доказ: G - асоцијативан

$x, y, z \in f(G)$

$(xy)z = (f(a)f(b))f(c)$

$= f(a*b)f(c)$

$= f((a*b)*c) = f(a*(b*c)) = f(a)f(b*c) = f(a)(f(b)f(c))$

$= x(yz)$

Полугрупа

Полугрупа = асоцијативни групоид

$a, b, c \in S$

$(ab)c = a(bc)$

Полугрупа са јединицом = моноид

$(S, \cdot, 1)$ неутрални

пр. • $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$

0, 1

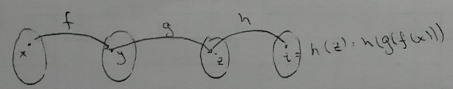
• $(\mathcal{P}(A), \cup)$, $(\mathcal{P}(A), \cap)$

$\emptyset$, A

најбитнији пр.

• $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$



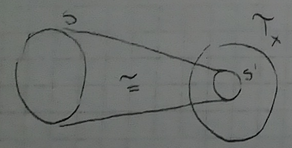
$h(z) = h(g(f(x)))$

$f, g, h: A \to A$ трансформације скупа A

$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

$T_A = (A^A, \circ, id_A)$

↳ ии моноид трансформација на A



потапање = хомоморфизам 1-1

Теорема репрезентације полугрупа

Свака полугрупа ≅ некој полугрупи трансформација

доказ. I Свака полугрупа? се може потопити у моноид

S - моноид ✓

S - није моноид S^1

	1	a	b	c	..
1	1	a	b	c	..
a	a				
b	b				
c	c				

* сами смо измислили 1 ис треба проверити да ли важи асоц. и даље

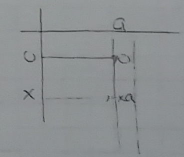
$(xy)z = x(yz)$

II Сваки моноид S се може потопити у T_X за неки скуп $\underline{X}$

$X = S$

$\rho_a : S \to S$

$\rho_a(x) = xa$ - десна транслација (узме оригинал и помножи га са десна)



$\psi : S \to T_S$

$\psi(a) = \rho_a$ — ово је хомоморф који је „1-1"

$\psi(a) = \psi(b)$

$\rho_a = \rho_b$

⇓

$\rho_a(1) = \rho_b(1)$

$1 \cdot a = 1 \cdot b$

$\underline{\underline{a = b}}$

$\rho_{ab}(x) = x(ab)$ ... $\psi(ab) = \rho_{ab} = \rho_a \circ \rho_b = \psi(a) \circ \psi(b)$

$= (xa)b$

$= \rho_b(\rho_a(x))$

$= (\rho_a \circ \rho_b)(x)$

Полугрупе речи

X - алфабет

реч $= (x_1, x_2, \dots, x_n)$ (i, g, o, r)

$x_1 x_2 \dots x_n$ igor

λ - празна реч ( )

X^*, $X^+ = X^* \setminus \{\lambda\}$

$u = x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$

$v = x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_n}$

$uv = x_{i_1} \dots x_{i_n} x_{j_1} \dots x_{j_n}$

анаволимилована · анаволимилована

конкатенација (лат.)

$\left.\begin{array}{l}(X^+, \cdot) \text{ - полугрупа} \\ (X^*, \cdot, \lambda) \text{ - моноид}\end{array}\right\}$ речи

Полугрупе - наставак

$T_X = (X^+, \circ, id_X)$

$(X^+, \cdot)$ - свака група је хомоморфна слика ове
(ова је шеф. остале су бледе копије)

(T) S - полугрупа, X - алфабет, $f: X \to S$
Постоји јединствен хомоморфизам полугрупа $\bar{f}: X^+ \to S$
који проширује f у следећем смислу

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & S \\ (X^+) \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

инјективно пресликавање - слово у низ (реч) дужине 1

слободна алгебра
(за већ одређени алгебарски [illegible])

доказ. За произвољну реч $x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_n} \in X^+$ дефинишемо:

$$\bar{f}(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = \underbrace{f(x_{i_1}) \dots f(x_{i_n})}_{\text{налази се у } S}$$

$$\bar{f}(x_{i_1} \dots x_{i_n}) = \bar{f}(x_{i_1}) \dots \bar{f}(x_{i_n}) = f(x_{i_1}) \dots f(x_{i_n})$$

$$\bar{f}(x_{i_1} \dots x_{i_n} \cdot y_{j_1} y_{j_2} \dots y_{j_k}) = [f(x_{i_1}) \dots f(x_{i_n})][f(y_{j_1}) \dots f(y_{j_k})] =$$

$$= \bar{f}(x_{i_1} \dots x_{i_n}) \cdot \bar{f}(y_{j_1} \dots y_{j_k})$$

пошто је полуг. асоц. онда можемо да ставимо заграде како хоћемо

$$\underline{\underline{\bar{f}(uv) = \bar{f}(u) \cdot \bar{f}(v)}}$$

* Уопштени асоцијативни закон *

деф t - групоидни терм $a(((ab)c)(ca))$

$w(t)$ - основна реч терма t

= реч која се добија брисањем свих заграда из t

(T) t_1, t_2 - два групоидна терма $w(t) = aabcca$

Ако $w(t_1) = w(t_2)$ онда закон

$t_1 = t_2$ важи у свим полугрупама

(гл) $\overline{t}$ терм који се добија од $w(t)$ дописавањем свих заграда „на лево" $(((ab)c)d)$ - пример за a,b,c,d t_1 t_2

