ISPREDAVAN MATERIJAL IZ TOPOLOGIJE

BORIŠA KUZELJEVIĆ

Ovo je pregled materijala koji je ispredavan u zimskom semestru 2020. godine na kursu *Topologija* za studente četvrte godine programa M4 na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. U ovom pregledu nalaze se formulacije definicija i tvrdjenja. Primeri i dokazi biće dati na času. Dokazi svih tvrdjenja očekuju se na usmenom.

Osnovna literatura je [2] (možete pogledati i [1] kao dodatnu literaturu), ali obratite pažnju da može biti malih izmena u materijalu koji je ispredavan. Fond časova je 3+3, dakle tri časa predavanja nedeljno i tri časa vežbi nedeljno.

SADRŽAJ

Date: March 2, 2021.

Ispitna pitanja

1. Topološki prostori (1-5)
2. Podskupovi topoloških prostora (6-11)
3. Neprekidna preslikavanja (12-15)
4. Preslikavanja bliska neprekidnim (16-22)
5. Topologija metričkog prostora (23-27)
6. Baza i podbaza topološkog prostora (28-33)
7. Proizvod konačno mnogo topoloških prostora (34-36)
8. Topologija Tihonova (37-44)
9. $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$ (45-51)
10. Druga aksioma prebrojivosti (52-57)
11. Prva aksioma prebrojivosti (58-63)
12. Osnovni operatori u topološkim prostorima (64-69)
13. Zatvorenje (70-74)
14. Separabilnost (75-82)
15. Hauzdorfovi prostori (83-89)
16. Regularni i normalni prostori (90-96)
17. Urisonova lema (97)
18. Ticeova teorema (98)
19. Kompletno regularni prostori (99-102)
20. Povezanost (103-110)
21. Putna povezanost (111-113)
22. Proizvod povezanih prostora (114-115)
23. Kompaktnost (116-121)
24. Kompaktnost u Hauzdorfovim prostorima (122-125)
25. Teorema Tihonova (126-133)
26. Prebrojiva i sekvencijalna kompaktnost (134-135)
27. Borel-Lebegova lema (136-140)
28. Teorema o dijagonalnom preslikavanju (141-146)
29. Univerzalni prostori (147-150)
30. Teorema Urisona (151-153)

DOGOVOR O NOTACIJI

Na početku navodimo oznake koje se javljaju u tekstu:

- Skup prirodnih brojeva uvek označavamo $\mathbb{N}$, skup racionalnih brojeva uvek označavamo $\mathbb{Q}$, a skup realnih brojeva uvek označavamo $\mathbb{R}$. Ove tri oznake nikad neće označavati ništa drugo.
- Relaciju biti podskup označavamo $\subset$. Dakle, $A \subset B$ označava da svaki element skupa A pripada i skupu B. Primetimo da u ovom slučaju skupovi A i B mogu biti i jednaki.
- Razliku skupova A i B označavamo $A \setminus B$.
- Partitivni skup skupa A označavamo $P(A)$. Dakle, $P(A)$ je skup svih podskupova skupa A.
- Prazan skup obeležavamo $\emptyset$. Dakle, $\emptyset$ je skup koji nema elemenata.
- Ako je $\mathcal{A}$ familija skupova, $\bigcup \mathcal{A}$ označava uniju te familije. Dakle, x pripada $\bigcup \mathcal{A}$ ako i samo ako postoji neki $X \in \mathcal{A}$ takav da je $x \in X$.
- Ako je $\mathcal{A}$ familija skupova, $\bigcap \mathcal{A}$ označava presek te familije. Dakle, x pripada $\bigcap \mathcal{A}$ ako i samo ako za sve $X \in \mathcal{A}$ imamo $x \in X$.
- Ako su A i B skupovi, f preslikavanje iz A u B, a X podskup domena A, onda $f[X]$ označava direktnu sliku skupa X preslikavanjem f. Dakle, $f[X] = \{f(x) : x \in X\}$.
- Ako su A i B skupovi, f preslikavanje iz A u B, a Y podskup kodomena B, onda $f^{-1}[Y]$ označava inverznu sliku skupa Y pri preslikavanju f. Dakle, $f^{-1}[Y] = \{x \in A : f(x) \in Y\}$.
- Uredjeni par označavamo $\langle x, y \rangle$ (ovo je možda nestandardno, ali mnogo pomaže kada imamo u istom kontekstu puno intervala realnih brojeva i puno uredjenih parova realnih brojeva).
- Niz elemenata nekog skupa označavamo $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ (ovo je u skladu sa prethodnom stavkom o označavanju uredjenog para).

1. TOPOLOŠKI PROSTORI

Definicija 1. Neka je $\mathcal{O}$ kolekcija podskupova nepraznog skupa X. Kažemo da je $\mathcal{O}$ *topologija* na skupu X ako i samo ako su ispunjena sledeća tri uslova:

(O1) Prazan skup i skup X pripadaju $\mathcal{O}$;
(O2) $U \cap V$ pripada $\mathcal{O}$ za svaka dva skupa U i V iz $\mathcal{O}$;
(O3) $\bigcup \mathcal{U}$ pripada $\mathcal{O}$ za svaku kolekciju $\mathcal{U} \subset \mathcal{O}$.

Skup X zajedno sa topologijom $\mathcal{O}$ na X nazivamo *topološki prostor* $(X, \mathcal{O})$, a elemente topologije skupovi *otvoreni* u X. Kada na istom skupu imamo više topologija, naglasićemo u kojoj topologiji je skup otvoren.

Ako je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $F \subset X$, kažemo da je skup F *zatvoren* ako je $X \setminus F \in \mathcal{O}$.

Ako na skupu X imamo topologije $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}''$, kažemo da je $\mathcal{O}''$ *finija* od $\mathcal{O}'$, ili da je $\mathcal{O}'$ *grublja* od $\mathcal{O}''$.

