture je 1026

1010101
1110101
0011111
1001001
1111011

redni broj Hamiltonove konture je 1027

1010101
1110101
0011111
1110001
1011011

redni broj Hamiltonove konture je 1028

1010101
1110101
1011111
1010001
1011011

redni broj Hamiltonove konture je 1029

```
1010101
1110101
1011111
0010001
1111011
```

redni broj Hamiltonove konture je 1030

```
1010101
1110101
0011111
1010001
1111011
```

redni broj Hamiltonove konture je 1031

```
1010101
1110101
1011111
1000001
1111011
```

redni broj Hamiltonove konture je 1032

```
1010101
1110101
0011111
1110001
1010111
```

redni broj Hamiltonove konture je 1033

Broj čvorova u opštem grafu G i opštem digrafu D za fiksno m

m	$\|V(G)\|$	$\|V(D)\|$
3	4	3
4	8	6
5	16	19
6	32	32
7	64	113
8	128	182
9	256	706

$F_m(n)$ – **Broj 2-faktora u označenom grafu** $P_m + P_n$

$H_m(n)$ – **Broj Hamiltonovih kontura u označenom grafu** $P_m + P_n$

n	$F_5(n)$	$H_5(n)$
2	3	1
4	54	14
6	1140	154
8	24360	1696
10	521064	18684
12	11146656	205832
14	238452456	2267544
16	5101047216	24980352
18	109123156248	275195536
20	2334395822496	3031685984
22	49938107061384	33398506528
24	1068291209653392	367933962880
26	22853211220567416	4053336963648
28	488882861126970624	44653503613184
30	10458331198925940456	491924407670784

$F_m(n)$ – **Broj 2-faktora u označenom grafu** $P_m + P_n$

$H_m(n)$ – **Broj Hamiltonovih kontura u označenom grafu** $P_m + P_n$

n	$F_4(n)$	$H_4(n)$
1	0	0
2	2	1
3	3	2
4	18	6
5	54	14
6	222	37
7	779	92
8	2953	236
9	10771	596
10	40043	1517
11	147462	3846
12	545603	9770
13	2013994	24794
14	7442927	62953
15	27490263	159800
16	101563680	405688
17	375176968	1029864
18	1386004383	2614457
19	5120092320	6637066
20	18914660608	16849006
21	69873991466	42773094
22	258127586367	108584525
23	953569519203	275654292
24	3522660270539	699780452
25	13013344688975	1776473532
26	48073663465682	4509783909
27	177592838241869	11448608270
28	656060220073148	29063617746
29	2423605607111629	73781357746
30	8953239432543485	187302518353

$H_m(n)$ – **Broj Hamiltonovih kontura u označenom grafu $P_m + P_n$**

n	$H_6(n)$	$H_7(n)$	$H_8(n)$
2	1	1	1
3	4	0	8
4	37	92	236
5	154	0	1696
6	1072	5320	32675
7	5320	0	301384
8	32675	301384	4638576
9	175294	0	49483138
10	1024028	17066492	681728204
11	5668692	0	7837276902
12	32463802	966656134	102283239429
13	181971848	0	1220732524976
14	1033917350	54756073582	15513067188008
15	5824476298	0	188620289493918
16	32989068162	3101696069920	2365714170297014
17	186210666468	0	29030309635705054
18	1053349394128	175698206778318	361749878496079778
19	5950467515104	0	4459396682866920534
20	33643541208290	9952578156814524	55391169255983979555
21	190115484271760	0	684363209103066303906
22	1074685815276400	563772503196695338	8487168277379774266411
23	6073680777522430	0	104976660007043902770814
24	34330607094625734	31935387285412942410	1300854247070195164448395
25	194032156833259734	0	16098959403506801921858124