Свака полугрупа задовољава закон

$$t = \overline{t}$$

доказ. Индукција по $|w(t)|$ $\boxed{a}\boxed{((ab)c)(ca))}$ t_1 t_2

1) $|w(t)| = 1$ ... ок!

2) пп. $t : |w(t)| = n \geq 2$

пп. $\left\{ \begin{array}{l} \text{за све терме } t_1,\ |w(t_1)|<n \\ \text{тврђење важи} \end{array} \right.$

$t = t_1 t_2$

Инд. пп. $w(t_1) = x_1 \dots x_m$

$w(t_2) = y_1 \dots y_k$

$t_1 = ((\dots(x_1x_2)x_3)\dots)x_m$ $\overline{t_1}$

$t_2 = ((\dots(y_1y_2)y_3)\dots)y_k$

$t = t_1 \cdot t_2 = \underbrace{((\dots(x_1x_2)x_3)\dots)x_m}_{A}\underbrace{(((\dots(y_1y_2)y_3)\dots)y_{k-1})}_{B}y_k)$

$= A(By_k) = (AB)y_k$

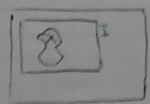
$|w(AB)| = m+k-1 = n-1$ $= ((((\dots(x_1x_2)x_3)\dots)x_m)y_1)y_2\dots)y_{k-1})y_k = \overline{t}$

* Идеали у полугрупама *

деф. $I \subseteq S$ је леви идеал ако за све $s \in S$ и $a \in I$ важи $sa \in I$ | краће $SI \subseteq I$

Десни идеал $I \subseteq S$, $\forall s \in S, \forall a \in I : as \in I$ | краће $IS \subseteq I$

ИДЕАЛ = ЛЕВИ И ДЕСНИ ИДЕАЛ



лема. $S^1X = X \cup SX$ је најмањи леви идеал од S који садржи X

доказ. $I \supseteq X$ - леви идеал

$I \supseteq \underline{SX}$

S^1X јесте леви идеал

$b \in S^1X \to b = \overset{\in S}{s} \cdot \overset{\in X}{a}$

$t \in S$ $tb = \underset{\underset{S^1}{\uparrow}}{\underline{(ts)}}\overset{\in X}{a} \in S^1X$

Дакле, аналогно

XS^1 - десни идеал генерисан са X

S^1XS^1 - двострани -||-

Специјално, кад је $X = \{a\}$ (главни идеал)

S^1a - леви идеал генерисан са a

aS^1 - десни -||-

S^1aS^1 - двострани -||-

Гринове релације $a,b \in S$ генерализација дељивости

$a \mathcal{R} b \leftrightarrow aS^1 = bS^1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \in bS^1 \\ b \in aS^1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (\exists x,y \in S^1)\ a = bx \wedge b = ay$

$a \mathcal{L} b \leftrightarrow S^1a = S^1b \Leftrightarrow (\exists u,v \in S^1)\ a = ub \wedge b = va$

$a \mathcal{J} b \leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1 \Leftrightarrow (\exists x,y,u,v \in S^1)\ a = xby \wedge b = uav$

$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$

$\mathcal{D} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}\ (= \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}) \dots$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{J} \arrow[d, dash] & \\ & \mathcal{D} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \mathcal{R} \arrow[dr, dash] & & \mathcal{L} \arrow[dl, dash] \\ & \mathcal{H} & \end{tikzcd}$$

-! * у пракси увек буде исто али постоји контрапример

пр. $a \leq_{\mathcal{R}} b$

X^+ $u,v \in X^+$

$u \mathcal{R} v$ $u = vx$

$\underline{v = uy}$ за неке $x,y \in X^+$

$u = uyx \to x,y$ су празне речи

$\underline{u = v}$

$u \mathcal{L} v \Leftrightarrow u = v$

$u \mathcal{J} v \Leftrightarrow u = v$ $\mathcal{D}$, $\mathcal{H}$ - тривијалне (једнакост)

SmartLines

$E(S) = \{e \in S \mid e^2 = e\}$

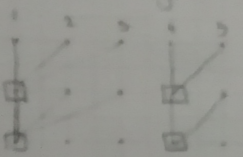
$f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$f \cdot f \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix} = f$

Т. $f \in T_X$ је идемпотент $\Leftrightarrow \forall x \in \operatorname{im} f: f(x) = x$