Lema 2. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Presek konačno mnogo skupova otvorenih u X je otvoren skup.*

Lema 3. *Presek proizvoljne familije topologija na skupu X je topologija na skupu X.*

Teorema 4. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, i neka je $\mathcal{F}$ familija svih zatvorenih skupova u X. Tada:*

(F1) Prazan skup i skup X su zatvoreni;
(F2) Unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup;
(F3) Presek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Teorema 5. *Neka je X neprazan skup i neka je $\mathcal{F}$ kolekcija podskupova skupa X koja zadovoljava uslove (F1), (F2) i (F3) iz Teoreme 4. Tada važi:*

(1) Familija $\mathcal{O} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ je topologija na X.
(2) $\mathcal{F}$ je kolekcija svih zatvorenih skupova u topologiji $\mathcal{O}$.

Teorema 6. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Ako je $A \subset X$ neprazan skup, onda je $\mathcal{O}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{O}\}$ topologija na skupu A.*

Definicija 7. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$ neprazan skup. Kažemo da je topologija $\mathcal{O}_A = \{A \cap U : U \in \mathcal{O}\}$ na skupu A *indukovana* topologijom $\mathcal{O}$ i da je topološki prostor $(A, \mathcal{O}_A)$ potprostor prostora $(X, \mathcal{O})$. Ako je $A \in \mathcal{O}$, kažemo da je A otvoren potprostor prostora X. Ako je $X \setminus A \in \mathcal{O}$, kažemo da je A zatvoren potprostor prostora X.

Teorema 8. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor sa familijom svih zatvorenih skupova $\mathcal{F}$, i $A \subset X$ neprazan skup. Ako je $\mathcal{F}_A$ familija svih zatvorenih skupova potprostora $(A, \mathcal{O}_A)$ onda je:*

(1) $\mathcal{F}_A = \{F \cap A : X \setminus F \in \mathcal{O}\}$;
(2) $\mathcal{O}_A \subset \mathcal{O}$ ako i samo ako je $A \in \mathcal{O}$;
(3) $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{F}$ ako i samo ako je $A \in \mathcal{F}$.

Definicija 9. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kažemo da je skup $W \subset X$ *okolina* tačke x iz X ako postoji otvoren skup U takav da je $x \in U \subset W$.

Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup svih okolina tačke x u prostoru $(X, \mathcal{O})$ označavamo $\mathcal{U}(x)$.

Teorema 10. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup $A \subset X$ je otvoren u X akko je okolina svake svoje tačke.*

Definicija 11. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i neka je $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ niz u X. Kažemo da je $a \in X$ granica niza $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ ako i samo ako za svaku okolinu U tačke a postoji prirodan broj m, takav da za svako $n \geq m$ važi $x_n \in U$. Za niz koji ima bar jednu granicu kažemo da je konvergentan.

2. NEPREKIDNA PRESLIKAVANJA

Definicija 12. Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori. Kažemo da je preslikavanje f iz X u Y *neprekidno* ako je $f^{-1}[U]$ otvoren u X za svaki otvoren skup U iz Y.

Lema 13. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori. Preslikavanje f iz X u Y je neprekidno ako i samo ako je $f^{-1}[F]$ zatvoren u X za svaki zatvoren skup F iz Y.*

Definicija 14. Ako su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori, $x \in X$ i f preslikavanje iz X u Y, kažemo da je funkcija f neprekidna u tački x ako za svaku okolinu V tačke $f(x)$ postoji okolina U tačke x takva da je $f[U] \subset V$.

Lema 15. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori. Preslikavanje f iz X u Y je neprekidno ako i samo ako je neprekidno u svakoj tački skupa X.*

Definicija 16. Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori. Kažemo da je preslikavanje f iz X u Y *homeomorfizam* ako i samo ako je f neprekidna bijekcija i f^{-1} neprekidno preslikavanje.

Ako su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ homeomorfni topološki prostori, to zapisujemo $X \cong Y$.

Teorema 17. *Neka su $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathcal{O}')$ i $(Z, \mathcal{O}'')$ proizvoljni topološki prostori, a $f : X \to Y$ i $g : Y \to Z$ neprekidna preslikavanja. Tada je i kompozicija $g \circ f : X \to Z$ neprekidno preslikavanje.*

Teorema 18. *Neka su $(X, \mathcal{O})$, $(Y, \mathcal{O}')$ i $(Z, \mathcal{O}'')$ topološki prostori. Ako je $X \cong Y$ i $Y \cong Z$, onda je $X \cong Z$.*

Definicija 19. Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i $x \in X$. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ *sekvencijalno neprekidno* u tački x ako i samo ako za svaki niz $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u X važi: ako je x granica niza $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$, onda je $f(x)$ granica niza $\langle f(x_n) : n \in \mathbb{N} \rangle$.

Teorema 20. *Ako je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna u tački $x \in X$, onda je i sekvencijalno neprekidna u x.*

Definicija 21. Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i neka je f preslikavanje iz X u Y. Kažemo da je f *otvoreno preslikavanje* ako je $f[U]$ otvoren u Y za svaki otvoren skup U u X. Kažemo da je f *zatvoreno preslikavanje* ako je $f[F]$ zatvoren u Y za svaki zatvoren skup F u X.

Teorema 22. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) f je homeomorfizam;
(2) f je otvoreno;
(3) f je zatvoreno.

3. Baza i podbaza topologije

Definicija 23. Neka je X neprazan skup. Kažemo da je funkcija $d : X^2 \to [0, \infty)$ *metrika* na skupu X ako za sve $x, y, z \in X$ važi:

(M1) $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$,
(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,
(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$,

Kažemo da je tada par (X, d) *metrički prostor*. Ako je $x \in X$ i $r > 0$, onda skup $L(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ nazivamo *otvorena lopta* u tački x sa poluprečnikom r.

Lema 24. *Neka je (X, d) metrički prostor, $x \in X$ i $r > 0$. Tada za proizvoljnu tačku $y \in L(x, r)$ postoji broj $r' > 0$ takav da je $L(y, r') \subset L(x, r)$.*

Teorema 25. *Ako je (X, d) metrički prostor, onda je $\mathcal{O} = \{U \subset X : (\forall x \in U)(\exists r > 0) L(x, r) \subset U\}$ topologija na X.*

Definicija 26. Neka je (X, d) metrički prostor. Za topologiju $\mathcal{O} = \{U \subset X : (\forall x \in U)(\exists r > 0) L(x, r) \subset U\}$ kažemo da je *indukovana* metrikom d.

