

1. Data je funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

- a) Proveriti da li je f neprekidna na svom domenu.
- b) Naći parcijalne izvode prvog reda u $(0, 0)$.
- c) Ispitati diferencijabilnost funkcije f na njenom domenu.

2. Da li funkcija $u = u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ koja zadovoljava jednačinu

$$u_{xx} + u_x u_{xy} + u_y u_{yy} = 1,$$

može imati lokalni maksimum? Obrazložiti odgovor.

3. Neka je C kriva koja leži u preseku paraboloida $z = x^2 + y^2 + xy$ i cilindra $x^2 + y^2 = 1$. Naći sve tačke krive C u kojima je tangentni vektor paralelan (x, y) -ravni.

1. Izračunati zapreminu tela ograničenog cilindrom $z = 9 - y^2$, koordinatnim ravnima i ravni $3x + 4y = 12$.

2. Izračunati

$$\iint_S y^2 z \, dx dy + xz \, dy dz + x^2 y \, dx dz$$

po spoljnoj strani zatvorene površine koja se nalazi u prvom oktantu a sastoji se iz obrtnog paraboloida $z = x^2 + y^2$, cilindra $x^2 + y^2 = 1$ i odgovarajućih delova koordinatnih ravni.

3. Naći masu luka krive $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ od tačke koja odgovara vrednosti $t = 0$ do proizvoljne tačke krive, ako je gustina, ρ , u svakoj tački krive obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja te tačke od koordinatnog početka, i u tački $(1, 0, 1)$ njena je vrednost 1, tj. $\rho(1, 0, 1) = 1$.

4. U uv -ravni dat je četvorougao sa temenima $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 3)$, $D(1, 3)$. Preslikavanje uv -ravni u xy -ravan je dato jednačinama

$$x = u^2 - v^2, \quad y = 2uv. \quad (1)$$

a) Naći sliku četvorougla $ABCD$ u xy -ravni.

b) Izračunati integral $\iint_P xy \, dx dy$ koristeći smenu (1), gde je $P = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1. Data je funkcija

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\ln(x^2 + y^2)$$

- a) Naći neprekidno produženje F funkcije f .
 - b) Ispitati neprekidnost parcijalnih izvode prvog reda funkcije F .
 - c) Ispitati diferencijabilnost funkcije F .
2. Pokazati da su nad nekom okolinom tačke $(1, 1)$ sistemom

$$u + v = x + y \qquad y \sin v = x \sin u$$

implicitno definisane funkcije u i v i naći njihove Tejlorove polinome prvog stepena u $(1, 1)$.

3. Naći najdužu liniju nivoa funkcije $f(x, y) = \sqrt{2x^2 + y^2}$ koja seče (dodiruje) ravansku krivu (piriform) $x^4 + y^2 - x^3 = 0$. Skicirati traženu liniju nivoa i piriform.

Napomene: Svaki zadatak vredi po 10 poena. Izrada ovog dela popravka traje 90min.

1. Izračunati zapreminu tela ograničenog paraboloidom $z = x^2 + y^2$ i ravni $z = x + y$.

2. Izračunati

$$\iint_S yz \, dx \wedge dy + xz \, dy \wedge dz + xy \, dz \wedge dx$$

po spoljnoj strani zatvorene površine koja se nalazi u prvom oktantu a sastoji se iz dela cilindra $x^2 + y^2 = R^2$ i odgovarajućih delova ravni $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $z = H$.

3. Sila je usmerena prema koordinatnom početku, a intenzitet joj je obrnuto proporcionalan odstojanju njene napadne tačke od (x, y) -ravni. Izračunati rad koji se izvrši pod dejstvom ove sile pri pomeranju tačke duž prave $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ od tačke $M(a, b, c)$ do tačke $N(2a, 2b, 2c)$.