доказ: $f(\underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{im} f}) = f(x)$ — на сликама слике f се понаша као идентичко пресликавање

* начин визуелизације



лема: $S \ni a$

1° $R_a \ni e$ — идемпотент
↳ лева јединица у R_a

доказ: $b \in R_a \begin{cases} a = bx \\ b = ay \end{cases} \exists x, y \in S^1$

$e \in R_a \Rightarrow a = ez$

$\underline{eb} = eay = \underbrace{e\,ez}y = ezy = ay = b$

~~2° у свакој R класи може бити највише 1 идемпотент~~

~~доказ: $e_1, e_2 \in R_a$ $\boxed{e_1} e_2 = e_2$ тада је~~ $\boxed{e_1\ e_1\ e_1\ \ e_2}$ $e_1 e_2 = e_2$

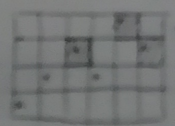
3° $L_a \ni e$
↳ десна јединица у L_a

5° $e \in H_a \Rightarrow e$ је двострана јединица у H_a

6° у свакој H класи највише један идемпотент

доказ: $e_1, e_2 \in H_a$

$e_2 = e_1 e_2 = e_1$



SmartLines

Грина релације у T_X Т. $f, g: X \to X$

(1) $f \mathcal{R} g$ акко $\ker f = \ker g$

(2) $f \mathcal{L} g$ акко $\operatorname{im} f = \operatorname{im} g$

(3) $f \mathcal{J} g$ акко $|\operatorname{im} f| = |\operatorname{im} g|$

ранг f = ранг g — број елемената у слици

доказ.

(1) $\underline{f = g \cdot h_1}$ $g = f \cdot h_2 \Rightarrow \ker f \subseteq \ker g$

$\ker g \subseteq \ker f$ — што се лепи код g мора бити лепљено и код f

$(\Rightarrow)$ $(x, y) \in \ker g$

$g(x) = g(y)$

$f(x) = h_1(g(x)) = h_1(g(y)) = f(y)$

$(\Leftarrow)$ $\ker g \subseteq \ker f$

$h_1(x) = \begin{cases} x & x \notin \operatorname{im} g \\ f(z) & x \in \operatorname{im} g \end{cases}$

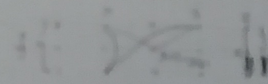
$z: g(z) = x$

Зашто је свеједно које z ћемо да узмемо?

нпр. z_1, z_2 $g(z_1) = x = g(z_2)$

$(z_1, z_2) \in \ker g \subseteq \ker f$

$f(z_1) = f(z_2)$



$f = g \cdot h_1$

$\boxed{h_1(g(x)) = f(x)}$

(2) $\boxed{f = h_2 \cdot g \Rightarrow \operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} g}$ $g = h_2 \cdot f$

$(\Rightarrow)$ $y \in \operatorname{im} f$

$y = f(x) = g(\underline{h_2(x)})$

$\Rightarrow y \in \operatorname{im} g$

SmartLines

за све $z \in \operatorname{im} f$

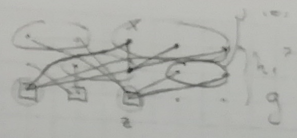
изаберемо по једно

$y_z \in g^{-1}(z)$

$h_1(x) = y_z$ ако $f(x) = z$

$g(h_1(x)) = g(y_z)$ где је z такво да $f(x) = z$

$= z = f(x)$

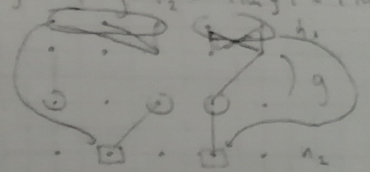


□ - слике од g

○ - слике од h
хоћемо да буду неке слике од g

Размисли како би направили h_1 и h_2

$f = h_1 \circ g \circ h_2 \Leftrightarrow |\operatorname{im} f| \leq |\operatorname{im} g|$



○ - слика од g

идеја доказа за (⇒) ∎

$a \in S$ - регуларан

$\exists x \in S \quad a = axa$

S - регуларна сваки њен ел. регуларан

Т 1) $a \in S$ регуларан $\Rightarrow ax, xa \in E(S)$, $a \mathcal{R} ax$, $a \mathcal{L} xa$

2) $a \mathcal{R} e \Rightarrow a$ регуларан

3) $a \mathcal{L} f \Rightarrow a$ регуларан

доказ 1) $a = axa \ /x$

$ax = axax = (ax)^2$

$ax = a \cdot x$

$a = ax \cdot a$

$a \mathcal{R} ax$

2) $a = es \Rightarrow ea = a$

$e = at$ $\quad a = ea = ata$

Закључак:

1) X^+ није регуларна полугрупа

нема рег елемената

нема чак ни идемпотената

2) $\mathcal{T}_X$ $f \mathcal{R} e$

увек регуларна полугрупа!