Definicija 27. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kažemo da je $(X, \mathcal{O})$ *metrizabilan* ako postoji metrika d na skupu X takva da je $\mathcal{O}$ indukovana metrikom d.

Definicija 28. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kažemo da je kolekcija $\mathcal{B}$ podskupova skupa X *baza* topologije $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(B1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}$ su otvoreni skupovi;
(B2) Za svaki otvoren skup U postoji kolekcija $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ takva da je $\bigcup \mathcal{B}' = U$.

Teorema 29. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i neka je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$. Ako je $\mathcal{O}'$ neka druga topologija na skupu X i $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}'$, onda je $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.*

Teorema 30. *Neka je X neprazan skup. Kolekcija $\mathcal{B}$ podskupova skupa X je baza neke topologije na X ako i samo ako važe sledeća dva uslova:*

(BN1) $\bigcup \mathcal{B} = X$;

(BN2) Za svaka dva skupa U i V iz $\mathcal{B}$, i svaku tačku $x \in U \cap V$, postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subset U \cap V$.

Tada je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subset \mathcal{B}\} = \{U \subset X : (\forall x \in X)(\exists B \in \mathcal{B})\ x \in B \subset U\}$ i kažemo da je $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ generisana *bazom $\mathcal{B}$.*

Definicija 31. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kažemo da je kolekcija $\mathcal{P}$ podskupova skupa X *podbaza* topologije $\mathcal{O}$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(1) elementi kolekcije $\mathcal{P}$ su otvoreni skupovi,
(2) familija svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$ je baza topologije $\mathcal{O}$.

Teorema 32. *Neka je X neprazan skup i $\mathcal{P}$ kolekcija podskupova skupa X takva da je $\bigcup \mathcal{P} = X$. Tada važi:*

(1) Familija $\mathcal{B}$ svih konačnih preseka elemenata kolekcije $\mathcal{P}$ je baza neke topologije $\mathcal{O}$ na X, a $\mathcal{P}$ je njena podbaza.
(2) $\mathcal{O}$ je najmanja topologija na skupu X koja sadrži kolekciju $\mathcal{P}$.

Teorema 33. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i f preslikavanje iz X u Y. Neka je $\mathcal{B}$ baza, a $\mathcal{P}$ podbaza topologije $\mathcal{O}'$. Neka je $\mathcal{B}$ familija svih konačnih preseka podbaze $\mathcal{P}$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) Preslikavanje f je neprekidno;
(2) Za svako $B \in \mathcal{B}$, skup $f^{-1}[B]$ je otvoren u X;
(3) Za svako $P \in \mathcal{P}$, skup $f^{-1}[P]$ je otvoren u X.

4. Proizvod topoloških prostora

Definicija 34. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka su $X_1, \ldots, X_n$ neprazni skupovi. Kažemo da je

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle : x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n\}$$

proizvod skupova $X_1, \ldots, X_n$.

Teorema 35. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori sa bazama $\mathcal{B}$ i $\mathcal{B}'$. Tada je familija*

$$\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U \times V :\ U \in \mathcal{B},\ V \in \mathcal{B}'\}$$

baza neke topologije na $X \times Y$.

Teorema 36. *Neka je (X, d) metrički prostor. Metrika $d : X^2 \to \mathbb{R}$ je neprekidna funkcija.*

Aksioma izbora: Ako je $\{X_i : i \in I\}$ familija nepraznih skupova, onda postoji preslikavanje $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ takvo da je $f(i) \in X_i$ za sve $i \in I$.

Definicija 37. Neka je $\{X_i : i \in I\}$ familija nepraznih skupova. Kažemo da je

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{f : f \text{ je preslikavanje iz } I \text{ u } \bigcup_{i \in I} X_i, \text{ takvo da je } f(i) \in X_i \text{ za sve } i \in I\right\}$$

proizvod familije $\{X_i : i \in I\}$

Radi pojednostavljenja notacije, funkciju x koja je element proizvoda $\prod_{i \in I} X_i$ nekad označavamo i sa $x = \langle x_i : i \in I \rangle$. Primetimo da Aksioma izbora garantuje da je proizvod nepraznih skupova neprazan.

Definicija 38. Neka je $\prod_{i \in I} X_i$ familije nepraznih skupova. Za $j \in I$ kažemo da je preslikavanje π_j *projekcija* na X_j ako je $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ takvo da je $\pi_j(f) = f(j)$ za sve $f \in \prod_{i \in I} X_i$.

Projekciju ćemo uvek označavati kao u prethodnoj definiciji.
U nizovnoj notaciji, za $x = \langle x_i : i \in I \rangle \in \prod_{i \in I} X_i$ je $\pi_j(\langle x_i : i \in I \rangle) = x_j$.

Teorema 39. *Neka je I neprazan skup, a $\{(X_i, \mathcal{O}_i) : i \in I\}$ kolekcija topoloških prostora. Tada je kolekcija $\mathcal{P}$ svih podskupova skupa $\prod_{i \in I} X_i$ oblika $\pi_i^{-1}[U]$ za $i \in I$ i $U \in \mathcal{O}_i$, podbaza neke topologije na skupu $\prod_{i \in I} X_i$.*

Definicija 40. Neka su $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topološki prostori. Topologiju na $\prod_{i \in I} X_i$ generisanu podbazom

$$\mathcal{P} = \left\{\pi_i^{-1}[U] : \ i \in I, \ U \text{ je otvoren u } X_i\right\}$$

nazivamo *topologija proizvoda* ili *topologija Tihonova*.

Na proizvodu topoloških prostora uvek podrazumevamo topologiju proizvoda, osim kada je to drugačije naznačeno. Primetimo da ako su dati topološki prostori $(X_i, \mathcal{O}_i)$, za $i \in I$, onda je jedna baza topološkog proizvoda $\prod_{i \in I} X_i$ data sa $\mathcal{B} = \left\{\bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}[U_i] : \ K \subset I \ \wedge \ K \text{ je konačan } \wedge \ (\forall i \in K) \ U_i \text{ je otvoren u } X_i\right\}$.

Teorema 41. *Neka su $(X_i, \mathcal{O}_i)$, za $i \in I$, topološki prostori. Neka je $\langle x^n : n \in \mathbb{N}\rangle$ niz u prostoru $\prod_{i \in I} X_i$, gde je $x^n = \langle x_i^n : i \in I\rangle$ za $n \in \mathbb{N}$. Tačka $x = \langle x_i : i \in I\rangle$ je granica niza $\langle x^n : n \in \mathbb{N}\rangle$ ako i samo ako je za svako $i \in I$ tačka x_i granica niza $\langle x_i^n : n \in \mathbb{N}\rangle$.*

Teorema 42. *Neka su $(X_i, \mathcal{O}_i)$, za $i \in I$, topoški prostori. Tada:*

(1) Za svako $j \in I$, projekcija $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ je neprekidna otvorena sirjekcija.
(2) Ako je $(Y, \mathcal{O})$ topološki prostor, onda je preslikavanje $f : Y \to \prod_{i \in I} X_i$ neprekidno ako i samo ako je za svako $i \in I$ kompozicija $\pi_i \circ f : Y \to X_i$ neprekidna.

Teorema 43. *Neka su $(X_i, \mathcal{O}_i)$, za $i \in I$, topološki prostori. Neka je za $i \in I$, familija $\mathcal{B}_i$ baza topologije $\mathcal{O}_i$. Neka je $\mathcal{B}'$ kolekcija svih skupova oblika $\bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}[B_i]$ gde je $K \subset I$ konačan skup, a $B_i \in \mathcal{B}_i$ za sve $i \in K$. Tada je $\mathcal{B}'$ baza topologije Tihonova na $\prod_{i \in I} X_i$.*

Teorema 44. *Postoji neprekidna 1-1 funkcija iz $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ u $\mathbb{R}$.*

5. Druga aksioma prebrojivosti

Definicija 45. Kažemo da je skup X *prebrojiv* ako postoji bijekcija iz X na $\mathbb{N}$, a to označavamo $|X| = \aleph_0$.

Kažemo da je skup *najviše prebrojiv* ako je konačan ili prebrojiv, a to označavamo $|X| \leq \aleph_0$.

Kažemo da je skup X kardinalnosti *kontinuuma* ako postoji bijekcija iz X na $\mathbb{R}$, a to označavamo $|X| = \mathfrak{c}$.

Teorema 46 (Cantor)**.** *Neka je X skup. Ne postoji bijekcija iz X na $P(X)$.*

Lema 47 (Tarski)**.** *Neka je X skup i $h : P(X) \to P(X)$, takvo da je $h(A) \subset h(B)$ uvek kada je $A \subset B \subset X$. Tada postoji $Z \subset X$ takav da je $h(Z) = Z$.*

Teorema 48 (Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Neka su X i Y skupovi. Ako postoje 1-1 funkcija iz X u Y i 1-1 funkcija iz Y u X, onda postoji bijekcija iz X na Y.*

Teorema 49. *Prebrojiv skup ima prebrojivo mnogo konačnih podskupova.*

Teorema 50. *Prebrojiva unija prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Teorema 51. *Skup $P(\mathbb{N})$ je kardinalnosti kontinuuma.*

Definicija 52. Topološki prostor zadovoljava *II aksiomu prebrojivosti* ako i samo ako ima najviše prebrojivu bazu.

Teorema 53. *Topološki prostor ima prebrojivu bazu ako i samo ako ima prebrojivu podbazu.*

Teorema 54. *Ako topološki prostor zadovoljava II aksiomu prebrojivosti, onda je zadovoljava i svaki njegov potprostor.*

Teorema 55. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i f neprekidna otvorena sirjekcija iz X na Y. Ako prostor $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava II aksiomu prebrojivosti, zadovoljava je i prostor $(Y, \mathcal{O}')$.*

Teorema 56. *Neka je $(X_n, \mathcal{O}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, familija topoloških prostora. Ako sve topologije $\mathcal{O}_n$, $n \in \mathbb{N}$, imaju prebrojivu bazu, onda i topologija Tihonova na $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ima prebrojivu bazu.*

Teorema 57 (Lindelöf)**.** *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i neka je $\mathcal{B}$ njegova prebrojiva baza. Tada važi:*

(1) Ako je $\{U_i : i \in I\}$ familija otvorenih skupova, onda postoji prebrojiv $J \subset I$ da je $\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in J} U_i$.
(2) Ako je $\mathcal{B}_1$ neka baza topologije $\mathcal{O}$, onda postoji prebrojiva familija $\mathcal{B}_1' \subset \mathcal{B}_1$ koja je baza topologije $\mathcal{O}$.

6. Prva aksioma prebrojivosti

Definicija 58. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x \in X$. Kolekcija $\mathcal{B}(x)$ je *baza okolina* tačke x akko važe uslovi:

(BO1) Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x;
(BO2) Za svaku okolinu U tačke x postoji element B iz $\mathcal{B}(x)$ takav da je $B \subset U$.

Definicija 59. U topološkom prostoru važi *I aksioma prebrojivosti* akko svaka tačka ima najviše prebrojivu bazu okolina.

Teorema 60. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor koji zadovoljava I aksiomu prebrojivosti. Tada svaka tačka u X ima prebrojivu bazu okolina koja je opadajuća u odnosu na inkluziju.*

Teorema 61. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, neka je $A \subset X$ neprazan skup. Ako $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava I aksiomu prebrojivosti, onda je zadovoljava i potprostor $(A, \mathcal{O}_A)$.*

Teorema 62. *Ako topološki prostor zadovoljava II aksiomu prebrojivosti, onda zadovoljava i I aksiomu prebrojivosti.*

Teorema 63. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor sa I aksiomom prebrojivosti, $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostor, f preslikavanje iz X u Y, i $x \in X$. Tada je f neprekidna u tački x akko je sekvencijalno neprekidna u toj tački.*

7. Osnovni operatori u topološkim prostorima

Definicija 64. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$.
Kažemo da je $x \in X$ *unutrašnja* tačka skupa A ako je A okolina tačke x.
Kažemo da je $x \in X$ *spoljašnja* tačka skupa A ako je $X \setminus A$ okolina tačke x.
Kažemo da je $x \in X$ *rubna* tačka skupa A ako svaki otvoren skup koji sadrži x seče i A i $X \setminus A$.

Skup svih unutrašnjih tačaka skupa A označavamo $\operatorname{Int}(A)$ i zovemo *unutrašnjost* skupa A. Skup svih spoljašnjih tačaka skupa A označavamo $\operatorname{Ext}(A)$ i zovemo *spoljašnjost* skupa A. Skup svih rubnih tačaka skupa A označavamo $\partial(A)$ i zovemo *rub* skupa A.

Teorema 65. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za sve $A, B \subset X$ važi:*

(1) Unutrašnjost skupa A je najveći otvoren podskup skupa A.
(2) Skup A je otvoren ako i samo ako je $A = \operatorname{Int}(A)$.
(3) Iz $A \subset B$ sledi $\operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B)$, to jest Int je monoton operator.

Teorema 66. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za svako $A \subset X$ važi:*

(1) $\operatorname{Ext}(A) = \operatorname{Int}(X \setminus A)$.
(2) $X = \operatorname{Int}(A) \cup \partial(A) \cup \operatorname{Ext}(A)$ *i to je particija skupa X.*
(3) ∂A je zatvoren skup.
(4) $A \subset \operatorname{Int}(A) \cup \partial A$.

Definicija 67. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Kažemo da je $x \in X$ *tačka nagomilavanja* skupa A ako i samo ako svaka okolina tačke x ima neprazan presek sa $A \setminus \{x\}$.

Skup svih tačaka nagomilavanja skupa A označavamo A'.

Definicija 68. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$.

Zatvorenje skupa A u prostoru $(X, \mathcal{O})$ je skup svih tačaka u X čija svaka okolina ima neprazan presek sa A.

Zatvorenje skupa A onačavamo $\overline{A}$.

Teorema 69. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada za sve $A, B \subset X$ važi:*

(1) $\overline{A}$ je najmanji zatvoren nadskup skupa A.
(2) Skup A je zatvoren ako i samo ako je $A = \overline{A}$.
(3) ako je $A \subset B$, onda je $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(4) $\overline{A} = \operatorname{Int}(A) \cup \partial(A)$.

Teorema 70. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori. Preslikavanje f iz X u Y je neprekidno ako i samo ako je za svaki skup $A \subset X$ ispunjeno $f[\overline{A}] \subset \overline{f[A]}$.*

Teorema 71. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i neka je $X = F_1 \cup \cdots \cup F_k$ unija konačno mnogo zatvorenih skupova $F_1, \ldots, F_k$. Preslikavanje f iz X u Y je neprekidno ako i samo ako je $f \restriction F_i$ neprekidno za sve $i \leq k$.*

Teorema 72. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$. Ako je x granica nekog niza u A, onda je $x \in \overline{A}$.*

Teorema 73. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor sa prvom aksiomom prebrojivosti i $A \subset X$. Tada:*

(1) $x \in \overline{A}$ ako i samo ako postoji niz $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ u skupu A čija granica je tačka x.
(2) Skup A je zatvoren ako i samo ako svaka granica svakog niza iz A pripada skupu A.

Teorema 74. *Neka je $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora i neka su dati neprazni skupovi $A_i \subset X_i$, za $i \in I$. Tada u prostoru $\prod_{i \in I} X_i$ sa topologijom Tihonova važi:*

(1) Skup $\prod_{i \in I} \overline{A_i}$ je zatvoren;
(2) $\overline{\prod_{i \in I} A_i} = \prod_{i \in I} \overline{A_i}$;
(3) Ako su skupovi A_i, $i \in I$, zatvoreni, onda je $\prod_{i \in I} A_i$ zatvoren skup.

8. Separabilnost

Definicija 75. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kažemo da je skup D *gust* u X ako i samo ako je $\overline{D} = X$.

Teorema 76. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{O}$, i $D \subset X$. Skup D je gust u X akko ima neprazan presek sa svakim elementom baze $\mathcal{B}$. Specijalno, D je gust u X ako seče svaki otvoren skup u X.*

Definicija 77. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *separabilan* ako i samo ako postoji prebrojiv skup gust u X.

Teorema 78. *Ako topološki prostor zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti, onda je separabilan.*

Teorema 79. *Neka je (X, d) metrički prostor i neka je topologija $\mathcal{O}$ indukovana metrikom d. Tada $(X, \mathcal{O})$ zadovoljava drugu aksiomu prebrojivosti ako i samo ako je separabilan.*

Definicija 80. Neka je $(X, \mathcal{O})$ separabilan topološki prostor i $A \subset X$ otvoren. Tada je $(A, \mathcal{O}_A)$ separabilan.

Teorema 81. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori, i neka je f neprekidna sirjekcija iz X na Y. Ako je $(X, \mathcal{O})$ separabilan, onda je i $(Y, \mathcal{O}')$ separabilan.*

Teorema 82. *Neka su $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, topološki prostori i neka je za svako $i \in I$ skup D_i gust u X_i. Ako je $a \in \prod_{i \in I} X_i$ neki fiksiran element, onda je skup*

$$D = \left\{ x \in \textstyle\prod_{i \in I} X_i : \textit{postoji konačan } K \subset I \textit{ da } (\forall i \in K)\; x_i \in D_i \textit{ i } (\forall i \in I \setminus K)\; x_i = a_i \right\}$$

gust u prostoru $\prod_{i \in I} X_i$ sa topologijom Tihonova.

Separabilnost je prebrojivo multiplikativna osobina, tj. prebrojiv proizvod separabilnih prostora je separabilan.

9. Hausdorfovi prostori

Definicija 83. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je

- T_0 prostor akko za svake dve različite tačke x i y iz X postoji otvoren skup koji sadrži tačno jednu od njih.
- T_1 prostor akko za svaki par različitih tačaka x i y iz X postoji otvoren skup U koji sadrži x a ne sadrži y.
- T_2 prostor, ili *Hausdorfov* prostor, ako i samo ako za svake dve različite tačke x i y iz X postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $y \in V$.

Teorema 84. *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je T_1 ako i samo ako su svi jednoelementni podskupovi zatvoreni.*

Teorema 85. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i neka je f zatvorena neprekidna sirjekcija iz X na Y. Ako je $(X, \mathcal{O})$ T_1 prostor, onda je i $(Y, \mathcal{O}')$ T_1 prostor.*

Teorema 86. *U Hausdorfovom prostoru niz može da ima najviše jednu granicu.*

Teorema 87. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, i neka je $(Y, \mathcal{O}')$ Hausdorfov prostor. Ako su f i g neprekidna preslikavanja iz X u Y, onda je skup $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ zatvoren u X.*

Teorema 88. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$ neprazan skup. Tada:*

(1) Ako je $(X, \mathcal{O})$ T_1 prostor, onda je i $(A, \mathcal{O}_A)$ T_1 prostor.
(2) Ako je $(X, \mathcal{O})$ Hausdorfov prostor, onda je i $(A, \mathcal{O}_A)$ Hausdorfov prostor.

Teorema 89. *Neka je $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora.*

(1) Ako su prostori $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, T_1 prostori, onda je i $\prod_{i\in I} X_i$ sa topologijom Tihonova T_1 prostor.
(2) Ako su prostori $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, Hausdorfovi, onda je i $\prod_{i\in I} X_i$ sa topologijom Tihonova Hausdorfov.

10. Regularni i normalni prostori

Definicija 90. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je

- *Regularan* ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaki zatvoren skup $F \subset X$ koji je ne sadrži postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $F \subset V$.
- T_3 ako i samo ako je regularan T_1 prostor.
- *Normalan* ako i samo ako za svaka dva disjunktna zatvorena skupa F_1 i F_2, postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $F_1 \subset U$ i $F_2 \subset V$.
- T_4 ako i samo ako je normalan T_1 prostor.

Teorema 91. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\mathcal{P}$ podbaza topologije $\mathcal{O}$. Prostor $(X, \mathcal{O})$ je regularan ako i samo ako za sve $x \in X$ i sve $P \in \mathcal{P}$ koji sadrže x, postoji otvoren skup U takav da je $x \in U \subset \overline{U} \subset P$.*

Teorema 92. *Ako je $(X, \mathcal{O})$ T_3 prostor i $A \subset X$ neprazan, onda je i $(A, \mathcal{O}_A)$ T_3 prostor.*

Teorema 93. *Ako je $(X, \mathcal{O})$ T_4 prostor i $A \subset X$ neprazan zatvoren skup, onda je i $(A, \mathcal{O}_A)$ T_4 prostor.*

Teorema 94. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna zatvorena sirjekcija. Ako je $(X, \mathcal{O})$ normalan prostor, onda je i $(Y, \mathcal{O}')$ normalan prostor. Specijalno, ako je $(X, \mathcal{O})$ T_4 prostor, onda je i $(Y, \mathcal{O}')$ T_4 prostor.*

Teorema 95. *Neka je $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora. Ako su svi prostori $(X_i, \mathcal{O}_i)$ regularni, onda je i $\prod_{i\in I} X_i$ sa topologijom Tihonova regularan. Specijalno, ako su svi $(X_i, \mathcal{O}_i)$ T_3 prostori, onda je i $\prod_{i\in I} X_i$ takođe T_3.*

Teorema 96. *Svaki metrizabilan topološki prostor je T_4.*

11. Tice-Urisonova teorema

Teorema 97 (Urison). *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada je $(X, \mathcal{O})$ normalan ako i samo ako za svaka dva neprazna disjunktna zatvorena skupa $F_1, F_2 \subset X$, postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0, 1]$ takvo da je $f(x) = 0$ za sve $x \in F_1$ i $f(x) = 1$ za sve $x \in F_2$.*

Teorema 98 (Tietze). *Neka je $(X, \mathcal{O})$ normalan prostor i neka je $F \subset X$ zatvoren potprostor. Neka je f neprekidno preslikavanje iz F u $\mathbb{R}$. Tada postoji neprekidno preslikavanje ϕ iz X u $\mathbb{R}$, takvo da je $\phi(x) = f(x)$ za sve $x \in F$.*

Definicija 99. Za topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ kažemo da je

- *Kompletno regularan* ako i samo ako za svaku tačku $x \in X$ i svaki zatvoren skup $F \subset X$ koji je ne sadrži postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0, 1]$ takvo da je $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$ za sve $y \in F$.
- $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor ako i samo ako je kompletno regularan T_1 prostor.

Teorema 100. *Ako je $(X, \mathcal{O})$ $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor i $A \subset X$ neprazan skup, onda je i $(A, \mathcal{O}_A)$ $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor.*

Teorema 101. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, i neka je $\mathcal{P}$ neka podbaza topologije $\mathcal{O}$. Tada je $(X, \mathcal{O})$ kompletno regularan ako i samo ako za sve $x \in X$ i sve $P \in \mathcal{P}$ koji sadrže x, postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$, takva da je $f(x) = 0$ i $f(y) = 1$ za sve $y \in X \setminus P$.*

Teorema 102. *Neka je $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora.*

(1) Ako su prostori $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, kompletno regularni, onda je i $\prod_{i\in I} X_i$ kompletno regularan.
(2) Ako su prostori $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, $T_{3\frac{1}{2}}$ prostori, onda je i $\prod_{i\in I} X_i$ sa topologijom Tihonova $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor.

12. POVEZANOST

Definicija 103. Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ *povezan* ako i samo ako skup X ne može da se predstavi kao unija dva neprazna disjunktna otvorena skupa.

Teorema 104. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i neka je f neprekidna sirjekcija iz X na Y. Ako je $(X, \mathcal{O})$ povezan prostor, onda je i $(Y, \mathcal{O}')$ povezan prostor.*

Definicija 105. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $A \subset X$ neprazan. Kažemo da je A povezan skup u $(X, \mathcal{O})$ ako i samo ako je $(A, \mathcal{O}_A)$ povezan prostor.

Teorema 106. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Neprazan skup $A \subset X$ je povezan ako i samo ako ne postoje $G, H \subset X$ koji imaju neprazan presek sa A i takvi da je $A \subset G \cup H$ i $\overline{G} \cap H = G \cap \overline{H} = \emptyset$.*

Teorema 107. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, neka su A_i, za $i \in I$, povezani skupovi, i neka je $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Tada:*

(1) Ako postoji $j \in I$ takvo da je $\overline{A_i} \cap A_j \neq \emptyset$ ili $A_i \cap \overline{A_j} \neq \emptyset$ za sve $i \in I$, onda je A povezan.
(2) Ako je $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, onda je $(A, \mathcal{O}_A)$ povezan topološki prostor.

Teorema 108. *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je povezan akko su svake dve tačke $x, y \in X$ elementi nekog povezanog skupa.*

Teorema 109. *Neka je A povezan skup u topološkom prostoru $(X, \mathcal{O})$. Neka je $A \subset B \subset \overline{A}$. Tada je B povezan skup.*

Teorema 110. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $\sim$ binarna relacija na skupu X data sa: $x \sim y$ ako i samo ako postoji povezan skup $A \subset X$ koji sadrži tačke x i y. Tada je $\sim$ relacija ekvivalencije, i ako je C_x klasa ekvivalencije tačke x, onda je C_x zatvoren skup i najveći povezan skup koji sadrži tačku x. Klase ekvivalencije C_x zovemo komponente povezanosti.*

Definicija 111. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $x, y \in X$ proizvoljne različite tačke. Neprekidno preslikavanje $\varphi : [0, 1] \to X$ takvo da je $\varphi(0) = x$ i $\varphi(1) = y$ je *put* od tačke x do tačke y. Kažemo da je $(X, \mathcal{O})$ *putno povezan* ako postoji put između svake dve različite tačke x i y iz X.

Teorema 112. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori, i neka je f neprekidna sirjekcija iz X na Y. Ako je $(X, \mathcal{O})$ putno povezan, onda je i $(Y, \mathcal{O}')$ putno povezan.*

Teorema 113. *Svaki putno povezan topološki prostor je povezan.*

Teorema 114. *Proizvod konačno mnogo povezanih prostora je povezan prostor.*

Teorema 115. *Proizvod proizvoljne familije povezanih topoloških prostora je povezan.*

13. KOMPAKTNOST

Definicija 116. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *kompaktan* ako i samo ako za svaku familiju otovrenih skupova $\mathcal{U}$ takvu da je $\bigcup \mathcal{U} = X$ postoji konačna familija $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ takva da je $\bigcup \mathcal{V} = X$.

Teorema 117. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i neka je f neprekidna sirjekcija iz X na Y. Ako je $(X, \mathcal{O})$ kompaktan, onda je i $(Y, \mathcal{O}')$ kompaktan.*

Definicija 118. Familija $\mathcal{A} \subset P(X)$ ima *svojstvo konačnog preseka* (SKP) ako je $\bigcap \mathcal{A}' \neq \emptyset$ za sve konačne $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$.

Teorema 119. *Topološki prostor je kompaktan akko svaka kolekcija zatvorenih skupova sa SKP ima neprazan presek.*

Definicija 120. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kažemo da je $A \subset X$ *kompaktan skup* ako je $(A, \mathcal{O}_A)$ kompaktan.

Teorema 121. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ kompaktan topološki prostor i $F \subset X$ zatvoren. Tada je F kompaktan skup.*

Teorema 122. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ Hausdorfov prostor i $A \subset X$ kompaktan skup u $(X, \mathcal{O})$.*

(1) Ako je $x \in X \setminus A$, onda postoje disjunktni otvoreni skupovi U i V takvi da je $x \in U$ i $A \subset V$.
(2) Skup A je zatvoren u $(X, \mathcal{O})$.

Teorema 123. *Svaki kompaktan Hausdorfov prostor je T_4.*

Definicija 124. Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori i neka je f preslikavanje iz X u Y. Kažemo da je f *potapanje* ako i samo ako je f homeomorfizam izmedju $(X, \mathcal{O})$ i $(f[X], \mathcal{O}'_{f[X]})$.

Teorema 125. *Neprekidno preslikavanje f iz kompaktnog u Hausdorfov prostor je zatvoreno. Specijalno, ako je f još i 1-1, onda je potapanje; a ako je dodatno f i bijekcija, onda je homeomorfizam.*

14. Teorema Tihonova

Definicija 126. Neka je X neprazan skup. Kažemo da je $\mathscr{F} \subset P(X)$ *filter* na skupu X ako i samo ako

(Fi1) $\emptyset \notin \mathscr{F}$ i $X \in \mathscr{F}$;
(Fi2) ako $A, B \in \mathscr{F}$, onda i $A \cap B \in \mathscr{F}$;
(Fi3) ako je $A \in \mathscr{F}$ i $A \subset B \subset X$, onda je $B \in \mathscr{F}$.

Kažemo da je filter $\mathscr{F}$ na skupu X *neglavni* ako i samo ako $\bigcap \mathscr{F} = \emptyset$.

Teorema 127. *Neka je X neprazan skup i neka $\mathscr{A} \subset P(X)$ ima SKP. Tada postoji filter $\mathscr{F}$ na X takav da je $\mathscr{A} \subset \mathscr{F}$.*

Definicija 128. Kažemo da je filter $\mathscr{U}$ na skupu X *ultrafilter* ako za svaki filter $\mathscr{F}$ na X, iz $\mathscr{U} \subset \mathscr{F}$ sledi $\mathscr{U} = \mathscr{F}$.

Teorema 129. *Filter $\mathscr{U}$ na skupu X je ultrafilter akko za svaki $A \subset X$ važi da je $A \in \mathscr{U}$ ili $X \setminus A \in \mathscr{U}$.*

Teorema 130. *Svaka familija $\mathscr{A} \subset P(X)$ koja ima SKP, sadržana je u nekom ultrafilteru.*

Teorema 131. *Neka je f sirjektivno preslikavanje iz skupa X na skup Y i $\mathscr{U}$ ultrafilter na X. Tada je $\mathscr{V} = \{f[A] : A \in \mathscr{U}\}$ ultrafilter na skupu Y.*

Teorema 132. *Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je kompaktan ako i samo ako za svaki ultrafilter $\mathscr{U} \subset P(X)$ postoji tačka $x \in X$ čija svaka okolina pripada $\mathscr{U}$.*

Teorema 133 (Tihonov)**.** *Proizvod proizvoljne kolekcije kompaktnih topoloških prostora je kompaktan prostor.*

15. Borel-Lebegova teorema

Definicija 134. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Kažemo da je $(X, \mathcal{O})$:

- *sekvencijalno kompaktan* ako i samo ako svaki niz u skupu X ima konvergentan podniz.
- *prebrojivo kompaktan* akko svaki beskonačan prebrojiv podskup skupa X ima tačku nagomilavanja.

Teorema 135. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Tada važi:*

(1) Ako je $(X, \mathcal{O})$ kompaktan, onda je prebrojivo kompaktan.
(2) Ako je $(X, \mathcal{O})$ sekvencijalno kompaktan, onda je prebrojivo kompaktan.

Definicija 136. Neka je (X, d) metrički prostor i $\varepsilon > 0$. Svaki konačan skup $K \subset X$, takav da je

$$X = \bigcup_{x \in K} L(x, \varepsilon)$$

zovemo ε-mreža. Prostor (X, d) je *totalno ograničen* ako i samo ako za svaki broj $\varepsilon > 0$ ima ε-mrežu.

Definicija 137. Neka je (X, d) metrički prostor i $\{U_i : i \in I\}$ njegov otvoren pokrivač. Broj $\delta > 0$ je *Lebegov broj* ovog pokrivača ako i samo ako je svaki skup $A \subset X$ dijametra manjeg od δ podskup nekog skupa U_i.

Teorema 138 (Lebesgue)**.** *Neka je (X, d) sekvencijalno kompaktan metrički prostor. Tada:*

(1) Prostor (X, d) je totalno ograničen;
(2) Za svaki otvoreni pokrivač skupa X postoji Lebegov broj;
(3) Prostor (X, d) je kompaktan.

Teorema 139 (Borel - Lebesgue)**.** *Neka je (X, d) metrički prostor. Tada su ekvivalentni sledeći uslovi:*

(1) Prostor (X, d) je kompaktan;
(2) Prostor (X, d) je prebrojivo kompaktan;
(3) Prostor (X, d) je sekvencijalno kompaktan.

Teorema 140. *Svaki kompaktan metrički prostor je separabilan.*

16. TEOREMA O DIJAGONALNOM PRESLIKAVANJU

Definicija 141. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, i neka je $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora. Neka je $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, familija preslikavanja. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to \prod_{i\in I} Y_i$ dato sa

$$f(x) = \langle f_i(x) : i \in I \rangle\,, \quad \text{za sve } x \in X,$$

dijagonalno preslikavanje odredjeno familijom preslikavanja $\{f_i : i \in I\}$. Označavamo ga $\Delta_{i\in I} f_i$.

Teorema 142. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora. Neka je $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, familija neprekidnih preslikavanja. Tada je i dijagonalno preslikavanja $\Delta_{i\in I} f_i$ neprekidno.*

Definicija 143. Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor, i neka je $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora. Neka je $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, familija preslikavanja. Kažemo da familija preslikavanja $\{f_i : i \in I\}$:

- *razdvaja tačke* u X akko za svake dve različite tačke $x, y \in X$ postoji $i \in I$ takvo da je $f_i(x) \neq f_i(y)$.
- *razdvaja tačke i zatvorene skupove* u X akko za sve $x \in X$ i sve zatvorene skupove $F \subset X$ koji ne sadrže x, postoji $i \in I$ takvo da $f_i(x) \notin \overline{f_i[F]}$.

Teorema 144. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora. Neka je $f_i : X \to Y_i$, $i \in I$, familija preslikavanja. Ako je $(X, \mathcal{O})$ T_0 prostor, a familija preslikavanja $\{f_i : i \in I\}$ razdvaja tačke i zatvorene skupove u X, onda ova familija razdvaja tačke u X.*

Teorema 145. *Neka su $(X, \mathcal{O})$ i $(Y, \mathcal{O}')$ topološki prostori, i neka je $f : X \to Y$ neprekidna injekcija, takva da familija $\{f\}$ razdvaja tačke i zatvorene skupove u X. Tada je preslikavanje f potapanje.*

Teorema 146. *Neka je $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor i $(Y_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora. Neka je $f_i : X \to Y_i$, za $i \in I$, familija neprekidnih preslikavanja koja razdvaja tačke i koja razdvaja tačke i zatvorene skupove. Tada je dijagonalno preslikavanja $\Delta_{i\in I} f_i$ potapanje.*

17. UNIVERZALNI PROSTORI

Definicija 147. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je *nuladimenzionalan* ako i samo ako je T_2 i ako postoji baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{O}$ koja se sastoji od skupova koji su istovremeno i zatvoreni i otvoreni.

Teorema 148. *Neka je $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, familija topoloških prostora. Ako su svi prostori $(X_i, \mathcal{O}_i)$, $i \in I$, nuladimenzionalni, onda je i $\prod_{i\in I} X_i$ sa topologijom Tihonova nuladimenzionalan.*

Teorema 149. *Svaki T_0 prostor sa prebrojivom bazom može da se potopi u kub Aleksandrova $\mathbb{A}^{\mathbb{N}}$.*

Teorema 150. *Svaki nuladimenzionalan prostor sa prebrojivom bazom može da se potopi u Kantorov kub $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, pa zato i u interval $[0,1]$.*

Teorema 151. *Svaki $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor sa prebrojivom bazom može da se potopi u Hibertov kub $[0,1]^{\mathbb{N}}$.*

Teorema 152. *Ako su $(X_n, \mathcal{O}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, metrizabilni topološki prostori, onda je i $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ metrizabilan.*

Teorema 153 (Urison). *Svaki $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor sa prebrojivom bazom je metrizabilan.*

LITERATURA

[1] Ryszard Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989.
[2] Miloš Kurilić. *Osnovi opšte topologije*. Prirodno-matematički fakultet Novi Sad, 1998.

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET, UNIVERZITET U NOVOM SADU.
Email address: borisha@dmi.uns.ac.rs